КВАНТ
ЖУРНАЛ

1972

1 - 12

НОМЕР
1

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

1
ЯНВАРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 Дебют Гаусса *С. Г. Гиндикин*
12 Как получают низкие температуры *А. К. Кикоин*
20 Испытания на правдоподобие *Г. Д. Балк, М. Б. Балк*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

26 Опыты с маятниками *Г. Л. Коткин*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

33 Применение неравенства Буняковского — Коши к решению некоторых задач *В. К. Смышляев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

36 Задачи М121—М125; Ф123—Ф127
39 Решения задач М77—М83; Ф89—Ф91

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

46 Иррациональные уравнения *А. М. Григорьев*
50 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

52 Прочтите эту книгу *В. И. Березин, М. Л. Смолянский*
58 Введение в физику низких температур *Ю. М. Чернышев*
60 Популярная книга для любителей астрономии *И. Е. Евгеньев*

ИНФОРМАЦИЯ

61 Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте
66 Заочная математическая школа
68 Физико-математическая школа при МИИТе *А. Л. Садовский*
70 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ *(3 стр обл.)*

СМЕСЬ

25 Числовой треугольник
31 Кроссворд МФТИ
32 Кардиоида
38 Построение правильного 17-угольника
65 Несколько задач по тригонометрии
Коротко об экспоненте *(4 стр. обл.)*

Карл Фридрих Гаусс (1803 г.)

Дебют Гаусса

С. Г. Гиндикин

В школе на уроках геометрии рассматривается задача о построении правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки. Легко построить правильный четырехугольник-квадрат. Совсем просто строится правильный треугольник и почти так же правильный шестиугольник (его сторона равна радиусу описанной около него окружности). Более хитрое дело — построение правильного пятиугольника.

Научившись строить указанные многоугольники, легко перейти к построению правильных 8-угольника, 10-угольника, 12-угольника, 16-угольника, 20-угольника. Несколько более трудно построить правильный 15-угольник.

Все эти задачи умели решать еще в древней Греции. Однако, несмотря на все усилия самых замечательных греческих геометров, никому из них не удалось построить ни правильного семиугольника, ни правильного девятиугольника; не удавалось осуществить построения правильного p-угольника ни для какого простого p, отличного от 3 и 5. Две тысячи лет никто не мог продвинуться в решении этой проблемы. В 1796 году Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) доказал возможность построения правильного 17-угольника при помощи циркуля и линейки.

В течение нескольких последующих лет Гаусс полностью решил проблему построения правильных n-угольников циркулем и линейкой, выяснив, в частности, что такое построение невозможно при $n = 7, 9, 11, 13$.

В этой статье рассказывается о построении правильного семнадцатиугольника. Главная трудность, ожидающая читателя, связана не с тем, что ему потребуются какие-то новые сведения (все они не выходят за рамки школьного учебника), а с тем, что конструкция Гаусса использует целый ряд глубоких идей. Те читатели, которые не пожалеют труда, чтобы разобраться в них, будут вознаграждены, познакомившись с одним из самых удивительных открытий в истории математики.

> Упорство, с которым Гаусс следовал по избранному им пути, бурный юношеский натиск, с которым он каждый раз, не взирая ни на что, преодолевал самые крутые подъемы, ведущие к цели, все эти трудные испытания закаляли его силы и делали его способным после победы над препятствиями, уже устраненными другими, неудержимо идти вперед, опережая их. К этой хвале творческой самодеятельности я должен присоединить другое: похвалу юности. Я этим хочу сказать только то, что развитие математического гения подчиняется тем же законам, что и развитие всякой другой творческой способности. Для гениально одаренной личности годы юности, период, когда только что завершается процесс физического роста, являются эпохой великих, в изобилии сменяющих друг друга откровений; именно в эти годы гениально одаренный дух создает те новые ему одному принадлежащие ценности, которые им будут впоследствии преподнесены миру.
>
> *Ф. Клейн* *)

1 июня 1796 года в газете «Jenenser Intelligenzbbatt» появилась заметка следующего содержания.

> Всякому начинающему геометру известно, что можно геометрически (то есть циркулем и линейкой) строить разные правильные многоугольники, а именно, треугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник и те, которые получаются из каждого из них путем последовательного удвоения числа его сторон. Это было известно во времена Евклида, и, как кажется, с тех пор было распространено убеждение, что дальше область элементарной геометрии не распространяется: по крайней мере я не знаю удачной попытки распространить ее в эту сторону ...
>
> Тем более кажется мне заслуживающим внимания открытие, что, кроме этих правильных многоугольников, может быть геометрически построено множество других, например, семнадцатиугольник.

Под заметкой стоит подпись:

К. Ф. Гаусс из Брауншвейга, студент-математик в Гёттингене.

Это первое сообщение об открытии Гаусса. Прежде, чем подробно рассказывать о нем, освежим в памяти то, что «известно каждому начинающему геометру».

О построениях циркулем и линейкой

Предполагается заданным отрезок единичной длины. Тогда при помощи циркуля и линейки можно строить новые отрезки, длины которых получаются из длин уже имеющихся отрезков при помощи следующих операций: сложения (рис. 1*а*), вычитания (рис. 1*б*), умножения (рис. 1*в*), деления (рис. 1*г*) и извлечения квадратного корня (рис. 1*д*).

Последовательно проводя эти операции, при помощи циркуля и линейки можно построить любой отрезок, длина которого выражается через единицу конечным числом операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Такие числа называются квадратичными иррациональностями. Можно доказать, что никакие другие отрезки построить при помощи циркуля и линейки нельзя — но это уже тема специального разговора.

Построение правильных *n*-угольников

Задача о построении правильного *n*-угольника, как легко понять,

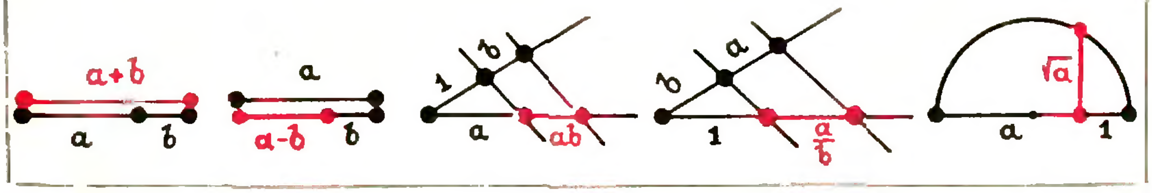


Рис. 1. а) б) в) г) д)

---

*) Феликс Клейн (1849—1925) — один из крупнейших математиков, работавших на рубеже XIX и XX столетий. Его собственные исследования тесно примыкают к работам Гаусса. Ф. Клейн был одним из крупнейших знатоков наследия Гаусса; в течение многих лет он руководил изданием собрания сочинений Гаусса.

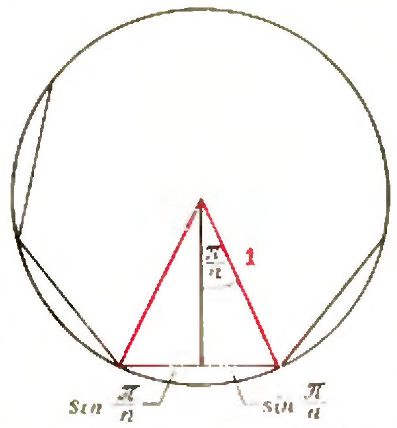


Рис. 2.

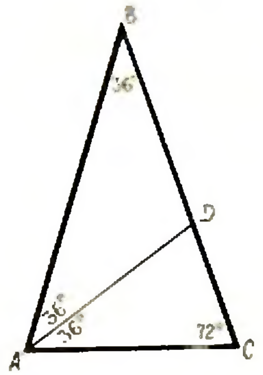


Рис. 3.

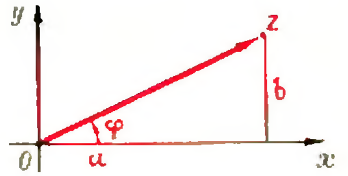


Рис. 4.

эквивалентна задаче о делении окружности радиуса 1 на n равных частей. Хорды дуг, на которые делится окружность, являются сторонами правильного n-угольника и длина каждой из них равна $2\sin\frac{\pi}{n}$ (рис. 2). Следовательно, при тех n, для которых $\sin\frac{\pi}{n}$ является квадратичной иррациональностью, можно построить правильные n-угольники циркулем и линейкой. Этому условию удовлетворяют, например, значения $n = 3, 4, 5, 6, 10$. Для $n = 3, 4, 6$ это хорошо известно.

Покажем, что $\sin\frac{\pi}{10}$ — квадратичная иррациональность. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (рис. 3), угол при вершине которого равен $\frac{\pi}{5} = 36°$, длина AB равна 1; пусть AD — биссектриса угла A. Тогда $x = AC = AD = BD = 2\sin\frac{\pi}{10}$. Имеем:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC};\quad \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x},\quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Это число является квадратичной иррациональностью; тем самым мы можем построить сторону правильного 10-угольника.

Далее, из возможности деления окружности на $p_1 p_2$ равных частей следует, конечно, возможность ее деления на p_1 равных частей (в частности, можно построить правильный пятиугольник). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Укажем два частных случая, когда оно все же справедливо.

1) Из возможности деления окружности на p равных частей следует возможность деления на $2^k p$ равных частей для любого k.

2) Если мы умеем делить окружность на p_1 равных частей и p_2 равных частей, где p_1 и p_2 взаимно просты (например, p_1, p_2 — различные простые числа), то окружность можно разделить на $p_1 p_2$ равных частей.

Несколько слов о комплексных числах

Нам нужно знать про комплексные числа совсем немного: операции над ними и геометрическую интерпретацию; все это содержится, например, в школьном учебнике Кочетковых. Напомним, что комплексному числу $z = a + ib$ ставится в соответствие точка с координатами (a, b) (рис. 4) и вектор с концом в этой точке и с началом в $(0, 0)$. Длина вектора $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется **модулем** данного числа. Комплексное число z можно записать в тригонометрической форме: $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; угол φ называется **аргументом** числа z.

Сложению комплексных чисел соответствует сложение векторов; при умножении модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда следует, что существует ровно n корней уравнения $z^n = 1$, обычно их обозначают через ε_k:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$
$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1. \qquad (1)$$

Легко показать, что концы векторов ε_k являются вершинами правильного n-угольника. Если мы докажем, что ε_k — квадратичные иррациональности (то есть что этим свойством обладают их вещественные и мнимые части), то тем самым мы покажем, что правильный n-угольник можно построить при помощи циркуля и линейки.

Правильные n-угольники и корни из единицы

Преобразуем уравнение $z^n = 1$:

$$z^n - 1 = (z-1)\times$$
$$\times(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1) = 0.$$

Получим два уравнения: $z = 1$ и

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет своими корнями ε_k при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В дальнейшем мы будем иметь дело с уравнением (2).

При $n = 3$ получаем уравнение $z^2 + z + 1 = 0$. Его корни: $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 5.)

При $n = 5$ дело обстоит сложнее, так как мы получаем уравнение четвертой степени

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \qquad (3)$$

имеющее четыре корня ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (рис. 6). Чтобы решить его, разделим сначала уравнение (3) на z^2. Получим

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0, \text{ или}$$
$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Сделаем подстановку $w = z + \frac{1}{z}$:

$$w^2 + w - 1 = 0. \qquad (4)$$

Отсюда

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Далее, можно найти и ε_k из уравнений

$$z + \frac{1}{z} = w_1, \quad z + \frac{1}{z} = w_2, \qquad (5)$$

но нам это не нужно; для построения достаточно знать, что $2\cos\frac{\pi}{5}$ (удвоенная вещественная часть ε_1) равно

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} = w_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Из того, что w_1 — квадратичная иррациональность следует, что ε_1 и ε_4 представляют собой квадратичные иррациональности. Для ε_2 и ε_3 рассуждаем в точности так же.

Итак, для $n = 5$ решение нашей задачи удалось свести к последовательному решению двух квадратных

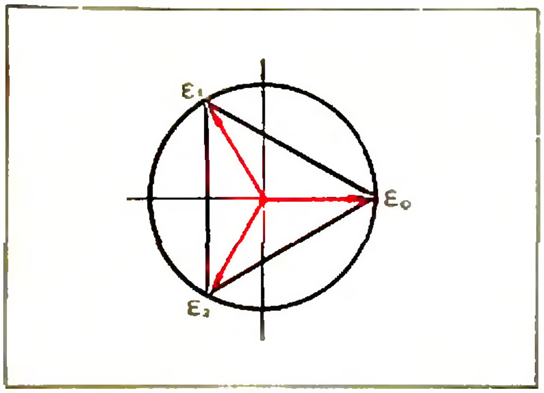


Рис. 5.

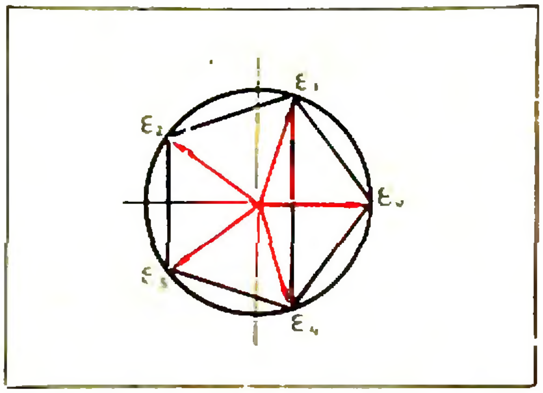


Рис. 6.

уравнений: сначала решается уравнение (4), корнями которого являются суммы $\varepsilon_1+\varepsilon_4$ и $\varepsilon_2+\varepsilon_3$ симметричных (см. рис. 6!) корней уравнения (3), а затем из уравнений (5) находятся и сами корни уравнения (3).

Именно таким путем Гауссу удалось осуществить построение правильного 17-угольника: здесь тоже выделяются группы корней, суммы которых находятся последовательно из квадратных уравнений. Но как искать эти «хорошие» группы? Гаусс находит удивительный путь ответить на этот вопрос...

Построение правильного 17-угольника

> **30 марта 1796 года наступает для него (Гаусса) день творческого крещения... Гаусс уже занимался с некоторого времени группировкой корней из единицы на основании своей теории «первообразных» корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника... Это событие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решение посвятить себя не филологии, а исключительно математике.**
>
> *Ф. Клейн*

Чтобы выявить найденные Гауссом скрытые «симметрии» в множестве корней 17-й степени из единицы и, пользуясь ими, разбить корни на нужные группы, введем новую нумерацию корней. Будем возводить 3 в последовательные степени 0, 1, 2, ... и каждый раз брать остаток от деления полученного числа на 17. Избавим читателя от проведения этих выкладок и в таблице приведем окончательные результаты. В первой строке стоят показатели k, а под ними остатки от деления 3^k на 17.

Таблица

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

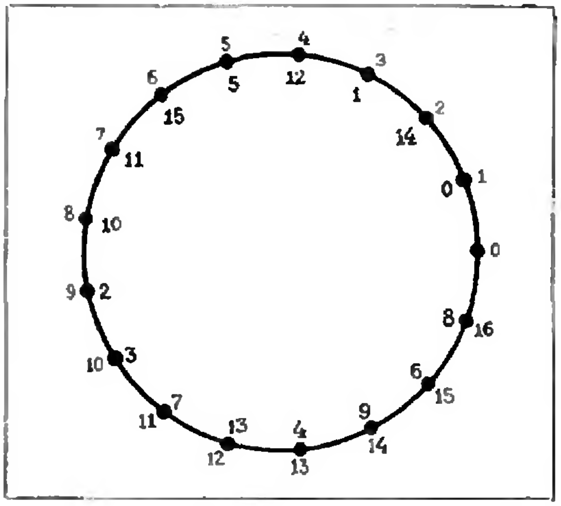


Рис. 7. Старые номера корней даны черным цветом, новые — красным.

Обратите внимание, что в нижней строке содержатся все числа от 1 до 16; затем 3^{16} дает остаток 1 и далее остатки периодически повторяются (докажите!)

Закономерность, подмеченная Гауссом, является частным случаем следующей теоремы: для всякого простого p существует такое число l, называемое первообразным корнем, что среди остатков от деления l^k на p встречаются все числа 1, 2, ..., $p-1$. Этот факт впервые отметил Эйлер (1707—1783), но смог доказать лишь Лежандр (1752—1833); другое доказательство получил Гаусс, но, вероятно, в 1796 году он еще не обладал общей теоремой, а обнаружил приведенный факт эмпирически, проводя вычисления для конкретных чисел. Это очень важное обстоятельство, не учитывая которого, трудно правильно понять природу ранних работ Гаусса.

Присвоим корню ε_k, $k=3^l$, новый номер, а именно l, который мы будем писать в квадратных скобках: $\varepsilon_k = \varepsilon_{[l]}$. Другими словами, вместо ε_k будем писать $\varepsilon_{[l]}$, где l — число, стоящее в таблице над k. При переходе от одной нумерации к другой удобно использовать рисунок 7, где по внешней стороне окружности написаны старые номера корней, а по внутренней — новые. В новых обозначениях легко возводить корни в степень: $(\varepsilon_{[l]})^{3^k} = \varepsilon_{[k+l]}$, но труднее перемножать. Оказывается, что именно в новой нумерации легко записать нужные группы корней. Эти группы показаны на рисунке 8 слева (в новой *нумерации*). *Рядом* выписаны те же группы в старой нумерации.

Понятно, что догадаться до такого *разбиения «случайно»* просто невозможно! Тем более невозможно было бы догадаться проделать те алгебраические преобразования уравнения $z^{16} + z^{15} + \ldots + z + 1 = 0$, те «замены неизвестных», которым соответствует наше разбиение корней.

Оказывается можно последовательно вычислять суммы корней, номера которых *стоят в одном прямоугольнике* на рисунке 8, переходя от большого прямоугольника к меньшему. При этом на каждом шаге приходится решать квадратные уравнения, коэффициенты которых вычислены на предыдущем шагу и являются квадратичными иррациональностями. В результате показывается, что $\cos \pi/17$ — квадратичная иррациональность. Следовательно, правильный семнадцатиугольник можно построить при помощи циркуля и линейки. Все эти вычисления собраны в приложении *1*.

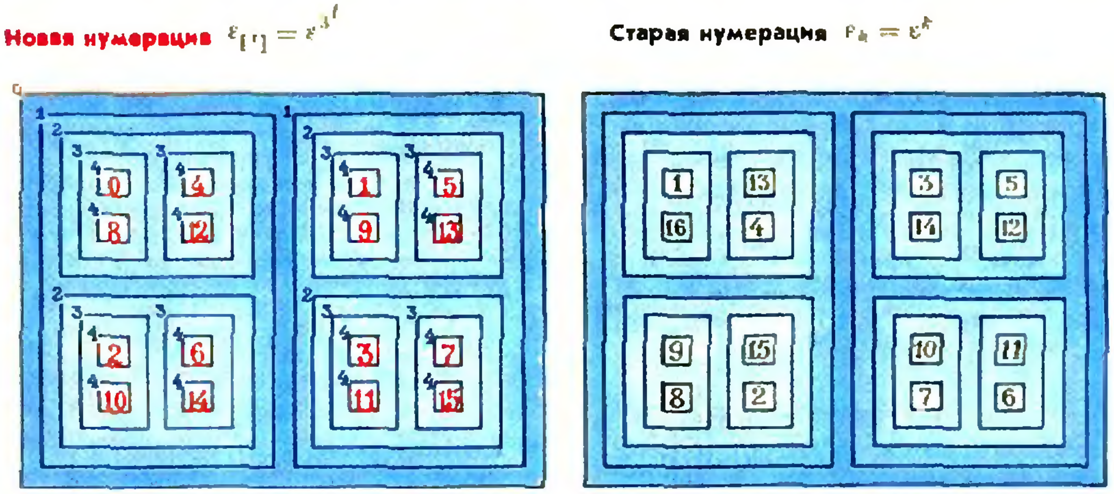
Окончательный ответ чрезвычайно поучителен: ясно, что угадать способ построения правильного семнадцатиугольника в рамках традиционных геометрических методов времени Евклида (подобие треугольников и т. п.) было практически невозможно; это открытие по существу принадлежит другой эпохе в математике. (Один из способов построения правильного семнадцатиугольника приведен на стр. 38.)

Какие же *идеи привели Гаусса к* решению? Об этом рассказывается в приложении 2, помещенном в конце статьи. Оно предназначено для *наиболее настойчивых* читателей.

Еще несколько слов

> **...Это открытие является собственно *лишь следствием* одной еще не совсем законченной большой теории. Как только она получит эту законченность, она будет предложена публике.**

Это — конец заметки Гаусса, которую мы начали цитировать выше. Прошло пять лет, прежде чем обещан-


Новая нумерация $\varepsilon_{[l]} = \varepsilon^{3^l}$

Старая нумерация $\varepsilon_k = \varepsilon^k$

Рис. 8. Суммы корней 17-й степени из единицы, номера которых записаны в этих прямоугольниках, последовательно находятся при решении квадратных уравнений (от больших прямоугольников к меньшим; число в вершине прямоугольника — номер шага).

ная большая теория увидела свет в третьей части знаменитых «Арифметических исследований» Гаусса. Надо сказать, что остальные части этого мемуара содержали не менее замечательные открытия. Вот какую характеристику дал этой работе Ф. Клейн:

> **В своих «Арифметических исследованиях» Гаусс в полном смысле этого слова создал современную теорию чисел и предопределил все ее дальнейшее развитие до нынешнего дня. Восхищение этим трудом возрастает еще больше, когда наблюдаешь, как Гаусс без всякого внешнего побуждения с самого начала черпает этот мир из самого себя.**

В 1801 году Гаусс обладал уже окончательным решением проблемы построения правильных многоугольников циркулем и линейкой. Прежде всего, если внимательно проанализировать решение для $n=17$, то видно, что фактически доказана возможность построения правильного n-угольника для всех простых n вида 2^k+1.

Можно доказать, что если 2^k+1 — простое число, то $k=2^l$ (докажите!).

Простые числа вида $2^{2^l}+1$ имеют свою историю. Эти простые числа принято называть числами Ферма (1601—1665). Ферма предполагал, что все числа такого рода являются простыми. Действительно, при $l=0$ получаем 3, при $l=1$ — 5, при $l=2$ — 17. Далее при $l=3$ получается 257, при $l=4$ — 65 537. Оба эти числа простые. При $l=5$ получается число 4 294 967 297. Ферма и у него не обнаружил простых делителей, но Эйлер выяснил, что Ферма «просмотрел» делитель 641. Сейчас известно, что числа Ферма являются составными при $l=6$, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73 (например, при $l=73$ имеется простой делитель $5\cdot 2^{75}+1$). Имеется гипотеза, что существует лишь конечное число простых чисел Ферма.

Что касается правильных n-угольников для составного n, то в силу обстоятельств, отмеченных в начале статьи, мы сразу получаем возможность искомого построения для всех $n>2$ вида $2^k p_1 p_2 \dots p_l$, где p_1, p_2, …, p_l — различные простые числа Ферма. Замечательно, что других n, для которых возможно построение, вообще не существует. Доказательство этого утверждения Гаусс не опубликовал.

Влияние работы Гаусса на дальнейшее развитие математики трудно переоценить. Но были и курьезы. Из результата Гаусса следует принципиальная возможность построения правильного n — угольника при $n=257$ и 65537, однако, вычисление корней, не говоря уже о явном описании построения, требует колоссальной, но совершенно автоматической работы. Замечательно, что нашлись желающие ее провести не только при $n=257$ (Ришело это сделал в сочинении из 80 страниц), но и при $n=65537$ (решение, полученное Гермесом, содержится в чемодане солидных размеров в Геттингене).

Мы рассказали о первом из великих открытий Гаусса, сделанном 30 марта 1796 года. С этого дня он начинает вести дневник, из которого мы узнаем, что уже 8 апреля он получил еще один замечательный результат… При этом, однако, он не переставал учиться.

> **С этой даты начинается дневник… Перед нашими глазами проходит гордый ряд великих открытий в арифметике, алгебре и анализе… И среди всех этих проявлений, мощных порывов гениального духа, можно сказать, трогательно находить до мелочей добросовестно выполненные ученические работы, от которых не освобождены и такие люди, как Гаусс. Мы находим здесь записи добросовестных упражнений в дифференцировании и непосредственно перед делением лемнискаты здесь встречаются совершенно банальные подстановки в интегралах, в которых должен упражняться любой студент.**
>
> *Ф. Клейн*

Гаусс успел сделать в своей жизни поразительно много. Современники называли его Королем математики. Но когда мы говорим о нем, перед нами прежде всего встает облик студента-математика из Геттингена, построившего правильный семнадцатиугольник циркулем и линейкой.

Памятник К. Ф. Гауссу в Брауншвейге.

Рассказывают, что Архимед завещал построить над своей могилой памятник в виде шара и цилиндра в память о том, что он нашел отношение объемов цилиндра и вписанного в него шара — 3:2. Подобно Архимеду Гаусс выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник. Это показывает, какое значение сам Гаусс придавал своему открытию. На могильном камне Гаусса этого рисунка нет, но памятник, воздвигнутый Гауссу в Брауншвейге, стоит на семнадцатиугольном постаменте, правда, едва заметном для зрителя.

Г. Вебер

Приложение 1.

Теперь мы докажем квадратичную иррациональность корней 17-й степени из единицы. Отметим, что $\varepsilon_k \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$ (если $k+l \geqslant 17$, то $k+l$ заменяется остатком от его деления на 17), $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$. Перенумеруем корни из единицы при помощи нашей таблицы, а именно, будем писать $\varepsilon_{[l]}$ вместо ε_k (см. формулу (1)), где l — число, стоящее в таблице над k. Разобьем корни на группы, как показано на рисунке 8. Мы будем находить суммы корней, номера которых стоят в одном прямоугольнике (рис. 8), переходя от большего прямоугольника к меньшему. Прежде всего заметим, что

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{16} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[1]} + \ldots + \varepsilon_{[15]} = -1.$$

(В этом можно убедиться, например, рассматривая это выражение как сумму геометрической прогрессии.) Итак, мы нашли сумму корней в самом большом прямоугольнике (№ 0).

Обозначим через $\sigma_{m,r}$ сумму $\varepsilon_{[k]}$ с теми k, которые дают остаток r при делении на m. Рассмотрим суммы корней, отвечающих следующим прямоугольникам (№ 1). Получаем

$$\sigma_{2,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[4]} + \ldots + \varepsilon_{[14]},$$
$$\sigma_{2,1} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[5]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}.$$

Ясно, что

$$\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[1]} + \ldots + \varepsilon_{[15]} = -1.$$

Можно показать, что

$$\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1} = 4\,(\varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[1]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}) = -4 \text{*)}.$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Виета, мы можем составить квадратное уравнение, корнями которого будут $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$:

$$x^2 + x - 4 = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Чтобы различить корни, воспользуемся рисунком 7. В каждую из сумм корни входят вместе со своими сопряженными. Ясно, что $\sigma_{2,0} > \sigma_{2,1}$ (в первом случае нужно сложить и удвоить вещественные части корней ε_1, ε_2, ε_4, ε_8, во втором — ε_3, ε_5, ε_6, ε_7). Итак,

$$\sigma_{2,0} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \quad \sigma_{2,1} = \frac{-\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Рассмотрим суммы корней, отвечающие следующим четырем прямоугольникам (№ 2) на рисунке 8:

$$\sigma_{4,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[4]} + \varepsilon_{[8]} + \varepsilon_{[12]},$$
$$\sigma_{4,1} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[5]} + \varepsilon_{[9]} + \varepsilon_{[13]},$$
$$\sigma_{4,2} = \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[6]} + \varepsilon_{[10]} + \varepsilon_{[14]},$$
$$\sigma_{4,3} = \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[7]} + \varepsilon_{[11]} + \varepsilon_{[15]}.$$

---

*) В этом можно убедиться, проводя непосредственные перемножения, учитывая, что $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$, причем удобно пользоваться рисунком 7. Однако в приложении 2 будет указан способ, как избежать этих утомительных выкладок.

Имеем: $\sigma_{4,0}+\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}$; $\sigma_{4,1}+\sigma_{4,3}=\sigma_{2,1}$. Можно показать далее, что $\sigma_{4,0}\times\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$, а значит, $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$ — корни уравнения: $x^2-\sigma_{2,0}x-1=0$. Решая это уравнение и учитывая, что $\sigma_{4,0}>\sigma_{4,2}$ (см. рис. 7), получаем после несложных преобразований

$$\sigma_{4,0}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right),$$

$$\sigma_{4,2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right).$$

Аналогично показывается, что

$$\sigma_{4,1}=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right),$$

$$\sigma_{4,3}=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{17}-1-\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right).$$

Переходим к заключительному этапу. Положим

$$\sigma_{8,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[8]}=\varepsilon_1+\varepsilon_{16},$$
$$\sigma_{8,4}=\varepsilon_{[4]}+\varepsilon_{[12]}=\varepsilon_4+\varepsilon_{13}.$$

Можно было бы рассмотреть еще шесть такого рода выражений, но нам они не потребуются, так как достаточно доказать квадратичную иррациональность $\sigma_{8,0}=2\cos\frac{2\pi}{17}$, что уже позволяет построить правильный семнадцатиугольник. Имеем $\sigma_{8,0}+\sigma_{8,4}=\sigma_{4,0}$; $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}=\sigma_{4,1}$; из рисунка 7 видно, что $\sigma_{8,0}>\sigma_{8,4}$, и потому $\sigma_{8,0}$ — больший корень уравнения $x^2-\sigma_{4,0}x+\sigma_{4,1}=0$, то есть

$$\sigma_{8,0}=2\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{4,0}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(\sigma_{4,0})^2-4\sigma_{4,1}}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1+\right.$$
$$\left.+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}.$$

Мы несколько преобразовали непосредственно получаемое выражение для $\sqrt{(\sigma_{4,0})^2-4\sigma_{4,1}}$; однако не будем утомлять читателя воспроизведением этих простых выкладок.

Итак, доказана квадратичная иррациональность $\cos\frac{2\pi}{17}$, а тем самым возможность построения правильного семнадцатиугольника при помощи циркуля и линейки. Мы не будем явно описывать весьма громоздкую процедуру построения. Заметим, что для того, чтобы убедиться в возможности построения, не было необходимости проводить явные вычисления; было достаточно убедиться, что на каждом шаге мы получаем квадратное уравнение, коэффициенты которого являются квадратичными иррациональностями.

Приложение 2.

Приведем соображения, позволившие Гауссу доказать квадратичную иррациональность корней 17-й степени из единицы.

Прежде всего, задача о корнях из единицы тесно связана с арифметикой остатков от деления на n (по модулю n)*). Действительно, если $\varepsilon^n=1$, то ε^k — также корень n-й степени из единицы, причем число ε^k зависит только от остатка от деления k на n. Положим $\varepsilon=\varepsilon_1$ (см. формулу (1)); тогда ε_k есть просто ε в степени k, поэтому $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l=\varepsilon_{k+l}$, где сумма берется по модулю n (остаток от деления на n); в частности, $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_{n-k}=\varepsilon_0=1$.

Задача 1. Если p — простое число и δ — любой комплексный корень p-й степени из единицы, отличный от единицы, то множество δ^k, $k=0, 1,\ldots, p-1$, содержит все корни p-й степени из единицы.

Указание. Нужно доказать, что в этом случае для всякого $0<m<p$ среди остатков от деления чисел km, $k=0, 1,\ldots, p-1$ на p содержатся все числа $0, 1,\ldots, p-1$.

Обозначим через T_k следующее преобразование (возведение в степень k): $T_k\varepsilon_l=(\varepsilon_l)^k=\varepsilon_{lk}$.

Задача 2. Докажите, что если p — простое, то каждое из преобразований T_k ($k=1, 2,\ldots, p-1$) осуществляет взаимно однозначное отображение множества корней на себя (то есть множество $\{T_k\varepsilon_0, T_k\varepsilon_1,\ldots,T_k\varepsilon_{p-1}\}$ совпадает с множеством всех корней $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_{p-1}\}$).

Задача 1 показывает, что для всякого $1\leqslant l\leqslant p-1$ множество $\{T_0\varepsilon_l, T_1\varepsilon_l,\ldots, T_{p-1}e_l\}$ совпадает с множеством всех корней. Из задач 1 и 2 следует такой вывод: *составим таблицу, в которой на пересечении k-й строки и l-го столбца стоит $T_k\varepsilon_l$, $1\leqslant k, l\leqslant p-1$ тогда в каждой строке и каждом столбце стоят все корни $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_{p-1}$ в некотором порядке без повторений.* Отметим, что $T_{p-1}\varepsilon_l=\varepsilon_{-l}=(\varepsilon_l)^{-1}$. Тем, кто знает определение группы, советуем проверить, что преобразования T_k образуют группу относительно умножения $T_k\cdot T_l=T_{kl}$.

Далее мы рассматриваем случай $p=17$. Будем говорить, что *множество корней M инвариантно относительно преобразования T_k, если $T_k\varepsilon_l\in M$ для всех $\varepsilon_l\in M$.*

---

*) Простейшие факты про арифметику остатков можно найти в журнале «Квант» № 5, 1970, стр. 27—33.

Относительно всех преобразований T_k инвариантно лишь множество всех корней $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{16}\}$.

Кардинальная догадка заключается в том, что группа корней тем «лучше», чем большее число преобразований оставляет эту группу инвариантной.

Введем для T_k еще одну нумерацию $T_{[l]}$, как это было сделано для ε_k: $T_{[l]} = T_k$, $k = 3^l$. В новых обозначениях

$$T_{[k]}\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{[k+l]}, \quad T_{[m]}(T_{[k]}\varepsilon_{[l]}) = T_{[m+k]}\varepsilon_{[l]}$$

(сумму в квадратных скобках надо брать по модулю 16). Читатель, конечно, обнаружит аналогию с переходом к логарифмам, что не удивительно, так как $\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{3^l}$.

Задача 3. Доказать, что если некоторое множество корней инвариантно относительно некоторого $T_{[k]}$, где k нечетно, то это множество инвариантно относительно всех преобразований $T_{[m]}$, то есть если оно не пусто, то совпадает с множеством всех корней.

Указание. Показать, если k нечетно, то существует такое m, что km дает при делении на 16 остаток 1.

С другой стороны, имеются две группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[k]}$ с четными k: корни $\varepsilon_{[l]}$ с четными l и корни с нечетными l. Их суммы мы обозначили через $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$.

Ясно, что $\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = -1$. *Исследуем* $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1}$. Это произведение является суммой попарных произведений $\varepsilon_{[k]}\varepsilon_{[l]}$, где k — четное, l — нечетное, каждое из которых является некоторым корнем $\varepsilon_{[m]}$, а всего — 64 слагаемых. Мы покажем, что среди них каждый из корней $\varepsilon_{[0]}, \varepsilon_{[1]}, \dots, \varepsilon_{[15]}$ встречается одинаковое число раз (четыре раза), а в результате $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1} = -4$. Воспользуемся тем, что преобразования $T_{[k]}$ сохраняют группы корней при k четном и переводят их одна в другую при k нечетном. Каждое слагаемое в $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1}$ однозначно представимо в виде $\varepsilon_{[m]}\varepsilon_{[m+r]}$, где $0 \leqslant m \leqslant 15$, $r = 1, 3, 5, 7$ (докажите!). Сгруппируем слагаемые с одинаковыми r. Полученные суммы будут иметь вид

$$\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + \varepsilon_{[1]}\varepsilon_{[r+1]} + \varepsilon_{[2]}\varepsilon_{[r+2]} + \dots + \varepsilon_{[15]}\varepsilon_{[r+15]} = T_{[0]}\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + T_{[1]}\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + \dots + T_{[15]}\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} = T_{[0]}\varepsilon_{[k]} + T_{[1]}\varepsilon_{[k]} + \dots + T_{[15]}\varepsilon_{[k]} = \varepsilon_{[0]} + \dots + \varepsilon_{[15]} = -1,$$

где $\varepsilon_{[k]} = \varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}$. Мы воспользуемся тем, что

$$T_{[m]}\varepsilon_{[k]} \cdot T_{[m]}\varepsilon_{[l]} = T_{[m]}(\varepsilon_{[k]}\varepsilon_{[l]}),$$

и уже упоминавшимися свойствами $T_{[m]}$.

Значения $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$ найдены в приложении 1.

Переходим к следующему шагу. Мы хотим ввести в рассмотрение новые, меньшие группы корней, инвариантные относительно каких-нибудь $T_{[k]}$. По аналогии с задачей 3 *можно показать, что при этом k обязательно* должно делиться на 4. Поэтому имеется четыре группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[4l]}$ и меньшие, чем уже рассмотренные; запишем суммы корней в каждой группе: $\sigma_{4,0}, \sigma_{4,1}, \sigma_{4,2}, \sigma_{4,3}$. Мы уже отмечали, что

$$\sigma_{4,0} + \sigma_{4,2} = \sigma_{2,0}; \quad \sigma_{4,1} + \sigma_{4,3} = \sigma_{2,1}.$$

Вычислим произведение $\sigma_{4,0} \cdot \sigma_{4,2}$; оно представляется в виде суммы 16 слагаемых вида $\varepsilon_{[4k]}\varepsilon_{[4l+2]}$. Каждое такое слагаемое однозначно записывается в виде

$$\varepsilon_{[2m]}\varepsilon_{[2m+2r]}, \quad r = 1, 3, \ m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Сгруппируем слагаемые с одним r и заметим, что $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[2]} = \varepsilon_1\varepsilon_9 = \varepsilon_{10} = \varepsilon_{[3]}$, $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[6]} = \varepsilon_1\varepsilon_{15} = \varepsilon_{16} = \varepsilon_{[8]}$. При $r = 1$ получаем сумму

$$T_{[0]}\varepsilon_{[3]} + T_{[2]}\varepsilon_{[3]} + \dots + T_{[14]}\varepsilon_{[3]} = \sigma_{2,1};$$

при $r = 3$ — сумму

$$\sum_k T_{[2k]}\varepsilon_{[8]} = \sigma_{2,0},$$

то есть $\sigma_{4,0} \cdot \sigma_{4,2} = \sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = -1$. Решая квадратные уравнения, мы нашли $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$.

На последнем шаге мы рассмотрим группы корней, инвариантные относительно $T_{[8]}$; их восемь. В частности, $\sigma_{8,0} + \sigma_{8,4} = \sigma_{4,0}$. Вычислим $\sigma_{8,0} \cdot \sigma_{8,4}$. Учитывая, что $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[4]} = \varepsilon_1\varepsilon_{13} = \varepsilon_{14} = \varepsilon_{[9]}$, получаем $\sigma_{8,0} \cdot \sigma_{8,4} = T_{[0]}\varepsilon_{[9]} + T_{[4]}\varepsilon_{[9]} + T_{[8]}\varepsilon_{[9]} + T_{[12]}\varepsilon_{[9]} = \sigma_{4,1}$. Это позволило найти $\sigma_{8,0} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$ и тем самым закончить решение.

А. К. КИКОИН

КАК ПОЛУЧАЮТ НИЗКИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Никто точно не знает, когда люди научились добывать огонь и искусственно нагревать тела до температуры выше окружающей среды. Во всяком случае, это случилось десятки тысяч лет тому назад, в эпоху, известную под названием каменного века.

А вот дата получения искусственного холода известна довольно точно. Будем условно считать, что низкие температуры — это температуры ниже тех, что естественным образом возникают при изменении погоды. Впервые такую низкую температуру (163° K, или —110° C) получил Фарадей в 1840 году. Это много холоднее самых лютых холодов Антарктиды (наинизшая зарегистрированная температура в Антарктиде — около —90° C).

Почему же искусственно создавать высокие температуры люди умеют с незапамятных времен, а искусственный холод им удалось создать лишь совсем недавно?

С одной стороны, это связано с тем, что в высоких температурах люди больше нуждались, чем в низких.

С другой стороны, возможной причиной «отставания» техники получения низких температур является то обстоятельство, что высокие (но не слишком) температуры получать несравненно проще, чем низкие. В самом деле, достаточно чиркнуть спичкой, чтобы получить температуру вчетверо более высокую, чем комнатная. А Фарадею для того, чтобы получить температуру только вдвое ниже комнатной, понадобилось создать далеко не простое устройство.

Это «неравноправие» способов получения высоких и низких температур не случайно. В нем находит отражение один из основных законов природы, так называемый второй закон термодинамики (напомним, что первый закон термодинамики — это закон сохранения энергии).

На первый взгляд кажется, что охладить какое-нибудь тело очень просто: нужно это тело привести в контакт с другим телом более низкой температуры. Тогда от охлаждаемого тела к холодному само собой будет переходить тепло, что и приведет к требуемому охлаждению; если есть лед, то нетрудно сделать и мороженое!

Но как быть, если тело нужно охладить до такой низкой температуры, что подходящего другого холодного тела, к которому само собой могло бы переходить тепло, не существует? Тогда, очевидно, такое холодное тело, или, как говорят, хладоагент нужно создать искусственно. Вот в этом и состоит задача техники получения холода. Однако при изготовлении хладоагента тоже необходимо обеспечить теплоотдачу от него к какому-то другому телу, но не более холодному, потому что такого тела нет, а более теплому, например, окружающей среде (воздуху, воде и т. п).

Прежде всего выясним, какая в этом таится трудность.

Порядок и беспорядок в веществе

Вспомним, что температура тела определяется энергией беспорядочного теплового движения его атомов и молекул. Понизить температуру — значит уменьшить беспорядок, царящий среди молекул.

Что же такое беспорядок? Если каждый предмет в вашей квартире всегда находится на определенном закрепленном за ним месте и найти его всегда легко, то вы поддерживаете в своей квартире порядок. Если же вещи кладутся куда попало, то найти их нелегко. В вашей квартире беспорядок.

Чем больше размеры вашей квартиры, тем больше времени вам потребуется для того, чтобы отыскать ту или иную вещь, если вещи равномерно разбросаны, — тем больший беспорядок в вашей квартире. Представьте себе, что вещи в комнате могут сами двигаться, меняя свое положение. Тогда найти их станет еще труднее, причем тем труднее, чем больше скорости их движения.

Этот житейский пример помогает нам понять, как определить, что такое порядок и беспорядок в молекулярном мире. Степень беспорядка определяется вероятностью обнаружить молекулу (или другую частицу) в каком-нибудь определенном состоянии, например, в определенной точке пространства.

Если имеется заданное количество частиц, равномерно распределенных в данном объеме, то вероятность обнаружения частицы в данной точке будет тем больше, чем медленнее движутся частицы, чем медленнее они меняют свое положение в заданном объеме. Но скорости молекул определяются температурой тела. Поэтому чем выше температура тела, тем больше степень беспорядка среди молекул, из которых оно состоит. Из предыдущего ясно также, что степень молекулярного беспорядка тем больше, чем больше объем, предоставленный частицам.

Таким образом, степень беспорядка зависит от двух факторов — от температуры тела и от его объема. Увеличение температуры при заданном объеме, так же как и увеличение объема при постоянной температуре, приводит к увеличению степени беспорядка среди молекул.

Оказывается, все процессы, которые происходят в природе, в замкнутой предоставленной себе системе (то есть в системе, состоящей из частиц, взаимодействующих друг с другом, но не с другими телами), проходят так, что степень беспорядка возрастает. И когда эта степень беспорядка достигает самого высокого значения, все процессы сами собой прекращаются. Наступает состояние, которое называется состоянием равновесия.

Представьте себе шарики двух цветов, расположенные в определенном порядке. Нужны были немалые старания, чтобы расположить шарики в правильной последовательности. Но достаточно легкого толчка, чтобы с трудом созданный порядок нарушился и шарики беспорядочно перемешались. И никакими толчками восстановить исходный порядок невозможно. Вероятность такого события ничтожно мала.

А вот пример уже из атомно-молекулярного мира. Бросив кусок сахара в воду, мы легко получим раствор, в котором молекулы сахара распределены по всему объему сосуда. Но сколько бы мы ни ждали, раствор никогда сам собой не разделится на воду и сахар. Для того чтобы получить сахар и воду отдельно, нужно затратить определенную энергию, нагрев раствор и испарив воду.

Физический смысл второго закона термодинамики и заключается в утверждении, что порядок и беспорядок в природе «неравноправны», что все сами собой идущие процессы установления равновесия сопровождаются ростом беспорядка. В нем и кроется причина того, что высокие температуры легче получать, чем низкие. При увеличении температуры тела (при сохранении его объема) увеличивается беспорядок. Охлаждать же тела — значит увеличивать порядок, то есть действовать, так сказать, «против природы».

Тем не менее охлаждать тела, оказывается, все-таки можно. Можно, следовательно, заставить тепло переходить не от теплого тела к холодному, а, напротив, от охлаждаемого тела к телам более теплым. Таким образом создают хладоагенты.

Беспорядок — физическая величина

Слова «порядок» и «беспорядок», которыми мы здесь пользовались, кажутся на первый взгляд какими-то ненаучными, взятыми из повседневной жизни. В действительности за этими словами скрывается физическое понятие настолько важное, что оно выражается специальной величиной. Эта величина, выражающая степень беспорядка или порядка (порядок — это просто отсутствие беспорядка), называется энтропией. Обозначают ее буквой S, а определяется она так: если к телу подводится или от него отводится некоторое количество тепла ΔQ, а абсолютная температура тела при этом равна T, то изменение энтропии ΔS определяется равенством

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Во всех процессах, которые происходят с телами, важна не энтропия, а именно изменение энтропии. (В этом отношении энтропия похожа на потенциальную энергию тела. Во всех задачах важна не сама потенциальная энергия, а ее изменение.)

Особый интерес представляет для нас случай, когда процесс происходит так, что к телу не подводится и от него не отводится тепло: $\Delta Q=0$. Такие условия можно обеспечить хорошей теплоизоляцией тела или быстрым проведением процесса, когда тепло не успевает перейти от одного тела к другому. Называются такие процессы адиабатными. Из выражения $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ следует, что при адиабатных процессах энтропия не меняется.

Адиабатное изменение объема

В технике искусственного получения холода нас интересуют главным образом процессы изменения объема тел, процессы их расширения и сжатия. Именно они играют здесь особенно важную роль.

Представим себе, что у нас имеется тело, которое мы расширяем или сжимаем адиабатно, то есть без подвода или отвода тепла. Мы уже знаем, что увеличение объема тела с данным количеством частиц приводит к увеличению степени беспорядка, то есть к увеличению энтропии. Но наш процесс адиабатный, при котором $\Delta Q=0$ и энтропия не меняется. Как же обеспечить постоянство энтропии при условии, что она возрастает благодаря увеличению объема? Если второе начало термодинамики правильно, то это возможно только в том случае, если при изменении объема тела происходит еще какой-то процесс, благодаря которому энтропия уменьшается ровно на столько же, на сколько она увеличивается из-за увеличения объема. Мы знаем, что энтропия изменяется при изменении температуры тела. Поэтому можно ожидать, что при адиабатном увеличении объема тела его температура будет уменьшаться. Так и происходит в действительности.

Таким образом, мы сразу получаем способ понижения температуры тела. Нужно данное тело адиабатно расширить, то есть увеличить его объем. Адиабатное расширение как раз и является одним из главных способов получения холода.

Одной из разновидностей расширения является испарение жидкости. Еще древние египтяне хранили напитки в пористых сосудах. Поры увеличивают поверхность испаряющейся жидкости и тем самым увеличивают скорость ее испарения. Испарение же приводит к охлаждению жидкости. Плохая теплопроводность материала стенок и большая скорость испарения обеспечивали адиабатность процесса испарения.

Таким образом, вопрос о способах искусственного охлаждения сводится к вопросу о том, что расширять и как расширять.

Что расширять?

Ясно, что твердые тела для расширения непригодны — они не могут сколько-нибудь заметно изменять свой объем. По тем же причинам непригодны и жидкости. Хотя увеличение объема жидкостей при их испарении и используется для их охлаждения, особенно низкие температуры таким образом получить нельзя, потому что, охлаждаясь, жидкость непременно в конце концов отвердевает. Так что наинизшая температура, которую можно получить при испарении жидкости, это температура ее отвердевания. А для веществ, жидких при комнатной температуре, температуры отвердевания не так уж низки.

Лучше всего использовать газы. Газы способны к неограниченному расширению, а если они к тому же предварительно сжаты до высокого давления, то и масса их достаточно велика и потому достаточно велика и теплоемкость этого газа. Для газов характерен и наибольший беспорядок в движении частиц. А так как наша задача — уменьшить беспорядок, то ясно, что лучше начинать с такого вещества, у которого беспорядок велик, чтобы было что уменьшать!

Итак, наиболее подходящим веществом для нашей задачи является газ. С другой стороны, конечный продукт, то есть готовый хладоагент, лучше всего иметь в виде жидкости: жидкость всегда создает хороший тепловой контакт с погруженным в нее телом. Поэтому техника низких температур часто (но не исключительно) сводится к сжижению того или иного газа.

Как известно, в жидкость может быть превращен любой газ. Но для каждого газа существует определенная температура, называемая критической температурой T_k, выше которой он не может быть обращен в жидкое состояние. Чтобы газ мог быть сжижен, его температура должна быть ниже T_k. Тогда для сжижения его нужно только сжать. А насколько сжать — это зависит от того, насколько его температура ниже T_k: чем она ниже, тем меньшее давление нужно для сжижения. Можно охладить газ настолько, чтобы он стал жидким при давлении в 1 атмосферу.

Для получения умеренного холода используются газы с высокими значениями T_k. Часто применяется, например, аммиак, у которого $T_k = 132{,}4^\circ$ С. В последнее время все шире используются так называемые фреоны — газы, получающиеся из углеводородов путем замещения в них водорода фтором, хлором или бромом. В домашних холодильниках, в частности, используется фреон-12 (CF_2Cl_2), у которого $T_k = 112{,}04^\circ$С.

Самые же низкие температуры получают сжижением газов, критические температуры которых много ниже комнатной. К ним относятся: кислород, у которого $T_k = -118{,}4^\circ$ С, азот с $T_k = -146{,}9^\circ$ С, водород с $T_k = -239{,}9^\circ$ С, и, наконец, гелий с самой низкой критической температурой в природе. У него $T_k = -267{,}91^\circ$ С.

Сжижать эти газы не так-то просто. Для этого их надо очень сильно охладить.

Как расширять?

Расширять газ можно по-разному. Наиболее «популярны» и чаще всего применяются два способа расширения.

Способ первый. Расширять лучше всего сжатый газ. Поэтому при любом способе расширения начинают с того, что газ сжимают при помощи специальной машины — компрессора — до давлений в десятки, а иногда и в сотни атмосфер. При этом газ нагревается по той же причине, по которой он охлаждается при расширении. Чтобы избежать нагрева газа (какой же смысл греть то, что нужно охлаждать?), газ после сжатия охлаждают проточной водой, которой и передается выделяющееся при сжатии тепло. Таким образом при сжатии обеспечивается постоянство температуры. На рисунке 1 показана схема установки для охлаждения по первому способу. Компрессор обозначен буквой *К*, а буквой *Т* обозначен теплообменник, в котором сжатый газ проходит через змеевик, омываемый проточной водой. Здесь газ восстанавливает свою первоначальную температуру. После этого он поступает в детандер *Д*, который представляет собой простой поршневой двигатель. Здесь газ, толкая поршень, расширяется адиабатно, совершая при этом механическую работу. Охлаждается он именно потому, что совершает работу. Ведь при адиабатном процессе расширения, когда тепло извне не подводится, работа может совершаться только за счет уменьшения кинетической энергии молекул газа.

После охлаждения в детандере газ попадает в холодильную камеру *Х*, где он используется для охлаждения любых помещенных в нее тел.

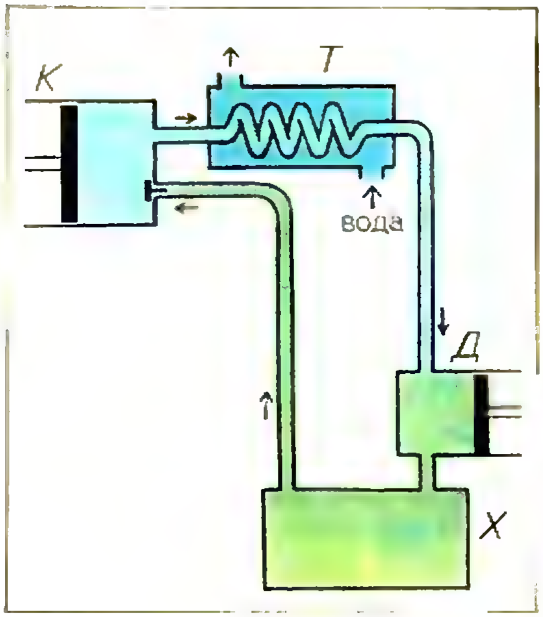


Рис. 1.

Отнимая у них тепло, газ нагревается и возвращается в компрессор, чтобы пройти весь цикл снова.

Мы видим, что действие установки сводится к тому, что газ отнимает тепло от охлаждаемых в холодильной камере тел и передает тепло воде в теплообменнике *Т*. Осуществляется, таким образом, передача тепла от холодного к теплому, то есть то, что «естественным» образом никогда не происходит. За это нарушение «естественного» хода вещей приходится, однако, «платить», и «платой» служит работа, совершаемая компрессором.

Детандерный способ отличается высоким эффектом охлаждения, но у него есть недостатки. Во-первых, это необходимость смазки в детандере, что при очень низких температурах создает некоторые трудности. Во-вторых, этот способ действует тем хуже, чем ниже температура. Наконец, в детандере неудобно доводить охлаждение до сжижения. По этим причинам детандерный способ часто применяют в комбинации с другим способом расширения.

Способ второй. Этот способ расширения отличается тем, что эффективность его с понижением температуры растет, так что он особенно удобен для получения самых низких температур.

В отличие от первого способа, здесь газ после компрессора *К* и теплообменника *Т* (рис. 2) направляется прямо к холодильной камере, но попадает туда через особый кран, называемый дросселем. Устроен дроссель так, что в нем гасится скорость газового потока (слово «дроссель» означает именно эту его особенность) и газ проходит через него настолько медленно, что давление как перед дросселем, так и после него остается все время постоянным: до дросселя оно такое, какое создается компрессором, а после дросселя оно равно, например, одной атмосфере.

Проходя через дроссель, газ не совершает работы — он не толкает поршень, не вращает турбину. Тем не менее, адиабатное расширение при

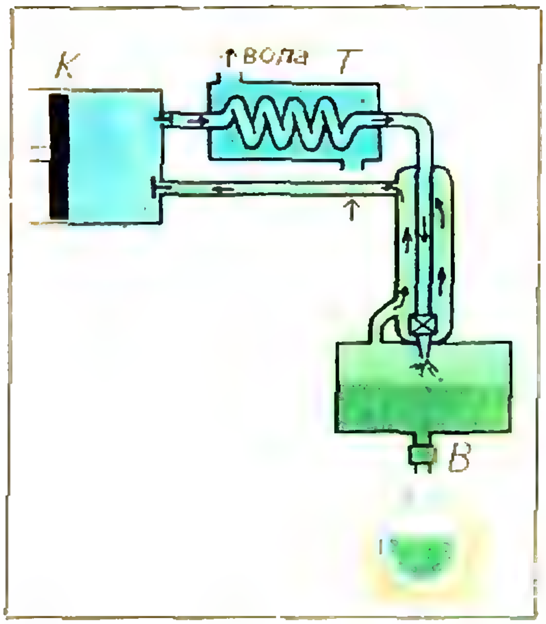


Рис. 2.

дросселировании приводит к охлаждению газа. Объясняется это тем, что молекулы газа взаимодействуют между собой. Когда при расширении газа молекулы удаляются друг от друга, производится работа против молекулярных сил, связывающих молекулы, и кинетическая энергия молекул, а, значит, и температура газа, понижается. Можно сказать, что и здесь совершается работа, но не против внешних сил, как в детандере, а против внутренних сил сцепления между молекулами.

Эффект охлаждения газа при дросселировании называется эффектом Джоуля — Томсона.

Для эффекта Джоуля — Томсона важно, что газ не идеален, то есть его молекулы взаимодействуют друг с другом на расстоянии, а не только при непосредственном «лобовом» столкновении. Идеальный газ при дросселировании не охлаждался бы. Его можно было бы охладить, только используя детандер

Как уже указывалось, охлаждение при дросселировании тем сильнее, чем ниже температура. При комнатной температуре, с которой приходится начинать, оно невелико. Для того чтобы, несмотря на это, достигнуть значительного охлаждения, прибегают к остроумному приему, сущность которого ясна из рисунка 2.

Труба, по которой сжатый газ поступает к дросселю, помещена в другую, более широкую трубу. Когда после дросселирования газ слегка охладится, он возвращается из холодильной камеры к компрессору по широкой трубе, охлаждая «по дороге» встречный сжатый газ. Поэтому следующая порция газа подойдет к дросселю более холодной. Пройдя через дроссель, газ еще больше охладится, а возвращаясь по внешней трубе, еще сильнее охладит встречный газ. Через некоторое время к дросселю подойдет уже настолько холодный газ, что дросселирование приведет к его сжижению, и в камере Х появится первая порция жидкости. Теперь по широкой трубе будет уходить холодный пар этой жидкости, продолжая охлаждать встречный газ.

Холодную жидкость, скопившуюся в холодильной камере, можно тут же использовать для охлаждения других тел. Иногда этим «другим» телом служит соляной раствор, который затем поступает к трубам, проложенным в прилавках магазинов, под площадкой искусственного катка и т. д. Но можно поступить и иначе: сжиженный газ слить через кран В в специальные сосуды, пригодные для хранения и транспортировки холодных жидкостей (сосуды Дьюара). Полученную таким образом жидкость можно использовать для охлаждения других тел в любом месте и в любое время. Обычно машины, в которых охлажденный газ или жидкость используются как хладоагент в холодильной камере, называются рефрижераторами. Машину же, предназначенную для выдачи жидкого продукта, называют ожижительной машиной.

Дросселирование — наиболее часто используемый способ охлаждения. Оно, в частности, используется и в домашних холодильниках.

Здесь необходимо сделать одно существенное дополнение. Дело в том, что дросселирование может приводить не только к охлаждению, но и к нагреванию газа. И для каждого газа существует определенная температура, так называемая температура инверсии эффекта Джоуля — Томсона (T_i), выше которой происходит именно нагревание. Это значит, что если желательно охлаждать газ дросселированием, то нужно позаботиться о том, чтобы газ был предварительно охлажден ниже температуры инверсии. Для большинства газов, включая азот и кислород, температура инверсии много выше комнатной, так что никакие трудности не возникают. Но у водорода и гелия она значительно ниже обычных температур: у водорода T_i равна 204° К, у гелия 40° К. Следовательно, при сжижении этих газов требуется их предварительное охлаждение, прежде чем можно будет приступить к дросселированию. Для этого можно использовать детандерный способ. Во многих установках для сжижения водорода и гелия используют сразу оба способа: в детандере газ охлаждают ниже T_i; дальнейшее охлаждение, вплоть до сжижения, достигается дросселированием. Комбинация этих методов применяется при сжижении и других газов.

Еще ближе к абсолютному нулю

Описанные выше способы охлаждения позволяют обратить в жидкость любые газы, включая и гелий. Гелий кипит при атмосферном давлении при температуре 4,2° К. Интенсивно откачивая испаряющийся гелий с помощью насоса, можно понизить давление паров над жидким гелием и тем самым понизить температуру кипения до 0,7° К, а если пользоваться более легким изотопом гелия, его температуру можно довести до 0,3° К. Более низкие температуры получить таким способом нельзя.

Как же добраться до температур в тысячные доли градуса?

Напомним, что понизить температуру — это значит уменьшить ту часть беспорядка, которая зависит от температуры. Для этого мы использовали газ, у которого беспорядок велик. Но ведь при температурах, близких к абсолютному нулю, степень беспорядка уже так мала, что уменьшать ее очень трудно. При таких температурах все вещества (кроме гелия) твердые, так что рассчитывать на адиабатное изменение объема нельзя. Значит, надо найти такие вещества, у которых даже при этих температурах еще существует беспорядок, зависящий не только от температуры и объема. И такие вещества физики нашли. Это некоторые сложные парамагнитные вещества.

Парамагнитное вещество — это вещество, содержащее частицы (атомы, ионы, молекулы), которые ведут себя как маленькие магнитики. Из-за теплового движения эти магнитики ориентированы совершенно беспорядочным образом. Правда, при низких температурах, когда тепловое движение очень ослаблено, силы взаимодействия между магнитиками могли бы заставить их расположиться правильным образом. Но если магнитики находятся на значительных расстояниях один от другого, то сил взаимодействия не хватает на это, и магнитный беспорядок сохраняется до самых низких температур. Так обстоит дело в очень сложных по составу парамагнитных солях, в которых, кроме магнитных частиц, есть много других, немагнитных, например в соли $2Ce(NO_3)_3 \cdot 3Mg(NO_3)_2 \cdot 24H_2O$ (цериево-магниевый нитрат). В этом веществе «магнитиками» являются только ионы церия Ce. Но на каждый ион церия приходится около 60 других, немагнитных атомов. «Магнитики» так сильно «разбавлены» немагнитными частицами, что беспорядок в ориентациях ионов Ce сохраняется даже при температуре ниже 1° К. Вот и нужное нам вещество: беспорядок в нем велик и вблизи абсолютного нуля!

Беспорядок в парамагнитном веществе может изменяться не только при изменении его температуры, но и при изменении его магнитного состояния. А магнитным состоянием вещества можно управлять точно так же, как

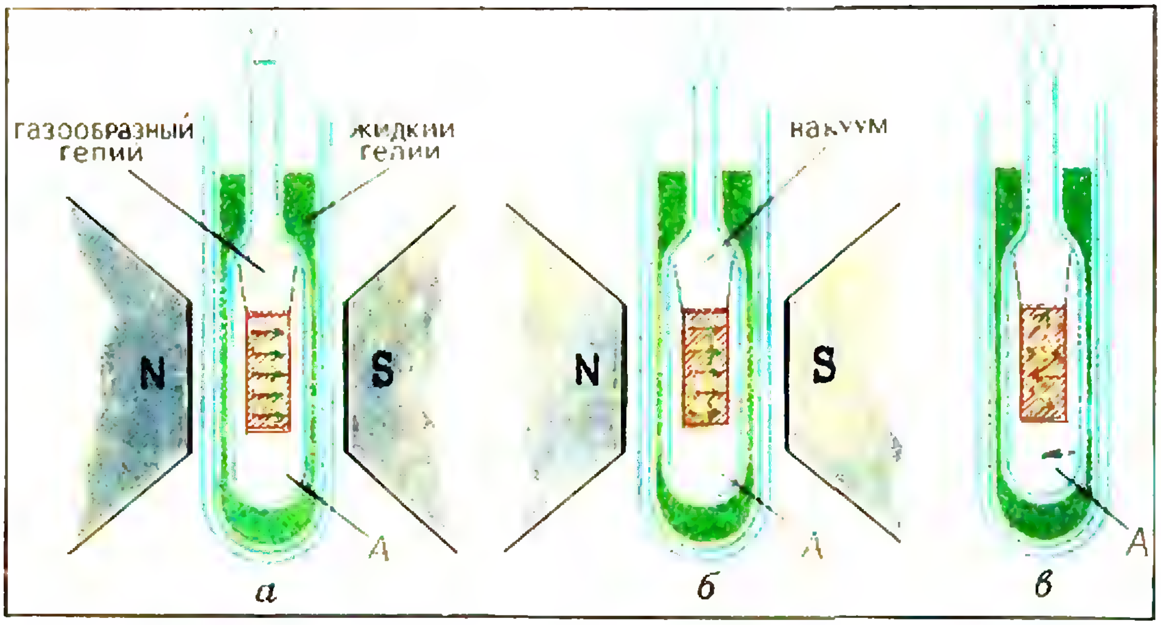


Рис. 3.

и объемом вещества. Это можно делать с помощью магнитного поля. Если парамагнитную соль поместить в постоянное магнитное поле, то все магнитики — ионы выстроятся параллельно силовым линиям магнитного поля. Мы наведем порядок в ориентации ионов. Убрав поле, снова создадим беспорядок. Это совершенно аналогично сжатию и расширению газа.

Для получения низких температур поступают следующим способом. Парамагнитную соль в ампуле *А*, заполненной газообразным гелием и находящейся в сосуде с жидким гелием, температура которого около 1° К, помещают в магнитное поле между полюсами электромагнита (рис. 3, *а*). Газообразный гелий в ампуле обеспечивает тепловой контакт с жидким гелием, так что температура намагниченной соли совпадает с температурой окружающего жидкого гелия. Затем газообразный гелий из ампулы откачивают, обеспечив этим теплоизоляцию соли от окружающей среды (рис. 3, *б*). После этого выключают магнитное поле, то есть производят адиабатное размагничивание соли (рис. 3, *в*). При этом происходит разориентация магнитиков — ионов, что должно привести к увеличению энтропии. А так как процесс размагничивания адиабатный, то энтропия в целом не может измениться и соль охлаждается.

Описанным способом вот уже почти сорок лет получают так называемые сверхнизкие температуры, то есть температуры ниже тех, что можно получить с помощью только жидкого гелия. Наинизшие температуры, получаемые таким образом, это тысячные доли градуса.

Не только атомы, но и атомные ядра являются магнитиками, правда, в 1000 раз более слабыми. Все же, если начать не с 1° К, а с 0,01° К, можно адиабатным размагничиванием уже не атомов, а ядер получить температуру около миллионной доли градуса. Но это уже тема для отдельной статьи.

Упражнения

1. Почему расширение в детандере и в дросселе можно считать адиабатными процессами?

2. Можно ли при магнитном способе охлаждения использовать не парамагнитные, а ферромагнитные вещества?

3. В каких единицах измеряется энтропия? Какая еще физическая величина измеряется в таких единицах?

Испытания
на правдоподобие
a
b
c

Г. Д. Балк, М. Б. Балк

И специалисту-математику, и школьнику приходится встречаться с математическими предложениями, в истинности которых он сомневается. Иногда требуется «доказать или опровергнуть» какое-либо утверждение или из нескольких предложенных ответов к задаче выбрать единственный правильный.

Если доказательство утверждения упирается в громоздкие выкладки, то часто бывает полезно не начинать с попыток доказательства, а постараться отдать себе отчет, насколько данная гипотеза правдоподобна, не приводит ли она к явно ошибочным или сомнительным выводам.

Остановимся на некоторых приемах такого рода «проверки на правдоподобие» *).

Так говорил Брамагупта

Обобщая известную формулу Герона для площади треугольника, индийский математик и астроном Брамагупта (VII век н. э.) высказал утверждение, которое можно в принятых сейчас обозначениях сформулировать так: площадь S любого четырехугольника (рис. 1) выражается через его стороны a, b, c, d по формуле

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}; \quad (1)$$

здесь p, как обычно,— полупериметр четырехугольника:

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Верно ли утверждение Брамагупты?

Прежде чем ринуться доказывать это утверждение (если оно верно, то доказательство будет, вероятно, весьма громоздким), имеет смысл испытать его на правдоподобие. Применим простейший прием: проверку на частных случаях.

Рассмотрим случаи, когда данный четырехугольник — квадрат; произвольный прямоугольник; ромб, отличный от квадрата.

В первых двух случаях формула (1) приводит к правильному результату, в третьем — приводит к ошибке: по формуле $S=a^2$, хотя ясно, что в этом случае $S<a^2$.

Следовательно, утверждение Брамагупты ошибочно.

Заметим, попутно, что эта неудача не должна заставить нас начисто отказаться от

---

*) В основу статьи положена стенограмма занятия математико-механического кружка IX класса школы № 7 г. Смоленска (17 января 1971 г.).

привлекательной идеи обобщения формулы Герона на случай четырехугольника, надо только либо ограничиться более узким классом четырехугольников, либо искать более сложную формулу, пригодную для всех четырехугольников. На первом пути можно получить следующий факт: формула Брамагупты (1) верна для каждого четырехугольника, вписанного в окружность.

Великая сила контрпримера

При обсуждении утверждения Брамагупты мы видели, что решающую роль сыграли не подтверждающие частные случаи (квадрат, прямоугольник), а опровергающий частный случай (ромб, отличный от квадрата). Наличие любого большого (даже бесконечного) числа разнообразных подтверждающих примеров еще не может служить доказательством правильности математического утверждения; но указание на один опровергающий пример («контрпример») полностью доказывает, что утверждение ошибочно. Такова сила контрпримера! Полезно приобрести навыки в поиске негромоздких контрпримеров.

Пример 1. Ученику Дакову представляется очевидным, что прямоугольник (рис. 2), описанный около правильного треугольника*), имеет вдвое большую площадь, чем этот треугольник. Ученик Нетов полагает, что это утверждение ошибочно. Кто прав?

Для выяснения истины ребята обратились к тому частному случаю, когда одна сторона треугольника целиком лежит на стороне прямоугольника (рис. 3). В этом случае гипотеза Дакова подтверждается. Однако это еще не значит, что она верна. Ученик Нетов предлагает обратиться к другому частному случаю: пусть диагональ описанного прямоугольника $ONCK$ расположена на биссектрисе угла правильного треугольника ABC (рис. 4).

Положим $OA=OB=1$. На продолжении отрезка ON отложим отрезок $ND=AN$. Тогда

$$\angle ACD=30^\circ,\ AB=\sqrt{2},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle AOB}+(S_{\triangle ANC}+S_{\triangle BKC})=$$

$$=\frac{1}{2}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Отсюда ясно, что

$$S_{\triangle ABC}\neq\frac{1}{2}S_{ONCK}.$$

Итак, мы получили контрпример, опровергающий гипотезу Дакова.

Пример 2. Ученик Даков убежден, что прямая, проходящая через центр тяжести любого четырехугольника, делит этот четырехугольник на две равновеликие части (рис. 5). Проверка показала, что это утверждение верно для квадрата, прямоугольника, ромба, *параллелограмма*.

---

*) Прямоугольник считается описанным около треугольника, если на каждой стороне прямоугольника (быть может, в конце этой стороны) находится хотя бы одна вершина треугольника.

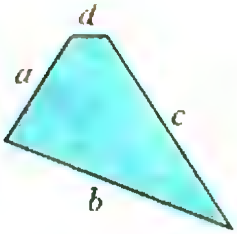


Рис. 1.

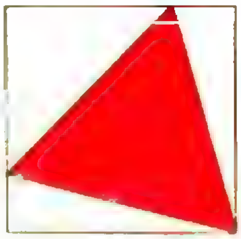


Рис. 2.

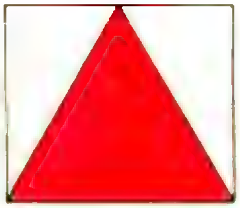


Рис. 3.

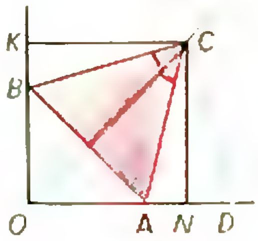


Рис. 4.

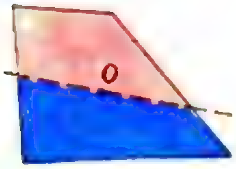


Рис. 5.

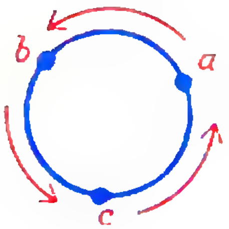


Рис. 7

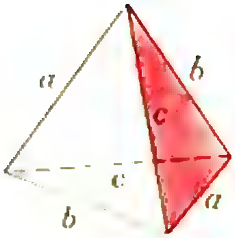


Рис. 8.

Требуется доказать гипотезу Дакова или опровергнуть ее.

В случаях, рассмотренных Даковым, центр тяжести четырехугольника является одновременно и центром симметрии. Поэтому хорошим испытанием на правдоподобие будет рассмотрение какого-либо четырехугольника, не имеющего центра симметрии, например трапеции. Выберем такую трапецию, центр тяжести которой было бы нетрудно найти (рис. 6). Трапеция $ABCD$ составлена из квадрата $ABCE$ со стороной a и равновеликого с ним прямоугольного треугольника CED $(ED=2a)$.

Пусть O, M, Z — соответственно центры тяжести квадрата, треугольника, трапеции; O_1, M_1, Z_1 — проекции этих точек на прямую AD. Тогда Z — середина отрезка OM, и легко подсчитать, что

$$O_1M_1=\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\cdot 2a=\frac{7}{6}a,$$

$$O_1Z_1=\frac{1}{2}O_1M_1=\frac{7}{12}a>O_1E$$

Следовательно, точка Z_1 лежит между E и D, так что прямая Z_1Z не делит трапецию на равновеликие фигуры. Гипотеза Дакова ошибочна.

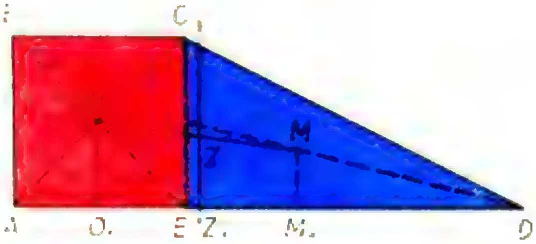


Рис. 6.

Симметрия обязывает ...

Пусть в условии задачи говорится о каких-то величинах a, b, c, ... Если условие не изменяется, когда меняют местами две из этих величин (скажем, a и b), то говорят, что оно симметрично относительно этих величин. Естественно, что этим свойством должен тогда обладать и ответ к задаче.

Можно представить и более сложный случай, когда условие задачи не меняется от «циклической» («круговой») перестановки некоторых величин (рис. 7). Тогда и ответ к задаче не должен меняться при той же циклической перестановке букв.

Эти простые замечания иногда позволяют обнаружить ошибочность ответа к задаче даже тому, кто сам ее решить не умеет.

Пример 3. На занятие математического кружка X классов однажды пришел девятиклассник Петя. Члены кружка решали такую задачу: дан тетраэдр (рис. 8), противоположные ребра которого попарно равны. Стороны основания равны соответственно a, b, c. Требуется вычислить объем V тетраэдра.

Десятиклассник, рядом с которым оказался Петя, объяснил ему, что такое тетраэдр (треугольная пирамида), и сказал, по какой формуле вычисляется объем пирамиды. Петя попытался решить эту задачу, но безуспешно. Тем временем некоторые члены кружка уже успели получить решения — различные ответы были выписаны на доске:

$$V=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}\times\times\sqrt{b^2+a^2-c^2}, \qquad (1)$$

$$V=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}\times\times\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}, \quad (2)$$

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}\times\times\sqrt{c^2+a^2-b^2}, \qquad (3)$$

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)}\times\times\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}. \quad (4)$$

Какой же ответ правилен?

Здесь Петя показал, что он сообразительный парень, хотя и не знает стереометрии.

«Условие задачи, — сказал он, — не изменится, если поменять местами буквы a и b. Поэтому и ответ не должен измениться при такой перестановке букв, то есть если ответ (1) верен, то должна быть верна и такая формула:

$$V=\sqrt{2(b^2+a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}\times\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad (5)$$

Но формулы (1) и (5) (при $a\neq b$) приводят к различным значениям для объема, что нелепо.

Ответ (2) сохраняется, если поменять местами любые две из трех букв a, b, c; он поэтому сохранится и при циклической перестановке этих букв. Но он все-таки ошибочен — это видно «из соображений размерности»: если считать, что a, b и c измеряются в метрах, то объем V, определяемый формулой (2), имел бы размерность $м^4$!

Ответ (3) успешно выдерживает испытания «на симметрию», «на цикличность» и «на размерность». Проверим его на частном случае: рассмотрим тетраэдр, у которого все шесть ребер равны a. Вычисляя площадь его основания и высоту и пользуясь формулой для вычисления объема тетраэдра $\left(V=\frac{1}{3}S\cdot H\right)$, найдем (выкладки опускаем): $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Между тем ответ (3) при $b=c=a$ дает: $V=\frac{1}{6}a^3$. Следовательно, этот ответ тоже неверен.

Ответ (4) успешно выдерживает все те испытания, которым мы подвергли предыдущие ответы. Это, конечно, еще не значит, что он верен; но имеет смысл, — закончил Петя, — проверить лишь то решение, которое привело к этому ответу».

Эта странная задача Мальфатти ...

В 1803 году в одном итальянском математическом журнале появилась статья профессора университета в Ферраре Джанфранческо Мальфатти, где была сформулирована следующая задача:

Задача I. Как надо вырезать из прямой треугольной призмы (рис. 9) три прямых круговых цилиндра (той же высоты, что и призма), чтобы отходы были минимальными?

Эта задача равносильна, очевидно, такой:

Задача II. Как следует расположить в данном треугольнике три попарно не перекрывающихся круга так, чтобы сумма их площадей была наибольшей?

Мальфатти считает, что последняя задача II сводится, в свою очередь, к следующей:

Задача III. В данном треугольнике расположить три круга так, чтобы каждый из них касался

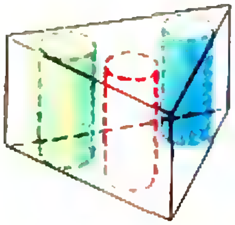


Рис. 9.

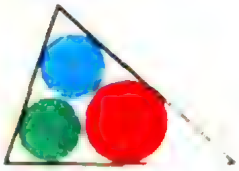


Рис. 10.

двух других кругов и двух сторон треугольника (рис. 10).

Тройку кругов, о которой говорится в задаче III, принято называть «кругами Мальфатти» данного треугольника. Мальфатти в своей статье сообщил (без доказательства, опущенного им из-за его «чрезвычайной сложности») формулы, позволяющие вычислить радиусы таких кругов и построить сами круги циркулем и линейкой. В течение последующих полутораста лет к задаче Мальфатти обращались математики разных стран (в том числе знаменитый швейцарский геометр Якоб Штейнер, немец Шельбах, француз Дерусео, американцы Лоб и Ричмонд и др.), которые указывали различные способы построения кругов Мальфатти и вычисления их радиусов.

Любопытно, что в течение 125 лет (до 1929 г.) справедливость гипотезы Мальфатти о сводимости задачи II к задаче III ни у кого не вызывала сомнений. Между тем простые рассуждения позволяют испытать эту гипотезу Мальфатти на правдоподобие и ... опровергнуть ее!

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, высота CD которого значительно больше основания. Поместим в нем три круга (один за другим), как указано на рисунке 11. Проследим, как будет меняться картина при увеличении высоты DC. При неограниченном росте этой высоты сумма площадей указанных трех кругов станет как угодно близкой к утроенной площади круга с диаметром, равным основанию AB, то есть к $\frac{3}{4}\pi AB^2$. Между тем сумма площадей кругов Мальфатти (рис. 12) для того же треугольника с ростом высоты DC будет оставаться меньше чем

$$\frac{\pi}{4}AB^2+2\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}AB\right)^2=\frac{3}{8}\pi AB^2.$$

Из полученных формул ясно, что для «очень узкого треугольника» суммарная площадь кругов, изображенных на рисунке 11, будет примерно вдвое (!) больше суммарной площади кругов Мальфатти.

Таким образом, гипотеза Мальфатти неверна.

Мы могли бы, кстати, применить и другой способ проверки правдоподобия гипотезы Мальфатти — испытать какой-либо частный случай, скажем, правильный треугольник. Для этой цели можно было бы сравнить суммарную площадь кругов Мальфатти (рис. 13), например, с суммарной площадью трех кругов, указанных на рисунке 14. Но выкладки при этом оказываются более громоздкими и расхождение не столь разительным: суммарная площадь этих кругов оказывается больше общей площади кругов Мальфатти для того же треугольника лишь примерно на 1,3%».

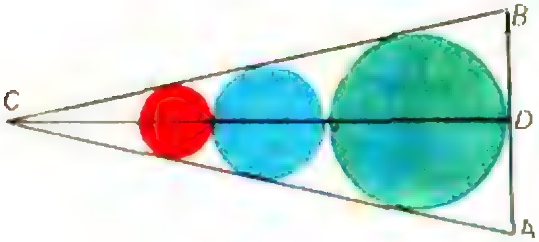


Рис. 11.

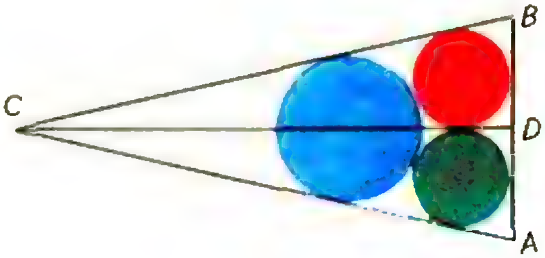


Рис. 12.

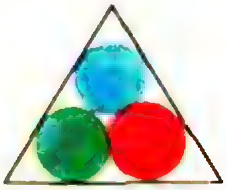


Рис. 13.

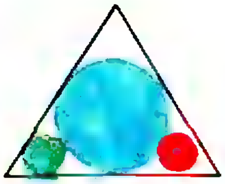


Рис. 14.

Интересно, что американскому математику М. Гольдбергу удалось в 1967 году обнаружить, что круги Мальфатти ни для какого треугольника не дают решения «исходной задачи Мальфатти» (задача II).

Использованный при рассмотрении задачи Мальфатти прием «обращения к предельному случаю» часто и успешно привлекается для испытания математических предложений на правдоподобие.

Только ли для опровержения? Только ли в математике?

До сих пор вроде бы получалось, что «испытания на правдоподобие» могут лишь привести к опровержению сомнительных гипотез. Но нельзя ли прийти таким путем к результату «положительного» характера? Не удастся ли с помощью этих методов получить новое открытие? А как в других науках: в физике, химии, биологии? Ведь любой опыт, строго говоря, может либо опровергнуть ложную гипотезу, либо подтвердить ее правдоподобие, но никоим образом не доказать! И тем не менее мы знаем много «законов науки», полученных именно опытным (как говорят, «индуктивным») путем.

Все это, конечно, требует специального разговора. Чтобы не ставить такой разговор в зависимость от продолжения этой статьи, порекомендуем читателю прекрасные книги Дьердя Пойа:

1) Математика и правдоподобные рассуждения (ИЛ, 1957);
2) Как решить задачу (Учпедгиз, 1959);
3) Математическое открытие («Наука», 1970).

Отдельные примеры, связанные с темой данной статьи, читатель может найти и в нашей книге «Математика после уроков» («Просвещение», 1971).

Числовой треугольник

								65
							50	66
						37	51	67
					26	38	52	68
				17	27	39	53	69
			10	18	28	40	54	70
		5	11	19	29	41	55	71
	2	6	12	20	30	42	56	72
1	3	7	13	21	31	43	57	73
	4	8	14	22	32	44	58	74
		9	15	23	33	45	59	75
			16	24	34	46	60	76
				25	35	47	61	77
					36	48	62	78
						49	63	79
							64	80
								81

Здесь вы видите не весь числовой треугольник, а только его «левую» часть. Закон образования треугольника очевиден, и вы без труда можете продолжить его сколь угодно далеко вправо. Средняя строка этого числового треугольника обладает рядом интересных особенностей.

Во-первых, все числа в этой строке нечетные.

Во-вторых, делимость на три у этой последовательности та же, что у натурального ряда без единицы: 2, 3, 4, 5, 6,..., то есть первое число на три не делится, второе делится, третье не делится, четвертое не делится, пятое делится... Вообще на три делится всякое $(3k-1)$-е число строки.

В-третьих, произведение двух соседних чисел этой строки также лежит в этой строке. Например, число 21 есть произведение чисел 3 и 7.

Чтобы установить, чем вызваны эти особенности числового треугольника, попробуйте найти общую формулу числа в средней строке. В этом вам может помочь решение задачи М78 (см. стр. 10).

В. Березин

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Опыты с маятниками

Г. Л. Коткин

Трудно найти физические приборы, которые были бы так просты по устройству и надежны в употреблении, как маятники. Между тем, опыты с ними могут привести к любопытным результатам, которые чрезвычайно важны не только в механике, но и в радиотехнике и электротехнике. Попробуйте самостоятельно проделать предлагаемые опыты и объяснить те эффекты, которые вы при этом будете наблюдать. Хотя сами опыты очень просты, однако, полностью разобраться в поведении маятников непросто: для этого нужно знать основные законы гармонических колебаний и иметь опыт в тригонометрических преобразованиях. Полностью разобраться в данной статье смогут, по-видимому, лишь только десятиклассники, однако и школьники 8—9 классов могут проделать эти опыты и полностью объяснить их хотя бы качественно.

Маятник с раздвоенным подвесом

Сделайте маятник с раздвоенным подвесом, показанный на рисунке 1. Длина нити маятника l должна быть намного больше длин нитей верхней раздвоенной части подвеса.

Толкните маятник под углом к плоскости рисунка. Вы увидите, что сначала маятник будет качаться в направлении толчка, но вскоре его движение перейдет во вращение вокруг вертикальной оси. Затем маятник вновь начнет колебаться в плоскости, но уже не в той, в которой его толкнули. После этого снова начнется вращение, но уже в другую сторону. Постепенно оно сменится движением в направлении первоначального толчка. Потом все опять повторится сначала.

С чем связано такое поведение маятника?

Связанные маятники

а) Два одинаковых маятника (например, гайки на нитке) подвесьте на не очень туго натянутой нити AB (рис. 2). Отклоните один из маятников и отпустите.

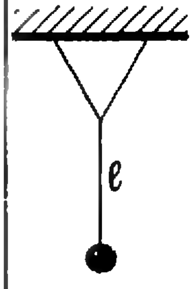


Рис. 1.

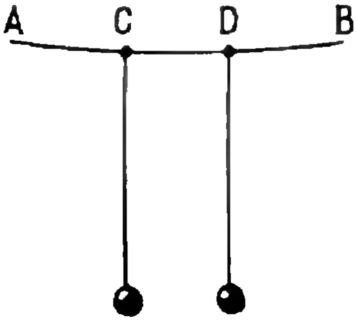
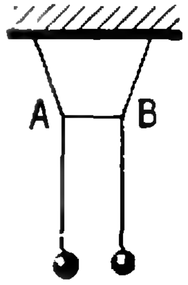


Рис. 2.



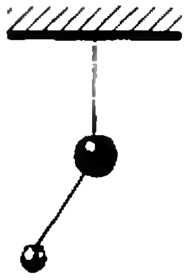


Рис. 3. Рис. 4.

Попробуйте менять массы грузиков, изменять длины нитей маятников, натяжение верхней нити.

б) Прикрепите два маятника к жесткой раме. Затем свяжите нити маятников ниткой на некоторой высоте (рис. 3). Отклоните один из маятников и отпустите. Посмотрите, как при этом будут двигаться маятники.

Двойной маятник

Устройство двойного маятника показано на рисунке 4. Верхний грузик намного тяжелее нижнего, а длины нитей одинаковы. Толкните нижний грузик и наблюдайте за его движением.

Давайте теперь разберемся в поведении этих маятников.

1. Начнем с маятника с раздвоенным подвесом.

Довольно сложное поведение маятника, которое вы наблюдали, можно объяснить тем, что его движение складывается из двух колебательных движений (рис. 5): параллельного плоскости zy и перпендикулярного ей. Эти колебания происходят независимо друг от друга (если отклонения маятника от вертикали не слишком велики), а периоды их соответственно равны

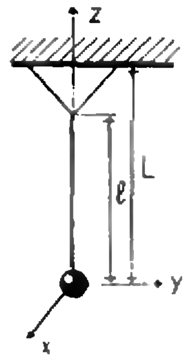
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ и } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

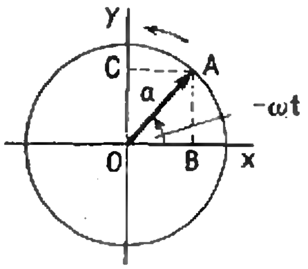
Прежде всего научимся описывать движение грузика с помощью координат.

Пусть точка A движется по окружности радиуса a с угловой скоростью ω против часовой стрелки (рис. 6а) или по часовой стрелке (рис. 6б). Тогда проекция B точки A на ось x совершает гармонические колебания*) с угловой частотой ω, равной $\frac{2\pi}{T}$, и амплитудой a. Проекция C той же точки A на ось y совершает подобные же колебания, но достигает наибольшего отклонения от точки O на четверть периода позже — через время, за которое радиус OA делает $\frac{1}{4}$ оборота вокруг точки O. В этом нетрудно убедиться, проследив за движениями точек C и B при вращении радиуса OA. В тот момент, когда проекция точки A на ось x максимально отклонена от точки O, ее проекция на ось y как раз

---

*) См., например, статью Я. А. Смородинского «Похожие движения», «Квант» № 9, 1971.





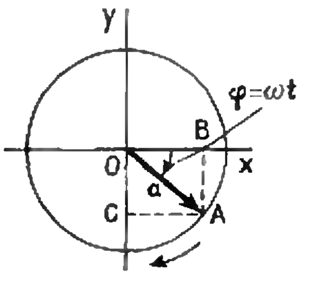


Рис. 5. Рис. 6 а. Рис. 6 б.

проходит через точку O и наоборот. То, что мы говорили, можно выразить и при помощи формул.

Из рисунка 6 а видно, что

$$\begin{cases} x = OB = a\cos\varphi = a\cos\omega t, \\ y = OC = a\sin\varphi = a\sin\omega t = \\ = a\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = a\cos\omega\left(t - \dfrac{T}{4}\right)^{*)}. \end{cases} \tag{1}$$

Формулы (1) справедливы при любом угле, а не только при остром. (Это следует из определений косинуса и синуса).

Если движение точки A происходит по часовой стрелке (рис. 6 б), то, проследив за движениями точек C и B, можно заметить, что колебание точки C опережает колебание точки B на четверть периода. Впрочем, можно сказать, что колебание точки C на три четверти периода отстает от колебания точки B. Так как в этом случае угол ωt считается отрицательным, то

$$\begin{cases} x = a\cos(-\omega t) = a\cos\omega t, \\ y = a\sin(-\omega t) = -a\sin\omega t = \\ = a\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = a\cos\left(\omega t - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \\ = a\cos\omega\left(t - \dfrac{3T}{4}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) видно, что координаты x и y периодически меняются с течением времени t. Это означает, что точки B и C совершают колебательные движения.

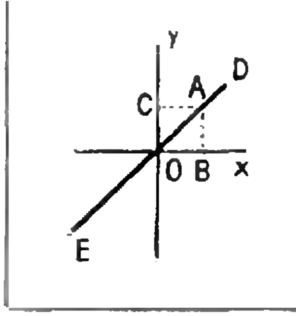


Рис. 7.

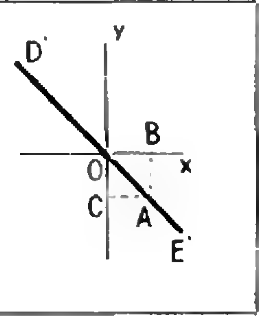


Рис. 8

Пусть теперь точка A вместо движения по окружности совершает гармонические колебания вдоль прямой EOD (рис. 7) с частотой ω и амплитудой $b = OD = OE$. В этом случае обе проекции B и C колеблются и одновременно достигают наибольших отклонений в положительных и отрицательных направлениях осей x и y и одновременно проходят через точку O. Точки B и C, как говорят, колеблются «в фазе». Положим для простоты, что $\measuredangle DOx = \frac{\pi}{4}$. При этом амплитуды колебаний точек B и C одинаковы и равны

$$b\cos\frac{\pi}{4} = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $OB = b\cos\omega t$, получаем

$$x = y = \frac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega t. \tag{3}$$

Если же точка A колеблется вдоль прямой $E'D'$ (рис. 8), то в момент наибольшего отклонения точки B в положительном направлении оси x отклонение точки C имеет наибольшую величину в отрицательном направлении оси y. В этом случае говорят, что колебания точек B и C совершаются «в противофазе». Можно считать также, что колебание точки C отстает от колебания точки B на полпериода (или опережает на полпериода — в данном случае это все равно). Тогда

$$\begin{cases} x = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \\ y = -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega t = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - \pi) = \\ = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega\left(t - \dfrac{T}{2}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Вернемся теперь к нашему маятнику. Если его грузик отклонить в направлении OD (рис. 7) на расстояние a и затем отпустить, то координаты грузика будут изменяться согласно формулам:

---

*) Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$ и $y = a\cos\omega\left(t - \frac{T}{4}\right)$.

$$\begin{cases} x = a\cos\omega_1 t, \\ y = a\cos\omega_2 t, \end{cases} \qquad (5)$$

где

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad a = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Напомним, что l и L очень мало отличаются друг от друга, то есть частоты ω_1 и ω_2 почти одинаковы. Поэтому вначале колебания по осям x и y происходят почти в фазе.

Так как $\omega_1 > \omega_2$, то с течением времени колебание по оси y отстает от колебания по оси x все больше и больше. Но, как мы видели, при движении точки по окружности против часовой стрелки колебания ее проекций на оси x и y отстают друг от друга на четверть периода. Отсюда следует, что когда отставание колебаний грузика по осям x и y достигнет четверти периода, он будет двигаться как раз по окружности против часовой стрелки. При отставании колебаний грузика по осям x и y на полпериода он будет двигаться вдоль прямой $E'D'$. Затем отставание колебания вдоль оси y достигает $\frac{3}{4}$ периода — грузик движется по окружности по часовой стрелке. Наконец, при отставании на целый период грузик опять колеблется вдоль прямой ED. Это вы и наблюдали.

Эти рассуждения удобно «пересказать» с помощью формул. Систему (5) можно представить в виде

$$\begin{cases} x = a\cos\omega_1 t, \\ y = a\cos(\omega_1 t - \varphi), \end{cases} \qquad (6)$$

где $\varphi = (\omega_1 - \omega_2)\,t$. За два-три периода φ почти не изменяется, но за много периодов неуклонно нарастает. При $\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ формулы (6) совпадают последовательно с формулами (3), (1), (4), (2).

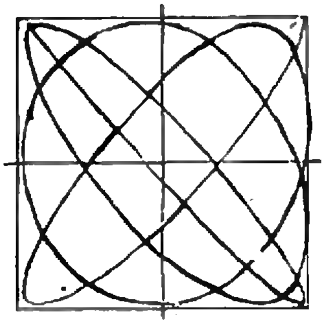


Рис. 9.

При $\varphi = 2\pi$ грузик возвращается к движению по прямой ED.

Изложенную теорию можно проверить экспериментально. Ведь мы можем рассчитать, через какое время движение грузика пройдет весь цикл изменений. Если это время T_0, то $\varphi_0 = (\omega_1 - \omega_2)\,T_0 = 2\pi$, откуда $\frac{2\pi}{T_0} = \omega_1 - \omega_2$, или

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}. \qquad (7)$$

Теперь нужно измерить периоды колебаний T_1 и T_2 маятника, заставив его колебаться один раз в плоскости yz, другой раз — в плоскости xz. Время T_0 измеряется независимо. Измерив T_1, T_2 и T_0, проверьте правильность формулы (7). Для измерения T_1 и T_2 лучше определить время, скажем, в 10—15 колебаний. Тут же обнаруживается, какие причины ведут к отклонению от расчетов. По-видимому, прежде всего сказывается затухание колебаний, вызванное сопротивлением воздуха. Что же, грузики не должны быть слишком легкими.

В действительности движение происходит не по прямой или окружности, а по сложной траектории. Эта траектория (рис. 9) более или менее равномерно «заполняет» весь квадрат.

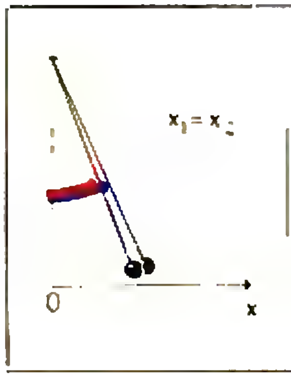
Если начальное отклонение составляет с плоскостью симметрии угол, отличный от $\frac{\pi}{4}$, то характерными «мгновенными» траекториями грузика оказываются диагонали прямоугольника и вписанные в него эллипсы.

Тот факт, что движение маятника складывается из независимых колебаний, выражают, говоря, что для его колебаний справедлив принцип суперпозиции *).

2. Перейдем к объяснению движения связанных маятников (рис. 2 и 3). Если отклонить, а затем отпустить один из них, мы увидим, что постепенно придет в движение другой.

---

*) Читатели «Кванта» уже встречались с принципом суперпозиции при объяснении вида волн на поверхности воды («Квант» № 1, 1971, стр. 32).



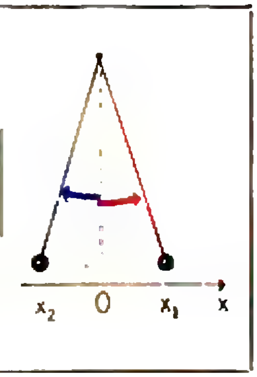


Рис. 10.

Рис. 11.

Это объясняется тем, что при отклонении первого маятника связывающая их нить деформируется и сила упругости воздействует на другой маятник, сообщая ему ускорение. Первый маятник будет колебаться со все меньшей амплитудой и, наконец, остановится. В это время амплитуда колебаний второго маятника будет наибольшей. Потом раскачается первый маятник, а второй остановится и так далее.

Сложное колебательное движение системы, состоящей из двух маятников, можно представить как результат сложения (суперпозиции) двух колебаний с частотами ω_1 и ω_2. Одна из частот равна частоте, с которой будут колебаться оба маятника, если их одновременно отклонить в одну сторону, а затем отпустить (рис. 10). Обозначим эту частоту через ω_1. Другая частота ω_2. Это частота, с которой будут колебаться оба маятника, если их вначале одновременно отклонить в противоположные стороны, а затем отпустить (рис. 11).

Отметим, что угловая частота ω_2 больше угловой частоты ω_1. Эти два колебания называются нормальными колебаниями двух связанных маятников.

Напишем уравнения нормальных колебаний. Первое

$$\begin{cases} x_1' = a\cos\omega_1 t,\\ x_2' = -a\cos\omega_1 t,\end{cases}$$

второе

$$\begin{cases} x_1'' = a\cos\omega_2 t,\\ x_2'' = a\cos\omega_2 t.\end{cases}$$

Сложим смещения x_1' с x_1'' и x_2' с x_2''. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_1'' = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t,\\ x_2 = x_2' + x_2'' = -a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t.\end{cases}$$

Воспользовавшись формулой сложения косинусов, получим:

$$\begin{cases} x_1 =\\ = 2a\cos\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right),\\ x_2 =\\ = 2a\sin\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right).\end{cases}$$

Полученное выражение для x_1 мы можем написать в следующем виде:

$$x_1 = A\cos\Omega t,\quad \Omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2},$$

$$A = 2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right).$$

Вследствие того, что ω_1 мало отличается от ω_2, выражение $\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$ близко к 1 (если ω_1 равна ω_2, то это выражение равно 1). Следовательно, оно мало влияет на значение x_1. Поэтому сомножитель $2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$ в выражении для x_1 можно рассматривать как медленно изменяющуюся амплитуду (красный пунктир на рис. 12, *а*). Аналогично обстоит

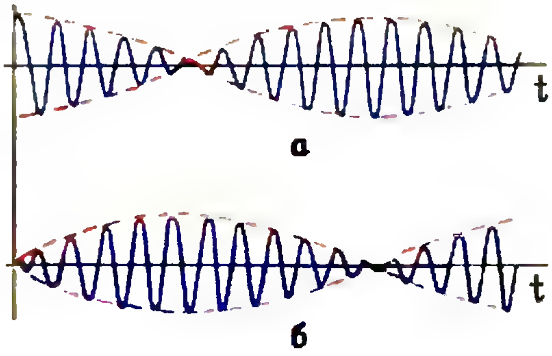


Рис. 12.

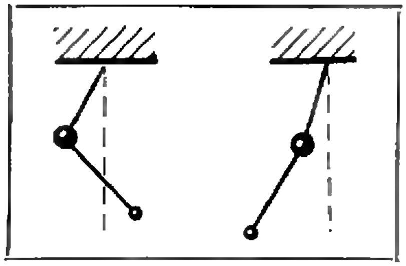


Рис. 13.

дело с x_2. Колебания грузиков, отвечающие этим формулам, графически представлены на рисунке 12, *а*, *б*. Движения такого рода называются биениями (или модулированными колебаниями). Легко найти период биений. Он равен полупериоду синусоиды (пунктирной кривой) и определяется формулой

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}T_0=\pi \quad \text{или} \quad \frac{1}{T_0}=\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1},$$

где T_1 и T_2 — периоды нормальных колебаний. Частота биений равна разности частот нормальных колебаний. Период биений тем больше, чем ближе друг к другу T_1 и T_2.

Разумеется, при очень большом периоде биений картина движения смазывается из-за затухания колебаний.

3. При движении двойного маятника наблюдаются биения. Легкий маятник то колеблется с большим размахом, то почти останавливается. Движение тяжелого маятника может быть почти незаметно. Такие биения объясняются сложением двух нормальных колебаний, изображенных на рисунке 13. Проведите объяснение самостоятельно.

Упражнения

1. Выведите формулу для периода колебаний математического маятника, рассматривая его движение как вращение вокруг вертикальной оси.

2. Подберите длину раздвоенного подвеса маятника так, чтобы грузик мог описывать восьмерку.

3. Подберите длины двух независимых маятников так, чтобы с их помощью можно было определять промежутки времени в 10 *сек*, 20 *сек*, не считая колебания «поштучно». Такие маятники можно использовать для измерения пульса после зарядки. (Галилей производил измерения периодов колебаний лампад в церкви, используя в качестве часов биение пульса).

Кроссворд МФТИ

Существует много видов студенческого фольклора: песни, анекдоты, сказки. У студентов Московского физико-технического института, кроме всех перечисленных существует еще один — кроссворды.

Для того чтобы разгадать такой кроссворд, необходимы в первую очередь чувство юмора и фантазия. Энциклопедии и справочники тут не помогут. Среди преподавателей МФТИ отличным достижением считается отгадывание половины слов кроссворда, среди студентов показатели несколько выше. Если приведенный ниже кроссворд не будет вам поддаваться, то посмотрите на страницу 38, где расшифровываются слова по горизонтали, и выпишите их, после этого попытайтесь самостоятельно отгадать слова по вертикали. Ответы на них даны на странице 65.

1		2				3			4		5
	■		■	■	■		■	■		■	
6								■		■	
	■		■	■	■		■	7			
	■	8		9			10	■		■	
	■	■	■		■	■	11				■
■	■	12	■	13				■		■	■
■	14				■	■		■	■	■	15
16	■		■	17	18				19	■	
20				■		■	■	■		■	
	■		■	21							
	■		■	■		■	■	■		■	
22											

По горизонтали: **1.** Вычислительный центр научно-исследовательского института по организации отдыха трудящихся производственно-учебного строительного комбината. **6.** Черт в ночи. **7.** Далеко. **8.** Природное соединение. **11.** Персонаж русских народных сказок, появляющийся преимущественно из-за гор. **13.** Музыкальный инструмент без звука. **14.** Среднеазиатский сатирик, философ, композитор, поэт и певец. **17.** Терпеливый казак. **20.** Сын востока. **21.** Приспособление для остановки поезда путем нажатия кнопки. **22.** Фокус со светом.

По вертикали: **1.** Нехороший человек и к тому же пьющий. **2.** Тонкость. **3.** Произведение П. И. Чайковского. **4.** Род угля. **5.** Очковый змей. **9.** Одинокий обитатель дикого севера. **10.** Силой притяжения к Земле. **12.** Очень большая шкала. **15.** Человек с лопатой. **16.** Легендарное сокращение штатов. **18.** Не голод. **19.** Несколько одинаковых букв.

КАРДИОИДА

Фигура, изображенная на первой странице обложки, представляет собой одну из замечательных кривых — *кардиоиду*. Слово «кардиоида» означает в переводе с греческого «сердцевидная».

Впервые изучал свойства этой кривой в 1674 году французский академик Оле Ремер.

У кардиоиды много «родственников». Это прежде всего различные циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды.

Если окружность катится по прямой, то точка, закрепленная на этой окружности, оставляет на плоскости след — кривую, которая называется *циклоидой* (рис. 1).

Если подвижная окружность катится по внутренней части неподвижной окружности, то точка, закрепленная на первой из них, описывает на плоскости кривую, которая называется *гипоциклоидой* (рис. 2).

Если же подвижная окружность катится по наружной части неподвижной окружности, то кривая, которую описывает точка, лежащая на подвижной окружности, называется *эпициклоидой* (рис. 3).

Кардиоида — это эпициклоида, у которой подвижная и неподвижная окружности одного и того же радиуса (см. рис. 4).

Об особенностях всех этих циклоид, в том числе кардиоиды, вы можете прочесть в книге Г. Н. Бермана *«Циклоида»*, (Гостехиздат, 1954).

На рисунке 5 показано одно из возможных построений кардиоиды. Неподвижная окружность разбивается точками на участки. Из каждой такой точки, как из центра, проводятся окружности, проходящие также через одну фиксированную точку на этой же окружности. Попробуйте доказать, что при таком построении вы действительно получаете кардиоиду (описанную около всех этих окружностей).

В заключение — забавная интерпретация кардиоиды. Рассмотрим не скользкую, круглую в поперечном сечении неподвижную талию. Около нее вращается обруч хула хуп вдвое большего радиуса. Тогда каждая точка обруча описывает около талии кардиоиду.

М. Л. Смолянский

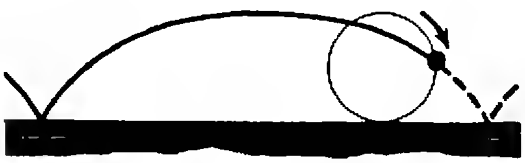


Рис. 1.

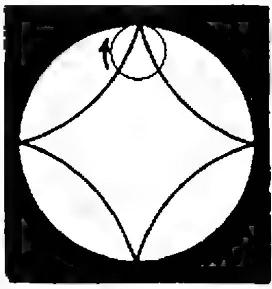


Рис. 2.

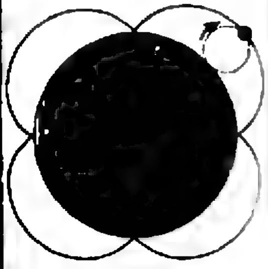


Рис. 3.

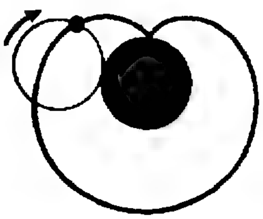


Рис. 4.

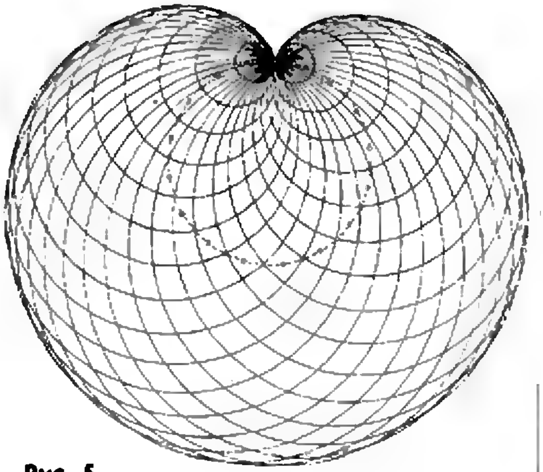


Рис. 5.

Применение неравенства Буняковского-Коши к решению некоторых задач

В. К. Смышляев

При решении многих математических задач применяется так называемое неравенство Буняковского — Коши

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad (a_i > 0,\ b_i > 0). \qquad (*)$$

Приведем сначала малоизвестное, но весьма простое доказательство этого неравенства. Пусть $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = A$, $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = B$. Тогда нам надо доказать, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{AB} \leqslant 1.$$

Используя неравенство $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, напишем следующую цепочку неравенств: $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{AB} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\cdot\frac{b_i}{B}\right) \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_i}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{B}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{B^2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 1.$$

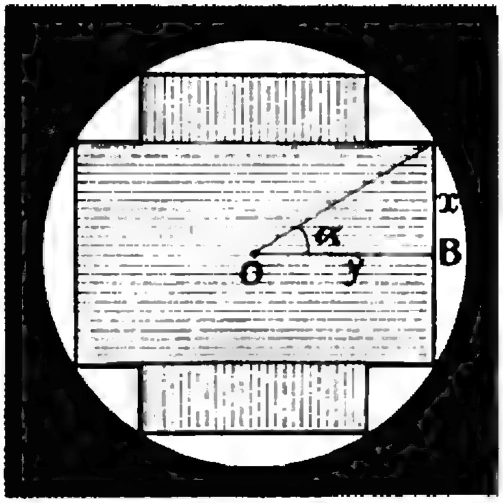
Отсюда следует неравенство (*). Как известно, равенство в нем достигается при

$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B},\quad \frac{a_2}{A} = \frac{b_2}{B},\ \ldots,\ \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B},$$

то есть при

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Покажем теперь, как применяется неравенство (*).



1. Найти наибольшее значение функции

$$y = a\sin x + b\cos x$$

$$\left(a > 0,\ b > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. В силу неравенства (*) имеем

$$y = a\sin x + b\cos x \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Максимум достигается при условии $\frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$, то есть при $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$.

2. Трансформатор переменного тока нужно сконструировать так, чтобы его крестообразный железный сердечник заполнял возможно большую часть внутренней полости круглой обмотки. Каковы должны быть размеры сечения сердечника, изображенного на рисунке, если радиус катушки равен R?

Решение. Пусть $\measuredangle AOB = \alpha$, тогда

$$\frac{1}{4}S = y^2 - (y-x)^2 = 2xy - x^2 = R^2(2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha).$$

Отсюда $S = 2R^2(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1)$. Воспользуемся неравенством (*):

$$S \leqslant 2R^2\left(\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha} - 1\right) = 2R^2\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Следовательно, $S_{\max} = 2R^2\left(\sqrt{5}-1\right)$ и достигается при $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{1}$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$.

3. Рассмотрим три пары действительных чисел (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). Доказать, что существует треугольник со сторонами

$$a = \sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2}, \quad b = \sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2},$$
$$c = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

Решение. Для того чтобы a, b и c были сторонами треугольника, необходимо, чтобы выполнялись неравенства $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$, каждое из которых эквивалентно неравенству Буняковского — Коши. В самом деле, соотношение $a+b\geqslant c$ эквивалентно неравенству $2ab \geqslant c^2 - a^2 - b^2$ или

$$2\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2}\cdot\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2} \geqslant$$
$$\geqslant (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-(a_2-a_3)^2-(b_2-b_3)^2-(a_3-a_1)^2-(b_3-b_1)^2 =$$
$$= 2\left[(a_3-a_1)(a_2-a_3)+(b_3-b_1)(b_2-b_3)\right],$$

сокращая на 2, получаем неравенство (*). Равенство достигается только, если числа $a_3 - a_1$, $b_3 - b_1$ пропорциональны числам $a_2 - a_3$, $b_2 - b_3$; проверьте, что в этом случае вершины треугольника должны лежать на одной прямой.

Аналогично доказывается, что $a+c\geqslant b$, $b+c\geqslant a$. Значит, треугольник со сторонами a, b, c существует, хотя и может выродиться в отрезок. Можно построить этот треугольник геометрически — в декартовой системе координат его вершины надо поместить в точки с координатами (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3).

Упражнения

1. Найти наибольшее значение функций

а) $y = a\sin x + b\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + c\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\left(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $z = a\sin(x + y) + b\sin(x - y) + c\sqrt{\cos 2x \cdot \cos 2y}$

$\left(a > 0,\quad b > 0,\quad c > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{4},\quad 0 < y < \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $u = a\cos x + b\cos y + c\cos z + d\sqrt{2\cos x\cos y\cos z}$,

где a, b, c, d — положительные числа, x, y, z — острые углы треугольника;

г) $u = a\sin x + b\sin y + c\sin z + d\sin t + e\sqrt{2\cos(x + y)\cdot\cos(y + z)\cdot\cos(z + x)}$,

где a, b, c, d, e — положительные числа, $x + y + z + t = 2\pi$;

д) $y = \dfrac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ $(a_i > 0,\ x_i > 0)$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, если известно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant a^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant b^2$ и a и b — положительные числа.

3. Доказать неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_iy_i} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i},$$

где все x_i и y_i — положительные числа.

4. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x_i},$$

где все a_i, b_i, x_i — положительные числа.

5. Доказать неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

где все x_i, y_i — положительные числа.

6. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшей полной поверхности. Каковы его радиус и высота?

7. Внутри треугольника некоторая точка расположена так, что сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника наименьшая. Выразить эти расстояния через длины сторон треугольника и найти эту точку.

8[*]. Площади граней тетраэдра равны S_1, S_2, S_3 и S_4. Точка M лежит внутри тетраэдра на расстояниях h_1, h_2, h_3, и h_4 (соответственно) от граней.

а) При каком положении точки M сумма

$$\frac{S_1}{h_1} + \frac{S_2}{h_2} + \frac{S_3}{h_3} + \frac{S_4}{h_4} \qquad (*)$$

принимает наименьшее значение?

б) Доказать, что любой тетраэдр имеет хотя бы одну точку M, для которой сумма (*) минимальна. Найти, сколько таких точек может быть.

---

[*] Эту задачу прислал наш читатель *Г. Оганнисян* из Еревана.

ЗАДАЧНИК Кванта

Этот раздел журнала ведется у нас из номера в номер. В нем наряду с относительно легкими задачами публикуются задачи, состоящие из нескольких, постепенно усложняющихся вопросов. Самые трудные задачи отмечены звездочками. Они зачастую даются нелегко даже специалистам математикам и физикам. Поэтому не отчаивайтесь, если не сумеете справиться с той или иной задачей. Попробуйте со временем вернуться к ней снова.

Но вот решение найдено. Не следует, однако, на этом успокаиваться. Подумайте, как можно обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат.

Во второй части раздела мы будем помещать решения задач (примерно через полгода после публикации условий задач) с учетом присланных читателями писем. С решениями мы рекомендуем познакомиться даже тем, кто не пытался решать эти задачи самостоятельно.

В большинстве случаев мы указываем фамилии читателей, приславших наиболее удачные решения.

Школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения, получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады школьников наравне с победителями районных олимпиад. Кроме того, редакция «Кванта» установила несколько специальных премий для авторов наиболее интересных решений.

И последнее. Придумать задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но зато и интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам. Лучшие из них мы опубликуем в «Задачнике «Кванта».

Свои решения и новые задачи присылайте по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект 15, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». На конверте после адреса укажите, решения каких задач вы посылаете (например: М122, М124, Ф146). Решение каждой задачи (если вы посылаете сразу несколько) должно быть написано на отдельном листке (листах), страницы пронумерованы.

В конце укажите свою фамилию, имя, отчество, шестизначный индекс, адрес, а также класс и школу. Решения рассматриваются только в том случае, если они получены не позднее, чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера журнала.

ЗАДАЧИ

М121. Докажите, что для любых n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется такое натуральное $k \leqslant n$, что каждое из k чисел

$$a_k, \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_{k-2}+a_{k-1}+a_k}{3}, \ldots, \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$$ не превосходит $$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

М122. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны соответственно p, q, r. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

М123. Найдите все натуральные числа m, для которых

$$1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot(2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!$$

(через $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

В. П. Бешкарев

М124. Дан треугольник ABC. Найдите внутри него точку O, обладающую следующим свойством: *для любой прямой, проходящей через точку O и пересекающей стороны треугольника AB в точке K и BC в точке L, выполняется равенство*

$$\frac{AK}{KB}+\frac{CL}{LB}=1.$$

Вообще, докажите, что если p и q — произвольно заданные положительные числа, то внутри треугольника ABC можно указать такую точку O, что для любой прямой KL, проходящей через эту точку (K лежит на AB, L на BC),

$$p\frac{AK}{KB}+q\frac{CL}{LB}=1.$$

Г. Нотен (ученик 10 класса)

М125. а) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, обладающая следующим свойством:

Ни одно из этих чисел не делится на другое, но среди каждых трех чисел можно выбрать два, сумма которых делится на третье?

б) Если нет, то как много чисел может быть в наборе, обладающем таким свойством?

в) Решите ту же задачу при дополнительном условии: в набор разрешается включать только нечетные числа.

Вот один пример такого набора из четырех чисел: 3, 5, 7, 107. Здесь среди трех чисел 3, 5, 7 сумма $5+7$ делится на 3; в тройке 5, 7, 107 сумма $107+5$ делится на 7; в тройке 3, 7, 107 сумма $7+107$ делится на 3; наконец, в тройке 3, 5, 107 сумма $3+107$ делится на 5.

Ю. И. Ионин

Ф133*. Замкнутая металлическая цепочка соединена нитью с осью центробежной машины и вращается с угловой скоростью ω (рис. 1). При этом нить составляет угол α с вертикалью.

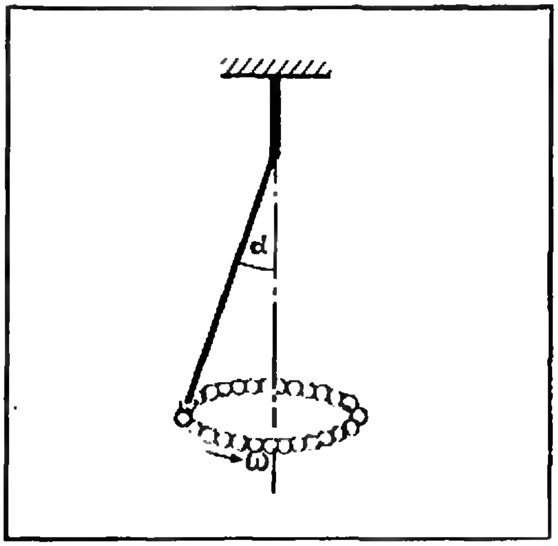


Рис. 1.

Найти расстояние от центра тяжести цепочки до оси вращения.

Ф134. Тяжелая плита движется со скоростью v в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Под углом α к направлению движения плиты движется со скоростью u легкий шарик. Определить величину и направление вектора скорости шарика после его упругого столкновения с плитой.

а) Рассмотреть случаи, когда скорость шарика направлена к плите и от нее.

б) Как изменится ответ, если плита движется в направлении, составляющем угол β с ее плоскостью?

Ф135. Мина, лежащая на земле, взрывается от детонации. Осколки мины начинают двигаться симметрично во все стороны с одинаковыми скоростями v. Размеры всех осколков одинаковы. Какая часть осколков упадет вне круга радиуса R с центром в точке взрыва?

Г. Л. Коткин

Ф136. Плоский конденсатор имеет емкость C. На одну из пластин конденсатора поместили заряд $+q$, а на другую — заряд $+4q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

В. Е. Белонучкин

Ф137*. Инфракрасное излучение определенной длины волны поглощается метаном (CH_4). При нормальных условиях слой чистого метана толщиной в 1 *см* поглощает 98% энергии излучения. Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении по вертикали атмосферы Земли?

При расчете весовое содержание метана в атмосфере принять равным $1{,}4\cdot10^{-6}$.

С. М. Козел

◆

Ответы на кроссворд (см. стр. 31)

По горизонтали: 1. ВЦНИИООТПУСК. 6. Мракобес. 7. Теле. 8. Сустав. 11. Егор. 18. Сакс. 14. Акын. 17. Атаман. 20. Оглы. 21. Стопкноп. 22. Представление.

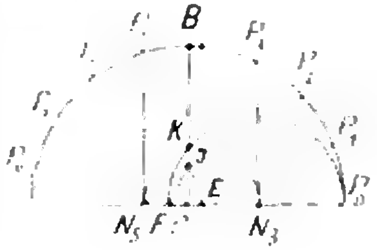
Построение правильного 17-угольника

Ричмонд дал простое построение семнадцатиугольника $P_0P_1 \dots P_{16}$ (см. рисунок).

Соединим точку P_0 с точкой J, лежащей на радиусе OB на расстоянии $^1/_4\,OB$ от центра. На диаметре, проходящем через точку P_0, выберем точки E и F так, чтобы $\angle OJE$ был равен четверти угла OJP_0, а $\angle FJE$ был равен 45°. Пусть окружность, построенная на FP_0 как на диаметре, пересекает OB в точке K, и пусть окружность с центром E и радиусом EK пересекает OP_0 в точках N_3 (между O и P_0) и N_5. Восставим перпендикуляры к OP_0 в этих двух точках до пересечения с первоначальной окружностью в точках P_3 и P_5. Тогда дуга P_3P_5 (и равная ей дуга P_1P_3) равна $^2/_{17}$ окружности. В доказательстве несколько раз используется тот факт, что корни уравнения

$$x^2+2x\,\mathrm{ctg}\,2\alpha-1=0$$

равны $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.



(Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию, М., «Наука», 1966, стр. 49.)

ЗАДАЧНИК кванта

5 литр
2 литр
10 литр
12 литр

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М77—М83

М77

Длины двух сторон треугольника равны 10 и 15. Докажите, что биссектриса угла между ними не больше 12.

Мы получили очень много разных решений этой задачи от читателей. Приведем только три.

I. Проведем $DE \parallel BC$ (рис. 1). Тогда треугольник CDE — равнобедренный, поэтому $CE=ED=x$, причем x можно найти из подобия треугольников ABC и ADE: $\frac{15-x}{15}=\frac{x}{10}$, поэтому $x=6$ и $CD<CE+ED=2x=12$.

II. По свойству биссектрисы $BD:DA=BC:CA={}^2/_3$. Проведем $BK\perp CD$ и $DL\perp CD$ до пересечения со стороной AC (рис. 2). Тогда $AK=AC-KC=AC-BC=5$, и $KL:LA=BD:DA={}^2/_3$, поэтому $KL=2$, и $CD<CL=12$.

III. (В духе статьи «Метод площадей» «Квант» №12, 1971, стр. 41). Пусть $\angle BCD=\angle ACD=\alpha$, тогда (рис. 3) $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$ (=) $al\sin\alpha+bl\sin\alpha=ab\sin 2\alpha$,

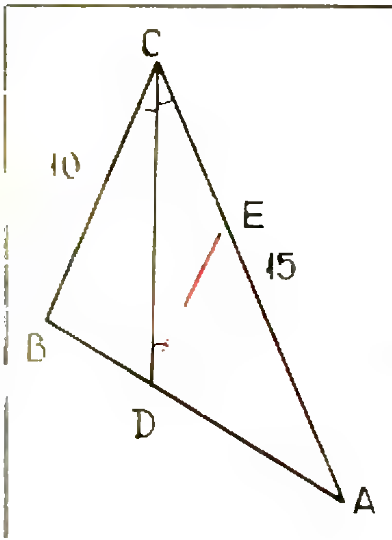


Рис. 1.

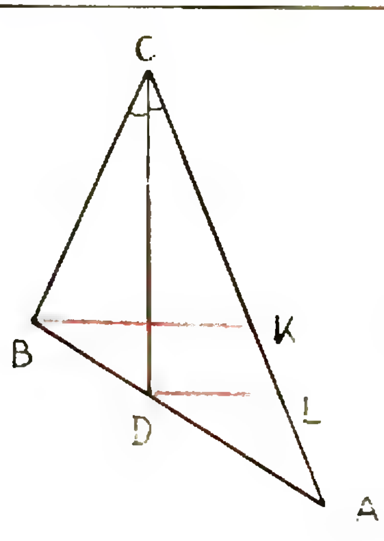


Рис. 2.

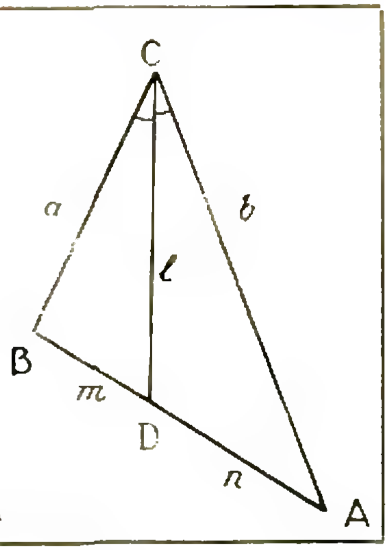


Рис. 3.

поэтому

$$l=\frac{2ab}{a+b}\cos\alpha=\frac{2\cdot10\cdot15}{25}\cos\alpha=12\cos\alpha<$$
$$<12.$$

(Многие пользовались и другими формулами для биссектрисы:

$$l^2=ab-mn=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=$$
$$=\frac{4abp\,(p-c)}{(a+b)^2}.\Big)$$

Любым из этих способов можно доказать, что биссектриса l треугольника, заключенная между сторонами a и b, не превосходит $\frac{2ab}{a+b}$ («среднего гармонического» чисел a и b). Эта оценка неулучшаема: для любого $l<\frac{2ab}{a+b}$ можно построить треугольник со сторонами a и b и биссектрисой l между ними (убедитесь в этом!).

Попробуйте доказать следующие два утверждения, обобщающие задачу:

1) Если в треугольнике ABC, где $BC=a$, $AC=b$, точка D делит сторону AB в отношении $BD:DA=m:n$, то $\frac{|mb-na|}{m+n}<CD<\frac{mb+na}{m+n}$. (В нашей задаче $m:n=a:b$.)

2) Если отрезок CD делит угол BCA в отношении $\angle BCD:\angle DCA=p:q$, то $CD<\frac{(p+q)ab}{pa+qb}$. (В нашей задаче $p:q=1$; здесь для доказательства можно воспользоваться такой леммой: если $0<\alpha<\beta<\pi$, то $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$.)

M78

Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно представить в виде $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где x и y — целые неотрицательные числа, и что такое представление единственно.

Обозначим сумму $x+y$ через s и перепишем данную формулу так:

$$n=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}=\frac{s^2+s}{2}+x.\quad(1)$$

Условия, что x и y — целые числа, $x\geqslant0$ и $y\geqslant0$, эквивалентны таким: x и s — целые числа, $x\geqslant0$, $s\geqslant x$. При заданном s величина x может принимать значения: 0, 1,..., s; соответственно величина n, определяемая формулой (1), принимает значения: $\frac{s^2+s}{2}$, $\frac{s^2+s}{2}+1,\ \ldots,\ \frac{s^2+s}{2}+s$. Итак, каждому $s=0, 1, 2,\ldots$ соответствует отрезок из $s+1$ целых неотрицательных чисел n. Заметим, что последнее число отрезка, соответствующего s, как раз на единицу меньше первого числа отрезка, соответствующего $s+1$: $\left(\frac{s^2+s}{2}+s+1\right)=\frac{(s+1)^2+(s+1)}{2}$. Поэтому такие отрезки будут содержать все целые неотрицательные числа n, причем каждое n попадает только в один отрезок, то есть ему будет соответствовать ровно одна пара значений s и x (рис. 4).

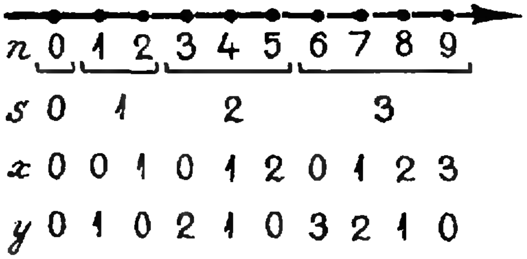


Рис. 4.

Задача решена. Мы доказали, что формула (1) позволяет «занумеровать» все точки (x, y) с целыми неотрицательными координатами числами $n=0, 1, 2,\ldots$ На рисунке 5 показано, как расположены эти номера по порядку.

Правильное решение прислали *А. Абдулаев, М. Буханов, А. Григорян, А. Заславский, М. Илларионов, Н. Корниенко,*

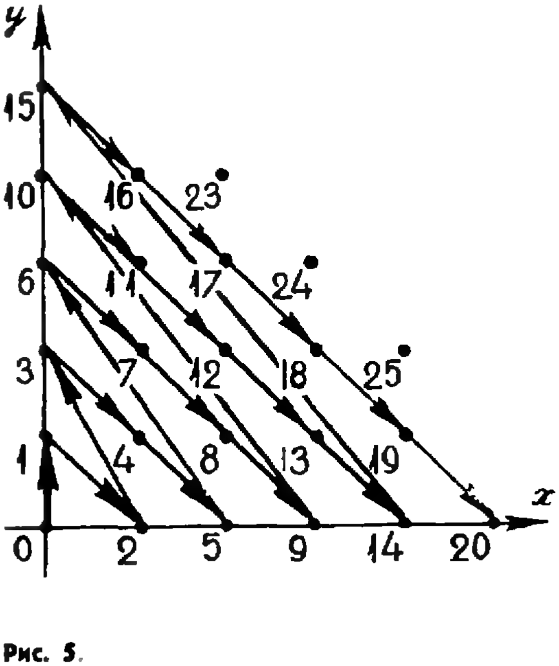


Рис. 5.

Л. Книжнерман, В. Логинов, В Кривицкий, Г. Макаров, А. Мартынов, М. Прегер, М. Перельмутер, М. Розов, В. Сервах, А. Слинкин, Э. Туркевич, А. Удальцов, В. Файтелевич, Г. Фильковский, А. Черняк, К. Шилов, И. Шпарлинский. Некоторые из тех, кто доказывал утверждение задачи по индукции, забыли, что не всегда можно переходить от точки (x, y) к $(x+1, y-1)$: если $y=0$, то нужно в качестве следующей за $(x, 0)$ точки брать $(0, x+1)$.

Э. Туркевич приводит в своем решении формулу, аналогичную (1), которая позволяет занумеровать наборы не из двух, а из k целых неотрицательных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$:

$$n = C^k_{s_k+k-1} + C^{k-1}_{s_{k-1}+k-2} + \ldots +$$

$$+ C^2_{s_2+1} + C^1_{s_1},$$

где $s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$,

$$C^q_p = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot q}.$$

Например, для $k=3$ получается формула

$$n = \frac{s_3(s_3+1)(s_3+2)}{6} + \frac{s_2(s_2+1)}{2} + s_1 =$$

$$= \frac{1}{6}[(x_1+x_2+x_3)^3 + 3(x_1+x_2+x_3)^2 +$$

$$+ 3(x_1+x_2)^2 + 11x_1 + 5x_2 + 2x_3].$$

Попробуйте обобщить задачу в другом направлении: найти формулу, которая устанавливает соответствие между всеми точками (x, y) на плоскости с целочисленными координатами и всеми целыми (или целыми неотрицательными) числами n. Может ли такая формула записываться многочленом второй степени $n=f(x, y)$, как формула (1)?

M79

Две точки P и Q движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью v. Докажите, что на плоскости существует такая неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

Пусть O — точка пересечения данных прямых; P_0 и Q_0 — положения точек в тот момент времени t_0, когда они находятся на одинаковом расстоянии от точки O (t_0 находится ровно посередине между моментами времени, когда одна и другая точки проходят через точку O); A — точка пересечения перпендикуляров к данным прямым, восставленных соответственно в точках P_0 и Q_0.

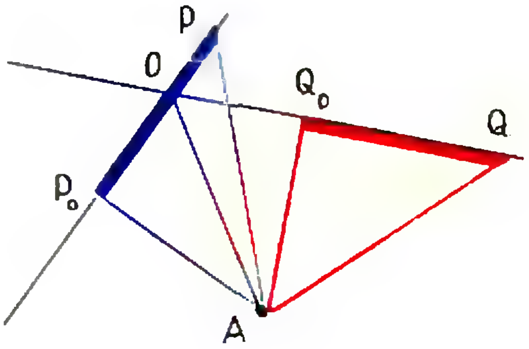


Рис. 6.

Докажем, что точка A — та самая неподвижная точка, существование которой утверждается в условии.

Частный случай, когда точки P_0, Q_0 (и A) совпадают с O, очевиден. В общем случае (рис. 6) ясно, что треугольники AP_0O и AQ_0O равны, поэтому $AP_0=AQ_0$. Пусть P и Q — положения точек в произвольный момент времени t (отличный от t_0). Тогда $PP_0=QQ_0$ (точки движутся с одинаковой скоростью), треугольники PP_0A и QQ_0A равны по двум катетам, следовательно, $AP=AQ$.

Из нашего решения видно, что на самом деле верно более сильное утверждение, чем равенство расстояний от точки A до соответствующих друг другу точек P и Q: если повернуть одну из данных прямых вокруг точки A (на угол P_0AQ_0) так, чтобы она совпала с другой, то в любой момент времени точка P совпадает с соответствующей точкой Q.

M80

В таблице $m \times n$ расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, что, повторив такую операцию несколько раз, можно получить таблицу, у которой сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке будут неотрицательны.

Будем менять знаки у строк или столбцов, в которых сумма чисел отрицательна. При каждом таком изменении знаков общая сумма всех чисел в таблице увеличивается. Следовательно, одна и та же таблица не может получиться дважды. Но всего разных таблиц, которые можно получить изменениями знаков в строках и столбцах из данной таблицы, конечное число (а именно 2^{m+n}). Поэтому через несколько шагов мы придем к таблице, с которой уже нельзя проделать указанную операцию, то есть у которой сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательна.

Можно доказать, что на самом деле для таблицы $m\times n$ всегда можно обойтись не более чем $\frac{m+n}{2}$ операциями.

Правильные решения прислали: *В. Копылов, Е. Родионов, И. Игнатьев, М. Илларионов, В. Кривицкий, А. Жумадильдаев, А. Черняк, А. Вольберг, Н. Корниенко, Э. Туркевич.*

M81

Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята произвольная точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на прямую A_2P, а из вершины A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Повернем квадрат (рис. 7) вокруг его центра на 90° так, чтобы вершина A_2 перешла в A_1, A_3 — в A_2, A_4 — в A_3 и A_1 — в A_4. Тогда каждая из прямых A_2P, A_3P, A_4P, A_1P перейдет в соответствующий перпендикуляр (ведь она повернется на 90°!), поэтому ясно, что все четыре перпендикуляра пройдут через одну точку P', в которую переходит при повороте точка P.

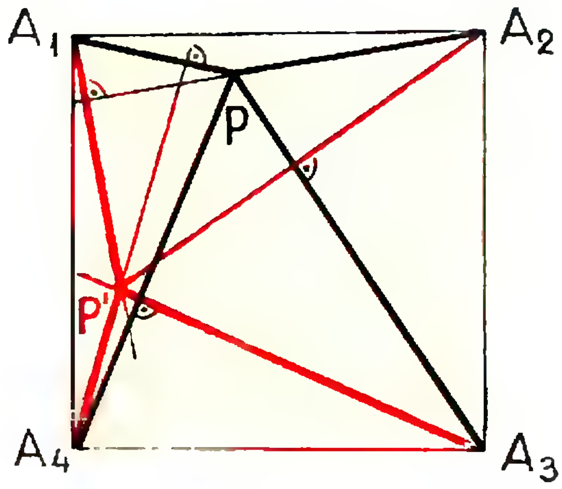


Рис. 7

M82

На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Известно что если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных автомашин.

Наиболее бесхитростное доказательство — индукцией по числу n автомашин — проводится так. Случай $n=1$ очевиден. Предположим, что для n машин утверждение доказано. Пусть машин $n+1$. Тогда среди них найдется такая машина A, которая может, пользуясь лишь имеющимся в ней бензином, доехать до следующей машины B (это легко доказывается «от противного»). Выльем из машины B бензин в A, и уберем B с дороги. Среди оставшихся n машин, по предположению индукции, найдется такая, которая может объехать всю дорогу, забирая по пути бензин у остальных автомашин. Ясно, что та же машина может сделать это и в первоначальной ситуации, когда на дороге $n+1$ машина: на участке от A до B у нее заведомо хватит бензина (из машины A), а на остальных участках у нее ровно столько же бензина, сколько в случае n машин.

Многие читатели заметили, что задача сводится к такой: по окружности выписано n чисел, сумма которых положительна; тогда найдется такое число, что оно само положительно, сумма его со следующим положительна, сумма со следующими двумя положительна и т. д. до суммы $n-1$ числа. (Достаточно около каждой машины написать число, равное разности между количеством имеющегося в ней бензина и количеством бензина, который нужен, чтобы доехать до следующей машины.) Эту задачу большинство читателей решали методом, описанным в книжке «Математические соревнования», ч. I *), задачи 76—77.

M83

Докажите, что числа 1, 2,..., n ни при каком n нельзя разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе равнялось произведению чисел в другой.

Как заметили многие читатели, утверждение задачи следует из такой теоремы: для любого $x > 1$ между x и $2x$ содержится хотя бы одно простое число. О первом доказательстве этой теоремы («постулата Бертрана»), полученном П. Л. Чебышевым, рассказывалось в «Кванте» № 5, 1970.

) Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь., Математические соревнования. Арифметика и алгебра, «Наука», дополнительная серия «Библиотечки физико-математической школы» вып. 3, 1970.

Возьмем простое p такое, что $\frac{n}{2} < p < n$. Оно может войти лишь в одну группу чисел, а «уравновесить» его нечем, поскольку $2p > n$. Теперь утверждение задачи следует из теоремы об единственности разложения на простые множители.

Решений, не использующих постулат Бертрана, мы не получили.

И. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф89—Ф91

Ф89

Напряженность электрического поля в электромагнитной волне частоты $\omega = 2\cdot10^{16}$ $сек^{-1}$, модулированной по амплитуде с частотой $\Omega = 2\cdot10^{15}$ $сек^{-1}$, меняется со временем по закону $E = a\,(1 + \cos\Omega t)\cos\omega t$, где a — постоянная. Определить энергию электронов, выбиваемых этой волной из атомов газообразного водорода с энергией ионизации $W = 13{,}5$ эв.

Атом поглощает монохроматический свет частоты ω порциями (квантами) энергии, равными $\hbar\omega$, где $\hbar = 1{,}05\cdot10^{-27}$ эрг·сек — постоянная Планка, деленная на 2π.

Так как $E = a\,(1 + \cos\Omega t)\ \cos\omega t = a\cos\omega t + \frac{1}{2}a\cos[(\omega - \Omega)t] + \frac{1}{2}a\cos[(\omega + \Omega)t]$, то наша модулированная по амплитуде волна представляет собой сумму трех монохроматических волн с частотами ω, $\omega_1 = \omega - \Omega$ и $\omega_2 = \omega + \Omega$. Кванты энергии, соответствующие этим волнам, соответственно равны

$$W_1 = \hbar\omega = 1{,}05\cdot10^{-27}\cdot2\cdot10^{16} = 2{,}1\cdot10^{-11}\ эрг,$$

$$W_2 = \hbar\omega_1 = 1{,}05\cdot10^{-27}\cdot1{,}8\cdot10^{16} = 1{,}89\times\times10^{-11}\ эрг,$$

$$W_3 = \hbar\omega_2 = 1{,}05\cdot10^{-27}\cdot2{,}2\cdot10^{16} = 2{,}31\cdot10^{-11}\ эрг.$$

В то же время энергия ионизации атома водорода составляет

$$W = 13{,}5\ эв = 13{,}5\cdot1{,}6\cdot10^{-12}\ эрг = 2{,}16\times\times10^{-11}\ эрг.$$

Эта энергия больше W_1 и W_2. Поэтому первая и вторая волны не могут ионизовать атом водорода. Это может сделать только третья волна. Энергия выбитых ею из атомов водорода электронов $W_э$ будет равна разности $W_3 - W = 1{,}5\times10^{-12}$ эрг.

Правильное решение прислала *Т. Ростовцева* (Коканд Узбекской ССР).

Ф90

Идеальный газ массы m, находящийся при температуре T, охлаждается изохорически так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определить произведенную газом работу. Молекулярный вес газа μ.

Диаграмма процесса показана на рисунке 8. Работа, произведенная газом, равна $A = p_2(V_2 - V_1)$. Так как точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, то $p_1V_1 = p_2V_2$ и $V_2 = V_1\,\frac{p_1}{p_2}$.

Поэтому

$$A = p_2V_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = \frac{1}{n}p_1V_1\,(n - 1).$$

Но $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT$, следовательно,

$$A = \frac{m}{\mu}RT\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Эта задача оказалась легкой и ее правильное решение прислали более 70 читателей нашего журнала.

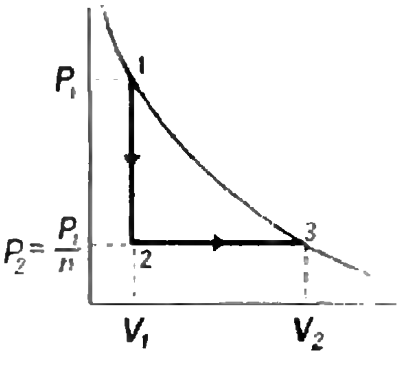


Рис. 8.

Ф91

Для питания прибора напряжение на его входе нужно устанавливать как можно точнее. Для этого используются два реостата, соединенных так, как показано на рисунке 9. Длины реостатов одинаковы, а сопротивление одного из них в 10 раз больше сопротивления другого. Как поступить, чтобы установить напряжение как можно точнее? Во сколько раз точность установки напряжения будет больше, чем в том случае, когда используется лишь один реостат?

Как следует включить реостаты, если для питания прибора нужно устанавливать как можно точнее не напряжение, а ток?

Реостат R_1 слабо влияет на напряжение на приборе. Поэтому ясно, что сначала надо установить напряжение на приборе с помощью сопротивления R_2 и затем подправить его реостатом R_1.

Действительно, если длина реостата равна l, а неточность при установке реостата составляет Δl, то неточность в сопротивлении реостата R_2 равна $\Delta l \frac{R_2}{l} = \frac{\Delta l}{l} R_2$, а неточность в установке сопротивления реостата R_1 равна $\frac{\Delta l}{l} R_1 = \frac{1}{10} \frac{\Delta l}{l} R_2$, то есть в 10 раз меньше неточности установки сопротивления реостата R_2. Поэтому при той тактике, о которой мы говорили, сопротивление реостатов удастся подобрать в 10 раз точнее, чем при использовании только одного сопротивления R_2. Во столько же раз точнее будет установлено и падение напряжения на реостатах, и падение напряжения на приборе.

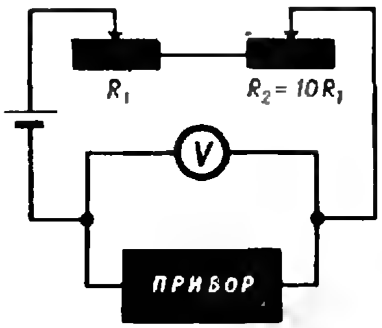


Рис. 9.

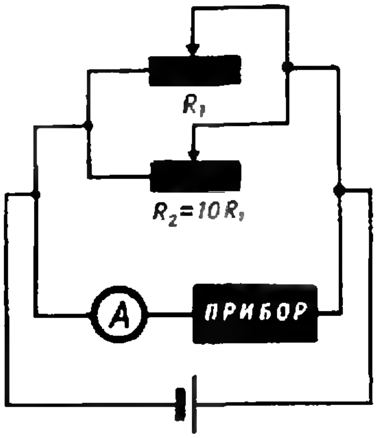


Рис. 10.

Так как заранее не очевидно, в какую сторону мы ошибемся, устанавливая сопротивление R_2, то есть что нам придется делать с помощью реостата R_1 — увеличивать или уменьшать сопротивление, то перед установкой реостата R_2 движок реостата R_1 нужно установить посередине реостата.

Если нам нужно устанавливать как можно точнее не напряжение на приборе, а ток, идущий через него, то в этом случае реостаты должны быть включены параллельно прибору как шунт, причем основным в этом случае будет реостат с меньшим сопротивлением: именно через него будет идти наибольший ток.

Второй реостат с большим сопротивлением нужно включить параллельно первому (рис. 10) и ток устанавливать так: вначале установить движок реостата R_2 посередине, затем установить ток с помощью реостата R_1 и подправить его с помощью реостата R_2.

Так как ток, идущий через реостат, равен $I = \frac{U}{R}$, то при неточности установки сопротивления реостата ΔR неточность в установке тока будет равна $\Delta I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R + \Delta R} = \frac{U}{R(R + \Delta R)} \approx \frac{U}{R^2} \Delta R$. Используя сопротивление R_1, мы получим неточность установки тока $\frac{U}{R_1^2} \frac{\Delta l}{l} R_1 = \frac{U}{U_1} \frac{\Delta l}{l}$, а с помощью реостата R_2 неточность установки тока станет равной $\frac{U}{R_2} \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{10} \frac{U}{R_1} \frac{\Delta l}{l}$, то есть будет в 10 раз меньше, чем при использовании только реостата R_1.

Правильное решение прислали *А. Александров* (Глазов, УАССР), *В. Ковалев* (Коммунарск Ворошиловградской обл.), *А. Демидов* (Москва), *Н. Федин* (Омск).

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

В 1972 году на страницах «Кванта» будет продолжена публикация материалов под рубрикой «Практикум абитуриента». Поступающие в редакцию письма показывают, что этот раздел вызывает живой интерес у многих читателей журнала. Мы благодарны всем, кто высказал нам свои замечания и предложения.

Конечно, нет никакой возможности осветить все вопросы, входящие в программу вступительных экзаменов по математике и физике. Да в этом и нет необходимости — эти вопросы изучаются в школе и подробно рассмотрены в школьных учебниках. Поэтому редакция наметила лишь такие темы, которые в том или ином виде наиболее часто используются при решении конкурсных задач и вызывают затруднения у поступающих.

Мы предполагаем, например, рассказать о задачах на комбинации пространственных тел, о требованиях, предъявляемых к математическому определению, о решении задач по стереометрии и разумном использовании чертежа в геометрических задачах. По физике будут опубликованы статьи, касающиеся таких вопросов, как закон сохранения импульса, решение задач на тепловые процессы, законы тока и другие.

Рассмотрение теоретических вопросов в этих статьях сопровождается разбором конкретных примеров, взятых, как правило, из вариантов вступительных экзаменационных работ. В конце каждой статьи будут помещены задачи для самостоятельного решения, помогающие читателям проверить, насколько хорошо они усвоили прочитанное. Эти задачи, в основном, также берутся из вариантов вступительных экзаменов последних лет.

Учитывая многочисленные пожелания читателей, в порядке информации мы будем продолжать помещать также варианты задач, предлагавшихся на письменных экзаменах в различных вузах страны в 1971 году. Знакомство с этими материалами позволит будущим абитуриентам конкретно представить себе, что такое письменный приемный экзамен, заранее попробовать свои силы в решении набора задач за ограниченное время (обычно 4 часа). Например, можно рекомендовать будущим абитуриентам устраивать себе самостоятельно «экзамен», решая за 4 часа весь вариант и записывая его, а затем самостоятельно (или с помощью товарища) проверять его. Такая тренировка, максимально приближенная к условиям экзамена, оказывается особенно результативной. Отметим только, что приступать к ней надо, достаточно хорошо изучив теоретические разделы.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

А. М. Григорьев

Общие сведения

Иррациональным принято называть уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала. Так, уравнение $\sqrt[5]{(x-2)^5} = x^2 - 21$ следует назвать иррациональным, хотя оно быстро преобразуется к рациональному виду $x - 2 = x^2 - 21$. А вот уравнение $x^2 + x\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0$, несмотря на наличие радикалов, не является иррациональным — это обычное квадратное уравнение (быть, может, с несколько необычными коэффициентами). Отметим, что *при решении иррационального уравнения речь всегда идет об отыскании только действительных корней*.

Область допустимых значений (ОДЗ) иррационального уравнения состоит из тех значений неизвестного, при которых неотрицательны одновременно все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Перейдем к рассмотрению некоторых приемов решения иррациональных уравнений.

Возведение уравнения в степень

Наиболее общий путь решения иррациональных уравнений состоит в возведении обеих частей уравнения в некоторую степень и последующем «освобождении» от радикалов по формуле $\left(\sqrt[n]{\varphi(n)}\right)^n = \varphi(x)$. В основе этого способа лежат следующие хорошо известные утверждения*).

Теорема 1. *Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному.*

Напомним, что *два уравнения называются равносильными (эквивалентными), если любое решение первого уравнения является решением второго, и обратно, любое решение второго уравнения является решением первого.*

Теорема 2. *Пусть множество M есть ОДЗ иррационального уравнения или часть этой области, и пусть для всех значений из M обе части уравнения неотрицательны. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же четную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному на множестве M.*

Напомним, что *два уравнения называются равносильными на некотором множестве, если они имеют одни и те же корни, принадлежащие этому множеству.*

Замечание. Вообще говоря, при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние решения *). Теорема 2 дает достаточные условия для того, чтобы посторонние корни не появлялись. Важно подчеркнуть также, *что возведение обеих частей уравнения в степень и преобразование радикалов никогда не влекут потери корней.*

1. *Решить уравнение*

$$\sqrt[5]{24x - 2x^3} = x.$$

Согласно теореме 1 решениями этого уравнения служат действительные корни уравнения $24x - 2x^3 = x^5$. А они легко находятся: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. Проверка в данном случае, очевидно, не нужна.

---

*) Их подробный анализ можно найти, например, в книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы», «Наука», 1970.

*) См. «Квант» № 5, 1970, стр. 50.

2. *Решить уравнение*

$$\sqrt{5x-6}=x.$$

ОДЗ: $x\geqslant{}^6/_5$. При таких значениях x обе части уравнения неотрицательны. Поэтому по теореме 2 (в качестве множества M возьмем ОДЗ) решениями данного уравнения служат лишь те корни уравнения $5x-6=x^2$, которые лежат в ОДЗ. Так как корни $x_1=2$, $x_2=3$ этого квадратного уравнения удовлетворяют неравенству $x\geqslant{}^6/_5$, то оба они являются корнями исходного уравнения. И в данном случае проверка полученных значений подстановкой в исходное уравнение не нужна.

3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x-1}.$$

ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases}x^2-3\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда $x\geqslant\sqrt{3}$. Возводя обе части уравнения в квадрат и пользуясь формулами преобразования радикалов, приходим к квадратному уравнению $x^2-x-2=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-1$. Однако ОДЗ принадлежит лишь значение $x_1=2$; оно и является единственным корнем исходного уравнения.

4. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}. \qquad (1)$$

ОДЗ: $x\geqslant-{}^1/_3$. Левая часть этого уравнения положительна (в ОДЗ), но правая часть может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому не стоит торопиться возводить обе части уравнения в квадрат — в результате могут появиться посторонние корни.

Этого легко избежать — достаточно переписать уравнение (1) в виде

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8.$$

Здесь обе части уже неотрицательны, и возведение в квадрат не приведет к появлению посторонних решений. Задача, таким образом, сводится к нахождению принадлежащих ОДЗ корней уравнения

$$\sqrt{3x^2+4x+1}=31-2x. \qquad (2)$$

Нам снова предстоит возвести обе части этого уравнения в квадрат, и снова перед нами та же опасность — могут появиться посторонние решения (правая часть уравнения (2) принимает в ОДЗ значения разных знаков).

Однако заметим, что ни одно значение x, при котором $31-2x<0$, не может служить корнем уравнения (2) (иначе положительное число оказалось бы равным отрицательному!). Иначе говоря, все корни уравнения (2) удовлетворяют неравенству $x\leqslant{}^{31}/_2$; нас же интересуют лишь те корни, для которых выполнено условие $x\geqslant-{}^1/_3$.

Следовательно, надо искать решения уравнения (2), принадлежащие промежутку $-{}^1/_3\leqslant x\leqslant{}^{31}/_2$. На основании теоремы 2 мы можем быть уверены, что на этом промежутке уравнение (2) равносильно уравнению

$$3x^2+4x+1=(31-2x)^2.$$

Лишь один корень $x=8$ получившегося квадратного уравнения удовлетворяет условию $-{}^1/_3\leqslant x\leqslant{}^{31}/_2$; он и служит решением уравнения (1). Проверка подстановкой, очевидно, не нужна.

5. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5. \qquad (3)$$

ОДЗ определяется как решение системы неравенств

$$\begin{cases}x^2+x-5\geqslant 0,\\ x^2+8x-4\geqslant 0.\end{cases} \qquad (4)$$

Мы, однако, можем не решать эту систему, но запомним, что любой корень уравнения (3) должен удовлетворять обоим неравенствам (4).

Конечно, все условия теоремы 2 выполнены — можно возводить уравнение (3) в квадрат, не опасаясь появления посторонних решений. Но увы! В данном случае эта операция нецелесообразна. Возведите обе части уравнения (3) в квадрат — и вы увидите, какое сложное уравнение получится.

Гораздо удобнее поступить так: перепишем уравнение (3) в виде

$$\sqrt{x^2+x-5} = 5-\sqrt{x^2+8x-4} \qquad (5)$$

и обе его части возведем в квадрат. Конечно, теперь теорема 2 не применима, и это преобразование может привести к появлению посторонних корней. Поэтому *необходимо будет сделать проверку* — она отсеет посторонние решения (если они появятся).

Итак, возведем обе части уравнения (5) в квадрат; получим

$$10\sqrt{x^2+8x-4} = 7x+26.$$

К этому уравнению применим еще раз те же операции. Но предварительно отметим, что все его корни должны удовлетворять условию $7x+26\geqslant 0$, то есть $x\geqslant -{}^{26}/_{7}$.

В результате мы приходим к уравнению

$$51x^2+436x-1076=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=-{}^{538}/_{51}$. Заметим, что $x_2<-{}^{26}/_{7}$, остается проверить значение $x_1=2$ прямой подстановкой в исходное уравнение (3). Оказывается, что оно является корнем уравнения (3).

Обратите внимание: в ходе решения нам так и не потребовалось решать систему неравенств (4), описывающую ОДЗ исходного уравнения.

Введение вспомогательных неизвестных

Удачно введенные вспомогательные неизвестные иногда позволяют получить решение быстрее и проще.

6. *Решить уравнение*

$$(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0.$$

Перепишем уравнение так:

$$x^2+3x-10+3\sqrt{x^2+3x}=0.$$

Видно, что если ввести вспомогательное неизвестное $y=\sqrt{x^2+3x}$, то уравнение примет вид $y^2+3y-10=0$, откуда $y_1=-5$, $y_2=2$.

Теперь задача сводится к решению уравнения $\sqrt{x^2+3}=-5$ и уравнения $\sqrt{x^2+3x}=2$. Первое из этих уравнений решений не имеет, а из второго получаем

$$x_1=-4,\quad x_2=1.$$

7. *Решить уравнение*

$$\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4. \qquad (6)$$

Возведение обеих частей этого уравнения в четвертую степень не обещает ничего хорошего. Если же положить

$$y=\sqrt[4]{47-2x}\,,\quad z=\sqrt[4]{35+2x}, \qquad (7)$$

то уравнение (6) переписывается так: $y+z=4$. Поскольку мы ввели две новые неизвестные функции, надо найти еще одно уравнение, связывающее y и z. Для этого возведем равенства (7) в четвертую степень и заметим, что $y^4+z^4=82$.

Итак, надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y+z=4,\\ y^4+z^4=82;\end{cases}$$

она имеет два (действительных) решения: $y_1=1$, $z_1=3$; $y_2=3$, $z_2=1$. Остается решить систему (двух уравнений с одним неизвестным!)

$$\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=3,\\ \sqrt[4]{35+2x}=1\end{cases}$$

и систему

$$\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=1,\\ \sqrt[4]{35+2x}=3;\end{cases}$$

первая из них дает $x_1=-17$, вторая дает $x_2=23$.

Умножение обеих частей уравнения на функцию

Иногда иррациональное уравнение удается решить довольно быстро, если обе его части умножить на удачно подобранную функцию. Конечно, при умножении обеих частей уравнения на некоторую функцию могут появиться посторонние решения, ими могут оказаться нули самой этой функции*). Поэтому предлагаемый метод требует обязательного исследования получающихся значений.

8. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{4}x = (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1). \qquad (8)$$

Умножим обе части уравнения на одну и ту же функцию $h(x) = \sqrt{1+x} + 1$. Выражение $\sqrt{1+x} + 1$ называется сопряженным для выражения $\sqrt{1+x} - 1$. Цель такого умножения, думается, ясна: использовать тот факт, что произведение двух сопряженных выражений уже не содержит радикалов.

В результате этого умножения и очевидных преобразований приходим к уравнению

$$x(\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3) = 0.$$

Оно имеет единственный корень $x=0$, так как уравнение $\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3 = 0$ решений не имеет (проверьте это!).

Подстановка в уравнение (8) показывает, что $x=0$—корень. Впрочем, можно обойтись и без подстановки: функция $h(x)$ нигде в нуль не обращается, и поэтому умножение обеих частей уравнения (8) на эту функцию не приводит к появлению посторонних решений.

9. *Решить уравнение*

$$\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x. \qquad (9)$$

Умножим обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5},$$

сопряженное для выражения, стоящего в левой части. После очевидных преобразований получим

$$x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}) = 2x.$$

Это уравнение имеет корень $x=0$, однако исходному уравнению (9) это значение не удовлетворяет. Поэтому можно считать, что $x \neq 0$, и сократить обе части последнего уравнения на x:

$$\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} = 2. \qquad (10)$$

Складывая уравнения (9) и (10), получим уравнение.

$$2\sqrt{2x^2+3x+5} = 2 + 3x,$$

решение которого не представляет затруднений. Оно имеет корень $x=4$ (убедитесь в этом!).

Проверка, обязательная в данном случае, показывает, что это значение удовлетворяет уравнению (9).

Упражнения

Решить уравнения:

1. $\sqrt{25-x} = 2 - \sqrt{9+x}$.

2. $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$.

3. $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x} + \dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12} = \dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}$.

4. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$.

5. $\sqrt{x - \sqrt{x-2}} + \sqrt{x + \sqrt{x-2}} = 2$.

6. $\dfrac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2-16} - 6$.

7. $\sqrt[3]{4-4x+x^2} + \sqrt[3]{49+14x+x^2} = 3 + \sqrt[3]{14-5x-x^2}$.

8. (МГУ, физфак, 1968.) Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения $x + \sqrt{x} = a$.

9. (МГУ, физфак, 1968.) Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения $a\sqrt[4]{1+x} + \dfrac{a}{x}\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{x}$.

---

*) См. «Квант» № 5, 1970, стр. 49—50.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\lg\sqrt{x} + 2^{y+1} = 3, \\ 24\lg x + 2\cdot 4^{y+1} = 37. \end{cases}$$

2. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{3\cos 2x} < \sqrt{2}\cos x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

3. В поле работают тракторные бригады, содержащие по одинаковому количеству гусеничных тракторов и по одинаковому количеству колесных тракторов, причем в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колесных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных — в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число всех тракторов превысит 20. Определить количество бригад, работающих в поле, и число гусеничных и колесных тракторов в каждой бригаде.

4. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна c, а угол при вершине A равен α. На продолжении гипотенузы AB за точку B взята точка M, а на продолжении катета AC за точку C взята точка N таким образом, что $BM = CN$. Найти длину общей хорды двух окружностей, описанных около треугольников ABC и AMN.

5. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен α, причем $\alpha < \pi/3$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна h. Дана треугольная пирамида, имеющая ту же вершину S. Основанием ее является треугольник, одна вершина которого лежит на середине большей стороны прямоугольника $ABCD$, а две другие — на его диагоналях, причем проекция вершины S на плоскость основания лежит внутри этого треугольника. Найти объем треугольной пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

Отделение общей геологии геологического факультета

1. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin y = 2\cos^2 30^\circ, \\ 2\cos 2x - \sin y = \sin 540^\circ. \end{cases}$$

2. Автозавод изготовляет легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 машин больше, чем в первый день, а грузовых — на 50 машин больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1,2 раза больше, чем в первый?

3. При каких значениях a корни квадратного уравнения

$$x^2-(2a+1)x+2a=0$$

равны между собой?

4. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Определить радиус r, если $AB = 12$ *см*, $R = 8$ *см*.

5. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_9 27.$$

Отделение геофизики геологического факультета

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}5\cdot 3^{x+1} + 7{,}5\cdot 5^{y-1} = 12, \\ 2\cdot 9^x + 5^y = 23. \end{cases}$$

2. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} \leqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\sin x\left(\cos x - \frac{3}{2}\right).$$

4. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов чисел a_1, a_3, a_5 по основанию 3 равна 9. Определить числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, если $\log_3 a_4$ вдвое больше $\log_3 a_2$.

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$ *см*, $BC = 4$ *см*, $AC = \sqrt{7}$ *см* проведена медиана BD. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются BD в точках M и N соответственно. Определить длину отрезка MN.

Химический факультет

1. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$. E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен 60°. Доказать, что прямая EK параллельна прямой AB, и найти площадь трапеции $ABEK$.

2. Решить уравнение:

$$2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)}+x=x^{0,5x^2}+\cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: 1-й и 2-й — емкостью по 800 $м^3$, а 3-й — емкостью 400 $м^3$. 1-й и 2-й экскаваторы вместе вынимают за час грунта втрое больше, чем 3-й. 1-й и 3-й экскаваторы начали работу одновременно, а 2-й — в тот момент, когда 1-й вынул 300 $м^3$ грунта. Когда 3-й экскаватор выполнил 2/3 своей работы, 2-й вынул 100 $м^3$ грунта. Первым выполнил свое задание 3-й экскаватор. Сколько грунта вынул 1-й экскаватор к моменту, когда 3-й закончил рыть свой котлован?

4. Решить неравенство:

$$1-\sqrt{\frac{1}{2}+\log_3\sin x-\log_3\cos x}>0.$$

5. Правильная прямая треугольная призма $ABCA'B'C'$ описана около шара радиуса r. Точка M — середина бокового ребра BB', точка N — середина бокового ребра CC'. В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найти объем этого цилиндра.

Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Физико-математический факультет

1. Пункт A расположен на расстоянии s *км* от пункта B. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, а через T часов в том же направлении выехал велосипедист. Велосипедист догнал пешехода в p *км* от A, доехал до B и сразу повернул обратно. Проехав p *км* от B, велосипедист снова встретил пешехода и, продолжая путь, вернулся в A позднее, чем пешеход пришел в B. На сколько раньше пешеход пришел в B, чем велосипедист вернулся в A?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}2u+v+w=6,\\3u+2v+w=9,\\3u^3+2v^3+w^3=27.\end{cases}$$

3. Решить неравенство:

$$\cos x\cdot\cos 3x+\cos^2 2x<-\frac{1}{4}.$$

4. В шар радиуса R вписана пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α. Определить боковую поверхность пирамиды.

Инженерный факультет

1. Расстояние между двумя городами, равное 600 *км*, товарный поезд проходит на 8 часов медленнее пассажирского. Если скорость каждого поезда увеличить на 10 *км/час*, то пассажирский поезд будет проходить тот же путь только на 5 часов быстрее товарного. Определить скорость каждого поезда.

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x\cdot(\operatorname{ctg} x-1)=1+\operatorname{ctg} x.$$

3. Решить уравнение

$$|x^2-2x-4|=3x-2.$$

4. Высота цилиндра равна высоте конуса. Боковая поверхность цилиндра относится к боковой поверхности конуса как 3 : 2. Кроме того, известно, что угол, составленный образующей конуса с плоскостью основания, равен α. Найти отношение объема цилиндра к объему конуса.

Экономический факультет

1. На одном из двух станков обрабатывают партию деталей на три дня дольше, чем на другом. Сколько дней продолжалась бы обработка этой партии деталей каждым станком в отдельности, если известно, что при совместной работе на этих станках в 3 раза большая партия деталей была бы обработана за 20 дней.

2. Решить уравнение

$$\frac{2^x+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}.$$

3. Решить уравнение

$$2-2\sin^2 3x-\operatorname{tg}^2 3x=0.$$

4. Найти объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, и двугранный угол при основании равен 60°.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

ПРОЧТИТЕ ЭТУ КНИГУ

В этом номере публикуются фрагменты только что вышедшей из печати книги известного английского педагога и популяризатора математики Уолтера Уорика Сойера *). Понятно, что исключительно трудно на достаточно высоком и в то же время доступном для широкой аудитории уровне показать панораму из важных разделов современной математики без прикрас, без туманностей и искажений.

У. У. Сойер — один из тех авторов, кому это удается. Он увлекательно и со знанием дела рассказывает о некоторых особенностях творческой деятельности профессионалов-математиков.

Надеемся, что чтение этой книги доставит вам удовольствие и позволит заглянуть в мир математики и математиков. Чтобы разобраться в прочитанном, «достаточно самых смутных воспоминаний о школьной математике».

Публикацию подготовили В. Н. Березин и М. Л. Смолянский.

Почти все математические открытия имеют в своей основе очень простую идею. Учебники часто скрывают этот факт. Они обычно содержат громоздкие выводы и этим создают впечатление, что математики — это люди, которые всю жизнь просиживают за письменными столами и переводят тонны бумаги. Это чепуха. Многие математики очень успешно работают в ванной, в кровати, ожидая поезда или катаясь на велосипеде (предпочтительно при слабом уличном движении). Математические вычисления производятся до или после открытия. Само открытие возникает из основных идей.

Немногие представляют себе, как огромна сфера действия современной математики. Вероятно, было бы легче овладеть всеми существующими языками, чем всеми математическими знаниями, известными в настоящее время. Мне кажется, что все языки можно было бы выучить за одну человеческую жизнь; а всю математику, конечно, нет.

Открытия, которые делают математики, столь разнообразны по своему характеру, что однажды кто-то, видимо, в отчаянии, предложил определить математику как «все, чем занимаются математики». Казалось, что только такое широкое определение может охватить все, что относится к математике. Математики решают проблемы, которые в прошлом не считались математическими, и трудно предсказать, чем они еще будут заниматься в будущем.

Точнее было бы определение: «Математика — это классификация всех возможных задач и методов их решения». Это определение, пожалуй, тоже расплывчато, так как оно охватывало бы даже такие рубрики, как газетные объявления «Обращайтесь со всеми вашими сердечными заботами к тете Минни», что мы никак не имеем в виду.

Для целей нашей книги достаточно было бы определения: «Математика — это классификация и изучение всех возможных закономерностей». Слово «закономерность» здесь используется в таком смысле, с которым многие могут не согласиться; а именно в самом широком смысле, как название любого рода закономерностей, которые могут быть познаны умом. Жизнь, особенно интеллектуальная жизнь, возможна лишь потому, что в мире существуют определенные закономерности.

Любая математическая теория должна непременно сочетать в себе мощь метода, обусловливающую возможность применений к естественным наукам и красоту,

---

*) У. У. Сойер, Прелюдия к математике, М., «Просвещение», 1972.

стройность, столь привлекательную для ума. Нам кажется, что наше определение математики удовлетворяет обоим этим требованиям. Вся наука зиждется на закономерностях, имеющихся в природе; для практики важна классификация этих закономерностей. С другой стороны, ум должен получать удовольствие при изучении и познании закономерностей, поскольку необходимость и желание всегда связаны в природе. Если следование законам природы характерно как для человека, так и для животных, то естественно ожидать, что подчинение закономерностям доставляет удовольствие такое же, как удовлетворение любой другой человеческой потребности.

Интересно заметить, что «чистые» математики, движимые только чувством стройности и математической формы, часто приходили к выводам, которые в дальнейшем оказывались чрезвычайно важными для науки. Греки изучали свойства эллипса более чем за тысячу лет до того, как Кеплер использовал их идею для определения траекторий планет. Математический аппарат теории относительности был создан за тридцать-пятьдесят лет до того, как Эйнштейн нашел для него применение в физике. Подобных примеров можно было бы привести много. С другой стороны, много стройных теорий и проблем, которые любой «чистый» математик причислит к математике, возникли в связи с физикой.

Практики, как правило, не имеют представления о математике как способе классификации всех проблем. Обычно они стремятся изучать только те разделы математики, которые уже оказались полезными для их специальности. Поэтому они совершенно беспомощны перед новыми задачами. Вот тогда-то они и обращаются за помощью к математикам. (Это разделение труда между инженерами и математиками, вероятно, оправдано; жизнь слишком коротка для того, чтобы одновременно изучать и абстрактную теорию и инженерное дело.) Встреча математика и инженера обычно очень забавна. Инженер, ежедневно имея дело с машинами, настолько привыкает к ним, что не может понять чувств человека, видящего машину впервые. Он забрасывает своего консультанта-математика огромным количеством подробностей, которые для того ровным счетом ничего не значат. Через некоторое время инженер приходит к выводу, что математик — абсолютный невежда и что ему нужно объяснять простейшие вещи, как ребенку или Сократу. Но как только математик поймет, что делает машина или что от нее требуется, он переводит задачу на язык математических терминов. После этого он может заявить инженеру одно из трех:

1) что задача известна и уже решена;

2) что это новая задача, которую он может попытаться решить;

3) что это одна из тех задач, которую математики безуспешно пытались решить, и что еще могут пройти века, прежде чем будет сделан хотя бы шаг к ее решению, и что поэтому инженеру придется решать ее эмпирически.

Но не всегда практическую задачу удается отнести к какому-либо математическому типу. Иногда возникают задачи, совершенно не похожие на уже встречавшиеся. Ключ к их решению может быть найден совершенно случайно. Они даже могут напомнить какую-нибудь задачку, решенную на досуге. В подобном случае такая задача может лечь в основу новой крупной теории. Впрочем, эта доктрина, как и все доктрины, может привести к заблуждениям. Человек может потратить всю свою жизнь на решение пустяковых задач, теша себя надеждой, что они, возможно, станут началом новых областей математики. И так, конечно, может случиться; все зависит от умения определить, что может оказаться важным, и нет правила, которое позволило бы судить о правильности выбора. Любой математик согласится, что существуют теории, которые до сих пор не нашли практического применения, но чувствуется, что они являются очень важной частью математики. Когда-нибудь эти теории, «подобно эллипсу», найдут своего Кеплера и, «подобно тензорному анализу», своего Эйнштейна. Но во всяком случае, ими подготовлен мощный аппарат для решения определенного класса задач, если возникнет такая необходимость.

«Чистый математик» читает эту книгу со все возрастающим недовольством. Даже если предположить, что у него хватило терпения дочитать до сих пор, он, наверное, говорит: «Вы рассматриваете математику как нечто приносящее практи-

МАТЕМАТИКА

ческую пользу. Но математика не прикладная наука, она важна сама по себе. Важна не полезность математики, а ее стройность. Прикладная математика — это самая скучная часть математики. Посмотрите-ка на людей, работающих над теорией чисел, не имеющей никакого практического применения, — вы предложили бы им заниматься бухгалтерией?».

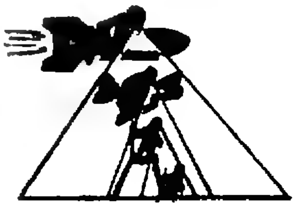
Для всех математиков характерна дерзость ума. Математик не любит, когда ему о чем-нибудь рассказывают, он сам хочет дойти до всего. Конечно, зрелый математик, узнав о каком-нибудь великом открытии, поинтересуется, в чем оно состоит, и не станет терять время на то, чтобы открывать уже открытое. Но я имею в виду юных математиков, у которых дерзость ума проявляется особенно сильно. Если вы, например, преподаете геометрию девяти — десятилетним ребятам и рассказываете им, что никто еще не смог разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля, вы непременно увидите, что один-два мальчика останутся после уроков и будут пытаться найти решение. То обстоятельство, что в течение двух тысяч лет никто не решил эту задачу, не помешает им надеяться, что они смогут это сделать в течение часового перерыва на обед. Это, конечно, не очень скромно, но и не свидетельствует об их самонадеянности. Они просто готовы принять любой вызов. А ведь в действительности уже доказано, что невозможно разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля. Их попытка найти решение — того же рода, что попытка представить $\sqrt{2}$ в виде рациональной дроби.

Хороший ученик всегда старается забежать вперед. Если вы ему объясните, как решать квадратное уравнение дополнением до полного квадрата, он непременно захочет узнать, можно ли решить кубическое уравнение дополнением до полного куба. Остальные ученики класса не задают подобных вопросов. С них хватит и квадратных уравнений, они не ищут дополнительных трудностей.

Вот это желание исследовать является второй отличительной чертой математика. Это одна из сил, содействующих росту математика. Математик получает удовольствие от знаний, которыми уже овладел, и всегда стремится к новым знаниям.

Я уже говорил об интересе к закономерностям — третьем необходимом качестве математика. Уже в самом начале арифметики встречаются закономерности. Например, из четырех одинаковых камней можно сложить квадрат, а из пяти — нельзя. Математические, как и музыкальные, способности проявляются очень рано, с четырех лет, а иногда и раньше. Один малыш однажды сказал мне: «Мне нравится слово September (сентябрь), ведь получается sEptEmbEr». Сам я никогда не замечал закономерного чередования гласных и согласных в этом слове. Оно действительно совершенно симметрично. Такому ребенку, конечно, понравится арифметика.

Даже в начальной школе можно развить навык наблюдения за математическими закономерностями. Большая часть ранних работ Гаусса явилась следствием его привычки делать вычисления и анализировать полученные результаты. Эрмит, один из крупнейших французских математиков, также подчеркивал, как часто наблюдательность ведет к математическим открытиям. Правда, одной наблюдательности мало, чтобы стать великим математиком.



Так же как умение замечать арифметические закономерности помогает школьнику решать арифметические примеры, умение наблюдать закономерности в алгебре помогает избегать ошибок или обнаруживать описки.

Иногда, рассматривая какое-нибудь произведение искусства, мы восхищаемся его красотой и чувствуем его значительность, но не можем сказать, в чем они состоят. Лучше и не пытаться это делать. Один поэт протестовал против варварского обычая заставлять детей пересказывать стихи своими словами. Он говорил, что единственный способ объяснить содержание стихотворения — это написать лучшее стихотворение. А от детей, этого, конечно, требовать нельзя.

Но в математике, как правило, бывает иначе. Если нам встречается закономерность, мы обязательно спрашиваем: «Почему она встречается? Что она означает?». И мы обычно можем найти ответы на эти вопросы. Итак, всякий раз, когда появляется закономерность, математик чувствует, что он обязан узнать, почему она появляется.

Чем шире круг вопросов, к которым применим какой-нибудь общий принцип, тем чаще он нам поможет выпутаться из затруднений. Пуанкаре говорил: «Предположим, я занялся сложным вычислением и с большим трудом, наконец, получил результат; но все мои усилия окажутся напрасными, если они не помогут предвидеть результат в других аналогичных вычислениях, если они мне не дадут возможность проводить их с уверенностью, избегая тех ошибок и заблуждений, с которыми я должен был мириться в первый раз».

После обобщения результат становится более полезным. Вас, возможно, удивит, что обобщение почти всегда также упрощает результат. Более общий вывод легче воспринять, чем менее общий.

Иллюстрацией может послужить следующая тривиальная задача. «В одном стакане десять ложек воды, в другом — десять ложек вина. Ложку воды из первого стакана переливают во второй. Смесь энергично взбалтывается, затем ложку полученной смеси переливают в первый стакан. Спрашивается, чего будет больше: вина в первом стакане или воды во втором?».

Очевидно, для того чтобы ответить на этот вопрос, можно проделать следующее вычисление. После того как ложку воды перелили во второй стакан, там стало 10 ложек вина и 1 ложка воды, то есть всего 11 ложек жидкости. Таким образом, одна ложка смеси содержит $\frac{10}{11}$ ложки вина и $\frac{1}{11}$ ложки воды. Переливаем одну ложку смеси в первый стакан: в нем теперь оказывается воды $9\frac{1}{11}$, а вина $\frac{10}{11}$ ложки, во втором стакане останется $\frac{10}{11}$ ложки воды и $9\frac{1}{11}$ ложки вина. Итак, мы видим, что количество вина в первом стакане в точности равно количеству воды во втором стакане.

Этот результат может показаться случайным, но если вы измените условия задачи, вы убедитесь, что всегда будут получаться одинаковые количества. Если дано x ложек воды и x ложек вина, то количество вина, которое попадет в первый стакан, неизменно будет оказываться равным количеству воды, попавшему во второй. Даже если начать с неравных количеств жидкости в стаканах, например, с x ложек воды и y ложек вина, и затем проделать все процедуры, как в первоначальной задаче, то в конце концов вина в первом стакане будет столько же, сколько воды во втором.

Это хороший пример математической безвкусицы. При четком и хорошем математическом доказательстве результат не появляется неожиданно в последней строчке, его логическая неизбежность должна быть видна на протяжении всего хода доказательства.

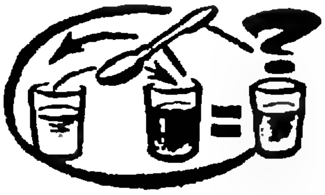
Приведенная выше тривиальная задача использует своего рода маскировку. *В ней даются ненужные сведения*, отвлекающие наше внимание от существа задачи. Лишним условием является предложение: «Смесь энергично взбалтывается». На самом деле существенно лишь то, что мы переливаем ложку жидкости из первого стакана во второй, и затем ложку смеси из второго стакана в первый. Совершенно не важно, какую жидкость переливают, важно лишь, что в конце концов оба стакана содержат такое же количество жидкости, как и в самом начале. А если это действительно так, то в первый стакан влили ровно столько вина, сколько нужно, чтобы заместить взятую оттуда воду. Конечно же, вода взятая из первого стакана, обнаружится во втором. Количества жидкости должны быть равны, и ни дроби, ни алгебра здесь ни при чем.

В общем виде эта задача выглядит так: имеется стакан воды и стакан вина, мы производим ряд операций с этими жидкостями, так что в итоге количество жидкости в каждом стакане равно первоначальному, тогда количество воды, попавшее в вино, должно равняться количеству вина в воде.

Это настолько очевидно, что едва ли стоит об этом говорить. Общий вид задачи гораздо проще, чем проделанные ранее вычисления. Область применения задачи в общем виде гораздо шире. Вы можете переливать ложки жидкости из одного стакана в другой и обратно сколько угодно раз, и все же общий принцип останется неизменным.

Таким образом, исследование задачи состоит в том, чтобы отбросить все лишние данные и оставить только существенно необходимые условия. Чем меньше данных, тем легче найти решение. Общая теорема редко содержит что-нибудь запутанное; ее цель — *обратить ваше внимание на действительно важные факты*.

В элементарной математике мы встречаем смесь всяких важных деталей. В высшей математике мы пытаемся разделить различные элементы и изучить каждый в отдельности. В этом смысле высшая математика, пожалуй, гораздо проще, чем элементарная.



Но нельзя судить о важности какого-либо математического исследования по отдельным частным задачам. Примером тому может служить топология. Топологию иногда называют «резиновой геометрией»— геометрией фигур, нарисованных на растягивающемся листе. В некотором смысле это так — она действительно рассматривает свойства таких фигур. Но ее значение связано с тем, что на эластичном листе нет постоянной длины. Там не может быть теорем, подобных теореме Пифагора. Можно лишь делать выводы типа: «эта кривая непрерывна, а та — разделена на две отдельные части». Непрерывность — это основное свойство, изучаемое топологией. В ней говорится о таких свойствах, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях. Так как существует очень много вещей, допускающих такого рода преобразования, топология охватывает широкий круг вопросов. Она все больше привлекает как чистых математиков, так и инженеров; с ее помощью можно доказать ряд удивительных результатов. Она сочетает в себе наивысшую степень обобщения с максимальной простотой.

Все, о чем мы говорили выше, имело целью расширить область вопросов, подвластных математике. Исследование, открытие закономерностей, объяснение смысла каждой закономерности, изобретение новых закономерностей по образцу уже известных— все эти виды деятельности расширяют область действия математики. С практической точки зрения становится исключительно трудным следить за всеми полученными результатами, и нельзя сказать, чтобы нагромождение не связанных между собой теорем представляло отрадное зрелище. Будучи и деловыми людьми и художниками одновременно, математики чувствуют потребность собрать все эти разрозненные результаты.

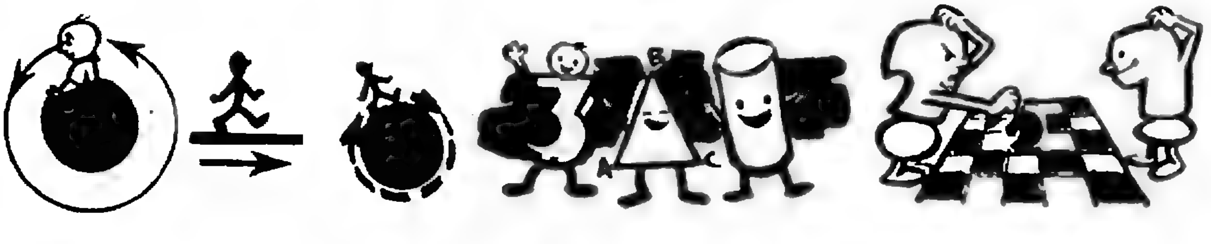
Не удивительно, что вся история математики состоит из чередующихся процессов «расширений» и «сокращений». Например, внимание математиков привлекает какая-нибудь задача, пишутся сотни статей, каждая из которых освещает лишь одну сторону истины. Вопрос разрастается. Затем какой-нибудь гений, опираясь на все данные, собранные с таким трудом, заявляет: «Все, что мы знаем, станет почти очевидным, если посмотреть на это вот с такой точки зрения». После этого никому, кроме историков математики, нет уже необходимости изучать сотни отдельных статей. Разрозненные выводы объединяются в одну простую доктрину, важные факты отделяются от шелухи, и прямой путь к желаемому выводу открыт для всех. Объем сведений, которые нужно изучать, сократился. Но это еще не конец. После того как новый метод стал всеобщим достоянием, возникают новые вопросы, для решения которых он недостаточен, и снова начинаются поиски ответов, снова публикуются статьи, снова начинается процесс «расширения».

Если бы можно было свести все знания к двум общим законам, математик не был бы удовлетворен. Он не успокоился бы до тех пор, пока не доказал бы, что оба эти закона основываются на одном принципе. Но и тогда он не был бы счастлив, наоборот, он стал бы несчастным, так как ему нечего было бы делать. Но перспектива такого застоя совершенно невероятна. Жизнь такова, что решение одной проблемы всегда создает новую проблему; иначе жизнь была бы невыносима. Всегда есть и всегда будет материал для изучения и трудности, которые нужно преодолевать.

И так будет всегда. И если бы оказалось, что вся существующая математика рассматривает только явления со свойствами A, B и C, математики немедленно спросили бы: «А что случится, если какой-нибудь предмет будет обладать только одним из них?». И они снова погрузились бы в работу.

Давайте на минуту посмотрим на различные закономерности с утилитарной точки зрения, а именно, с позиции человека, которому просто нужно сдать экзамен. Самый важный вопрос для экзаменующегося — это характер экзаменатора: что его интересует? Какие качества экзаменуемого он пытается проверить?

Многих экзаменаторов интересует только способность учащихся производить шаблонные операции: знает ли он таблицу умножения? Умеет ли пользоваться логарифмами? Умеет ли применять сотни других обычных приемов? Несомненно, что проверять знание учащимся обычных операций необходимо. Но еще с детства я считаю подобные проверки самыми скучными,



самыми тупыми экзаменами. И однако их очень любят посредственные учителя, которые считают, что их задача сводится просто к тому, чтобы натаскать класс на упражнениях «от сих до сих».

Другие экзаменаторы стараются поощрять инициативных учеников, пытающихся воспринять не только факты, но и вкус к предмету. Эти экзаменаторы хотят проверить предприимчивость, воображение и инициативу учащихся, поэтому они выискивают задачи, с помощью которых можно было бы проверить эти качества.

Некоторые учители считают, что учеников нельзя подготовить к подобным непредсказуемым экзаменам. Но это неверно. Конечно, нельзя, например, предсказать ход сражения. Но разве поэтому невозможно готовить военные кадры? Обучение офицеров лишь частично основывается (или должно основываться) на общих принципах, характерных для всех сражений; другой частью должно служить развитие их собственной инициативы. С этой целью будущий офицер на занятиях оказывается в целом ряде сложных непредвиденных ситуаций, где он должен проявить находчивость и инициативу. Точно такой же подход возможен к мирному обучению математике. Есть много общего между экзаменом и сражением.

Экзаменационный билет может содержать как рядовую задачу, так и проблемный вопрос, требующий сообразительности. Откуда знать студенту, какого рода задача перед ним? Ведь задачи не всегда различаются по внешнему виду.

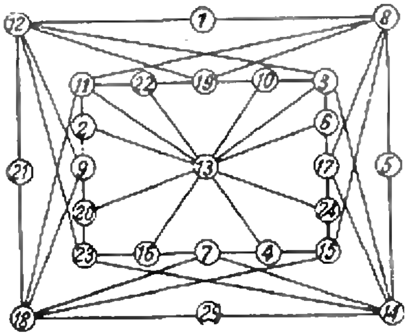
В задачах, которые ставит перед нами жизнь, экзаменатором является сама природа. И здесь опять чрезвычайно важно уметь определить, требует ли данная частная задача шаблонного подхода или она обладает каким-нибудь особым свойством, которое дает возможность найти более простое решение.

Рассмотрим один пример, иллюстрирующий одно из очень важных применений перевода, а именно представление задачи в такой форме, когда ответ можно видеть с первого взгляда. Такой перевод не меняет сущности задачи; если подходить с чисто математической точки зрения, можно сказать, что он вообще ничего не меняет. Но для нас перевод этот очень ценен, потому что он превращает незнакомое в знакомое.

Примером такого перевода является графическое представление функции. График легче понять с первого взгляда. Здесь мы производим перевод из алгебры в геометрию. Очень часто приходится делать обратный перевод — из геометрии в алгебру; ряд примеров такого типа вы найдете в этой книге. Можно также переводить одну геометрическую задачу в другую, но так, чтобы неизвестный тип задачи был переведен в известный.

Рассмотрим задачу с шахматным конем. Конь стоит в центре квадратной доски из 25 полей. Конь должен двигаться так, чтобы побывать в каждой клетке один и только один раз.

Размышляя над этой задачей, я нахожу довольно трудным отчетливо представить себе в уме, попадает ли наш конь в затруднительное положение, скажем, после дюжины ходов; глядя на клетки, на которых конь еще не был, я не могу сказать, соединятся ли они в простую цепь ходов. Нельзя ли несколько преобразовать нашу задачу, с тем, чтобы было яснее, что мы делаем? С точки зрения коня клетки 2 и 13 являются соседними: он может попасть из клетки 13 в клетку 2 за один ход; но, скажем, клетки 12 и 13 соседними не являются, так как конь не может перейти из одной в другую за один ход. Поэтому, если нас интересует только задача о ходе конем, мы можем совершенно забыть о действительной форме шахматной доски; для решения этой задачи достаточно нарисовать диаграмму из 25 клеточек и разместить их таким образом, чтобы поле 2 находилось рядом с полем 13, а поле 12 дальше от него. (В самом деле, конь должен сделать три хода, прежде чем он попадет из 13 в 12.)



1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Нарисовать такую диаграмму не такое уж простое дело, как это кажется на первый взгляд. Нужно проявить достаточно внимательности, чтобы не получилась слишком запутанная сеть линий. Главный принцип, которого я придерживался, — это соблюдение симметрии. Клетка 13 должна быть помещена в центре, а остальные — вокруг нее, но так, чтобы сохранить симметрию шахматной доски.

Теперь очень легко выбрать маршрут коня. Он может, например, отправиться из 13 в 10, затем пройти по «внутреннему кругу» (19, 22, 11, 2, 9, 20, 23, 16, 7, 4, 15, 24, 17, 6, 3) и перейти на «внешний круг» (12, 21, 18, 25, 14, 5, 6, 1).

Нам не нужно вдаваться в теорию ходов шахматного коня. Пример выбран не потому, что данная задача важна, а затем, чтобы показать, как умение наглядно представить себе суть задачи упрощает отыскание решения.

Введение в физику низких температур

На пути к абсолютному нулю

Обычно рассказ о физике низких температур начинают с 1911 года, когда голландский ученый Камерлинг-Оннес открыл принципиально новое явление — исчезновение сопротивления ртути при очень низких температурах. Для этого прежде всего потребовалось создать эти низкие, или, как теперь часто говорят, «гелиевые» температуры. Книга, о которой речь пойдет ниже, начинается с рассказа о событиях, начавшихся на треть столетия раньше. Называется она «На пути к абсолютному нулю» *), автор ее — профессор Курт Мендельсон — крупнейший английский физик-экспериментатор, член Лондонского Королевского общества. Эта книга рассчитана на массового читателя и охватывает очень широкий круг проблем физики низких температур.

Физика низких температур развивается в наши дни чрезвычайно интенсивно. Не будет преувеличением сказать, что многие достижения физики твердого тела вообще объясняются прежде всего тем, что мы научились ожижать газы и работать с ними при очень низких температурах.

Первые главы книги рассказывают об основных этапах криогенных (низкотемпературных) исследований, предшествовавших открытию сверхпроводимости.

Первые сообщения об удачных попытках ожижить кислород прозвучали в стенах Парижской Академии наук в конце 1877 года. Это практически одновременно удалось осуществить сразу двум ученым. Одним из них был горный инженер, член-корреспондент Парижской Академии Кальете, второй — физик Рауль Пикте из Женевы. Через неделю после первого своего сообщения Кальете объявил об ожижении азота. Значение этих опытов прежде всего в том, что была решена проблема получения жидкого воздуха. Не менее важно и то, что благодаря им началась интенсивная работа по изучению физики ожижения газов и созданию более совершенных ожижителей. К. Мендельсон подробно рассказывает о предшественниках и последователях Кальете и Пикте.

Прочитав вторую главу книги, читатель получит исчерпывающую информацию о физической картине конденсации, сможет хорошо разобраться в принципах работы ожижителей. Мендельсон подробно останавливается на экспериментальных исследованиях Эндрюса, рассказывает об уравнении Ван-дер-Ваальса и о диаграммах состояния вещества.

Важным этапом в развитии низкотемпературной физики явились исследования профессора Королевского института в Лондоне Джемса Дьюара. Им впервые в мае 1898 года был получен жидкий водород. Пятью годами раньше он продемонстрировал на лекции в Королевском институте знаменитый вакуумный сосуд, носящий ныне его имя. Из рассказа автора мы узнаем об исследователях, работавших одновременно и параллельно с Дьюаром, о сложных их взаимоотношениях, конкуренции и соперничестве.

Следующей проблемой, вставшей перед учеными после ожижения водорода, стало ожижение гелия. Это было осуществлено всего через десять лет после получения жидкого водорода, в 1908 году в Лейденском университете. Впервые это сделал Камерлинг-Оннес. С этим именем в физике низких температур связано не только ожижение гелия и открытие сверхпроводимости. Он был основателем крупнейшего и на многие годы единственного научного центра, в котором были выполнены фундаментальные физические эксперименты в этой новой области науки. Многие из исследований тех лет и до сих пор не потеряли своего значения. Мендельсон подробно рассказывает о первых исследованиях сверхпроводимости, поисках и сомне-

---

*) К. Мендельсон, На пути к абсолютному нулю, Атомиздат, М., 1971.

ниях. Знаменательно, что девизом Камерлинг-Оннеса было «К знанию через измерение». В Лейденской же лаборатории были поставлены и первые опыты по изучению самого жидкого гелия. Оказалось, например, что при понижении температуры жидкий гелий сжимается, а затем вновь увеличивается в объеме. Жидкий гелий оказался удивительным и во многих других отношениях. Необычное поведение его удалось понять после создания выдающимся советским физиком академиком Л. Д. Ландау теории сверхтекучести.

В первых четырех главах книги описан период, когда в физике низких температур пользовались понятиями доквантовой физики. Пятая глава книги посвящена третьему началу термодинамики. Существует мнение, что понятие об энтропии не следует излагать на «школьном» уровне, так как оно требует достаточно высокой степени образованности. К. Мендельсон вводит это понятие, рассказывает о его физическом содержании. Узнать из книги, что же такое энтропия — вполне по силам любознательному школьнику 9—10 классов.

Следующие две главы посвящены квантовым представлениям. Автор знакомит читателей с работами Нернста и Планка, Эйнштейна и Дебая, Паули и Зоммерфельда. Закон равенства атомных теплоемкостей *) при высоких температурах (открытый еще в 1820 году французскими учеными Дюлонгом и Пти), связь кинетической энергии молекул (атомов) газа с температурой, колебания атомов в кристаллической решетке, понятие о квантах и элементарная теория теплоемкости Эйнштейна, принцип неопределенности и статистика частиц, элементы электронной теории металлов — таковы *лишь* некоторые из тем, затронутых в книге. Каждое новое понятие вводится и обосновывается аккуратно, и почти нигде не требуется обращаться к каким-либо другим книгам. Мендельсон — превосходный популяризатор и в то же время выдающийся ученый, сам переживший большую часть тех событий, которые происходили в физике низких температур в нашем веке.

Очень интересны три последние главы. Одна из них посвящена принципам магнитного охлаждения, две другие — сверхпроводимости и сверхтекучести. Магнитное охлаждение — это способ получения температур *более* низких, чем температуры, получаемые при ожижении гелия и откачке его паров. Предложен он был почти одновременно Дебаем и Джиоком. Этот способ описан в статье А. К. Кикоина «Как получают низкие температуры», опубликованной в этом же номере журнала.

К. Мендельсон описывает много интересных опытов, демонстрирующих сверхпроводимость чистых металлов и сплавов, рассказывает об эффекте Мейсснера (выталкивании магнитного потока из металла при переходе его в сверхпроводящее состояние). Большое внимание уделяется работам по объяснению сверхпроводимости и свойств сверхпроводящих сплавов. Коротко рассказано о создании сверхпроводящих соленоидов и других технических устройств (например, магнитных насосов).

Заключает книгу рассказ о сверхтекучести. Читатель познакомится со свойствами сверхтекучего гелия, с термомеханическим и механо-калорическим эффектами, с работами зарубежных и советских ученых, среди которых в первую очередь следует назвать академиков П. Л. Капицу и Л. Д. Ландау.

Мендельсон, пожалуй, несколько скупо рассказывает о работах советских физиков. Этот пробел отмечен переводчиками книги. Быть может, следовало бы, издавая книгу на русском языке, написать небольшое дополнение, посвятив его исследованиям наших ученых.

Читатель получит большое удовольствие, прочитав книгу. Конечно, чтение ее от читателя-неспециалиста потребует серьезного и вдумчивого подхода. В книге нет математических выкладок, излагаются лишь физические принципы и идеи. Это одна из первых книг на русском языке, где рассказано об истории низкотемпературных исследований. Однако в первую очередь это книга по физике, а не по истории. Ее с большой пользой прочтут читатели журнала.

Ю. М. Чернышев

---

*) Атомная теплоемкость — это количество тепла, необходимое для того, чтобы нагреть один грамм-атом вещества на один градус.

Популярная книга для любителей астрономии

М. М. Дагаев
Наблюдения звездного неба

В начале 1972 года выйдет из печати второе дополненное издание книги опытного педагога и популяризатора астрономии М. М. Дагаева «Наблюдения звездного неба». Книга рассчитана на самый широкий круг читателей, в первую очередь на школьников. Интересующиеся естествознанием могут познакомиться по ней с основами астрономических знаний, любители наблюдений получат полезные указания, советы и необходимые справочные данные.

Книга начинается с описания созвездий. С помощью схематических карт небольших участков звездного неба автор показывает, как по одному знакомому созвездию отыскивать другие, например, ориентируясь на созвездие Большой Медведицы, внешний вид которого всем хорошо знаком, отыскать созвездия Малой Медведицы с Полярной звездой, Кассиопеи, Персея, Возничего, Льва, Близнецов и другие. Прочитав эту главу и воспользовавшись приложенной к книге подвижной картой звездного неба, читатель сможет хорошо ориентироваться среди созвездий отыскивать на небе различные интересные объекты, описываемые в следующей главе. Среди этих объектов двойные и кратные звезды, иногда образующие красивые цветовые сочетания (оранжевая и голубая звезда, голубоватая и красная и пр.), физические переменные звезды, меняющие свой блеск в результате происходящих на них бурных физических процессов, различного рода скопления звезд, газовые и пылевые туманности. Автор дает рекомендации к начальным любительским наблюдениям этих светил и указывает источники, в которых читатель сможет найти инструкции для более серьезных наблюдений.

Специальная глава посвящена светилам, меняющим свое положение на фоне звездного неба. Это популярный рассказ о планетах Солнечной системы и их спутниках, о кометах и метеорах. Описывая Венеру, Марс, Юпитер и другие планеты, их движение по небу, господствующие на них физические условия, автор вводит нас в курс последних достижений науки, полученных, в частности, с помощью межпланетных автоматических станций и других космических аппаратов. В отдельном параграфе этой главы рассказывается о Луне, а в приложении помещены фотография видимого полушария Луны и схематическая карта основных образований на ее поверхности.

Новое издание книги дополнено разделом о самостоятельном изготовлении простейшего самодельного телескопа-рефрактора.

Завершается книга небольшим, но тщательно составленным справочным отделом. Здесь и список созвездий, видимых в СССР, и список двойных и кратных звезд, и список переменных звезд, рекомендуемых для начальных наблюдений, и сведения о больших планетах, а также ряд других справочных материалов.

Книга будет весьма полезной начинающему любителю астрономии.

И. Е. Евгеньев

Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте

Заочная физико-техническая школа была создана в 1966 году с целью оказать помощь учащимся 9 и 10 классов средних школ. Для занятий в ЗФТШ не нужны какие-то особые способности, главное — это любовь к науке и желание много трудиться.

ЗФТШ стремится развивать у учащихся физическую интуицию и логическое мышление, а также навыки в использовании математических методов при изучении вопросов физики и техники.

Прием учеников в ЗФТШ ограничен и производится по конкурсу на основании выполнения публикуемого ниже вступительного задания. Чтобы охватить возможно большее число желающих обучаться в ЗФТШ, на местах, по согласованию с органами народного образования, организуются физико-технические кружки.

В эти кружки зачисляются ученики, которые хотя и хорошо выполнили вступительное задание, но не смогли быть приняты из-за недостатка мест. Обучение в кружках будет вестись по общей программе ЗФТШ и под ее методическим руководством, но силами местных учителей физики и математики.

Кроме того, физико-технические кружки могут быть организованы по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Набор в эти кружки осуществляется на месте из числа учеников, решивших вступительное задание ЗФТШ. Зачисление в кружки осуществляется руководителями кружка. Кружок считается организованным, если директор местной школы сообщит в ЗФТШ фамилии двух его руководителей, поименный список членов кружка и сводную ведомость оценок, полученных членами кружка при выполнении вступительного задания. Дальнейшая работа кружка будет протекать в тесной связи с ЗФТШ.

Ученики, принятые непосредственно на обучение в ЗФТШ, а также руководители физико-технических кружков, будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ. Задания составлены с таким расчетом, чтобы развивать у учащихся самостоятельность, инициативу, физическую интуицию и логическое мышление. Ученики, принятые непосредственно в ЗФТШ, будут получать разбор результатов выполнения ими заданий, а также рекомендуемое ЗФТШ решение заданий. Руководители кружков будут получать рекомендуемое ЗФТШ решение заданий, а разбор и оценку работы каждого ученика будут делать сами.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике, состоящие каждое из семи задач. Задачи пронумерованы по порядку от 1 до 10. Задачи 1—7 предназначаются для учеников восьмого класса, задачи 4—10 для девятого класса.

Решение вступительного задания должно быть выполнено каждым учеником самостоятельно. Коллективные решения не допускаются и рассматриваться не будут.

Решение должно быть написано на русском языке. Работы по физике и математике должны быть написаны в разных тетрадях. Порядок задач должен быть тем же, что и в задании. При пересылке тетради ее не следует скручивать в трубку. Лучше переслать в большом конверте простой бандеролью.

Решение вступительного задания нужно высылать полностью, то есть и по физике и по математике. Вместе с решением необходимо выслать справку из школы, в которой Вы учитесь, с указанием класса. Справку следует наклеивать на внутреннюю сторону обложки тетради, в которой переписано решение задания по физике. Без этой справки решения рассматриваться не будут.

На внешнюю сторону обложки той же тетради наклейте лист бумаги с ответами на вопросы, помещенные в таблице.

Тетради с решениями присылайте по адресу: *г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт*, для ЗФТШ.

Срок отправления решения не позднее 10 марта 1972 года (по почтовому штемпелю места отправления). Решения, отправленные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Присланные в ЗФТШ решения вступительного задания не возвращаются.

Учащиеся г. Москвы в ЗФТШ не принимаются.

Зачисление в школу будет производиться приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено школьникам не позднее 1 августа 1972 г.

Учащиеся, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР могут присылать работы по адресу: *Ленинград II—228, ул. Савушкина*, 61, *спецшкола—интернат* № 45, *филиал ЗФТШ при ЛГУ*.

Учащиеся, проживающие в Амурской, Камчатской, Иркутской Читинской, Сахалинской областях, Красноярском, Хабаровском, Приморском краях, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР, на Чукотке могут присылать работы по адресу: 660049, *г. Красноярск*—49, *ул. Перенсона* 7, *филиал ЗФТШ при Красноярском пединституте*.

№№	Вопросы	Образец ответа
1.	**Область, край или АССР**	**Тульская**
2.	**Фамилия, имя, отчество**	**Андреев Михаил Дмитриевич**
3.	**Класс, в котором Вы учитесь**	**Восьмой**
4.	**№ и адрес школы**	**Школа № 1, ул. Карла Маркса д. № 41.**
5.	**Национальность**	**Русский**
6.	**Профессия родителей и занимаемая должность:**	
	Отец	**Слесарь, бригадир**
	Мать	**Медицинская сестра, лаборант**
7.	**Подробный домашний адрес**	**г. Ефремов, ул. Тульская, д. 1/24, кв. 8.**

Вступительное задание по физике

1. Прибор, предназначенный для изучения законов равноускоренного движения, состоит из двух грузов массы $M = 100$ *г*, связанных невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок (см. рис. 1). На правый груз кладут добавочный груз $m = 10$ *г* и система начинает двигаться. Когда правый груз пройдет расстояние 1 *м*, добавочный груз подхватывается специальным упором, а основные грузы продолжают двигаться далее с постоянной скоростью $v = 0{,}99\ \frac{м}{сек}$.

Найдите ускорение силы тяжести g.

2. Подъемное устройство, изображенное на рисунке 2, состоит из однородного стержня длиной L и массой m. Устройство своим нижним концом шарнирно соединено со стенкой (может свободно вращаться). Стержень образует с вертикалью постоянный угол благодаря горизонтально натянутому тросу, который соединен со стержнем на расстоянии l от шарнира. Длина троса a. Груз массой M подвешен к верхней точке стержня. Найдите натяжение T троса.

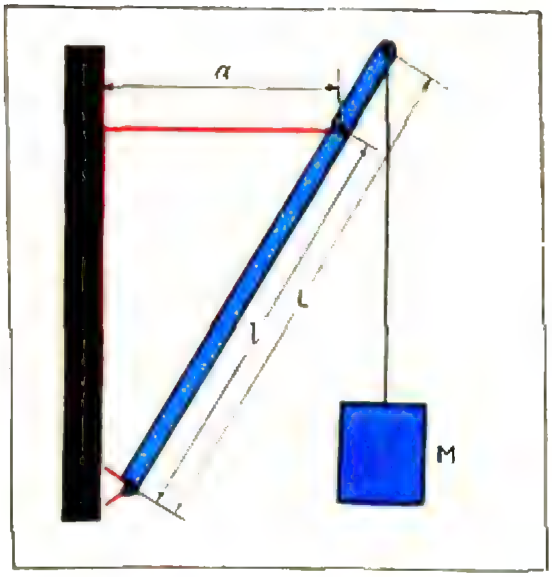


Рис. 2.

3. На рисунке 3 изображены две электрические цепи, состоящие из известных сопротивлений R и $2R$ и неизвестного сопротивления r. При каком значении r сопротивления обеих цепей, измеренные между точками A и B, окажутся одинаковыми и каково при этом общее сопротивление этих цепей?

4. Ведро с водой свободно падает дном вниз. В боковых стенках и дне ведра имеются отверстия. Будет ли выливаться вода через эти отверстия, при падении ведра? Сопротивлением воздуха пренебречь.

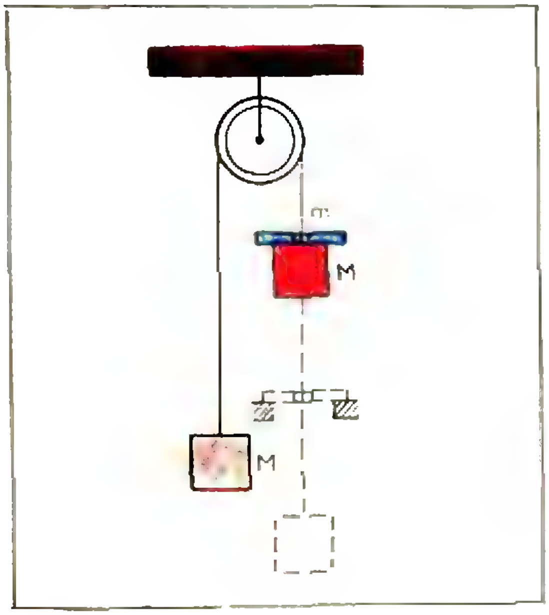


Рис. 1.

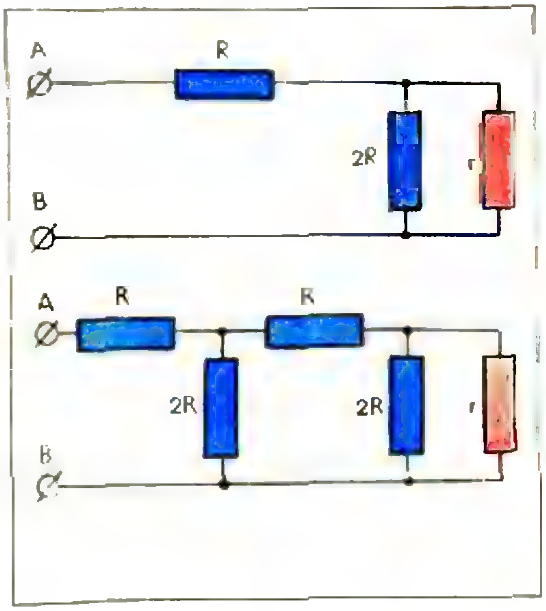


Рис. 3.

5. Имеются три электрические лампочки, рассчитанные на напряжение в 110 *в* и имеющие мощности: 50, 50 и 100 *вт*. По какой схеме можно включить эти лампочки в сеть с напряжением в 220 *в* так, чтобы все они горели полным накалом?

6. Рабочий забивает железный гвоздь массой 50 *г* в доску и ударяет 20 раз молотком, масса которого 0,5 *кг* и конечная скорость 10 *м/сек*. На сколько градусов нагреется гвоздь, если предположить, что половина выделенной при ударах теплоты пошла на его нагревание. Считать, что после удара молоток неподвижен.

7. Два стержня скреплены под прямым углом (см. рис. 4). По горизонтальному стержню может скользить шарик A массой 50 *г*, по вертикальному — груз B массой 200 *г*. Осью вращения прибора служит вертикальный стержень, шарик A находится от этой оси на расстоянии 5 *см*. Сколько оборотов в минуту должен делать прибор, чтобы груз B начал подниматься? Трением пренебречь.

8. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью распался на атомы, а водород находится еще в молекулярном состоянии, давление равно P. При температуре $2T$, когда оба газа полностью распались на атомы, давление в сосуде равно $3P$. Каково отношение числа грамм-атомов азота и водорода в смеси?

9. На поршень шприца сечением $S = 16$ *см*^{2} производится давление с силой 3 *кГ*. С какой скоростью должна вытекать струя воды из отверстия по горизонтальному направлению? Сечение струи $s = 0{,}016$ *см*^{2}.

10. При нагревании 7 *г* азота, находящегося в цилиндре под поршнем, на котором лежит постоянный груз, было израсходовано 26 *кал* теплоты. До какой температуры нагрелся газ, если его начальная температура была 10° С. Теплоемкость одной грамм-молекулы азота при постоянном объеме равна 5 *кал/моль град*.

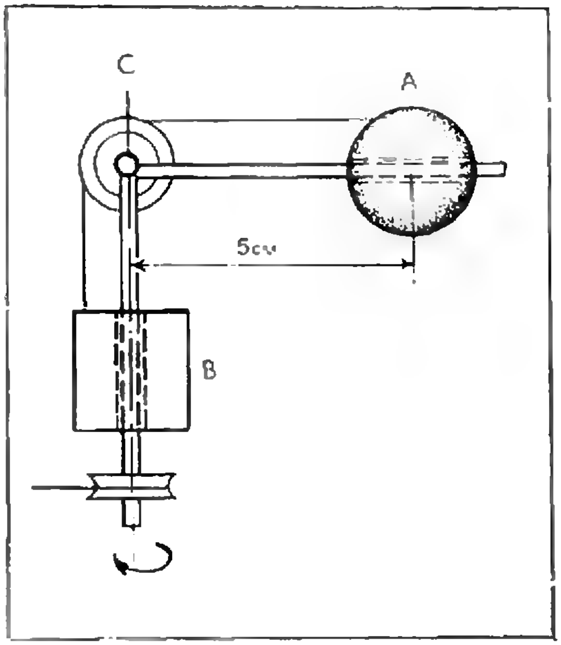


Рис. 4.

Вступительное задание по математике

1. Мальчик плывет против течения реки и встречает плывущую по течению пустую лодку. Он продолжает плыть против течения еще 2 минуты после момента встречи, а затем поворачивает и догоняет лодку в 76 метрах от места встречи. Какова скорость течения реки?

2. Доказать, что сумма

$$n^3 + 3n^2 + 5n + 3$$

при любом целом n делится без остатка на 3.

3. В окружность вписан треугольник ABC. В точке B проведена касательная к окружности. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны 15 *см* и 21 *см*. Найти высоту треугольника ABC, опущенную из вершины B.

4. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ суть x_1 и x_2. Найти p и q, если $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ являются корнями уравнения

$$x^2 - p^2x + pq = 0.$$

5. Две стороны треугольника равны 6 *см* и 8 *см*, а две его медианы пересекаются под прямым углом. Найти третью сторону треугольника.

6. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 1 \\ ax + y = b \end{cases}$$

имеет вещественные решения при любых значениях b?

7. В межзональном турнире в Пальма де Мальорка участвовало 24 шахматиста. Для выполнения гроссмейстерской нормы нужно было набрать не менее $14\frac{1}{2}$ очков. Сколько шахматистов могли бы выполнить эту норму? (В шахматных турнирах выигравший получает одно очко; если партия заканчивается вничью, каждый из игравших получает $\frac{1}{2}$ очка).

8. Решить уравнение

$$\sqrt{45x^2 - 30x + 1} = 7 + 6x - 9x^2.$$

(Рассматриваются только неотрицательные значения радикала).

9. Все плоские углы трехгранного угла равны α. Точка M находится внутри угла на одном и том же расстоянии от всех его граней. Найти это расстояние, если расстояние от точки M до вершины угла равно d.

10. Найти наименьшее значение выражения

$$\frac{1 + x^4}{1 + x^2}.$$

◆

Ответы на кроссворд (см. стр. 31)

По вертикали: 1. Вампир. 2. Нюанс. 3. Опера. 4. Углерод. 5. Кобер. 9. Сосна. 10. Весом. 12. Шкалище. 15. Крупье. 16. Потоп. 18. Тетка. 19. Нииини.

Несколько задач по тригонометрии

1. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Доказать, что

1) если $\cos C = \frac{\sqrt{ab}}{a - \sqrt{ab} + b}$, то $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = -\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$;

2) если $\operatorname{tg} C$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$ образуют геометрическую прогрессию, то ее знаменатель равен b^2/c^2, причем $A \leqslant \frac{\pi}{3}$;

3) если $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ образуют геометрическую прогрессию, то ее знаменатель равен b/c, причем $A \leqslant \frac{\pi}{3}$.

2. Пусть $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ — корни уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$. Написать уравнение, имеющее корни $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\beta + \gamma)$, $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}(\alpha + \gamma)$, $\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

3. Пусть $\alpha + \beta + \gamma$ кратно π и $x^2 \sin r\alpha + y^2 \sin r\beta + z^2 \sin r\gamma$ обращается в нуль при $r = 1$ и $r = 2$. Доказать, что это выражение равно нулю при всех натуральных значениях r.

4. На сторонах BC, CA, AB сферического треугольника ABC откладывают равные дуги BA_1, CB_1, AC_1. Доказать, что геометрическое место точек пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ является большим кругом.

5 *). Пусть точки A, B, C, D лежат на сфере, P — отличная от них точка этой сферы и π — плоскость, касающаяся сферы в точке P. Обозначим через α угол, образованный пересечениями плоскостей PAC и PBC с плоскостью π, и через β — угол, образованный пересечениями с π плоскостей PAD, PBD. Доказать, что $|\alpha - \beta|$ не зависит от выбора точки P.

---

*) Это задача известного шахматиста Э. Ласкера.

ВНИМАНИЮ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ!

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ УЧАЩИХСЯ

В ЗМШ принимаются только ученики восьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ЗМШ не принимаются. Занятия в школе начнутся с 1 сентября.

В ЗМШ два курса. Ученики, успешно окончившие школу, получат свидетельство об ее окончании. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1972 г. После проверки работы (примерно в июле 1972 г.) вам будет сообщено, приняты ли вы в ЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решать все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 см с написанным в нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область: *Вологодская.*
Фамилия, имя, год рождения: *Иванов Петр, 1957 г.*
Школа (полное название): *Школа № 2 г. Тотьмы*
Класс: *8 класс «Б».*
Фамилия, имя, отчество учителя математики: *Никаноров Николай Алексеевич*
Место работы и должность родителей: *Отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка.*
Полный почтовый адрес: *г.Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8*

Результаты проверки (заполняется проверяющим)

№	1	2	3	4			5	6	7	8	9	10	11	12
				а	б	в								

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны высылать работы по адресу: Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ. Заочная школа. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ. На конкурс.

Условия задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года

1. На кольцевой дороге проводится эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете, если длина кольцевой дороги — 330 *км*, а длина каждого этапа — 75 *км*? (Движение по дороге одностороннее.)

2. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

3. Пусть x_1 и x_2—корни уравнения $x^2+ax+bc=0$, а x_1 и x_3 — корни уравнения $x^2+cx+ab=0$. Докажите, что x_2 и x_3—корни уравнения $x^2+bx+ac=0$, если ac не равно bc.

4. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку нарисовано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер и как ему надо для этого играть, если вначале нарисовано: а) 7 минусов; б) 8 минусов; в) n минусов?

5. В треугольнике ABC проводятся биссектриса AK и медиана AM. Чему может равняться отношение сторон AB и AC, если известно, что один из отрезков BM, MK, KC равен полусумме двух других?

6. В каком году родился Матвей, если в 1972 году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения?

7. Существует ли хотя бы одно число a такое, что оба числа $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ целые?

8. AC и BD — две взаимно перпендикулярные хорды круга. Перпендикуляр, опущенный на прямую CD из точки A, пересекает прямую BD в точке M, а перпендикуляр, опущенный на прямую CD из точки B, пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $ABKM$— ромб.

9. Один из пяти братьев разбил окно. Андрей сказал: «Это или Витя, или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба говорите неправду». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты неправ». Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто разбил окно?

10. Среди всех треугольников, у которых сумма медиан равна 3 *см*, найти треугольник с самой большой суммой высот.

11. Придумайте четыре тройки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от 1 до 81 можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой тройки.

12. Дан равносторонний треугольник ABC. Про точку M известно, что $\angle AMC = 30^\circ$, $\angle BMA = 40^\circ$. $\angle ABM > 90^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

Физико-математическая школа при МИИТе

А. Л. Садовский

В январе 1968 года в Московском институте инженеров транспорта была организована вечерняя физико-математическая школа. Первоначально в ФМШ принимались все, кто хотел углубленно изучать математику и физику как в объеме школьной программы, так и за ее пределами. Однако уровень посещающих ФМШ оказался очень пестрым. Некоторые из поступавших не ожидали, что в вечерней школе им придется тоже трудиться, и потому довольно быстро охладевали к ней.

Пришлось обратиться к испытанному средству: весной и осенью, когда формировался набор 1970 года, были проведены конкурсные экзамены. Эти экзамены состояли из трех этапов: письменная работа (две задачи по физике, три — по математике) и устные экзамены по физике и по математике. В результате отбора из 320 кандидатов было принято 250 учеников (110 в девятые и 140 в десятые классы), из которых были составлены два потока, один девятых, а другой десятых классов. В 1971 году были сформированы два потока десятиклассников (из учившихся в предыдущем году в девятом классе и из вновь принятых), поток девятиклассников и поток восьмиклассников.

Занятия в ФМШ проводятся следующим образом: по средам читается лекция по физике и проводится семинар по математике, а по пятницам — лекция по математике и семинар по физике. Продолжительность лекций и семинаров равна двум академическим часам. Лекции читают профессора, преподаватели и аспиранты института; занятия проводят студенты факультета «Автоматика и вычислительная техника» (специальности «Прикладная математика») и других факультетов МИИТа. Среди руководителей групповых занятий много выпускников специальных физико-математических школ.

В работе школы и в ее программе два основных направления. Первое из них — более детальное изучение традиционного школьного курса и совсем близких к нему разделов математики и физики (элементы комбинаторики, комплексные числа, многочлены и алгебраические уравнения и другие). Второе направление — развитие математической культуры и расширение кругозора учащихся. С этой целью читаются циклы лекций, посвященные специальным вопросам, лежащим за пределами школьной программы: геометрические преобразования, понятие о геометрии Лобачевского, элементы теории множеств, теории действительных чисел, элементы теории вероятностей и теории игр.

Известно, что проблемы, стоящие перед учениками ФМШ, различны: десятиклассники стремятся подготовиться к конкурсным экзаменам в ВУЗ или во ВТУЗ, девятиклассники пока такую задачу перед собой не ставят. В связи с этим программа у самых старших более утилитарна, то есть в преподавании им материала мы придерживаемся, в основном, первого направления. Совсем иной подход к учащимся девятых классов. Принимая во внимание имеющийся у них резерв времени, физико-математическая школа создает базу, состоящую из таких фундаментальных теорий, как теория множеств, основы математического анализа, чтобы потом, опираясь на этот базис, преподавателям было бы легче объяснять элементарный курс математики, а школьникам — воспринимать.

Несколько труднее приходится нашим физикам, так как в обыкновенной школе физике зачастую уделяют недостаточно внимания, возникает необходимость исправить некоторые недочеты своими силами. Этот фактор оказывает существенное влияние на всю программу ФМШ по физике, которая, практически, не предусматривает изучение многих интересных проблем и задач, не входящих в стандартный школьный курс.

Организационная работа в ФМШ ведется в двух секциях: физики и математики. Руководящим органом школы является Совет ФМШ во главе с председателем Совета, проректором института по учебной работе, профессором И. П. Исаевым, зам. председателя по общим вопросам доцентом В. И. Малаховым и завучем студентом Виктором Матвейчуком. В Совет ФМШ входят по четыре студента — представителя секции физики и математики.

Рис. 1.

Каждую неделю секции проводят методический семинар для преподавателей — студентов, на котором обсуждаются темы занятий, отобранные задачи, принципы их решения и другие вопросы. Эти семинары проходят в непосредственном контакте с лекторами. Большую помощь в этом физико-математической школе оказывают доценты В. И. Коровин, А. С. Дробат, Т. А. Шульман, профессор Е. С. Вентцель и многие преподаватели кафедры «Прикладная математика». Издательство МИИТа предусматривает издание методических пособий для слушателей школы. Одной из целей фукционирования школы является подготовка абитуриентов в МИИТ, который практически превратился в современный политехнический институт.

Преподаватели ФМШ участвуют и в проведении традиционных олимпиад МИИТа по математике и физике. В 1971 году кафедра вычислительной математики провела V олимпиаду по математике, а кафедра физики IV олимпиаду по физике. Ниже приводятся некоторые из олимпиадных задач по математике.

Задачи

1. На плоскости даны две прямые и точка. На одной из прямых найти точку, равноудаленную от другой прямой и заданной точки.

2. Из A в B отправлен поезд из n вагонов, часть из которых загружена, вагоны пронумерованы по порядку, сумма номеров загруженных вагонов кратна k, где $k>n$. На перегоне состав может подвергнуться нападению грабителей, которые могут очистить не более одного вагона. В пункте B известны числа n и k. Как после проверки всех вагонов узнать, было ли ограбление, и какой именно вагон был ограблен?

3. Доказать, что для многочлена $P(n)=a_{1988}n^{1988}+\ldots+a_1n+a_0$ с натуральными коэффициентами найдется такое натуральное n_0, при котором $P(n_0)$ не является простым числом.

4. Многочлен $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ при делении на $x-a$ дает в остатке a^2, при делении на $x-b$ дает в остатке b^2, а при делении на $(x-c)$ дает c^2. Найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$, где a, b, c — попарно не равные между собой числа.

5. Дан квадрат со стороной 1. Доказать, что как бы ни было велико число N, можно построить систему не перекрывающихся кругов, целиком лежащих внутри квадрата и таких, что сумма длин их будет больше N, а сумма их площадей меньше $\frac{1}{N^2}$.

6. Дано $2n$ цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$. Число A, образованное первыми n цифрами, в 2 раза больше числа B, образованного остальными цифрами. Сумма первых n цифр равна сумме вторых n цифр. Доказать, что сумма всех цифр делится на 9.

7. Обезьяна Чи — чи — чи собирала бананы. Ей удалось собрать 100 бананов. Когда доктор Айболит взвесил эти бананы, то выяснилось, что они весят 10 кг, однако ни один банан не весил более 200 г. Доказать, что этими бананами можно накормить Тяни — Толкая так, чтобы он не обиделся (рис. 1).

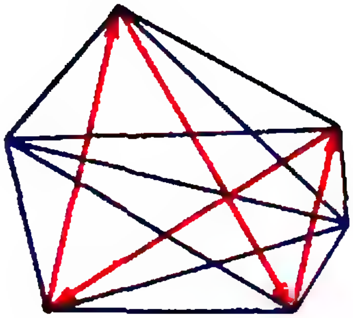


Рис. 2.

Примечание: Тяни — Толкай обидится, если одна голова съест бананов хотя бы на 100 г больше, чем другая; в противном случае он не обидится.

8. График функции $y=x^n+a_1x^{n+1}+\ldots+a_n (n>1)$ пересекает прямую $y=a$ в точках $A_1, \ldots, A_n$, а прямую $y=b$ в точках $B_1, \ldots, B_n$. Прямые A_iB_i образуют с осью абсцисс углы α_i. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg} \alpha_i = 0.$$

9. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. На каждой стороне и диагонали проставить стрелки таким образом, чтобы не получалось циклов. Циклом называется замкнутая ломаная линия, на каждом звене которой стоит стрелка так, что начало каждой стрелки совмещено с концом предыдущей (пример цикла изображен на рисунке 2).

10. Из точки вне круга провести секущую так, чтобы она делилась окружностью пополам.

11. Доказать, что между n и $n!$ находится по крайней мере одно простое число.

12. На прямой задана совокупность отрезков, из которых каждая пара имеет не менее одной общей точки. Доказать, что все отрезки имеют по крайней мере одну общую точку.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Как получают низкие температуры»

1. В детандере процесс расширения протекает настолько быстро, что теплоотдача не успевает произойти. Дроссель же достаточно хорошо теплоизолирован.

2. Нельзя. Потому что в ферромагнетиках элементарные магниты не разориентированы. Намагниченность ферромагнетиков, особенно при низких температурах, практически не зависит от магнитного поля. Они намагничиваются до насыщения в слабых полях.

3. В джоулях/градус. В таких же единицах измеряется теплоемкость тела (не удельная, а полная).

К статье «Применение неравенства Буняковского—Коши к решению некоторых задач»

1. а) Сначала надо показать, что

$$\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}.$$

Тогда $y_{\max}=\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$;

б) показать, что

$\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)+\cos 2x\cos 2y=1$.

Тогда $z_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

в) предварительно доказать, что

$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z=1$.

Тогда $u_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$;

г) $u_{\max}=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}$,

так как $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z+\sin^2 t+2\cos(x+y)\cos(y+z)\cos(z+x)=2$;

д) $y_{\max}=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$.

2. $-ab\leqslant u\leqslant ab$.

3. **Указание.** В неравенстве (*) положить

$$a_i^2=x_i,\quad b_i^2=y_i.$$

4. **Указание.** Используем предыдущее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ix_i\frac{b_i}{x_i}}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x_i}.$$

5. **Указание.** В неравенстве (*) положить

$$a_i=\sqrt{x_iy_i},\quad b_i=\sqrt{\frac{x_i}{y_i}},$$

тогда $a_ib_i=x_i$.

К задаче «Числовой треугольник» (см. стр. 25)

В средней строке стоят числа вида n^2-n+1. Отсюда уже легко вывести все три свойства.

К статье «Опыты с маятниками»

2. Грузик маятника с раздвоенным подвесом описывает восьмерку, когда периоды колебаний по осям x и y относятся как 1 : 2, то есть при $L=4l$. Точно подобрать такое отношение периодов довольно трудно, поэтому получаются превращения траектории из восьмерки в С-образную и обратно.

3. Один маятник «секундный», длину его ($l=\frac{gT^2}{4\pi^2}\approx 1$ *м*) можно отмерить линейкой. Длина другого подбирается экспериментально так, чтобы совпадали моменты наибольшего отклонения через 5 полных периодов «секундного» маятника.

К статье «Иррациональные уравнения»

1. Нет решений.

2. $x=2$. **Указание.** Переписать уравнение в виде $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$ и возвести в шестую степень; при этом учесть дополнительное условие $x\geqslant -{}^2/_3$.

3. $x_1={}^{12}/_{127}$, $x_2=-{}^4/_{43}$. **Указание.** Привести левую часть к общему знаменателю, возвести уравнение в седьмую степень, а затем из обеих частей извлечь корень восьмой степени; в результате получится уравнение $|x+12|=128\,x$.

4. $x_1=3$, $x_2=5$. **Указание.** Числитель дроби в левой части есть сумма кубов $(\sqrt{5-x})^3+(\sqrt{x+3})^3$.

5. Нет решений. **Указание.** Положить $y=\sqrt{x-2}$.

6. $x=5$. **Указание.** Положить

$$y=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}.$$

7. $x_1=1$, $x_2=-6$. **Указание.** Преобразовать уравнение к виду $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)(x+7)}+\sqrt[3]{(x+7)^2}=3$ и умножить обе его части на $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-2}$.

8. $x=a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}}$ при $a\geqslant 0$;

при $a<0$ решений нет.

9. $x=\dfrac{\sqrt[5]{a^4}}{1-\sqrt[5]{a^4}}$ при $0<a<1$; при остальных значениях a решений нет.

К вариантам вступительных экзаменов

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x=10^{-\sqrt{19/8}}$, $y=\log_2(3+\sqrt{19/2})-1$. 2. $\pi/8<|x|\leqslant\pi/4$. 3. Бригад три; в каждой бригаде 3 гусеничных и 5 колесных тракторов. 4. $c\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Указание. Рассмотреть на окружности, описанной около треугольника ABC, точку пересечения с перпендикуляром, восставленным из середины катета BC. 5. $\dfrac{h^3\left(\sin\alpha+2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{3\left(\cos\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

Отделение общей геологии геологического факультета

1. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $y=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$, где k и n — любые целые числа. 2. 450 легковых и 550 грузовых автомобилей. 3. $a={}^1/_2$. 4. $r=24$ *см*. 5. $-{}^3/_2<x<-{}^{23}/_{18}$.

Отделение геофизики геологического факультета

1. $x=1$, $y=1$. 2. $0<x\leqslant 15$. 3. $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, где k — любое целое число. 4. 3, 9, 27, 81, 243. 5. $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$ *см*.

Химический факультет

1. $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}r^2$. Указание. Убедиться, что $\measuredangle DKE=\measuredangle CEK$. Продолжив боковые стороны AD и BC трапеции до пересечения в точке M, выразить углы DKE и DAB через угол AMB и доказать, что $\measuredangle DAB=\measuredangle DKE$. 2. $x_1=1$, $x_2=2$. 3. 600 $м^3$. 4. $\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\leqslant x<\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$, где n — любое число. 5. $\dfrac{9\pi}{5\sqrt{10}}r^3$. Указание. Центр шара O лежит в середине отрезка (длины $2r$), соединяющего центры правильных треугольников ABC и $A'B'C'$ (в каждый из этих треугольников может быть вписана окружность радиуса r). Основанием цилиндра служит круг, получающийся в сечении шара плоскостью AMN, а высота цилиндра равна удвоенному расстоянию от центра шара O до этой плоскости. Доказать, что основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость AMN, лежит на высоте треугольника AMN, опущенной из вершины A, и вычислить длину этого перпендикуляра.

УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Физико-математический факультет

1. На $T\left(1-\dfrac{2s}{p}+\dfrac{s^2}{2p^2}\right)$ часов. 2. $u_1=1$, $v_1=2$, $w_1=2$; $u_2=2$, $v_2=1$, $w_2=1$.

3. $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi<x<-\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{4}+k\pi$, $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{4}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, где k — любое целое число.

4. $2\sqrt{2}R^2\cos\alpha\left(\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha}\right)$.

Инженерный факультет

1. Скорость пассажирского поезда 50 *км/час*, скорость товарного 30 *км/час*.

2. $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{n\pi}{2}$, где k и n — любые целые числа. 3. $x_1=2$, $x_2=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$. 4. 27:16 $\sin^2\alpha$.

Экономический факультет

1. 12 дней первым станком и 15 дней вторым станком. 2. $x=3$. 3. $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}$, где k — любое целое число. 4. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

К заметке «Физико-математическая школа при МИИТе»

1. Использовать подобие.

2. На станции B надо сложить номера всех загруженных вагонов и разделить на k эту сумму. k минус остаток равно номеру ограбленного вагона.

3. Запишите многочлен в виде $P(n)=a_{1968}(n^{1968}-1)+\ldots+a_1(n-1)+a_0(1-1)+a_{1968}+\ldots+a_0=(n-1)\times Q(n)+A$, где $Q(n)$ — некоторый многочлен, A — натуральное число и $A\neq 1$. Подставьте $n_0=A+1$.

4. По теореме Безу

$$f(a)=a^2;\ f(b)=b^2;\ f(c)=c^2.$$

Разделить $f(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$ означает представить $f(x)$ в виде

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\,Q(x)+p_1x^2+p_2x+p_3.$$

Подставляя в это равенство последовательно $x=a$, $x=b$, $x=c$, получим систему уравнений для неизвестных p_1, p_2, p_3.

5. Надо построить N^4 кругов с радиусами $\frac{1}{2N^3}$. Тогда $L=\frac{2\pi}{2N^3}N^4>N$,

$$S=N^4\frac{\pi}{4N^6}<\frac{1}{N^2}.$$

6. С одной стороны A и B дают одинаковые остатки при делении на 9. С другой стороны A дает вдвое больший остаток. Отсюда легко выводится, что и A и B делятся на 9.

7. Есть банан, который весит менее 100 г, кладем его в карман. Кормим головы Тяни — Толкая по очереди: как только одна начинает обижаться — кормим ее. Последний банан отдаем обидевшейся голове.

8. Достаточно заметить, что A_i есть действительный корень уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n-a$, а B_i есть действительный корень уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n-b$. Отсюда легко выводится требуемое равенство.

9. На плоскости найдется прямая, не параллельная сторонам и диагоналям многоугольника, ибо их конечное число. Пустим все стрелки по направлению к этой прямой.

11. Рассмотрите число $N=n!-1$ и его простой делитель p, который не превосходит N. Нетрудно видеть, что $p>n$, в противном случае $N-n!=1$ делится на p.

12. Надо рассмотреть самый правый из левых концов отрезков, и самый левый из правых концов отрезков. Затем показать, что самый правый не правее самого левого.

* * *

Заведующая редакцией *Л. В. Черновой*. Главный художник *А. И. Климанов*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева*. Корректор *М. Л. Медведская*
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. Тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 28/IX-71 г. Подп. в печать 7/XII-71 г. Бумага $70\times100^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4,5 Усл. печ. л. 5,8
Уч.-изд. л. 6,40 Тираж 333920 Т-19563 Цена 30 коп. Заказ 1882
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Чехов Московской области

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

КВАНТ
ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

1. Под окном у стены расположена батарея парового отопления. Трубы, по которым к батарее подводится горячая вода и отводится холодная, находятся слева. Справа в батарее имеются отверстия, закрытые с помощью ввинченных пробок. Сильный человек берется завинтить эти пробки с помощью гаечного ключа. В каком случае он закрутит эти пробки сильнее: когда резьба на них правая или когда резьба левая?

Пробки завинчивают, плавно нажимая на ключ, а не ударяя по нему.

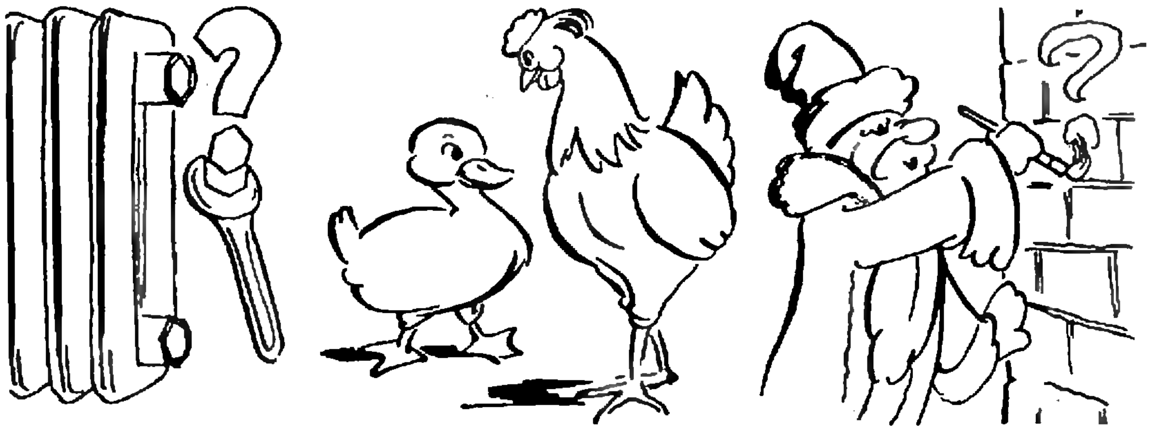
2. Сколькими нулями оканчивается произведение всех чисел от 1 до 100?

3. Имеется пять электрических лампочек на 110 в мощностью 40, 40, 40, 60 и 60 вт. Как следует включить их в сеть с напряжением 220 в, чтобы все они горели полным накалом?

4. Пароход от Киева до Херсона идет трое суток, а от Херсона до Киева четверо суток (без остановок). Сколько времени будут плыть плоты от Киева до Херсона?

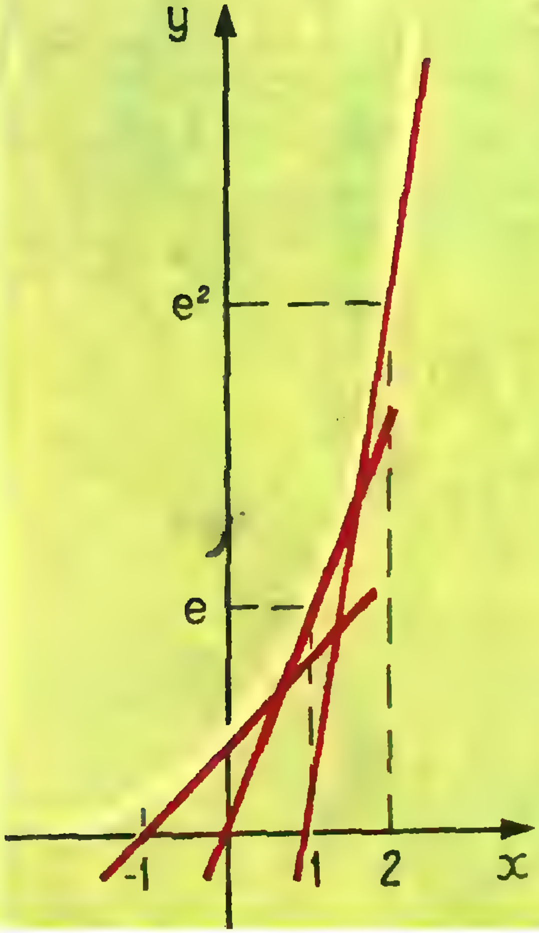
5. Утка при ходьбе переваливается с боку на бок, а курица нет. Почему?

6. Почему зимой при резком потеплении на стенах кирпичных домов появляется иней? Почему иней редко появляется на стенах деревянных домов?



ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 1



КОРОТКО ОБ ЭКСПОНЕНТЕ

Очень часто *мы встречаемся* с величинами, изменения которых пропорциональны самим этим величинам. Например, изменение числа бактерий в колонии (в постоянных условиях) пропорционально их *численности*. Изменение атмосферного давления с высотой пропорционально величине *давления*. Число распадающихся в единицу времени атомов радиоактивного вещества пропорционально числу атомов в образце. Прирост населения на земле пропорционален *численности населения* и т. д. Математически все величины, которые изменяются подобным образом, выражаются функцией, которая обладает следующим важным свойством: тангенс *угла наклона касательной* к оси абсцисс в каждой точке пропорционален значению функции в этой точке (см. рисунок).

Таким свойством обладает *показательная* функция $y = a^x$.

Важное значение имеет частный случай *этой функции*, когда $a = e$:

$$y = e^x.$$

Эта функция носит специальное название — экспонента.

Число e — иррациональное число, равное 2,718...

Из всех показательных функций ее выделяет то, что тангенс угла наклона касательной к графику экспоненты в любой точке не пропорционален, а равен значению функции в этой точке. Для тех, кто знает, что такое *производная*, скажем еще и так: производная функции e^x равна e^x. С экспонентой читателям нашего журнала придется встречаться очень часто.

Вот некоторые ее свойства:

1. $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$.

2. Если $x_1 < x_2$, то $e^{x_1} < e^{x_2}$.

3. При $x \ll 1$ можно пользоваться *приближенной* формулой $e^x \approx 1 + x$.

НОМЕР
2

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

2
ФЕВРАЛЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 Отношения эквивалентности и разбиения множеств *М. М. Глухов*
10 Вода на Луне *М. А. Гинцбург*
16 Переключательные схемы *Р. В. Фрейвалд*
20 Измерение скорости света *В. Винецкий*
26 Иррациональность суммы радикалов *Л. Н. Камнев*
28 Радиоактивная память *В. И. Кузнецов*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

32 Снежные кристаллы *А. С. Варпаховский, А. Н. Виленкин*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

36 Площади многоугольников *П. Р. Кантор, Ж. М. Раббот*

«ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

42 Задачи
44 Решения задач: **М84—М88; Ф92—Ф99**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

54 Методы расчета эквивалентных сопротивлений *А. Хацет*
60 Пирамида и сфера *Ю. В. Сидоров*
65 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

67 О книжке Пойя «Математическое открытие» *М. Л. Смолянский, Ю. А. Гастев*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

70 Марки, посвященные международным геофизическим научным программам *А. В. Алтыкис*
71 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ *(3-я стр. обл.)* *А. П. Савин,*

СМЕСЬ

25 Задачи о прямых линиях *В. М. Розентуллер*
31 Задачи арифметические и алгебраические
41 Симпозиум юных математиков (Горький)
53 Симпозиум юных математиков (Тбилиси)
Графики показательных функций *(4-я стр. обл.)*

М. М. Глухов

Отношения эквивалентности и разбиения множеств

Попробуйте представить себе все многообразие смысловых оттенков слова «класс»: «рабочий класс», «ученик 10-го класса», «каюта 1-го класса», «класс млекопитающих» ... Сколь различными ни казались бы эти оттенки, слово «класс» во всех случаях имеет одно и то же происхождение — оно всегда связано с *классификацией*, или *разбиением*, какого-либо множества на непересекающиеся классы. Понятие «класс» и его многочисленные сородичи (семейство, тип, категория, вид, сорт, род, разряд и другие) широко используются буквально во всех областях человеческой деятельности. Например, когда нам требуется изучить объекты какого-нибудь множества в связи с какими-нибудь их свойствами, мы стремимся разбить это множество на классы так, чтобы все элементы одного класса вели себя одинаковым образом по отношению к интересующим нас свойствам, и тогда появляется возможность изучать целый класс объектов по одному его представителю. Так, биологи изучают не каждое растение в отдельности, а разбивают все растения на классы, семейства, роды и виды, так что при изучении, скажем, семейства лютиковых один цветок выступает как представитель целого семейства (или вида). При изучении класса по его представителю последний обычно стараются выбрать наиболее простым с точки зрения других (не интересующих нас в данный момент) свойств. Каждый из вас неоднократно пользовался такой возможностью, например, при решении уравнений, заменяя одно уравнение другим, более простым, но имеющим те же корни, то есть содержащимся в классе уравнений, равносильных данному.

Для разбиения множества, то есть для такого распределения его элементов по классам, при котором каждый элемент попадает в один и только один класс, обычно используют различные признаки, присущие элементам данного множества. Например, предметы, изображенные на ри-

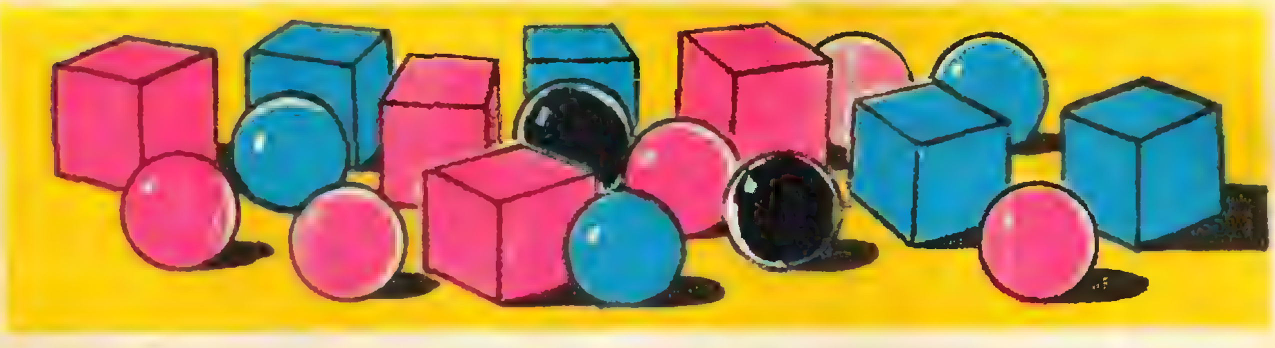


Рис. 1.

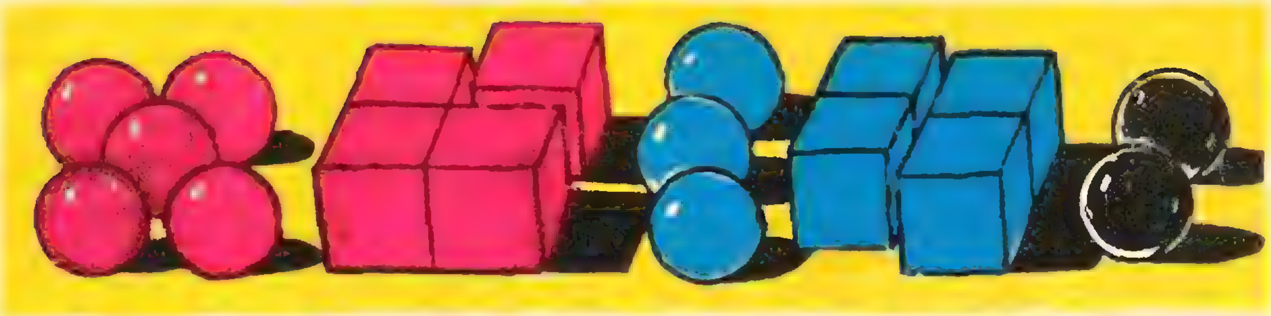


Рис. 2, *а*

сунке 1, можно разбить на классы по цвету (рис. 2, *а*), по форме (рис. 2, *б*) или по какому-нибудь другому признаку. Впрочем, для разбиения множества на классы нам нужны не столько свойства, присущие каждому элементу в отдельности, сколько правила, указывающие, в один или в разные классы следует отнести два произвольно выбранные элемента данного множества. Например, все прямые плоскости можно разбить на классы, если договориться две прямые относить в один класс в том и только в том случае, когда они параллельны. В полученном разбиении любые две (не обязательно различные *)) прямые одного класса параллельны, а любые две прямые из разных классов не параллельны. В этом примере мы пользуемся не признаком, которым обладает или не обладает каждая отдельно взятая прямая, а свойством, относящимся к парам прямых (прямые a и b параллельны или не параллельны). Про построенное разбиение прямых говорят, что оно индуцировано *отношением параллельности*. О рассмотренных выше разбиениях предметов рисунка 1 также можно сказать, что они индуцированы некоторыми отношениями. Так, разбиение по цвету индуцировано отношением «иметь одинаковый цвет».

Вместе с тем, не всякое отношение между элементами множества индуцирует разбиение этого множества на классы. Например если бы мы попытались всех людей распределить по непересекающимся группам так, чтобы любые два человека одной группы уважали друг друга, и два человека из разных групп не уважали бы или не знали друг друга, то, очевидно, из этой затеи ничего бы не вышло.

Проверьте, будет ли отношение перпендикулярности индуцировать разбиение всех прямых плоскости.

Чтобы выяснить и точно сформулировать условия, при которых отношение между элементами множества индуцирует разбиение этого множества на классы, уточним сначала само понятие отношения.

Что такое отношение?

Начнем с того, что вспомним некоторые знакомые отношения. Так, в школьной математике вам часто

---

*) Иначе говоря, мы условливаемся считать, что каждая прямая параллельна самой себе.

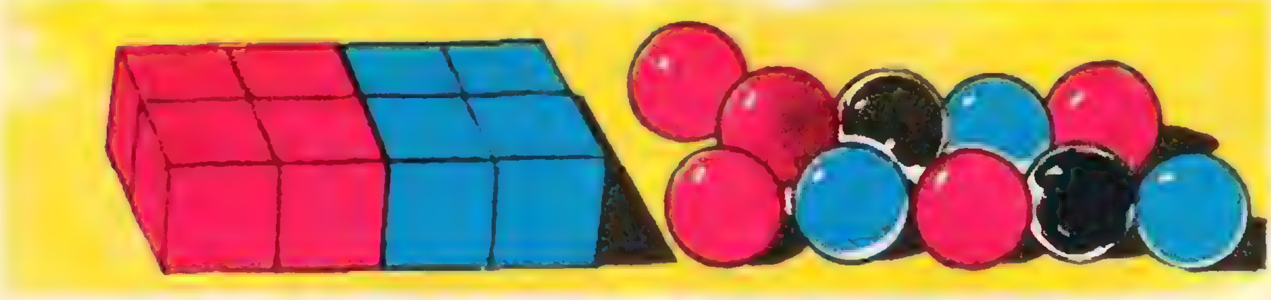


Рис. 2, *б*

встречались отношение равенства (чисел, фигур, функций), отношения «больше» и «меньше» для чисел, отношение делимости для целых чисел, отношения параллельности и перпендикулярности для прямых и многие другие. В повседневной жизни распространенными отношениями между людьми являются отношения старшинства, родства, соседства, товарищества, принадлежности к одной нации, профессии.

Теперь всмотримся внимательнее в какое-нибудь одно отношение, например, в отношение равенства чисел. Числовые равенства бывают верные (истинные) и неверные (ложные). Например, равенство $5=5$ верно, а $5=2$ неверно. Если же x_1 и x_2 — неизвестные числа, то равенство $x_1=x_2$ (высказывание «x_1 равно x_2») не имеет определенного значения: оно зависит от «неизвестных» x_1, x_2, является их функцией: при каждых конкретных числовых значениях x_1, x_2 оно будет истинным или ложным.

В общем случае отношением бинарным (или двуместным *)) на множестве M мы будем называть высказывание об элементах множества M, зависящее от двух переменных и превращающееся в истинное или ложное высказывание при подстановке в него вместо переменных любых конкретных элементов из M. Обычно отношение записывают в виде $x_1 \Theta x_2$ ($x_1 = x_2$, $x_1 < x_2$, $x_1 \parallel x_2$, $x_1 \perp x_2$ и т. п.). Часто вместо «отношение $x_1 \Theta x_2$» говорят просто «отношение Θ». Например, вместо «отношение $x_1=x_2$» мы говорим «отношение равенства». Аналогичный смысл имеют термины «отношение порядка», «отношение параллельности», «отношение соседства» и т. п. Если отношение $a\Theta b$ истинно, то говорят также, что a и b связаны отношением Θ или находятся в отношении Θ. Если отношение Θ обладает тем свойством, что из истинности $a\Theta b$ всегда следует истинность $b\Theta a$, то оно называется *симметричным*. (В дальнейшем мы будем иногда называть симметричность «свойством 1».) Например, отношения параллельности и перпендикулярности прямых симметричны, а отношение $<$ на множестве действительных чисел не симметрично ($5<8$ истинно, а $8<5$ ложно).

Отношение Θ на множестве M называется *рефлексивным* («свойство 2»), если $a\Theta a$ истинно для любого элемента a из M, и *транзитивным* («свойство 3»), если из истинности $a\Theta b$ и $b\Theta c$ следует истинность $a\Theta c$. Например, отношение равенства чисел рефлексивно и транзитивно, отношение перпендикулярности прямых не рефлексивно и не транзитивно, а отношение «меньше» для чисел транзитивно, но не рефлексивно.

Задача. Выясните, какими из свойств 1—3 обладают отношения делимости для целых чисел, отношение «пересекаться» (то есть иметь хотя бы одну общую точку) для прямых плоскости и отношение соседства для людей.

Отношения эквивалентности

Вернемся теперь к интересующему нас вопросу: какие отношения, определенные на некотором множестве M, индуцируют *разбиения* этого множества на классы? Иначе говоря, какими свойствами должно обладать отношение Θ, в соответствии с которым множество M можно разбить на такие непересекающиеся классы, чтобы

1) любые два элемента (различные или одинаковые) из одного класса находились в отношении Θ,

2) никакие два элемента из разных классов не находились в отношении Θ?

На этот вопрос отвечает следующая

Теорема. *Отношение Θ на множестве M тогда и только тогда индуцирует разбиение множества M, когда оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

---

*) В дальнейшем мы будем писать просто «отношение».

Доказательство. Пусть отношение Θ индуцирует разбиение множества M, то есть множество M можно разбить на классы, удовлетворяющие условиям 1) и 2). Какой бы элемент a мы ни взяли, он принадлежит некоторому классу нашего разбиения. Согласно 1), a находится в отношении Θ с самим собой: $a\Theta a$ истинно, так что Θ — рефлексивно. Если, далее, $a\Theta b$ истинно, то, как следует из 1)—2), элементы a и b принадлежат одному классу разбиения. Тогда из 1) следует, что истинно и $b\Theta a$. Значит, для любых $a, b \in M$ *) из $a\Theta b$ следует $b\Theta a$, то есть отношение Θ симметрично.

Не читайте дальше, пока сами не убедитесь в том, что отношение Θ транзитивно!

Таким образом, если отношение Θ индуцирует разбиение множества M, то Θ рефлексивно, симметрично и транзитивно: свойства 1—3 необходимы для того, чтобы Θ индуцировало разбиение множества M.

Теперь ясно, почему мы не смогли разделить человечество на группы уважающих друг друга людей и почему отношение перпендикулярности не индуцировало разбиение прямых плоскости. Отношения «уважения» и перпендикулярности не транзитивны (и не рефлексивны).

Докажем теперь достаточность свойств 1—3. Пусть Θ обладает свойствами 1—3, и a — произвольный элемент множества M. Обозначим через M_a класс (множество) всех таких элементов x из M, для которых истинно $a\Theta x$:

$$M_a = \{x \mid a\Theta x \text{ — истинно}\}.$$

Мы получим таким образом некоторое множество классов. Так как по свойству 1 истинно $a\Theta a$, то $a \in M_a$ (по определению класса M_a) и, следовательно, каждый элемент множества M принадлежит хотя бы одному из полученных классов. Покажем, что любые два класса M_a, M_b или совпадают, или не пересекаются. В самом деле, если M_a и M_b имеют хотя бы один общий элемент c, то $a\Theta c$ и $b\Theta c$*). По свойству 2 из $b\Theta c$ следует $c\Theta b$, а из $a\Theta c$ и $c\Theta b$ по свойству 3 получим $a\Theta b$. Значит, $a\Theta b$ истинно. Возьмем теперь произвольный элемент d из класса M_b. По определению класса M_b истинно $b\Theta d$, а по свойству 3 из $a\Theta b$ и $b\Theta d$ следует $a\Theta d$; значит, $d \in M_a$. Итак, если $d \in M_b$, то $d \in M_a$. Аналогично доказывается, что из $d \in M_a$ следует $d \in M_b$ (проведите соответствующие рассуждения сами). Тем самым доказано, что $M_a = M_b$, то есть классы, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают. Таким образом, каждый элемент множества M содержится в некотором классе и разные классы не пересекаются. Это и означает, что мы имеем разбиение множества M. Покажем, что это разбиение действительно индуцируется отношением Θ, то есть выполняются условия 1)—2). Пусть элементы a и b содержатся в одном классе. Так как $a \in M_a$, то это означает, что и $b \in M_a$ (в предыдущей фразе оба подлежащих совершенно равноправны!), то есть $a\Theta b$. Итак, любые два элемента из одного класса находятся в отношении Θ: выполняется условие 1). Пусть теперь a и b — два произвольных элемента из разных классов, так что $M_a \neq M_b$. Если бы было $a\Theta b$, то это означало бы, что $b \in M_a$, то есть классы M_a и M_b имели бы общий элемент b. Но тогда, по доказанному выше, было бы $M_a = M_b$, что противоречит условию. Значит, $a\Theta b$ ложно, то есть элементы из разных классов не находятся в отношении Θ (выполняется условие 2)). Теорема доказана.

При фиксированном разбиении множества M элементы, содержащиеся в одном классе, обычно называют эквивалентными. В связи с этим всякое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называют *отношением эквивалентности*, а сами классы получаемого разбиения — *классами эквивалентности*.

---

*) Знак $\in$ читается «принадлежит»: $a \in M$ означает, что a — элемент из множества M.

*) В тех местах, где это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать слово «истинно».

Теперь доказанную выше теорему можно сформулировать короче: *отношение* Θ *на множестве* M *тогда и только тогда индуцирует разбиение множества* M, *когда оно является отношением эквивалентности.*

Таким образом, если нам требуется выяснить, индуцирует ли некоторое отношение Θ разбиение какого-либо множества M, то нужно проверить, является ли отношение Θ отношением эквивалентности на M.

Например, множество всех окружностей плоскости распадается на классы концентрических окружностей, поскольку отношение концентричности окружностей рефлексивно, симметрично и транзитивно. (При этом мы, естественно, считаем, что всякая окружность концентрична сама себе.) Весьма просто проверяется также, что рефлексивно, симметрично и транзитивно отношение подобия треугольников. Следовательно, множество всех треугольников разбивается на классы подобных треугольников.

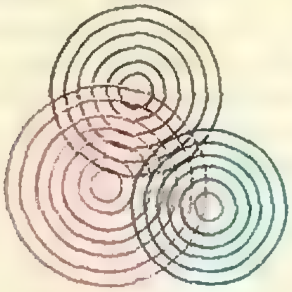


Рис. 3.

Приведем один менее очевидный пример. Пусть Q — множество всех дробей вида $\frac{a}{b}$, где a, b — целые числа и $b \neq 0$. По каждой дроби $\frac{a}{b}$ определим класс $Q_{a,b}$, относя дробь $\frac{c}{d}$ в этот класс в том и только в том случае, когда $ad = bc$. Получится ли в итоге разбиение всех дробей на непересекающиеся классы?

Мы определили некоторое отношение Θ на множестве Q: $\frac{a}{b} \Theta \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Выясним, является ли Θ отношением эквивалентности.

1. Рефлексивность. Для любой дроби $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} \Theta \frac{a}{b}$, поскольку $ab = ba$.

2. Симметричность. Если $\frac{a}{b} \Theta \frac{c}{d}$, то $ad = bc$, или $cb = da$. Последнее равенство означает, что $\frac{c}{d} \Theta \frac{a}{b}$.

3. Транзитивность. Пусть $\frac{a}{b} \Theta \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} \Theta \frac{e}{f}$, то есть $ad = bc$ и $cf = de$. Умножив последние равенства соответственно на f и b, получим:

$$adf = bcf, \quad bcf = bde.$$

Отсюда имеем $adf = bde$ и $af = be$ (на d можно сократить, поскольку $d \neq 0$!). Но $af = be$ как раз и означает, что $\frac{a}{f} \Theta \frac{e}{f}$.

Таким образом, Θ — отношение эквивалентности и потому множество всех дробей распадается на непересекающиеся классы эквивалентных (или, как говорят в школе, равных по величине) дробей. Итак, имея отношение эквивалентности на некотором множестве, мы можем разбить это множество на классы. Но можно поступить и наоборот: сначала разбить множество на классы, а затем определить отношение эквивалентности, считая по определению два элемента эквивалентными в том и только в том случае, когда они принадлежат одному классу рассматриваемого разбиения. Например, таким образом появляется отношение «быть одноклассниками»: сначала детей, пришедших впервые в школу, разбивают (почти произвольно) на классы, а затем уже детей, оказавшихся в одном классе, называют одноклассниками.

Нельзя ли сэкономить?

Если нам часто приходится проверять, будет ли заданное отношение рефлексивным, симметричным и транзитивным, то естественно возникает вопрос: не является ли какое-нибудь из указанных свойств 1—3 логическим следствием двух других (в этом случае нам не пришлось бы делать проверку всех трех свойств)?

Оказывается, это не так: свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности независимы. Чтобы доказать, что некоторое свойство не зависит от двух других, достаточно привести пример отношения, обладающего двумя последними свойствами, но не обладающего рассматриваемым.

Например, отношение $\leqslant$ на множестве действительных чисел рефлексивно и транзитивно, но не симметрично. Значит, симметричность не является следствием рефлексивности и транзитивности. Свойство транзитивности также не вытекает из двух других. Например, для прямых плоскости отношение «прямая x_1 совпадает с прямой x_2 или перпендикулярна к x_2», рефлексивно и симметрично, но не транзитивно. (Проверьте!)

Пример, показывающий независимость рефлексивности от двух других свойств, постарайтесь привести сами.

Отношения эквивалентности в математике

Мы уже говорили о значении разбиений множества на классы (или, как теперь можно сказать, отношений эквивалентности) в различных областях человеческой деятельности. Очень важную роль играет отношение эквивалентности в математике. Кроме упоминавшихся ранее, можно привести много других примеров отношений эквивалентности, с которыми вы встречались в школьной математике. Таковы, например, отношение «иметь одну и ту же абсолютную величину» для чисел, отношение равенства двух алгебраических выражений, отношение равновеликости многоугольников и многие другие.

Рассмотрим подробнее два примера, показывающие, как отношения эквивалентности используются при образовании важнейших понятий математики.

Натуральные числа. Понятие натурального числа было выработано человечеством в процессе длительного исторического развития. Прежде чем человек научился абстрактно представлять себе число 5, он научился откладывать 5 камешков, делать 5 зарубок, завязывать 5 узелков и т. п. и сравнивать эти «стандартные» множества с другими встречающимися ему множествами путем установления взаимно однозначного соответствия между ними. Этот процесс абстрагирования «в ускоренном темпе» каждый на нас проходит в детстве, приучаясь сначала выделять два глаза, два яблока, две машины и т. д. и только затем уже представлять себе число 2. Теперь, когда этот путь абстрагирования каждым из нас, надо полагать, уже давно пройден, попытаемся уяснить себе сущность понятия натурального числа. С этой целью определим следующее отношение Θ между конечными множествами: будем считать, что два конечных множества M и N находятся в отношении Θ тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение множества M на N. (О понятии отображения множеств можно прочесть, например, в статье А. Н. Колмогорова «Что такое функция» в № 1 «Кванта» за 1970 год.) Легко проверить, что введенное таким путем отношение Θ рефлексивно, симметрично и транзитивно. (Проверьте!) Следовательно, оно является отношением эквивалентности, и потому все конечные множества разбиваются в соответствии с ним на классы. Любые два множества из одного класса полученного разбиения и называют *эквивалентными*. Впрочем, чаще,—чтобы отличить полученное разбиение от прочих разбиений, индуцируемых произвольными рефлексивными, симметричными и транзитивными отношениями (напомним, что любое такое отношение есть отношение эквивалентности; примером может служить хотя бы отношение, отождествляющее, с одной стороны, все четные числа, а с другой, — все нечетные) — эквивалентные в этом смысле множества называют *равномощными*, или *равночисленными*. Например в классе, содержащем множество букв {а, б, в, г, д} будут содержаться множество пальцев на руке человека, множество космонавтов космических кораблей «Восход» и «Восход-2», множество «частей света» (без Антарктиды!) и т. п. Уже из этого небольшого перечня видно, что в один класс входят множества самой различной природы и общим для всех них является лишь то, что все они равномощны, то есть любое одно из них можно взаимно однозначно отобразить на любое другое. Теперь сформулируем определение натурального числа: *натуральным числом* назовем всякий класс равномощных конечных множеств.

Такое определение поначалу может немало удивить: такая, вроде бы, простая штука, как натуральное число, определяется через что-то громоздкое и малообозримое — через целый класс множеств! Однако если в это определение хорошенько вдуматься, свыкнуться с ним, то придется согласиться, что оно действительно отражает «количественную суть» понятия натурального числа. В этом определении проявляется так называемая *абстракция отождествления*: сначала мы все конечные множества разбиваем на классы равночисленных множеств, затем «отождествляем» все множества одного класса и уже результат этого отождествления мыслим как некоторое натуральное число.

Поскольку каждый класс равномощных множеств вполне определяется любым своим представителем, то можно говорить о натуральном числе, определяемом любым множеством данного класса. Число, определяемое множеством M, обозначают через $|M|$ и называют *порядком*, или *мощностью*, множества M. Для натуральных чисел можно ввести систему обозначений, не связанную с конкретными множествами. Конечно, это можно сделать по-разному. Исторически так и было: у разных народов были разные системы обозначений и названий натуральных чисел. (Подробнее об этом сказано в статье И. М. Яглома «Системы счисления», см. «Квант», № 6, 1970). Придерживаясь общепринятой в настоящее время системы обозначений и названий, можно сказать, что число 1 (единица) есть класс множеств, равномощных множеству столиц Советского Союза, число 2 (два) есть класс множеств, равномощных множеству глаз человека, и так далее. Добавляя к любому конечному множеству еще один элемент, мы получим новое множество, не равномощное исходному. Осуществляя этот процесс, мы получим бесконечную последовательность не равномощных друг другу множеств и определяемый ими ряд натуральных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Рациональные числа. Обычно говорят, что рациональным числом называется дробь вида $\frac{a}{b}$, где a, b — целые числа и $b \neq 0$. Однако такое определение не полно, поскольку из него непосредственно не следует, равны или нет, например, числа $^1/_2$ и $^3/_6$. Поэтому приходится сразу же добавлять: рациональные числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны в том и только в том случае, когда $ad = bc$. В итоге получается, что рациональное число это не просто дробь, а целый класс дробей. Таким образом, понятие рационального числа более аккуратно вводится следующим образом.

Рассмотрим множество Q всех дробей и определим на Q отношение Θ, положив $\frac{a}{b}\,\Theta\,\frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$. Выше мы уже показали, что такое Θ есть отношение эквивалентности и, значит, множество Q разбивается на непересекающиеся классы. Любые две дроби одного класса указанного разбиения мы и будем называть аквивалентными. Теперь можно сформулировать определение: *рациональным числом* называется всякий класс эквивалентных дробей. После всего сказанного ранее по поводу определения натурального числа мыслить себе рациональное число как класс дробей совсем просто.

Как складывать и умножать классы? После введенных выше определений натурального и рационального чисел естественно возникает вопрос: как определить *арифметические операции* над числами-классами? Для примера покажем, как определить умножение рациональных чисел, считая, что все операции над целыми числами нам уже знакомы.

Пусть α и β — два рациональных числа-класса. Возьмем из этих классов по какой-нибудь одной дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ и определим их *произведение*, положив

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Полученная дробь $\frac{ac}{bd}$, как и всякая дробь, принадлежит вполне определенному классу дробей γ. Этот класс мы и назовем *произведением* классов α и β: $\alpha\beta=\gamma$.

Таким образом, чтобы перемножить классы, нужно выбрать из них по одному (любому!) представителю, перемножить эти представители как дроби и взять класс, содержащий полученную в итоге дробь.

Сразу же, однако, возникает вопрос: не может ли получиться при умножении другой класс, если выбрать другие представители из классов α и β? Покажем, что это не так.

Пусть $\frac{a'}{b'}$ и $\frac{c'}{d'}$ — какие-нибудь другие представители классов α и β. Так как $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ принадлежат одному классу α, то $\frac{a}{b}\,\Theta\,\frac{a'}{b'}$, то есть $ab'=ba'$. Аналогично получим $cd'=dc'$. Перемножая почленно два последних равенства, найдем $acb'd'=bda'c'$. Но это означает, что $\frac{ac}{bd}\,\Theta\,\frac{a'c'}{b'd'}$. Значит, «новое» произведение дробей $\frac{a'c'}{b'd'}$ принадлежит тому же классу γ, что и $\frac{ac}{bd}$.

Упражнения

1. Пусть Θ_1 и Θ_2 — два отношения эквивалентности на некотором множестве M. Будут ли отношением эквивалентности на M отношения Θ, определенные следующим образом: а) $a\Theta b$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $a\Theta_1 b$ или $a\Theta_2 b$; б) $a\Theta b$ истинно тогда и только тогда, когда истинны $a\Theta_1 b$ и $a\Theta_2 b$; в) $a\Theta b$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $a\Theta_1 b$ и ложно $a\Theta_2 b$.

2. Пусть $f(x)$ — функция на множестве действительных чисел. Определим отношение Θ_f, положив $a\Theta_f b$ истинным тогда и только тогда, когда $f(a)=b$. Что можно сказать о графике функции $f(x)$, если отношение Θ_f симметрично? Найти функцию $f(x)$, для которой Θ_f является отношением эквивалентности. Каковы в этом случае классы эквивалентности?

Только ли математика? Что читать дальше?

В самом начале этой статьи говорилось об универсальном характере и применимости разбираемых в ней понятий. В дальнейшем же, однако, изложение носило по возможности «чисто математический» характер. Это не случайно: вопрос об отношениях эквивалентности (и связанных с ними разбиениях) вне рамок математики настолько интересен и глубок, что вскользь его разбирать не стоит. Читателю, заинтересовавшемуся этой проблематикой, мы прежде всего хотим порекомендовать две изданные в издательстве «Наука» книги: «Проблемы узнавания» М. М. Бонгарда (1967) и «Равенство. Сходство. Порядок». Ю. А. Шрейдера (1971). Многое в них может показаться вам (и совершенно справедливо!) довольно трудным и сложным, но то, что вы при внимательном чтении усвоите из этих книг, все равно послужит лучшей подготовкой к более широкому обсуждению понятия эквивалентности, которое редакция «Кванта» предполагает провести в будущем. Предлагаем вам также в связи с этим перечитать статью В. Раскина «Еще раз о машинном переводе» из «Кванта» № 12 за 1971 год и попытаться найти в ней примеры отношений эквивалентности; это послужит неплохим самоконтролем усвоения изложенных выше понятий.

ВОДА НА ЛУНЕ

М.А. Гинцбург

Мы знаем далеко не все ресурсы Луны, но и того, что известно, достаточно, чтобы предположить, что в будущем на Луне возникнут лунные станции и колонии. Одна из основных трудностей в организации колоний — обеспечение человека водой и кислородом. В день человеку необходимо примерно 0,9 *кг* безводной пищи, 0,9 *кг* кислорода и 2,7 *кг* воды. В лунных образцах, доставленных советскими и американскими космическими кораблями, никаких следов воды не обнаружено.

Однако есть основания предполагать, что вода на Луне была.

В наши дни получила широкое распространение теория эволюции, по которой Луна, как и Земля, образовалась из облака мелких твердых частиц. Эти частицы у Луны содержали примерно столько же воды (т. н. ювенильная, то есть первоначальная вода), сколько ее содержало вещество Земли: «строительный материал» у Земли и Луны был примерно одинаков. Распад радиоактивного урана и радиоактивного калия привел с течением времени к разогреву глубинных слоев Луны до температур 1000—2000° С. Содержащаяся в веществе Луны вода испарялась и проникала в виде пара наружу, к поверхности. Судьба этого пара зависела от условий у поверхности Луны, от ее температуры.

Температура поверхности Луны достигает днем +120° С, а ночью опускается до —160° С (в полярных районах до —200° С). Материалы, из которых сложена поверхность Луны (мелкие обломки различных минералов — так называемый «реголит»), плохо проводят тепло. Поэтому суточные колебания температуры проникают весьма неглубоко и уже на глубине меньше метра под поверхностью температура не зависит от времени лунных суток. В низких широтах, вблизи экватора, она равна примерно —30° С. При такой низкой температуре под поверхностью выделившийся из недр Луны водяной пар должен был замерзнуть, образуя слой льда.

Оценим границы слоя льда. Температура растет с глубиной. На Земле температура увеличивается на 28° С на каждом пройденном вглубь километре. Допустим, что радиоактивные процессы выделения тепла на Луне такие же, как на Земле. Тогда на Луне температура повысится на 30° С до точки таяния льда (0° С) на глубине около 1 *км*. Такова нижняя граница лунного слоя вечной мерзлоты (рис. 1), а под ним расположен слой воды.

На верхней границе слоя льда с его поверхности непрерывно отрываются молекулы, лед испаряется. Горные породы на Луне, как это установлено при исследовании лунных образцов, всегда содержат поры. Молекулы пара пролетают по этим порам и выходят на поверхность Луны.

Мы знаем возраст горных пород Луны по относительному содержанию радиоактивных изотопов и продуктов их распада в лунных образцах. Этот возраст порядка 4,5 миллиарда лет. Расчет показывает, что при $t = -30^\circ$ C и известных нам физических свойствах и структуре лунных горных пород за эти 4,5 миллиарда лет лед из лунной коры испарился не весь.

Гипотезу о вечной мерзлоте и глубинном слое воды на Луне выдвинул в 1961 году американский астрофизик Голд. Однако его вывод о существовании в глубине лунной коры льда и воды основан на некоторых предположениях.

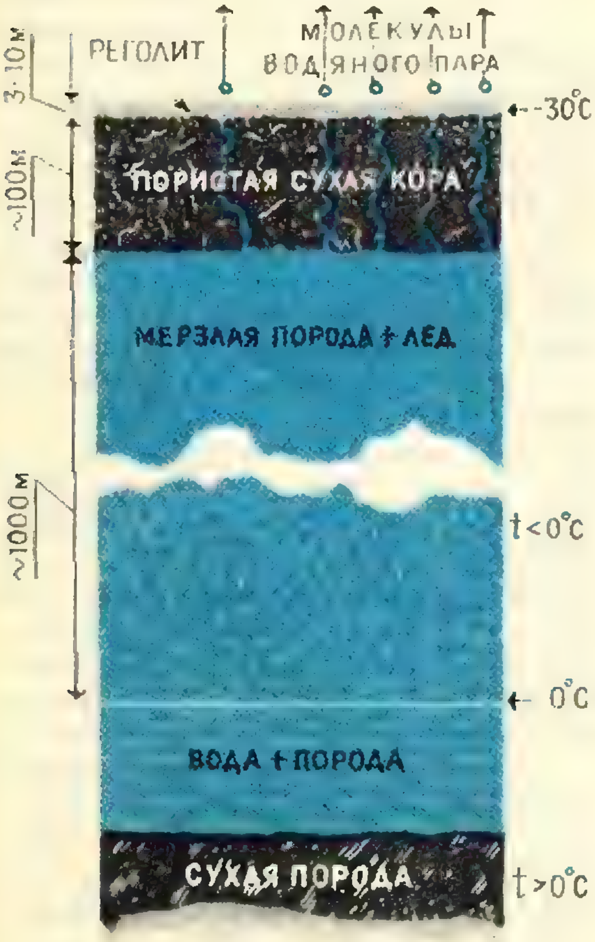


Рис. 1.

Во-первых, считается, что общее количество ювенильной воды в 1 *кг* вещества Земли и Луны было одинаково, и это общее количество ювенильной воды оценивается по средней глубине мирового океана (слой воды, получающийся делением объема воды океанов, морей, льдов Арктики и Антарктики, льдов горных районов на поверхность Земли). На Земле эта глубина ~1 *км*.

Во-вторых, считается, что значительная часть ювенильной воды выходила на поверхность уже после остывания лунной коры и потому замерзала в лед, который испарялся медленно — сквозь поры.

Если пары ювенильной воды успели выйти на поверхность до того, как лунная кора охладилась, то с течением времени они могли сконденсироваться на поверхности в жидкую фазу и затем быстро испариться, и ни вечной мерзлоты, ни глубинного слоя воды на Луне не может быть.

Наконец, мы еще слишком плохо знаем свойства лунной коры, чтобы надежно рассчитать процесс испарения из нее льда.

Подпочвенные льды есть и на Земле. В тех районах, где среднегодовая температура ниже 0° C, под поверхностью Земли сохраняется слой вечно мерзлой почвы, которая только частично оттаивает летом. Районы вечной мерзлоты составляют 15% земной суши (и еще 10% суши занимают ледники). В нашей стране вечная мерзлота охватывает обширные пространства Сибири и Дальнего Востока.

Превращения лед—вода—пар на Луне и на Земле *)

Поднимемся теперь из глубины на поверхность Луны. Как будут вести себя вода, лед и пар днем ($t = +120^\circ$ C

---

*) Настоятельно рекомендуем читателю популярную книгу академика Л. Д. Ландау и проф. А. И. Китайгородского «Физика для всех», М., «Наука», 1963. Глава 12 этой книги послужит наилучшим пособием по всем физическим вопросам, затронутым в нашей статье.

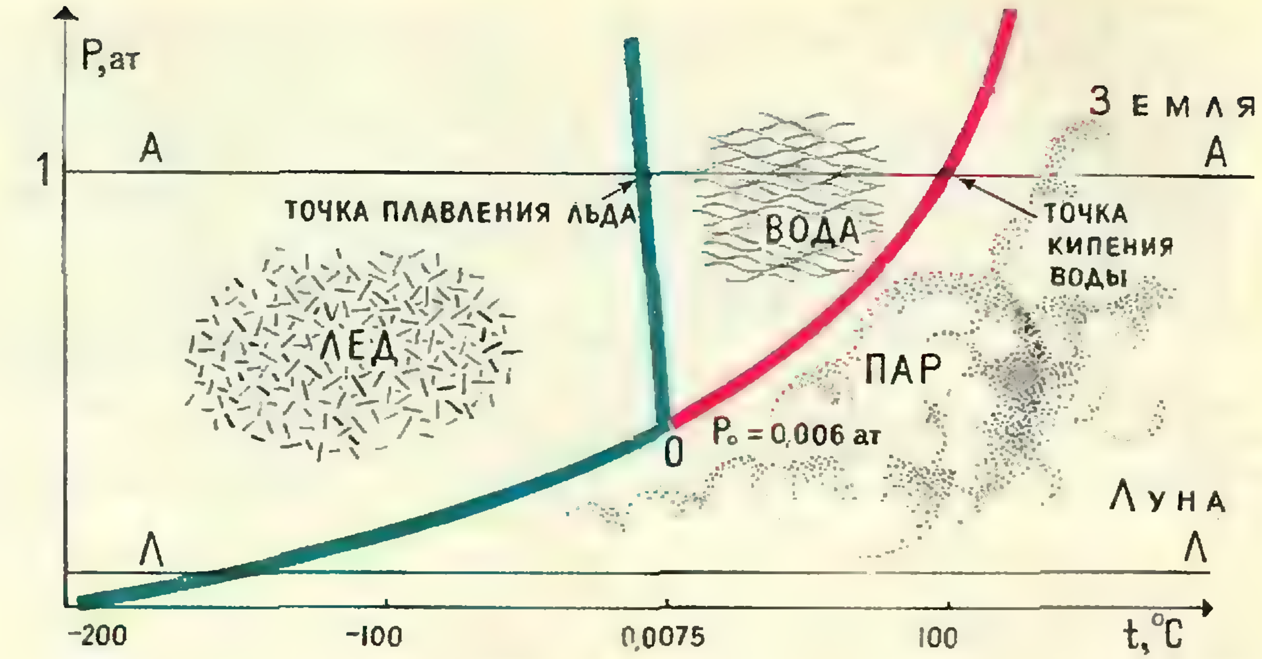


Рис. 2.

и ночью ($t = -160^\circ$ С) на самой поверхности, без защитного слоя лунной коры? Ответ на эти вопросы дает так называемая диаграмма состояния воды (рис. 2), о которой мы сейчас и расскажем.

Будем по вертикальной оси откладывать давление, под которым находится лед, вода или пар, а по горизонтальной оси — их температуру. Каждой точке на плоскости, ограниченной осями координат P и t°, соответствует определенное состояние воды (лед, вода или пар).

Начнем со льда. Синяя кривая показывает зависимость давления, под которым плавится лед, от температуры. Чем выше давление, тем ниже температура плавления. Отойдем от синей кривой немного вправо: при том же давлении повысим температуру. Лед полностью растает — точки плоскости правее синей кривой соответствуют воде. Если от синей кривой отойти влево — уменьшить температуру, то вода замерзнет, превратится в лед. В точках самой кривой (и только при этих давлениях и температурах) лед и вода находятся в равновесии друг с другом — сколько плавится льда, столько же воды превращается в лед. Поэтому синюю кривую называют кривой равновесия льда и воды.

Если мы будем повышать температуру воды при неизменном давлении, то попадем в область таких температур, при которых может существовать только пар. Эта область температур и давлений находится справа от красной кривой — кривой равновесия воды и пара, или, другими словами, кривой зависимости температуры кипения воды от давления. Эта кривая, как видно из рисунка, показывает, что чем ниже давление, под которым находится вода, тем ниже и температура ее кипения. Это мы хорошо знаем — например, высоко в горах, где давление воздуха мало, альпинисту трудно сварить в кипятке яйцо, приходится жарить яичницу. На вершине Эльбруса, где давление составляет половину атмосферного, вода кипит при 82° С.

Уменьшим давление до 0,006 *ат*. Опыт показывает, что температура кипения снизится до нуля (точнее, до 0,0075° С) — «кипяток» имеет теперь температуру замерзания воды. А что будет при дальнейшем понижении давления? Температура кипения упадет ниже нуля, «кипяток», находящийся в равновесии с паром, замерзнет, будет уже не жидкостью — водой, а твердым телом — льдом. Лед будет испаряться, не плавясь. Зеленая кривая на рисунке — кривая равновесия лед — пар.

Точка *О*, в которой соединяются все три ветви, называется тройной точкой. Если в закрытом сосуде при температуре $t = 0{,}0075°$ С и давлении паров $P = 0{,}006$ *ат* находятся вода, лед и пар, то масса каждой из этих трех форм воды остается неизменной — сколько воды испаряется, столько же и конденсируется, сколько льда плавится, столько же и замерзает воды.

Если давление больше 0,006 *ат*, то при нагревании лед вначале плавится, то есть переходит в воду, а уже вода, при дальнейшем нагревании, кипит и переходит в пар. В области давлений, меньших чем в тройной точке, лед при нагревании непосредственно переходит в пар, минуя жидкое состояние — воду.

Пусть кусок льда нагревается на поверхности Земли. Как определить, в каком состоянии он находится? Из диаграммы состояния воды сразу видно, что знания одной температуры недостаточно — надо задать еще внешнее давление. Тогда определится и точка диаграммы состояния, в которой находится в данный момент вода.

Предположим, что процесс изменения состояния воды идет при постоянном давлении. У поверхности Земли давление, под которым находится вода, равно 1 *ат*. Это значительно выше давления водяного пара 0,006 *ат* в тройной точке. Поэтому изменение состояния воды при нагревании изображается прямой *АА*: сначала достигается температура плавления, затем лед переходит в воду, при дальнейшем нагревании выше 100° С вода закипает и переходит в пар. Например, на Земле летом лед в слое вечной мерзлоты в верхних нескольких метрах земной коры оттаивает, и над ним появляется вода.

Пусть теперь кусок льда нагревается Солнцем на лунной поверхности. Полдень, палящее Солнце, температура почвы +120° С. Поскольку давление на поверхности Луны значительно ниже, чем в тройной точке, то состояние льда будет меняться по прямой *ЛЛ* — лед испарится, не превращаясь в воду. Ведь при давлениях ниже 0,006 *ат* вода в жидком состоянии вообще не существует ни при какой температуре.

Аналогичным образом ведет себя на Земле «сухой лед» — твердая углекислота CO_2. В его тройной точке давление $P = 5{,}11$ *ат*, температура $t = -56{,}6°$ С. Земное атмосферное давление меньше, чем в тройной точке для углекислоты, поэтому углекислота не может быть жидкой и превращается непосредственно в пар. «Сухой лед» применяют, например, продавцы мороженого, чтобы оно не таяло.

У читателя может возникнуть следующий вопрос. Водяных паров в воздухе мало, а большую часть атмосферного давления в 1 *ат* создают кислород и азот. Почему же на диаграмме состояния (см. рис. 2) мы берем температуру кипения при давлении 1 *ат*, а не при более низком давлении водяных паров атмосферного воздуха? Какое давление определяет собой состояние вещества — давление самого вещества или полное давление на поверхность раздела?

Для кривой плавления такого вопроса не возникает. В этом случае давление на поверхность раздела

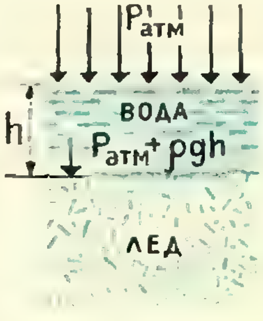


Рис. 3.

равно атмосферному или больше него, если лед покрыт слоем воды (рис. 3).

Для кривой равновесия вода—пар все обстоит сложнее. Все точки справа от красной кривой соответствуют устойчивому состоянию — пар, слева — устойчивому состоянию — вода. Если давление водяного пара меньше давления на красной кривой, то вода при данной температуре полностью испарится (пар над ней ненасыщенный). В атмосферном воздухе давление водяного пара обычно составляет 0,013 *ат*, то есть 60% от давления насыщенного пара. Поэтому налитая в блюдце вода со временем всегда испарится. При охлаждении воздуха давление 0,013 *ат* становится больше давления насыщенных паров при новой температуре и водяной пар конденсируется (пример — утренняя роса).

Но испарение с поверхности жидкости — процесс очень медленный. Существует другой процесс перехода жидкости в пар, значительно более быстрый — испарение при кипении. В этом случае пузырьки пара образуются во всем объеме жидкости. Внешнее давление (полное давление 1 *ат*) передается с поверхности жидкости также и во все точки в ее глубине, поэтому образующийся внутри жидкости пар должен иметь давление, равное (или большее) полному давлению на жидкость, вне зависимости от того, какова причина этого внешнего давления — водяной пар или давление атмосферного воздуха.

На Луне на открытой поверхности вода всегда кипит, а внизу замерзает. Но в зависимости от времени суток (то есть от нагревания Солнцем) тут могут быть самые разнообразные эффекты.

Замерзнет пар или нет, зависит не только от его температуры, но и от давления. На Луне при ничтожных давлениях водяной пар мог выйти на ее поверхность, и не замерзнув. На рисунке 2 мы видим, что в лунных условиях водяной пар может существовать и при температурах, близких к —200° С. Все зависит от условий (зависимость давления от глубины, температура, пористость вещества Луны), которые на протяжении 4,5 миллиарда лет истории Луны могли быть самыми различными.

Таким образом, оба основных пункта теории подпочвенного льда — выход достаточного количества водяного пара из недр Луны и его замерзание у поверхности — основаны на определенных предположениях и нуждаются в проверке на опыте. Надо разработать экспериментальные методы поиска льда и с их помощью обследовать Луну по всей поверхности, а также и вглубь.

Диапазон изменения температур на лунной поверхности очень широкий (от —160 до +120° С). Можно предположить, что свойства льда в таком широком диапазоне температур тоже не постоянны. Поиски льда на Луне (пока теоретические) побудили к новым исследованиям свойств льда в земных лабораториях.

В 1969 году был изучен процесс замерзания воды в условиях лунной тени, то есть при давлении, меньшем десяти миллионных долей атмосферы, и температуре (—170° С)—(—180° С). При этом была открыта неизвестная до сих пор форма льда — аморфный лед. Он вдвое плотнее воды: вода, замерзая при столь низких температурах, не расширяется (вспомните, что обычный лед плавает на поверхности воды), а сжимается.

Схема опыта очень проста. Дистиллированная вода впускалась в вакуумную камеру и намерзала тонким слоем льда на металлическом конусе. Объем льда определялся сравнением фотографий конуса до и после намерзания льда, масса определялась взвешиванием. Отсюда находилась плотность. Лед, намерзавший на конусе при температурах ниже —175° С, имел плотность 2,3 *г/см*^{3} и был похож на стекло. Примеси других веществ мешают образованию тяжелого льда; он характерен для совершенно чистой воды.

Возможны ли на Луне реки?

На первый взгляд, нет. Если вода находится в твердом или газообразном состоянии, то как же она может течь? Однако при более внимательном анализе диаграммы состояния (рис. 2) такой простой ответ оказывается неверным.

Представим себе, что по поверхности Луны течет поток воды. Вода будет интенсивно испаряться с поверхности. При испарении тратится много тепла. Это тепло отнимается у еще неиспарившейся воды и она начнет замерзать. Образующийся лед легче воды. Он будет плавать на поверхности и создаст дополнительное давление на поверхность воды своим весом. Когда давление слоя льда $P = \rho g h$ превысит давление в тройной точке $P_0 = 0{,}006$ *ат*, вода перестанет испаряться.

На Луне $g = 1{,}16$ *м/сек*², плотность льда равна 0,9 *г/см*³, то есть минимальная толщина слоя льда, предохраняющего воду от кипения при 0° С, равна

$$h = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{0{,}006 \cdot 10^5 \, н/м^2}{0{,}9 \cdot 10^3 \, кг/м^3 \cdot 1{,}6 \, м/сек^2} \approx 0{,}4 \ м.$$

Но есть ли на поверхности Луны борозды, похожие на русла земных рек? Оказывается, да. Извилистые борозды были замечены на Луне еще в 1788 году. Они обычно берут свое начало в кратерах, на возвышенностях и кончаются в низинах. Недавно американские ученые Лингенфельтер, Пил и Шуберт предположили, что извилистые борозды — это бывшие русла лунных водных рек, протекавших под защитным слоем льда. Действительно, по своему строению и размерам извилистые борозды внешне похожи на русла земных рек. Источником воды мог послужить подледный ее слой. Крупный метеорит в состоянии пробить лунную кору до водного слоя и открыть воде путь на поверхность.

Но существуют и другие теории возникновения извилистых борозд, например, от потоков лавы. Правильна ли та или иная теория, должны показать дальнейшие исследования. В «земных» лабораториях предпринимались попытки смоделировать «лунные реки».

В вакуумную камеру помещался поднос с размерами 30×42,5 *см*, дно которого заполнялось слоем измельченной скальной породы с частицами от 100 микрон до 4 *мм* (в большинстве опытов диаметр частиц этого «реголита» составлял 100—500 микрон). Толщина слоя породы менялась от 0 до 5 *см*. Поднос ставился наклонно. Вода вводилась через трубку в торцевой части подноса, поднятой кверху, со скоростью до 800 миллилитров в минуту. В камере поддерживалось давление около 0,0013 *ат*, то есть в пять раз ниже, чем давление в тройной точке.

Результаты опыта были следующие. При атмосферном давлении поток воды действительно прорывал в «реголите» систему каналов. Правда, извилин, характерных для земных рек, не наблюдалось, но эти каналы тоже разветвлялись и меняли направление.

При опытах в вакууме наблюдалась совсем иная картина. Поток воды интенсивно закипал по всей своей длине, разбрасывая в стороны частицы «лунной пыли» и образующегося льда. Кипение продолжалось несколько секунд, пока источник воды не покрывался ледяной коркой. Вода продолжала течь под слоем льда, но текла не обязательно вниз, по направлению наклона подноса с почвой. Она просачивалась сквозь «реголит», прорываясь на поверхность то в одном, то в другом месте. Этот процесс выхода на поверхность носил характер взрыва—струя пара увлекала за собой частицы реголита затем образовывалась ледяная корка. В конце каждого опыта ледяной слой покрывал собой весь поднос с почвой. Затем он испарялся. Образования каналов не наблюдалось, поверхность почвы приобретала холмистый характер.

Так что экспериментальных подтверждений гипотеза о «лунных реках» не нашла.

Более вероятно выделение водяных паров из глубин Луны вулканами. Вулканическую деятельность (выделение газов из глубин Луны) обнаружил ленинградский астроном профессор Козырев. Если в глубине еще сохранилась вода, то при извержениях газов должны выделяться и пары воды.

От редакции

Недавно в нашей печати было сообщение о том, что группа американских ученых, проводивших исследования Луны по показаниям приборов, оставленных на ее поверхности экипажами космических кораблей «Аполлон-12» и «Аполлон-14», обнаружила «лунный гейзер», извергающий водяной пар. Это сообщение нуждается в дальнейшей проверке.

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Р. В. Фрейвалд

На V Всесоюзной математической олимпиаде*) была предложена следующая задача:

Переключатель (рис. 1) с двумя входами и двумя выходами может находиться в двух различных состояниях.

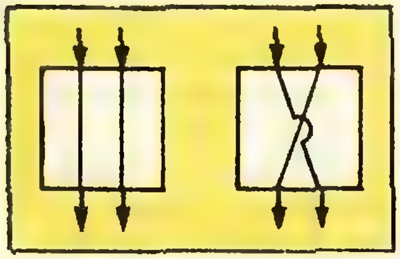


Рис. 1.

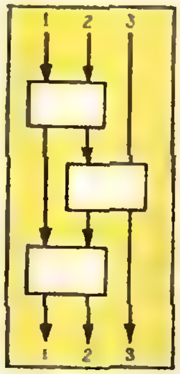


Рис. 2.

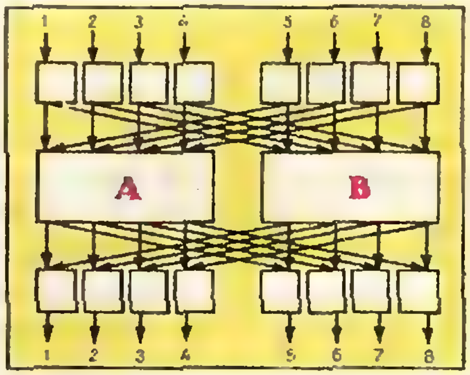


Рис. 3.

На рисунке 2 изображена схема телефонной связи с тремя входами и тремя выходами, которая обладает таким свойством «универсальности»: меняя состояния переключателей, можно осуществить любое из шести соединений трех входов с тремя различными выходами, то есть

$$\boxed{\begin{array}{ccc}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&2&3\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&1&2\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&1\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&1&3\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{ccc}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&3&2\end{array}}$$

(Проверьте это. Заметьте, что общее число различных состояний этой схемы равно $2^3=8$, поскольку каждый из переключателей может находиться в двух состояниях.)

а) Постройте схему с четырьмя входами и четырьмя выходами, которая была бы «универсальной», то есть осуществляла бы любое из 24 возможных соединений входов и выходов.

б) Какое минимальное число переключателей нужно для такой схемы?

в) Назовем схему с n входами и n выходами n-универсальной, если она осуществляет любое из $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ возможных соединений n входов с n различными выходами. На рисунке 3 изображена схема с восьмью входами и восьмью выходами, где A и B — 4-универсальные схемы. Докажите, что она является 8-универсальной.

---

*) Подробнее о пятой олимпиаде см. «Квант» № 11 за 1971 г., стр. 35—42.

Оцените сверху и снизу число переключателей в минимальной n-универсальной схеме.

Рассмотрим следующую схему (рис. 4). 4-универсальность этой схемы можно легко проверить, подбирая для всех $4!=24$ требуемых соединений нужные состояния переключателей. Заметим, что практически удобнее поступать наоборот: рассмотреть все $2^5=32$ различные состояния схемы и выписать, какое соединение осуществляется каждым состоянием схемы (попробуйте проделать это!).

Если некоторая схема состоит из 4 или меньшего числа переключателей, то эта схема может иметь только $2^4=16$ различных состояний. Поэтому такая схема не может осуществлять 24 различных соединения и, следовательно, не может быть 4-универсальной. Итак, мы решили задачи а) и б).

Последнее рассуждение можно обобщить. Пусть n-универсальная схема состоит из m переключателей. Эта схема имеет 2^m различных состояний и должна осуществлять $n!$ различных соединений. Поэтому $2^m\geqslant n!$ и, следовательно, $m\geqslant\log_2(n!)$. Так как для $n\geqslant 2$, $n!>\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, то $m>\log_2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)=\frac{n}{2}\cdot(\log_2 n-1)$. Пользуясь более точным неравенством $n!>\left(\frac{n+1}{e}\right)^n$ (см. задачу 3 в статье М. И. Башмакова «О постулате Бертрана» — «Квант» № 5, 1971, стр. 6), полученную оценку можно улучшить примерно в два раза: $m>n(\log_2(n+1)-\log_2 e)$.

Докажем теперь 8-универсальность схемы, изображенной на рисунке 3. Вообще говоря, и это доказательство можно вести перебором состояний схемы, но здесь такой перебор уже практически неосуществим (по крайней мере, за время, отведенное на Олимпиаду). Поэтому нужно рассуждать более рационально.

Пусть требуется осуществить соединение

$$\begin{array}{cccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\l_1&l_2&l_3&l_4&l_5&l_6&l_7&l_8\end{array}$$

Будем говорить, что это соединение состоит из 8 связей: 1-я связь соединяет 1-й вход с l_1-м выходом, 2-я связь соединяет 2-й вход с l_2-м выходом, и так далее.

Заметим, что любую связь (например, 3-го входа с 5-ым выходом) в нашей схеме можно осуществить в точности двумя способами — через блок A и через блок B (рис. 5 и 6). Каждый из этих блоков имеет 4 входа и выхода. Для осуществления нашего соединения мы должны все 8 связей распре-

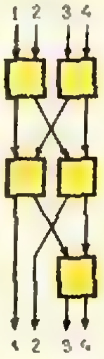


Рис. 4.

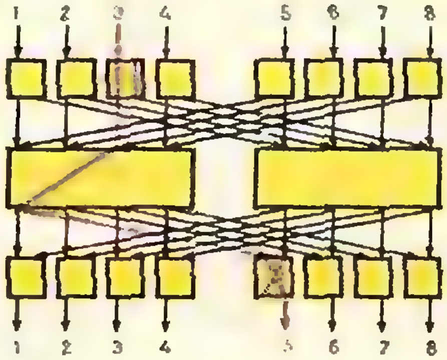


Рис. 5.

делить по блокам A и B так, чтобы 4 связи проходили через A и 4 — через B. При этом мы должны следить, чтобы две разные связи не проходили через один и тот же вход или один и тот же выход блоков A и B.

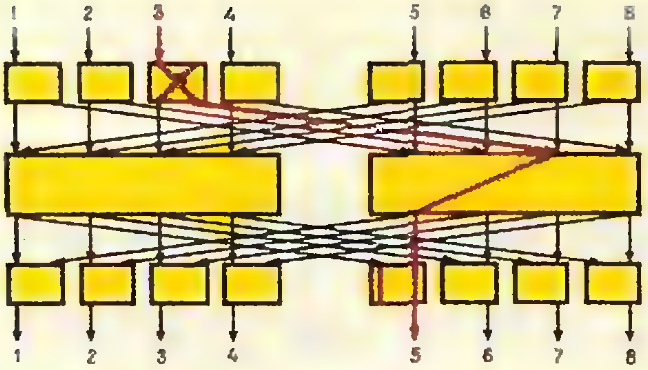


Рис. 6.

Рассмотрим первый и пятый вход нашей схемы. Каждый из них может быть подключен либо к первому входу блока A либо к первому входу блока B. Следовательно, один из этих входов должен быть подключен к блоку A, другой — к блоку B, иначе две связи будут подключены к одному и тому же входу некоторого блока. К разным блокам должны быть подключены также следующие пары входов: 2-й и 6-й, 3-й и 7-й, 4-й и 8-й. Легко видеть, что такое условие распределения связей по блокам не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы в схеме разные связи не проходили через один и тот же вход блоков A и B. Чтобы сформулировать такое же условие для выходов блоков A и B, полезно обратить внимание на симметричное расположение входов и выходов схемы. Заключаем, что следующие пары выходов схемы должны быть подключены к разным блокам: 1-й и 5-й, 2-й и 6-й, 3-й и 7-й, 4-й и 8-й.

Изобразим на рисунке эти отношения между различными связями одного и того же соединения. Каждую отдельную связь изобразим прямоугольником, внутри которого записано, какой вход с каким выходом данная связь соединяет. Если две связи обязательно должны проходить через разные блоки, то соответствующие им прямоугольники соединим линией. При этом проведем линию красного цвета, если на 4 отличаются входы, и синего — если на 4 отличаются выходы.

Например, соединение

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 4 \end{array}$$

таким способом изображено на рисунке 7.

Каково бы ни было соединение, из каждого прямоугольника выходит в точности одна синяя и в точности одна красная линия. Поэтому рисунок всегда состоит из одного или нескольких «колец». При этом в каждом «кольце» красные и синие линии чередуются, иначе из некоторого прямоугольника выходили бы две линии одного цвета. Следовательно, каждое «кольцо» содержит четное число прямоугольников.

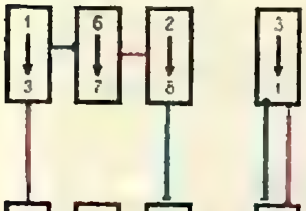


Рис. 7.

Пользуясь таким рисунком, легко распределить связи по блокам так, чтобы выполнялись все указанные выше ограничения. Для этого нужно следить, чтобы связи, которым соответствуют прямоугольники, соединенные линией, проходили через разные блоки. Поэтому в каждом «кольце» рисунка нужно выбрать произвольным образом по одному прямоугольнику и соответствующую этому прямоугольнику связь осуществить через блок A, далее, связь, соответствующую соседнему прямоугольнику, осуществить через блок B, потом связь, соответствующую следующему прямоугольнику, через A и так далее, пока «кольцо» замкнется. Связи, соответствующие первому и последнему прямоугольникам, при этом будут осуществляться через разные блоки, так как число прямоугольников в «кольце» четно. 8-универсальность схемы (см. рис 3) доказана. Заметим только, что распределение связей по блокам всегда можно провести так, чтобы один из переключателей (например, левый нижний) находился в каком-то заранее заданном состоянии. (Другими словами, этот переключатель можно из схемы удалить, а схема не перестанет быть универсальной.) Тогда в «кольце», содержащем связь, проходящую через выделенный переключатель, распределение связей по блокам нужно начать именно с этой связи.

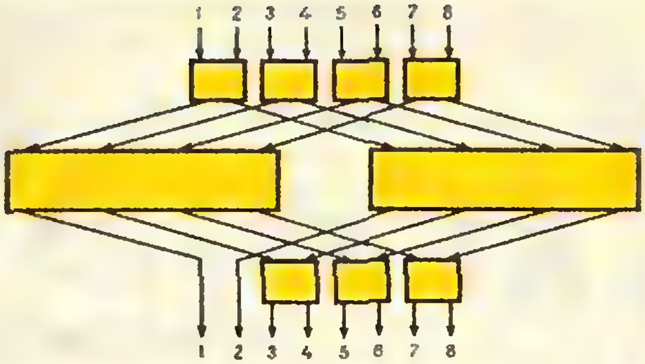


Рис. 8.

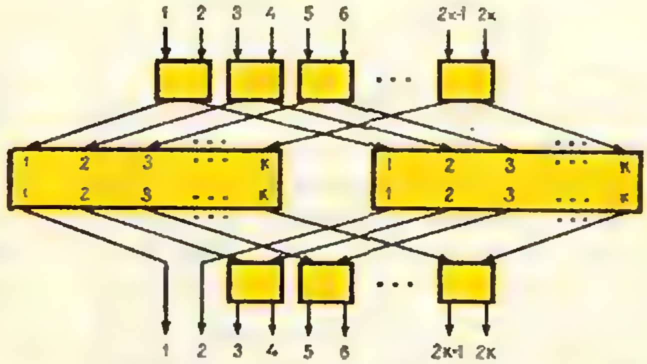


Рис. 9.

Для оценки сверху числа переключателей в минимальной n-универсальной схеме будем строить n-универсальные схемы с возможно меньшим числом переключателей. Приведенное выше доказательство 8-универсальности схемы (см. рис. 3) легко обобщить на случай любого четного числа входов. Этот способ дает возможность, имея 8-универсальную схему, строить довольно экономную 16-универсальную схему, потом 32-универсальную схему и так далее. Можно подсчитать, что если $n=2^k$ и в качестве блоков 4-универсальной схемы использовать схему (рис. 4), то такая схема имеет $2k\cdot 2^k-\frac{11}{4}\cdot 2^k=$ $=2n\cdot\log_2 n-\frac{11}{4}\cdot n$ переключателей. Если n не равно целой степени двойки, то можно использовать схему, являющуюся универсальной для большего числа входов, равного полной степени двойки. Так как ближайшая сверху полная степень двойки превосходит данное число n не более чем в два раза, получается, что для любого n существует n-универсальная схема, содержащая не более $4\,n\cdot\log_2 n$ переключателей.

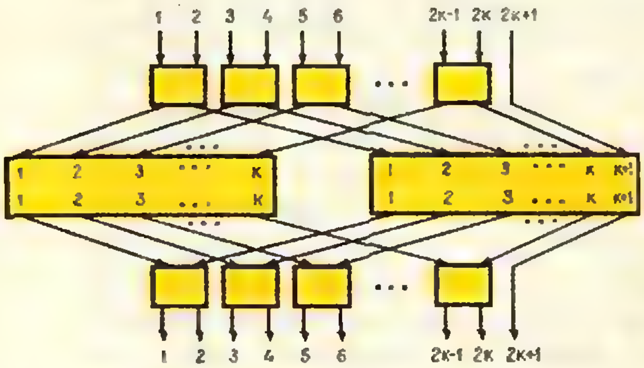
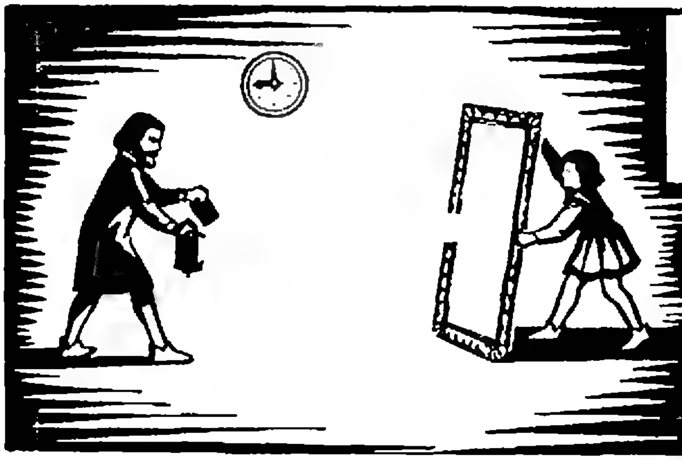


Рис. 10.

(Окончание см. на стр. 27.)

В.Винецкий



Измерение скорости света

Еще за 300 лет до нашей эры греческие ученые уже знали, что свет распространяется прямолинейно, обладает свойством отражаться от гладких поверхностей и при этом угол падения равен углу отражения. Древние знали также о преломлении света. Клавдий Птоломей, великий астроном и математик древности, составил таблицы измеренных им углов падения и преломления. Но по вопросу о скорости света в древней науке не было единого мнения. Большинство ученых того времени, в том числе и Аристотель, считали, что скорость света бесконечно велика — ведь никакими из существовавших тогда приборов и методов ее нельзя было измерить даже приблизительно. Тем не менее, 900 лет назад арабский ученый и врач Авиценна высказал предположение, что скорость света, хотя и очень велика, но конечна. С ним соглашался и его современник Альгазен. Но, конечно, ни один из них не мог подтвердить свое мнение фактами или экспериментами.

Так или иначе, все поколения на протяжении веков проявляли интерес к природе света, о чем говорят и дошедшие до нас мифы, легенды, предания. Этот неиссякаемый интерес к явлениям природы был сначала единственным мотивом, побудившим ученых приняться за экспериментальное измерение скорости света. Один из крупнейших физиков-экспериментаторов Альберт Майкельсон, почти всю жизнь посвятивший измерению скорости света, на вопрос корреспондентов: «А зачем это нужно?» отвечал: «Ведь это ужасно интересно!». Но еще до работ Майкельсона определение величины скорости света и ее зависимости от различных условий приобрело характер не только удовлетворения любознательности ученых. Все более волнующая умы загадка «светоносного эфира», вопрос о корпускулярной или волновой природе света, а затем и теория относительности потребовали точного знания скорости света. В наше же время точное определение этой величины имеет уже чисто практическое значение. Ее необходимо знать и при расчете энергетики ядерных реакций, и для измерения расстояний между космическими объектами в связи с расширением космических исследований, и во многих других, не менее важных проблемах.

Первым, кто попытался экспериментально определить скорость света, был Галилео Галилей. Его метод был чрезвычайно прост, но, к сожалению, не дал результата. Вот как сам Галилей описывал его:

«Опыт, который я придумал, заключается в следующем. Два лица держат каждый по огню, заключенному в фонаре или чем-либо подобном, который можно открывать или закрывать движением руки на виду у компаньона; став друг против друга на расстоянии нескольких локтей, участники начинают упражняться в открывании и закрывании огня таким образом, что как только один замечает свет другого, так тотчас же открывает и свой... Мне удалось произвести его лишь на малом расстоянии — менее одной мили, — почему я не мог убедиться, действительно ли появление противоположного света совершается внезапно. Но если оно происходит и не внезапно, то, во всяком случае, с чрезвычайной быстротой».

Ясно, что имевшиеся тогда в распоряжении Галилея средства не позволяли решить этот вопрос. Споры ученых продолжались, и единого мнения по-прежнему не было: одни считали скорость света конечной величиной, другие — настолько большой, что не стоит и пытаться ее измерить, третьи — бесконечной.

Первые измерения скорости света были осуществлены в 1676 году. Молодой датский астроном Оле Рёмер приступил к работе в новой Парижской обсерватории. Как и все астрономы того времени, Рёмер знал, что время между затмениями спутника Юпитера — Ио — непостоянно в течение года. Если определить время начала затмения в момент, когда Земля находится в такой точке своей орбиты, что расстояние Земля — Юпитер наименьшее (рис. 1: $З_1$ — положение Земли, $Ю_1$ — положение Юпитера), то можно предсказать время начала следующего затмения Ио (зная период обращения Ио вокруг Юпитера).

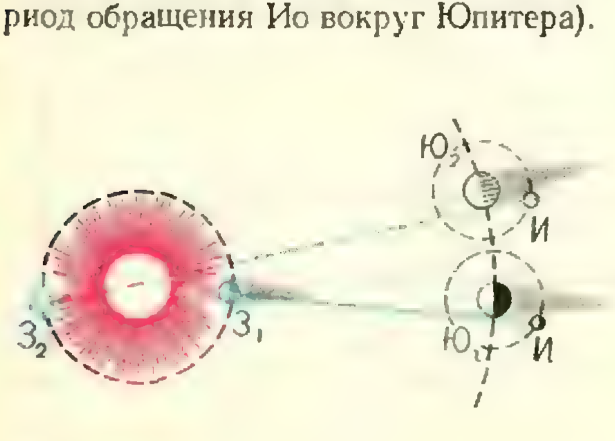


Рис. 1

Однако следующее затмение наступает несколько позже предвычисленного момента времени. Постепенно время «запаздывания» увеличивается, а затем уменьшается, и примерно через год (чуть больше) начало затмения Ио наблюдается с Земли в тот момент времени, который соответствует вычислениям. Максимальное запаздывание отмечается примерно через полгода от того момента, когда Земля и Юпитер находились в положениях $З_1$ и $Ю_1$, то есть когда Земля находится в положении $З_2$, а Юпитер — в положении $Ю_2$ (см. рис. 1). Расстояние $З_2Ю_2$ (Земля—Юпитер) отличается от расстояния $З_1Ю_1$ на величину диаметра земной орбиты. Рёмер решил, что максимальное запаздывание начала затмения Ио равно времени τ, которое затрачивает свет на прохождение пути, равного диаметру земной орбиты d, то есть $\tau = d/c$. Максимальное время запаздывания по измерениям того времени составляло 1320 *сек*, диаметр земной орбиты считался приблизительно равным 283 миллионам километров. Используя эти данные, Рёмер получил для скорости света значение $c = 214300$ *км/сек*.

Следующим, кто измерил скорость света, был английский астроном Джемс Брадлей. Он использовал для вычислений явление аберрации света.

Явление аберрации заключается в том, что видимые положения звезд на небе описывают в течение года более или менее вытянутые эллипсы, большие оси которых одинаковы. Брадлей предположил, что аберрационный эллипс получается в результате сложения скорости света, идущего от звезды, и скорости вращения Земли вокруг Солнца. Допустим, — говорил он, — что Земля в точке своей орбиты, ближайшей к звезде, неподвижна; наведем телескоп на эту звезду так, чтобы ее изображение находилось в центре поля зрения телескопа. Затем придадим Земле ее обычную скорость движения по орбите ($v = 30$ *км/час*). Тогда за время τ, пока свет от звезды

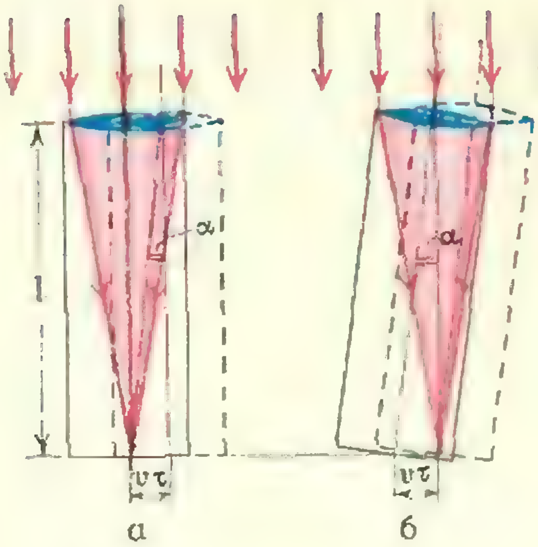


Рис. 2.

будет распространяться в трубе телескопа $\left(\tau = \frac{l}{c}\right.$, где c — скорость света, l — длина трубы$\left.\right)$. Земля пройдет по орбите путь, равный $v \cdot \tau$, и на такое же расстояние изображение звезды сдвинется из центра поля зрения (рис. 2, *а*). Чтобы вернуть изображение звезды на место, нужно, очевидно, наклонить телескоп в сторону движения Земли на такой угол α, чтобы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v\tau}{l}$ (рис. 2, *б*). Так как $l = c\tau$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v\tau}{c\tau} = \frac{v}{c}$. Отсюда $c = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha}$. То же самое будет в противоположной точке земной орбиты, но телескопу нужно будет придать наклон в противоположную сторону. Таким образом, направления на одну и ту же звезду могут отличаться максимум на угол 2α. Измерения показали, что $2\alpha = 41''$. При астрономических наблюдениях телескоп, конечно, не наклоняют. Благодаря изменению направления скорости Земли изображение звезды будет в разные дни находится в разных точках поля зрения телескопа и в течение года опишет эллипс. Большая ось этого эллипса будет видна из центра объектива под углом 2α. Зная угол α, Брадлей нашел скорость света и получил для нее значение 303 000 *км/сек*. Это было в 1728 году.

Однако ученые не были удовлетворены, им хотелось бы измерить недоступную прежде скорость света на Земле, не выходя за пределы родной планеты, с тем, чтобы все условия опыта находились под контролем. Решения этой задачи пришлось ждать сто двадцать лет.

В 1849 году французский физик Арман Ипполит Луи Физо придумал для этого довольно простой способ. Схема его такова (рис. 3). Луч света от источника *S* падает на полупрозрачную зеркальную пластину *П*, отражаясь от нее, направляется через собирающие линзы к неподвиж-

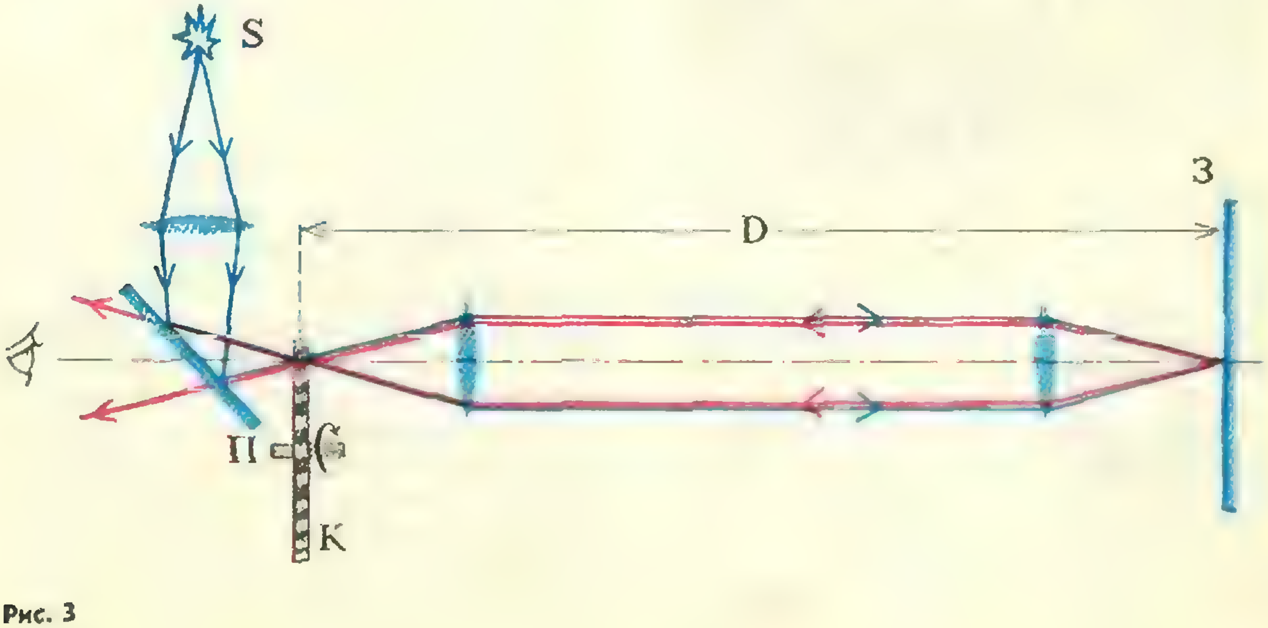


Рис. 3

ному зеркалу *З*. Отразившись от зеркала *З*, луч возвращается по тому же пути и через полупрозрачную пластину *П* попадает к наблюдателю. Если на пути луча поместить зубчатое колесо *К*, то наблюдатель может видеть свет от источника только в том случае, когда по пути к зеркалу *З* и обратно луч проходит в промежутке между зубцами колеса *К*. Если же привести колесо *К* во вращение с такой угловой скоростью ω, чтобы луч, прошедший по пути от пластины *П* через промежутки между зубцами после отражения от зеркала *З* попал на место зубца, соседнего с прорезью, то наблюдатель не увидит света. Произойдет, как говорят, первое затмение.

Если скорость вращения колеса удвоить, что наблюдатель увидит максимально яркий отраженный свет. Если скорость вращения увеличить в три раза — на пути отраженного от *З* света окажется соседний зубец. Наступит второе затмение.

Если число зубцов на колесе равно z, то, очевидно, при первом затмении угловая скорость вращения колеса ω должна быть такой, чтобы за время $t = \frac{2D}{c}$, необходимое свету для прохождения расстояния от колеса *К* к зеркалу *З* (это расстояние D называют базой) и обратно (рис. 3), колесо повернулось на угол $\varphi = 2\pi/2z$ (угол между центром зубца и центром соседнего просвета), то есть

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi \cdot c}{2z \cdot 2D} \text{ или } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{4zD}$$

(ν — частота вращения). Отсюда $c = 4\nu z D$.

В опыте, поставленном Физо, расстояние D равнялось 8,63 *км*, $z = 720$, частота, при которой наблюдалось первое затмение, $\nu = 12{,}5$ *об/сек.* Из своих данных Физо получил значение $c = 315\,000$ *км/сек.*

В XVIII веке в физике продолжался спор между сторонниками двух теорий о природе света — волновой и корпускулярной. Согласно корпускулярной теории Ньютона свет состоит из мельчайших частичек — корпускул, которые вылетают из источника и распространяются прямолинейно во всех направлениях с громадной скоростью, и скорость эта тем больше, чем больше плотность среды. Последнее утверждение резко противоречит волновой теории, согласно которой скорость света в вакууме должна быть больше, чем в веществе. В 1838 году французский физик Доминик Франсуа Араго предложил провести опыт по измерению скорости света в среде (например, в воде). Сам Араго этот опыт не смог осуществить. Метод, которым пользовался Физо, не давал возможности измерить скорость света в веществе. В 1862 г. Жан Бернар Леон Фуко поставил опыт, принцип которого был предложен Араго. Метод Фуко основан на очень тщательных измерениях малых промежутков времени.

Свет от источника S, пройдя полупрозрачную зеркальную пластину *П* и линзу *Л*, отражался от плоского зеркала $З_1$ к вогнутому сферическому зеркалу $З_2$ и после этого попадал к наблюдателю в точку S' (рис. 4). Зеркало $З_1$ могло вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Расстояние между $З_1$ и $З_2$ (длина базы) было равно фокусному расстоянию зеркала $З_2$, то есть половине его радиуса, который составлял 4 *м*. Благодаря этому наблюдатель видел отраженный от *П* луч всегда в одном и том же месте, независимо от положения зеркала $З_1$, если только оно покоилось. Но когда зеркало $З_1$ вращалось, то за время, пока свет проходил от $З_1$ к $З_2$ и обратно, зеркало $З_1$ успевало повернуться на некоторый угол, и направление прямого луча (падающего на зеркало $З_1$ после прохождения пластины *П* и линзы *Л*) не совпадало с направлением обратного луча (прошедшего путь $З_2З_1$ и отраженного зеркалом $З_1$ к пластине *П*). В результате изображение источника, фиксируемое наблюдателем, смещалось по отношению к изображению, видимому при неподвижном зеркале, в точку S_1'. Если

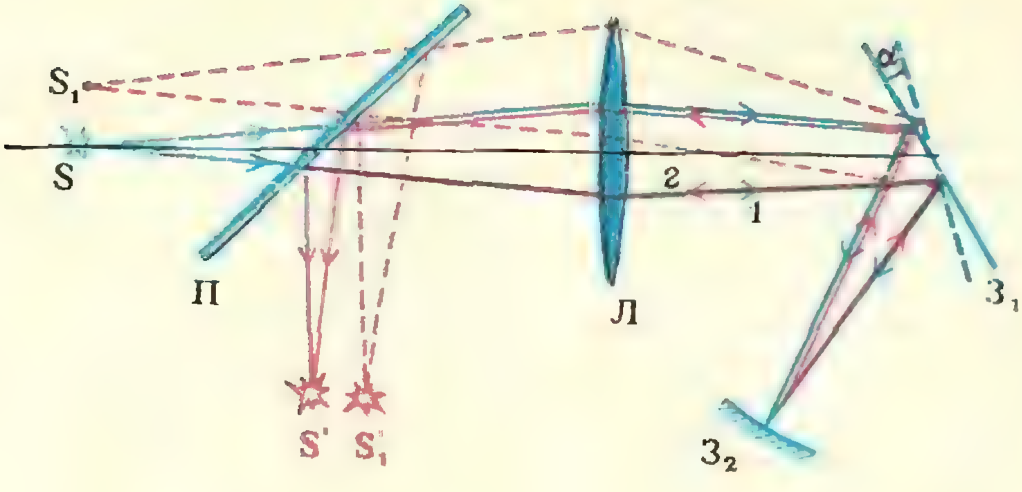


Рис. 4.

длина базы равна r, то путь $З_1З_2$ и обратно свет проходит за время $\Delta t = \frac{2r}{c}$. За это время зеркало $З_1$, вращающееся с частотой n (*об/сек*), повернется на угол $\alpha = 2\pi n \cdot \frac{2r}{c}$. Поэтому по закону отражения угол между лучами *1* и *2* (см. рис. 4) на пути $З_1П$ будет равен $2\alpha = 8\pi n \cdot \frac{r}{c}$.

Таким образом, изображение S_1', которое видит наблюдатель при вращающемся зеркале $З_1$, оказывается смещенным от изображения S', получаемого при неподвижном зеркале $З_1$, на угол, равный $8\pi n \frac{r}{c}$.

Пользуясь этим методом, Фуко получил для скорости света в воздухе значение $c = 298\,000$ *км/сек*.

В соответствии с первоначальным замыслом Араго Фуко осуществил при помощи своей установки измерение скорости света в воде. Для этого он несколько видоизменил свою установку, снабдив ее двумя симметрично расположенными сферическими зеркалами и поместив между одним из них и вращающимся зеркалом трубу с водой. Это позволило ему сравнить скорости света в воде и воздухе и найти, что скорость света в воде составляет $^3/_4$ от ее величины в воздухе. Этот результат был последним ударом по корпускулярной теории света, выдвинутой Ньютоном.

Методы, которыми пользовались Физо и Фуко, позволяли измерить скорость света с точностью до ±500 *км/сек*.

В 1873 году Альфред Корню, повторивший опыт Физо, измерил скорость света с точностью до ±200 *км/сек*.

В 1877 году американский физик Альберт Майкельсон, усовершенствовав схему Фуко, провел серию опытов и измерил скорость света с точностью до ±50 *км/сек*.

Но Майкельсон не удовлетворился полученным результатом. С 1877 года и до конца своей жизни он неоднократно возвращался к измерению скорости света, непрерывно совершенствуя свою установку. Полученное Майкельсоном значение $c = 299796 \pm 4$ *км/сек* считалось долгое время наиболее точным.

В проблеме измерения скорости света опыты Майкельсона завершили этап, который можно назвать классическим. Но еще до окончания работ Майкельсона были поставлены новые эксперименты, уже на новой технической и идейной основе, обеспеченной бурным развитием физики. Эти эксперименты продолжаются вплоть до настоящего времени; их целью является установление наиболее точного значения скорости света.

Современные методы измерения скорости света можно разделить на две группы. К первой относятся те, которые используют ту же идею, что Фуко и Физо, то есть измеряют время, за которое свет проходит известное расстояние. Это так называемые прямые методы. Благодаря возможностям точного измерения очень малых промежутков времени, которые представляет сейчас радиотехника, точность прямых методов значительно увеличилась.

Можно назвать и другие прямые методы.

1) Радиолокационный — по измерению времени, за которое радиоволна, излученная локатором, возвращается к приемнику, пройдя известное расстояние до отражателя и обратно.

2) Измерение времени пролета γ-квантов между двумя счетчиками.

Второй группой методов являются косвенные, основанные на независимом измерении частоты и длины волны света ($c = \lambda \cdot \nu$).

К косвенным методам относится также определение скорости света по отношению электромагнитных и электростатических единиц.

К настоящему времени скорость света измерена с большой точностью. Наиболее точное значение скорости света, равно (299792,5$\pm$0,2) *км/сек*.

Литература

Элементарный учебник физики под редакцией академика Г. С. Ландсберга, т. III, М., «Наука», 1970.

Г. С. Ландсберг, Оптика, М., Гостехиздат, 1957.

М. Льоцци, История физики, М., «Мир», 1970.

Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман, Механика, М., «Наука», 1971.

Б. Джефф. Майкельсон и скорость света, М., ИЛ, 1963.

П. С. Кудрявцев, История физики, М., Учпедгиз, 1948.

Физический энциклопедический словарь, т. 4, М., «Советская энциклопедия», 1965.

Детская энциклопедия, т. 3, изд-во АПН РСФСР, 1959.

Задачи о прямых линиях

1. Дан треугольник ABC, P — середина стороны BC. Опустим высоту AD и проведем отрезок PH параллельно AD так, чтобы H и A лежали по одну сторону от BC, и $2PH = AB + AC$. Проведем теперь прямую HT, пересекающую AD в точке T, так, чтобы углы PHT и HBP были равны. Доказать, что TD равно одной из сторон AB, AC.

2. Через вершины треугольника ABC, имеющего площадь S, проведены прямые линии, делящие углы A, B, C треугольника на углы α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 соответственно. Найти площадь треугольника, ограниченного этими тремя прямыми. При каком условии эти прямые пересскаются в одной точке?

3. Дан треугольник ABC и точка O вне этого треугольника. Провести через точку O прямую l так, чтобы отрезок BC делил пополам площадь треугольника BOD, где D — точка пересечения l и AC.

4. Через точку P, лежащую внутри угла BAC, провести прямую l, пересекающую стороны AB и AC в точках M и H так, чтобы сумма отрезков AM и AH была заданной. Далее, провести прямую l так, чтобы эта сумма была минимальной.

5. Дан треугольник ABC; D, E, F — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Пусть биссектриса угла DFE пересекает отрезок DE в точке G. Доказать, что если AG перпендикулярно к DF, то FG — диагональ квадрата, сторона которого равна DG.

6. Доказать, что расстояния от вершин ромба до данной точки O однозначно определяют размеры ромба.

ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ СУММЫ РАДИКАЛОВ

Л. Н. Камнев

Напомним, что число называется *рациональным*, если оно равно $\frac{m}{n}$, где n и m — целые числа, и *иррациональным* в противном случае. Все знают, что число $\sqrt{2}$ иррационально. Легко доказать и более общее утверждение: если натуральное число k — не полный квадрат, то число $\sqrt{k}$ иррационально. Заметим, что k можно представить в виде b^2a, где a и b — натуральные, причем a не делится на квадрат целого числа (как говорят, «свободно от квадратов»), то есть a равно простому числу или произведению различных простых чисел: $a=p_1p_2\ldots p_r$; $r\geqslant 1$. Утверждение, что число $\sqrt{k}=b\sqrt{a}$ иррационально, сводится к следующему: не существует ненулевых целых чисел b_1 и b_2 таких, что $b_1\sqrt{a}+b_2=0$. Действительно, если такие b_1 и b_2 существуют, то $b_1^2a=b_2^2$. Но это равенство противоречит теореме о единственности разложения натурального числа на простые множители: в правую часть p_1 входит в четной степени, а в левую — в нечетной.

В этой заметке мы докажем, что если b_1, b_2,…, b_n — *ненулевые целые числа*, a_1, a_2,…, a_n — *натуральные числа, свободные от квадратов, то*

$$b_1\sqrt{a_1}+b_2\sqrt{a_2}+\\+\ldots+b_n\sqrt{a_n}\neq 0.$$

Вплоть до $n=4$ это легко доказать от противного, несколько раз возвышая обе части (сгруппированные подходящим образом) в квадрат. В общем случае мы проведем доказательство индукцией по числу различных простых чисел $p_1,\ldots, p_N$, делящих хотя бы одно из чисел a_i. Как это часто бывает, удобнее доказать по индукции более сильное утверждение (интересное и само по себе):

существуют такие целые числа c_1, d_1, c_2, $d_2,\ldots$, c_r, d_r, *что* $d_i\neq 0$, $c_i\geqslant 1$, *все простые делители чисел* c_i *содержатся среди чисел* $p_1,\ldots, p_N$ *и произведение*

$$(d_1\sqrt{c_1}+\ldots+d_r\sqrt{c_r})\times\\\times(b_1\sqrt{a_1}+\ldots+b_n\sqrt{a_n})$$

является ненулевым целым числом.

Обозначим $b_1\sqrt{a_1}+\ldots+b_n\sqrt{a_n}$ через S, а искомую сумму $d_1\sqrt{c_1}+\ldots+d_r\sqrt{c_r}$ — через S'.

Если $N=1$, то s имеет вид $b_1\sqrt{p_1}+b_2\sqrt{1}$ и можно взять $S'=b_1\sqrt{p_1}-b_2$: мы доказали выше, что $SS'=b_1^2p_1-b_2^2\neq 0$. Предположим теперь, что $N\geqslant 2$ и что наше утверждение справедливо для всех меньших значений N.

Будем обозначать буквами S_1, $S_2,\ldots, S_8$ суммы вида $\beta_1\sqrt{\alpha_1}+\ldots+\beta_m\sqrt{\alpha_m}$, где β_i — целые числа, α_i — свободные от квадратов натуральные числа, все простые делители которых содержатся среди чисел $p_1,\ldots, p_{N-1}$; S_1, $S_2,\ldots, S_8$, если не оговорено противное, могут равняться нулю.

Сумму S можно записать в виде $S=S_1+S_2\sqrt{p_N}$, где $S_2\neq 0$. По предположению индукции, существует такая сумма S_3, что $f=S_3S_2$ — ненулевое целое число. Произведение S_3S имеет вид

$$S_3S = S_3S_1 + f\sqrt{p_N} = S_4 + f\sqrt{p_N}$$

с $f \neq 0$. Остается доказать, что

$$S_5 = (S_3S_4 - S_3f\sqrt{p_N})S = \\ = S_4^2 - f^2p_N \neq 0.$$

Если $S_4 = 0$, то это очевидно. Предположим теперь, что $S_4 \neq 0$. Пусть $S_4 = \beta_1\sqrt{\alpha_1} + \ldots + \beta_m\sqrt{\alpha_m}$; если $m = 1$, то есть $S_4 = \beta_1\sqrt{\alpha_1}$, то $S_4^2 - f^2p_N = \beta_1^2\alpha_1 - f^2p_N \neq 0$ (действительно, $\beta_1^2\alpha_1$ делится на четную степень p_N, а f^2p_N — на нечетную).

Если же $m > 1$, то можно записать S_4 в виде $S_6 + S_7\sqrt{p}$, где p — одно из простых чисел $p_1, \ldots, p_{N-1}$, $S_6S_7 \neq 0$, и числа, стоящие под знаками корней в суммах S_6, S_7, не делятся на p. Тогда

$$S_5 = S_6^2 + S_7^2p - f^2p_N + \\ + 2S_6S_7\sqrt{p} \neq 0$$

ввиду предположения индукции, поскольку $2S_6S_7 \neq 0$.

Снова, по предположению индукции, найдется S_8 такое, что S_5S_8 — ненулевое целое число g. Возьмем $S' = S_8(S_3S_4 - S_3f\sqrt{p_N})$. Тогда $SS' = S_5S_8 = g$.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что если b_i — любые рациональные ненулевые числа и a_i — натуральные числа, большие 1 и свободные от квадратов ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqslant 1$), то число

$$b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \ldots + b_n\sqrt{a_n} \qquad (*)$$

иррационально.

Упражнения

1. «Освободитесь от иррациональности в знаменателе» выражения $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, то есть представьте это число в виде (*). То же для $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{9}-\sqrt{11}+\sqrt{13}}$.

2. Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

3. Попробуйте обобщить наши результаты на сумму корней различных степеней (не обязательно квадратных).

(Окончание, начало см. стр. 19).

Эту оценку можно уменьшить примерно в 4 раза. Для этого нужно заметить, что схему (см. рис. 3) можно еще упростить (рис. 8). При этом доказательство 8-универсальности схемы, по существу, не меняется.

Эту схему также можно обобщить на произвольное четное число входов (рис. 9). В случае нечетного числа входов можно применить похожую схему (рис. 10). Эти две схемы дают возможность строить n-универсальные схемы при любом n (не только при целых степенях двойки) постепенным переходом к схемам с меньшим числом входов. Так построенная схема содержит

$$n([\log_2 n] + 1) - 2^{1+[\log_2 n]} + 1 \approx \\ \approx n \cdot \log_2 n$$

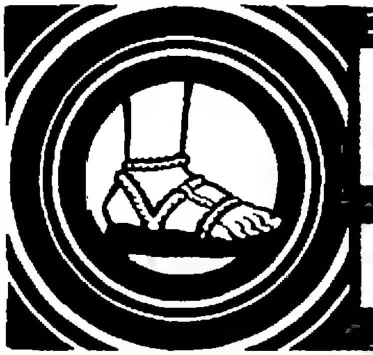
переключателей.

Итак, получены следующие ограничения для числа $M(n)$ переключателей в минимальной n-универсальной схеме:

$$n(\log_2(n+1) - \log_2 e) < \log_2(n!) \leqslant \\ \leqslant M(n) \leqslant n \cdot ([\log_2 n] + 1) - \\ - 2^{1+[\log_2 n]} + 1.$$

При $n = 2, 3, 4$ нижняя оценка $\log_2(n!)$ совпадает с верхней, при $n \geqslant 5$ — отличается. Оказывается, что при $n = 5$ с истинным значением $M(5) = 8$ совпадает именно верхняя оценка. Поэтому можно предположить, что верхняя оценка более точно оценивает $M(n)$, однако этот вопрос не выяснен и, повидимому, является очень трудным.

При формулировке задачи и написании этой статьи были использованы результаты советских математиков Ю. П. Офмана, М. И. Кратко и Э. Я. Гринберга.



РАДИОАКТИВНАЯ ПАМЯТЬ

В. И. Кузнецов

Однажды строители прокладывали дорогу и нашли древнюю пещеру, засыпанную вулканическими породами. В ней оказался склад обуви — триста пар сандалий из плетеной травы. Когда, в каком веке был заложен этот удивительный склад? Ответа не было. Его удалось получить только через несколько лет, когда был разработан способ определения возраста изделий из дерева, кости и других материалов, содержащих углерод.

Чтобы понять, как определяется время создания таких изделий, обратимся к ядерным процессам, протекающим в верхних слоях атмосферы (на высоте около 15 километров).

Земная атмосфера непрерывно бомбардируется космическими лучами. Основную часть космического излучения составляют быстро движущиеся протоны — ядра атомов водорода. Энергия их огромна — она достигает миллиардов электрон-вольт. Проходя верхние слои атмосферы, протоны сталкиваются с ядрами атомов, входящих в состав воздуха. При столкновении атомные ядра испускают нейтроны и другие частицы. Образовавшиеся нейтроны, в свою очередь, взаимодействуют с веществом атмосферы, чаще всего с азотом. В некоторых случаях нейтрон выбивает из ядра азота (состоящего из 7 протонов и 7 нейтронов) протон и занимает его место. В результате азот превращается в изотоп углерода, в ядре которого заключено 6 протонов и 8 нейтронов. Происходящую ядерную реакцию можно записать так:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{14}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{1}p.$$

В новом атоме на два нейтрона больше, чем в ядре самого распространенного изотопа углерода $^{12}\mathrm{C}$. Тяжелый углерод $^{14}\mathrm{C}$ называют радиоуглеродом. Ядра радиоуглерода испускают электроны (бета-частицы) и превращаются в азот: $^{14}\mathrm{C} \rightarrow ^{14}\mathrm{N}$. Скорость этого процесса характеризуется временем, за которое половина первоначального числа атомов $^{14}\mathrm{C}$ превращается в азот. Это время называют периодом полураспада и обычно обозначают $T_{1/2}$. Для изотопа $^{14}\mathrm{C}$ $T_{1/2} = 5600$ лет. Если пройдет еще $T_{1/2}$ лет, то из оставшейся половины атомов половина снова распадется и останется одна четверть — $(1/2)^2$, а за время t, равное n периодам полураспада,

Рис. 1. Этим индейским сандалиям примерно 9000 лет.

сохранится только $(^1/_2)^n$ часть атомов ^{14}C:

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}. \qquad (1)$$

Здесь N_0 — число атомов радиоуглерода в начальный момент, N — число их в момент времени t.

Период полураспада радиоуглерода — величина того же порядка, что и возраст человеческой культуры. История располагает достоверными данными лишь в пределах 5000 лет. Зная число распадов радиоуглерода в единице объема или веса за единицу времени в атмосфере, воде и материалах живой природы, нетрудно подсчитать, сколько его распадается за год и сколько его содержится на Земле. Расчеты показали, что на Земле существует всего около 60 тонн радиоуглерода.

На тысячу миллиардов атомов земного углерода приходится один атом ^{14}C. Атомы радиоуглерода вместе с обычными атомами углерода усваиваются растениями, а оттуда попадают в организмы животных и человека. В любом живом организме радиоуглерод непрерывно распадается и пополняется. В каждом грамме углерода живого организма происходит примерно 14 распадов атомов радиоуглерода в минуту. Концентрация изотопа ^{14}C, как правило, одинакова во всем углероде, входящем в состав живых организмов.

Рис. 2. Этой веревкой пользовались древние жители Перу около 3000 лет назад.

Рис. 3. Обрывки холста, в который был завернут один из рукописных свитков, найденных вблизи Мертвого моря. Их возраст около 2000 лет.

Как только организм погиб, он выпадает из цепи идущего на Земле круговорота радиоактивного углерода. В такой организм новый радиоуглерод не поступает, а накопленный ранее распадается. Количество радиоуглерода в умершем организме через 5 600 лет уменьшится вдвое. Если какой-нибудь предмет сделан из дерева, срубленного примерно 5 600 лет назад, то в грамме углерода, выделенного из него, счетчики радиоактивных излучений зарегистрируют уже не 14, а около 7 распадов в минуту. По числу распадов можно рассчитать возраст предметов, сделанных из дерева, а также костей животных и остатков растений. Для этого нужно воспользоваться формулой (1). Из этой формулы следует, что

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}};$$

$$\lg\frac{N}{N_0} = \frac{t}{T_{1/2}}\lg\left(\frac{1}{2}\right); \qquad (2)$$

$$t = T_{1/2}\frac{\lg(N/N_0)}{\lg(1/2)} = T_{1/2}\frac{\lg(N_0/N)}{\lg 2}.$$

Число распадов в минуту A пропорционально числу атомов N. Так, в начальный момент времени $A_0 = kN_0 = 14$, а в момент времени t, когда число атомов равно N, $A = kN$. Следовательно,

$$N = A/k, \; N_0 = A_0/k = 14/k,$$

и $$N_0/N = 14/A$$

$$t = T_{1/2}\frac{\lg(14/A)}{\lg 2} = 18400\lg(14/A).$$

Здесь t — возраст в годах.

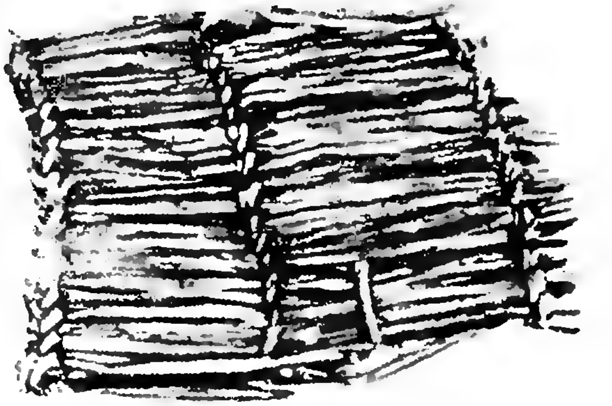


Рис. 4. Камышовая циновка из Невады (США). Ей около 3000 лет.

Когда в счетчик бета-частиц поместили углерод из найденных в пещере сандалий, величина *A* оказалась равной 4,5 распада в минуту. Отсюда следует, что возраст находки примерно 9 000 лет.

Измерение числа распадов ^{14}C — сложная задача. Для этой цели углерод переводят в одно из газообразных соединений — углекислый газ (CO_2) или метан (CH_4). Газом наполняют счетчик радиоактивных излучений. Он-то и регистрирует каждый распад радиоуглерода. Но счетчик бета-частиц чувствителен и к другим частицам: мезоны, гамма-кванты и некоторые другие частицы, образуемые космическими лучами, дают импульсы, неотличимые от импульсов, вызываемых бета-частицами. Поэтому приходится защищать счетчик толстым слоем железа. Однако получить железо, полностью очищенное от радиоактивных примесей, очень сложно. Поэтому между счетчиком и железной защитой помещают цилиндр (он надет на счетчик), заполненный ртутью. Двойная «шуба» надёжно укрывает счетчик почти от всех излучений, которые могут искажать результаты измерений, но только не от мезонов. Мезоны слабо взаимодействуют с веществом и проникают даже через такую защиту. Чтобы исключить мезонные импульсы, основной счетчик, наполненный изучаемым газом, окружают со всех сторон вспомогательными счетчиками. Прежде, чем попасть в центральный счетчик, мезон побывает в одном из счетчиков окружения. При этом электронная аппаратура зарегистрирует два одновременных импульса в центральном и боковом счетчиках. Эти двойные импульсы исключаются при подсчете.

Благодаря такой сложной аппаратуре удается измерить очень малые концентрации радиоуглерода и надежно установить возраст предметов, пролежавших под землей или на дне океана до 50 000 лет.

С какой же точностью можно определить возраст углеродным методом? Количество радиоуглерода в атмосфере пропорционально потоку первичных протонов, падающих на Землю. Поток протонов меняется в зависимости от условий на Солнце. Он тем больше, чем меньше солнечная активность. Дело в том, что в периоды высокой солнечной активности магнитное поле Солнца возрастает и захватывает часть космических протонов, которые попали бы на Землю в годы спокойного Солнца.

Пришлось проверить точность «углеродных часов». Проверяли по предметам, возраст которых был известен,— деревянным изделиям Древнего Египта, мумиям фараонов. Еще более точная проверка осуществлялась по годичным кольцам деревьев. На Земле сохранились деревья, возраст которых достигает 3 000 лет. Такой срок живут американские секвойи. Распилив ствол дерева-долгожителя, можно сосчитать годичные кольца и взять вещество, например, из слоя, соответствующего трехтысячному кольцу (если считать от края к сердцевине). Углерод из выделенного вещества дерево усвоило 3 000 лет назад. По радиоактивности углерода можно определить удельное содержание атомов радиоуглерода ^{14}C — величину *N*. Из формулы (2) имеем:

$$N_0 \text{ (3000 лет назад)} = \frac{N}{(1/2)^{\frac{t}{T_{1/2}}}} = N \cdot 2^{\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Оказалось, что концентрация углерода за долгие годы изменялась незначительно. Однако при определении возраста построек возникают большие трудности. Дом может быть построен из древесины, которая уже была использована в другом сооружении. Кроме того, и возраст самого дерева в некоторых случаях играет большую роль. Как-то ученые решили определить «возраст» придорожной травы. Счетчики зарегистрировали очень малую долю радиоуглерода в веществе придорожных растений. Расчеты привели к ошеломляющему результату — «возраст» травы оказался равным нескольким тысячам лет! Объяснение нашли быстро. Выхлопные газы автомобилей, проходящих по дороге, содержат углерод без тяжелого изотопа ^{14}C. Возраст нефти, из которой получают бензин, измеряется миллионами лет, и естественно, что весь радиоуглерод в ней распался.

Определение возраста обувного склада доисторических времен — одна из первых археологических проблем, решенных физиками с помощью радиоуглеродного метода. Этот метод помог определить сроки древних вулканических извержений, установить даты ледниковых периодов.

Наступая на континент, льды уничтожали растительность, люди уходили к югу, отметив свой путь углями остывших очагов. Стволы древних деревьев, стоянки человека сохранились до наших дней под толщей ледниковых наносов. Но только после появления радиоуглеродного метода был установлен «график» движения льдов.

Измерения показали: за последние 40 тысяч лет на Земле было три ледниковых периода. Самый поздний — примерно 11 400 лет назад. С тех пор на Земле относительно тепло.

Задачи арифметические

1. Найти все числа x такие, что $x^3=7p+1$, где p — простое число

2. Нечетные числа расположены в порядке возрастания 1, 3, 5, 7, ...; после чего разбиты на группы, содержащие 1, 2, 3, 4, ... числа, то есть так: (1), (3,5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), ... Доказать, что сумма чисел, принадлежащих группе из r чисел, равна r^3.

Далее, пусть те же числа разбиваются на группы, состоящие из 1, 1, 4, 3, 9, 6, ..., r^2, $\frac{r(r+1)}{2}$, $(r+1)^2$, ... чисел.

Доказать, что сумма чисел, находящихся в группе из r^2 чисел, равна r^5.

3. Доказать, что существует бесконечно много четверок натуральных чисел a, b, c, d таких, что $(a^3+b^3)(c^3+d^3)$ можно представить в виде M^3+N^3, где M, N — натуральные числа.

4. Сколько чисел, делящихся на 37, можно получить из числа 33337777 перестановками его цифр?

5. Найти рациональные числа x и y такие, что $0<x<3$, $y>4$, и $x^3+y^3=3^3+4^3$.

... и алгебраические

6. Написать уравнение, корнями которого являются отношения корней уравнения $y^3+py+q=0$.

7. Обозначим через t_k среднее арифметическое k-х степеней положительных чисел a_1, ..., a_n. Доказать, что последовательность t_1, $t_2^{\frac{1}{2}}$, ..., $t_k^{1/k}$, ... не убывает.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

СНЕЖНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

А. С. Варпаховский, А. Н. Виленкин

Фотографии и рисунки снежинок можно найти во многих учебниках физики в главах, в которых рассказывается о симметрии. Но этим и ограничивался до недавнего времени интерес ученых к снежным кристаллам. Серьезное изучение зарождения, роста и структуры снежных кристаллов началось не так давно. Интерес к снежным кристаллам был связан в основном с изучением образования дождя и явлений, происходящих в облаках. Оказалось, что бо́льшая часть дождевых капель начинает свою жизнь как снежные кристаллы, тающие прежде чем они упадут на землю. Однако только холодные, находящиеся на большой высоте перистые облака состоят из кристалликов льда. В основном же облака представляют собой скопления маленьких водяных капелек, удерживающихся в воздухе так же, как частички дыма. Долгие годы оставалось загадкой, как эти капельки вырастают до размеров, достаточных для того, чтобы они упали на землю. Оставалось загадкой и то, что часто эти капельки «отказывались» замерзать, хотя температура облака была намного ниже нормальной температуры замерзания воды, то есть ниже 0° С.

Сейчас мы знаем, что переохлажденное облако остается стабильным до тех пор, пока в нем не появится хотя бы небольшое количество маленьких кристалликов льда, зарождающихся на частичках земной пыли. Молекулы воды, попавшие на кристаллик льда, образуют с ним прочную связь, разорвать которую довольно трудно. Молекулы же воды, которые конденсируются на капле, оторвать сравнительно легко — теплота испарения меньше энергии, необходимой для отрыва молекулы воды от кристаллика льда. Поэтому если облако состоит из капелек воды и кристалликов льда, то кристаллы льда растут гораздо быстрее, чем капли. Более того, благодаря росту кристалликов льда уменьшается влажность окружающего воздуха. Это приводит к тому, что водяные капли постепенно испаряются и исчезают. В то же время кристаллики льда вырастают до размеров, достаточных для их падения на землю. Падая, несколько кристалликов могут объединяться, образуя снежинку.

Хотя снежные кристаллы многообразны, их можно классифицировать по трем основным формам: шестиугольные призматические столби-

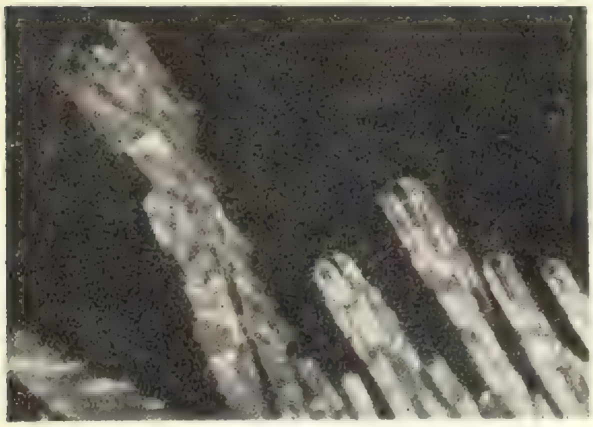


Рис. 1 а.

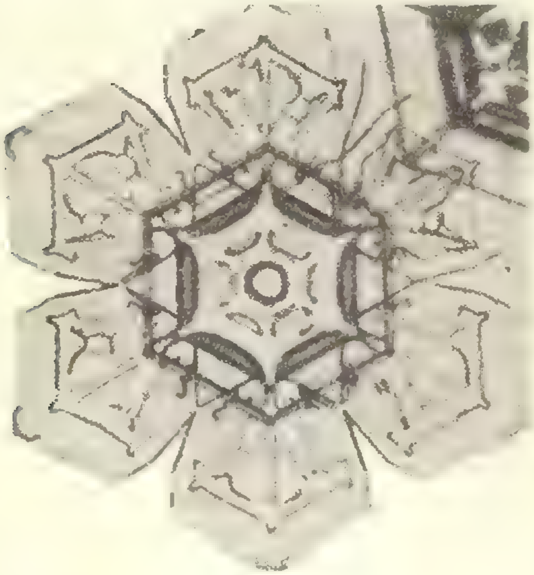


Рис. 1 б.

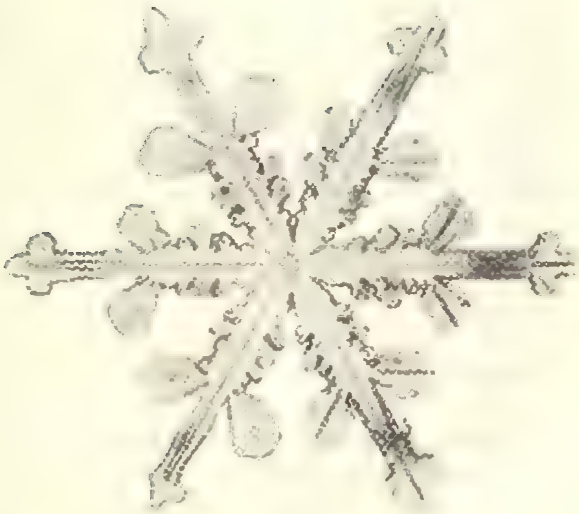


Рис. 1 в.

ки (рис. 1а), тонкие шестиугольные пластины (рис. 1б) и разветвленные звезды (рис. 1в). Нетрудно объяснить шестигранную форму снежных кристалликов и снежинок. Изучение кристаллов льда с помощью рентгеновских лучей показало, что молекулы воды в кристалле льда расположены так, что каждая из молекул окружена шестью соседями. Центры этих молекул образуют правильный шестиугольник (рис. 2). Что же касается причин различия форм кристаллов, то до недавнего времени ученые не могли прийти к единому мнению. По некоторым гипотезам форма кристалликов должна в основном определяться степенью пересыщения окружающего воздуха парами воды, а не температурой облака. Но исследования показали, что кристаллы различной формы вырастают при разных температурах.

Высокие перистые облака, температура которых ниже — 30° С, состоят в основном из снежных кристаллов в форме призматических столбиков длиной около половины миллиметра. Облака на средних высотах, температура которых изменяется от —15° до — 30° С, состоят из кристаллов в форме призм и пластин. В низких облаках, температура которых

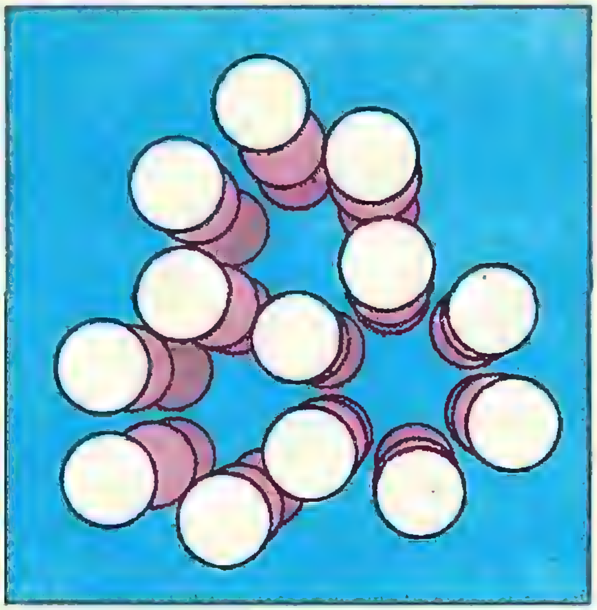


Рис. 2.

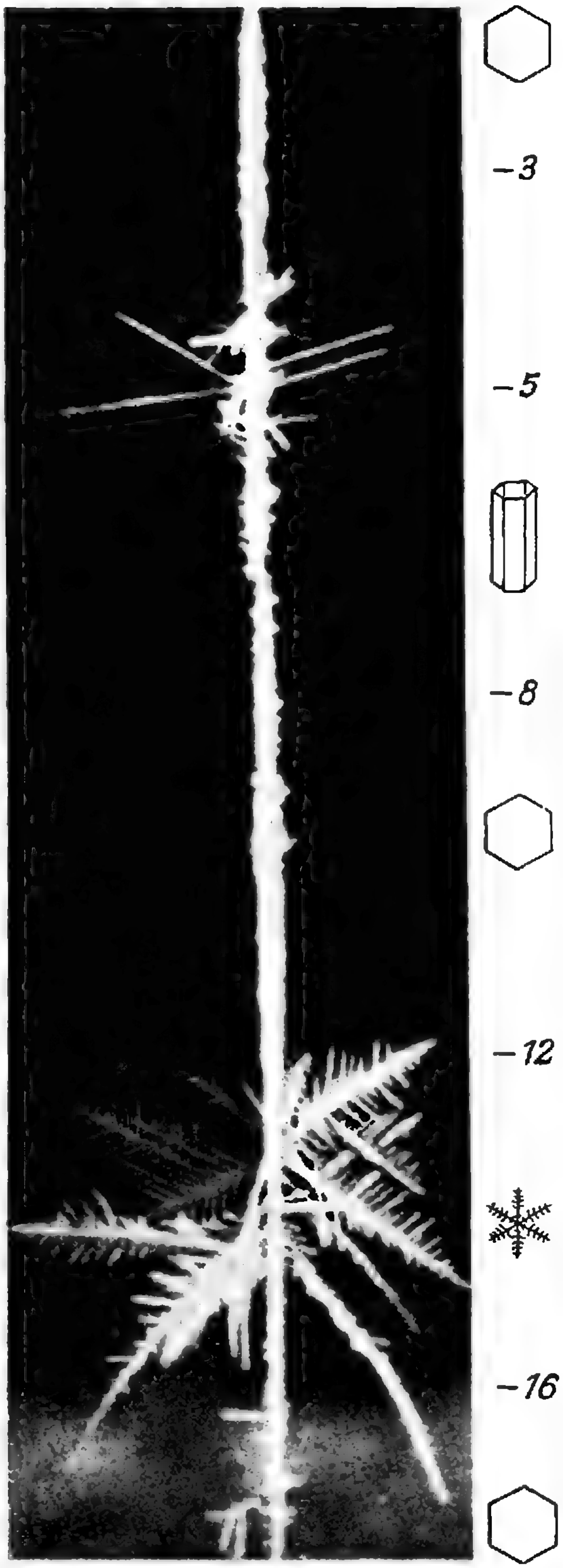


Рис. 3.

колеблется от — 5° С до 0° С, можно встретить кристаллы в виде шестиугольных пластин, коротких призм и поражающих своей красотой звезд, имеющих диаметр порядка нескольких миллиметров. Эти звезды являются основой снежинок. При температуре в несколько градусов ниже нуля кристаллики слипаются, образуя снежинки.

Все это говорит о том, что форма кристаллов определяется в основном температурой, при которой они вырастают. Это подтвердили и эксперименты по выращиванию кристаллов льда в лаборатории. Кристаллы льда выращивались в специальной камере, в которой строго контролировалась температура и количество водяных паров. В качестве затравки использовалась тонкая нить. Температура в камере в различных участках вдоль нити была разной. На рисунке 3 показана фотография участка нити, обросшей кристаллами. Размер этого участка около 6 *см*. Справа на рисунке указана температура в камере. В верхней части нити вырастали в основном мельчайшие шестиугольные пластинки. Ниже — шестиугольные призмы, затем шестиугольные пластины, разветвленные звезды и опять шестиугольные пластины. При температурах ниже —25° С вновь образовывались шестиугольные призмы.

Опыты показали, что именно температура определяет форму кристалла. Количество же водяных паров влияет на скорость роста. Однако до сих пор остается невыясненной точная природа роста снежных кристаллов.

Очень интересно изучение роста снежных кристаллов на земле. Часто зимой при резком потеплении ветки деревьев и стены домов покрываются инеем. Облака, в которых зарождаются снежинки, трудно доступны. Иней же легко доступен и за ним можно наблюдать во время его образования. Иней появляется обычно на предметах, имеющих большую теплоемкость и малую теплопроводность. При резком потеплении температура этих предметов оказывается ниже температуры окружающего воздуха, и на них конденсируются водяные пары, находящиеся в воздухе. Если паров в воздухе мало, то получаются красивые пушистые хлопья. При большой влажности воздуха холодные предметы покрываются коркой льда. Вода просто конденсируется на холодных предметах и затем замерзает.

Особенно интересны узоры, которыми покрываются зимой окна квартир, автобусов и трамваев. При резком похолодании температура окон становится ниже температуры воздуха в помещении. На них и оседают молекулы пара, находящиеся во влажном воздухе в комнате, образуя красивые узоры. При этом тоже важно, чтобы воздух в комнате был не очень влажным. В противном случае пар сначала конденсируется на стекле и затем замерзает, образуя слой льда. Узоры не появляются на окне, если открыта форточка. В этом случае температура воздуха в комнате у стекла понижается, став такой же, как температура самого стекла. В ледяных узорах, вырастающих на стекле, можно увидеть большинство форм, которые могут принимать снежные кристаллы.

Наблюдать за ростом снежных кристаллов на окнах вы можете и у себя дома. Однако, к сожалению, узоры на окнах недолговечны, да и трудно менять условия их роста. Но можно «выращивать» узоры, очень похожие на ледяные, пользуясь не водой, а растворами гипосульфита (он продается в магазинах в отделах фототоваров) или карловарской соли (ее можно купить в аптеке). Эти узоры долговечны, по внешнему виду не отличаются от ледяных и, выращивая их, можно менять условия роста — скорость подвода или отвода тепла, концентрацию раствора (изменение концентрации раствора соответствует изменению влажности воздуха) и т. д. За ростом кристаллов, образующих узоры, можно следить с помощью микроскопа.

Получить узор можно так. Сначала приготовьте насыщенный раствор вещества, с которым вы будете работать. Протрите этим раствором стекло и поставьте его под вентилятор. Примерно через 5 минут вода испарится, а на стекле получится узор. Самое трудное здесь — это хорошо смочить стекло. Дело в том, что обычно вода не смачивает поверхность стекла и не растекается по ней, а образует капельки. Тогда вместо узоров получатся пятна, в которых останется просто высохший осадок.

Если не обдувать стекло или налить на него много раствора, то вместо узора вы получите куски кристаллов, они вырастут «снизу» (от поверхности стекла) и будут возвышаться над стеклом. Нам же надо, чтобы кристаллы выросли небольшие и сразу на всей поверхности стекла. Чтобы раствор смачивал стекло, надо поверхность стекла тщательно очистить бензином или спиртом (можно взять и одеколон). Еще лучше пользоваться не водным, а спиртовым раствором соли. Конечно, с первого раза узор может у вас не получиться — не отчаивайтесь. Помните, что любой физический опыт может потребовать нескольких попыток.

Полученные вами искусственные узоры можно и сфотографировать. Удобны два способа фотографирования.

Первый — обычный: узоры фотографируются на пленку, а потом печатаются на фотобумагу.

Второй — не совсем обычный. Узоры выращиваются на узкой полоске стекла. Эта полоска вставляется в фотоувеличитель вместо пленки, и производится печать прямо на бумагу. Кристаллики, образующие узоры, непрозрачны и в проходящем свете выглядят черными (на отпечатке после проявления — белыми). Места, где кристаллов нет, пропускают свет и на отпечатке получаются черными. Именно так был получен узор, помещенный на обложке нашего журнала. Он был выращен из раствора карловарской соли.

П. Р. КАНТОР Ж. М. РАББОТ

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Здесь собраны некоторые задачи, связанные с понятием площади многоугольника. Мы дадим аксиоматическое определение площади многоугольника, перечислив те её свойства, которые нам нужны.

А1. Площадь многоугольника — положительное число.

А2. Площади равных (конгруэнтных) многоугольников равны.

А3. Если многоугольник разрезан на несколько частей, то его площадь равна сумме площадей этих частей.

А4. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. (Единицу масштаба мы считаем заданной; легко показать, что это произведение не зависит от того, какую именно сторону и соответствующую ей высоту мы возьмем.)

Буква А выбрана потому, что с нее начинается слово «Аксиома». Из этих четырех свойств-аксиом можно вывести все теоремы о площадях многоугольников, которые вы изучаете в школе.

Значительно труднее доказать, что, действительно, можно сопоставить каждому многоугольнику M на плоскости положительное число $S(M)$, его площадь, так, чтобы выполнялись свойства **А1—А4**. Это верно, но в школьном курсе обычно не доказывается и считается очевидным. Вместо **А4** можно считать основным такое свойство, из которого выводится **А4**:

А4′. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1.

Например:

а) площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту;

б) площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Подумайте, как доказать эти утверждения (то есть вывести из аксиом **А1 — А4**).

Мы начнем с того, что докажем другую формулу для площади трапеции.

1. *Площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, опущенный на нее из середины другой боковой стороны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данная трапеция ($AD \parallel BC$), K — середина стороны CD, KH — перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AB. Проведем через точку K прямую, параллельную прямой AB. Пусть M и P — точки ее пересечения с прямыми BC и AD (рис. 1).

Параллелограмм $ABMP$ равновелик данной трапеции, так как пятиугольник $ABCKP$ является для них общим, а треугольник CMK равен треугольнику KPD, то есть трапеция и параллелограмм составлены из одинаковых частей. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания AB на высоту KH, утверждение доказано.

Последний абзац решения можно более формально записать так:

$$S_{ABMP} = S_{ABCKP} + S_{CMK},$$

$S_{ABCD} = S_{ABCKP} + S_{KPD}$ (по построению),
$\triangle KPD = \triangle CMK$ (по стороне и двум прилежащим углам),
поэтому

$$S_{\triangle KPD} = S_{\triangle CMK},$$

следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{ABMP}.$$

Теперь предлагаем вам решить следующие ниже задачи. Они расположены в основном в таком порядке, что решение предыдущих задач помогает решить последующие. Некоторые из этих задач сопровождаются указаниями или даже решениями (как задача 1, которую мы разобрали выше). Впрочем, не обязательно в точности следовать этим указаниям: задачи могут допускать и другие решения, ничуть не хуже тех, которые мы имели в виду. Звездочкой отмечены наиболее трудные задачи.

2. *В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K (середина AB) соединена с вершинами C и D. Найдите отношение площади треугольника KCD к площади трапеции.*

3. *Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на четыре параллелограмма. Два из них пересекаются диагональю AC. Докажите, что два других равновелики.*

Указание. Воспользуйтесь тем, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

4. *Через каждую вершину выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная его диагонали (рис. 2). Докажите, что полученный параллелограмм по площади вдвое больше четырехугольника.*

5. *Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников диагонали соответственно равны и пересекаются под равными углами, то четырехугольники равновелики.*

6. *В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка: вершина B соединена с серединой стороны DC, вершина A — с серединой стороны BC, вершина D — с серединой стороны AB и вершина C — с серединой стороны AD. Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками — параллелограмм и что его площадь в пять раз меньше площади параллелограмма $ABCD$ (рис. 3).*

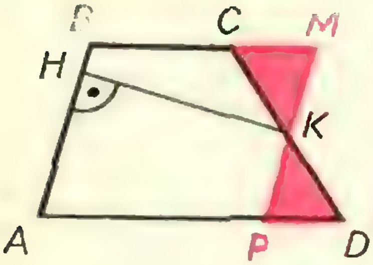


Рис. 1.

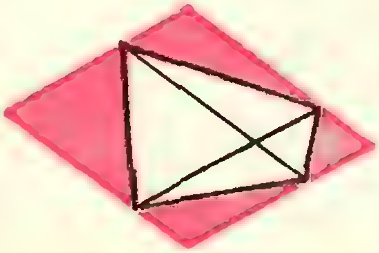


Рис. 2.

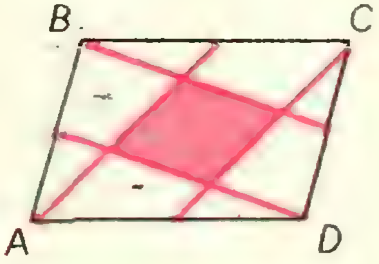


Рис. 3.

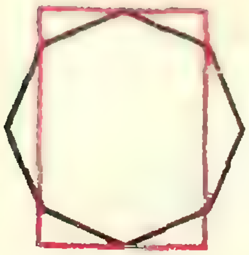


Рис. 4.

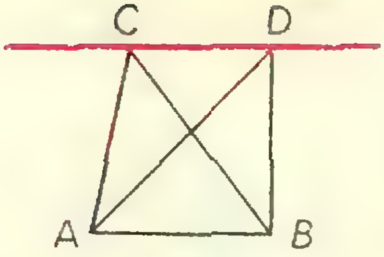


Рис. 5.

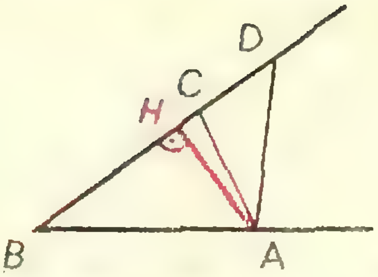


Рис. 6.

7. *Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.*

Указание. Взгляните на рисунок 4.

8. *Докажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения радиуса этой окружности на периметр многоугольника.*

В этих задачах можно обойтись приемом «разрезания и складывания». Заметим, что в принципе этим приемом можно пользоваться всегда, когда нужно доказать равенство площадей двух многоугольников; верна такая

Теорема: *если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых составляется другой многоугольник.*

Эта теорема доказывается не сложно *). Но практически, чтобы установить равенство площадей или найти отношение площадей, вовсе не обязательно «разрезать и складывать». Например, очень часто бывает удобно сравнить площади двух треугольников, пользуясь формулой, которую мы назвали **А4**. Из нее сразу следуют, в частности, такие соотношения для площадей:

если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной его основанию, то площадь при этом не меняется (рис. 5; треугольники ABC и ADB имеют общее основание AB и равные высоты);

если одну из сторон треугольника, прилежащих к данному его углу, увеличить в k раз, то его площадь также увеличится в k раз (см. рис. 6; треугольники ABC и ABD имеют общую высоту AH, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований:

$$S_{\triangle ABC}/S_{\triangle ABD}=BC/BD.)$$

Отсюда следует более общее соотношение:

если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол

(см. рис. 7; $S_{\triangle ABC}/S_{\triangle ABD}=BC/BD$, $S_{\triangle ABD}/S_{\triangle EBD}=AB/EB$, поэтому $S_{\triangle ABC}/S_{\triangle EBD}=(AB\cdot BC)/(EB\cdot BD)$).

В частности, если два треугольника подобны и стороны одного в k раз больше соответственных сторон другого, то площадь первого в k^2 раз больше площади другого.

В следующих задачах решение основано как раз на этих соображениях: на сравнении площадей треуголь-

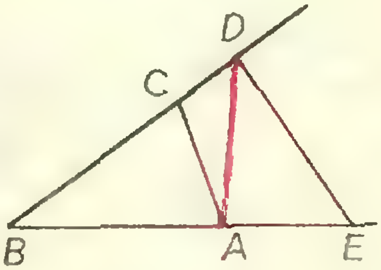


Рис. 7.

---

*) См. книжку В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры», серия «Популярные лекции по математике», вып. 22, Гостехиздат, М., 1956.

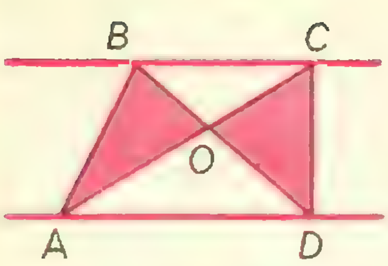


Рис. 8.

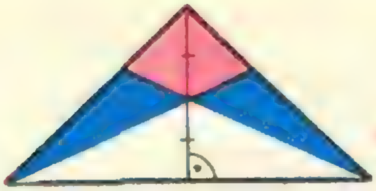


Рис. 9.

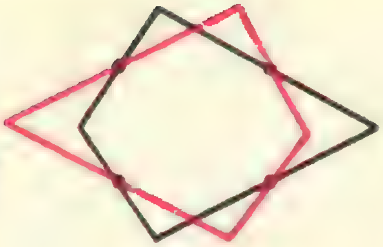


Рис. 10.

ников, у которых или одинаковые основания, или одинаковые высоты, или одинаковые углы. Постарайтесь найти самый простой и красивый путь решения!

9. *О — точка пересечения отрезков АС и BD (рис. 8). Для того чтобы площади треугольников АОВ и DOC были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые ВС и AD были параллельны. Докажите!*

Чтобы решить эту задачу, нужно доказать два утверждения: (1) если площади треугольников *АОВ* и *DOC* равны, то прямые *ВС* и *AD* параллельны; (2) если прямые *ВС* и *AD* параллельны, то площади треугольников *АОВ* и *DOC* равны.

10. *Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждая из его диагоналей делит его площадь пополам.*

И здесь, как в предыдущей задаче, нужно доказать две теоремы: прямую и обратную.

11. *В треугольнике АВС прямая, проходящая через вершину А и делящая медиану ВМ в отношении 1 : 2, считая от вершины, пересекает сторону ВС в точке К. Найдите отношение площадей треугольников АВК и АВС.*

Указание. Проведите через точку *М* прямую, параллельную *АК*, и найдите с ее помощью отношение отрезков *ВК* и *ВС*.

12. *На продолжении стороны ВС выпуклого четырехугольника ABCD найдите такую точку О, чтобы площадь четырехугольника ABCD равнялась площади треугольника АВО.*

Указание. Проведите через точку *D* прямую, параллельную диагонали *АС*.

Всегда ли задача 12 имеет решение? Всегда ли оно единственно?

Эта задача позволяет превратить любой выпуклый многоугольник в равновеликий с меньшим числом сторон.

13. *Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие ее с вершинами основания (рис. 9). Какую часть площади треугольника составляет каждая из частей, на которые эти две прямые разрезают треугольник?*

14. *Дан треугольник АВС. Продолжим его сторону АВ за вершину В отрезком ВР=АВ, сторону АС — за вершину А отрезком АМ=СА, сторону ВС — за вершину С отрезком КС=ВС. Во сколько раз площадь треугольника РКМ больше площади треугольника АВС?*

Указание. Соедините точки *М* и *В*, *Р* и *С*, *А* и *К*.

15. *Сформулируйте аналогичную задачу для четырехугольника и решите ее. Выведите из нее результат задачи 6.*

16. *На сторонах выпуклого четырехугольника ABCD взяты точки М, Р, К, Н так, что АМ : МВ=3 : 5; ВР : РС=1 : 3; СК : KD=4 : 5; DH : НА=1 : 8. Найдите отношение площади шестиугольника MBPKDH к площади четырехугольника ABCD. Подумайте, при любых ли отношениях АМ к МВ, ВР к PC и так далее можно решить эту задачу?*

Указание. Проведите диагональ и воспользуйтесь А3.

17. *В выпуклом четырехугольнике соединены середины соседних сто-*

рон. Какой четырехугольник образуют проведенные отрезки? Найдите отношение площади этого четырехугольника к площади исходного.

Указание. Проведите диагонали данного четырехугольника и воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.

18. *Докажите, что если два выпуклых четырехугольника расположены так, что середины их сторон совпадают (рис. 10), то их площади равны.*

19. *Прямая, параллельная диагонали AC четырехугольника $ABCD$ и проходящая через середину его диагонали BD, пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что прямая CE делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.*

Указание. Проведите медианы в треугольниках BCD и BAD из вершин C и A соответственно.

20. *Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой его диагонали. Точка O пересечения этих прямых соединена отрезками с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что эти четыре отрезка делят площадь четырехугольника на четыре равные части.*

Указание. Сделайте крупный чертеж. Обозначьте на нем середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно через M, T, P, K, а середину диагонали AC через H. Чтобы доказать, что площадь одного из четырех полученных кусков (например, $MOKA$) равна $^1/_4$ площади всего четырехугольника, заметьте, что четырехугольники $MOKA$ и $MHKA$ равновелики.

21 *. *Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части (рис. 11). Докажите, что между этими прямыми заключена $^1/_3$ площади четырехугольника.*

22 *. *Пусть K и L — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки DK и AL пересекаются в точке P, а отрезки CK и BL — в точке Q. Тогда сумма площадей треугольников APD и BQC равна площади четырехугольника $PKQL$ (рис. 12).*

До сих пор мы имели дело с задачами, в которых требовалось доказать равенство площадей или найти отношение площадей. Теперь — несколько задач, при решении которых удобно пользоваться неравенствами между площадями.

23. *Внутри треугольника ABC лежит точка M. Докажите, что площади треугольников ABM и CBM равны тогда и только тогда, когда точка M находится на медиане BK (рис. 13).*

Решение. Если точка M находится на медиане, то $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle CBK}$, $S_{\triangle AMK} = S_{\triangle CMK}$ и потому $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$. В одну сторону утверждение задачи доказано. Осталось доказать обратное: если $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$, то точка M лежит на медиане BK. Предположим, что M не лежит на BK. Тогда один из отрезков MA или MC пересекает BK. Пусть это будет MC (если медиану пересекает MA, то рассуждение аналогично), и N — точка пересечения MC и BK. Тогда $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle ABN}$, поскольку треугольник ABM лежит внутри треугольника ABN, и $S_{\triangle CBM} > S_{\triangle CBN}$, поскольку треугольник CBN лежит внутри тре-

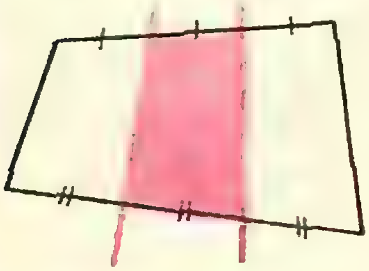


Рис. 11.

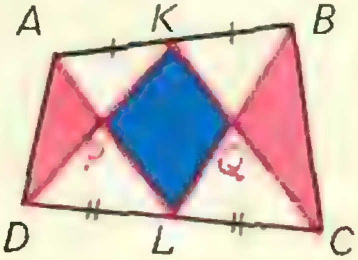


Рис. 12.

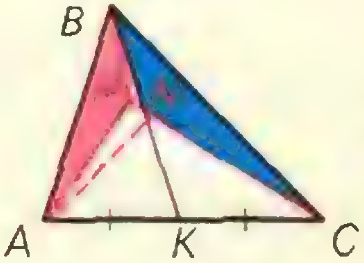


Рис. 13.

угольника CBM. Но $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle CBN}$, — ведь точка N лежит на медиане. Следовательно, $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle CBM}$. А мы предположили, что $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$. Получили противоречие. Задача полностью решена.

Подумайте, как с ее помощью решить следующую задачу, перекликающуюся с задачей 20.

24.* *Докажите, что если внутри четырехугольника $ABCD$ существует такая точка O что отрезки OA, OB, OC, OD делят его на четыре равновеликие части, то хотя бы одна из его диагоналей делит другую диагональ пополам. Сформулируйте и докажите обратную теорему.*

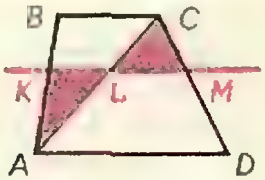


Рис. 14.

25. *На сторонах угла A взяты точки B и C. Через середину K отрезка BC проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках D и E. Докажите, что площадь треугольника ADE больше площади треугольника ABC.*

Решение этой задачи позволяет через данную точку внутри данного угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей возможной площади. Подумайте, как это сделать.

26. *В данной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведена диагональ AC (рис. 14). На какой высоте нужно пересечь трапецию прямой, параллельной основаниям, чтобы сумма площадей треугольников AKL и LMC была наименьшей (K, L и M — точки пересечения прямой с отрезками AB, AC и CD соответственно)?*

27 *. *Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCДEF$ параллельны. Докажите, что площадь треугольника ACE составляет не менее половины площади шестиугольника.*

СИМПОЗИУМЫ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Идея слета учащихся специализированных физико-математических школ разных городов зародилась в школе № 40 г. Горького. В марте 1971 года в дни весенних школьных каникул по приглашению этой школы в Горький съехались представители математических школ Москвы, Риги, Ростова, Волгограда, Кишинева, Алма-Аты, Тбилиси, Костромы, Ленинграда и Киева.

На симпозиуме работали несколько секций, на каждой из которых школьники делали доклады. Работой секций руководили ученые Горьковского государственного университета.

Секцией математики руководил кандидат физико-математических наук доцент Д. А. Гудков. На этой секции были заслушаны доклады «Нестандартные суммы», «Моделирование рефлексов», «Математика и лингвистика», «Вычисление площади тени», «Самовоспроизводящиеся числа» и другие.

Доклады делали: *Я. Шнейдерман* (10 кл. с. ш. 40, Горький), *А. Кнафель* (8 кл. с. ш. 40, Горький), *Н. Потапкина* (10 кл. с. ш. 40, Горький), *О. Малиновский* (9 кл. с. ш. 13, Рига), *А. Борисенко* (10 кл. с. ш. 145, Киев), *И. Раухваргер* (10 кл. с. ш. 34, Кишинев), *М. Вишик* (10 кл. с. ш. 444, Москва), *В. Каплинский* (8 кл. с. ш. 444, Москва) и другие.

Секцию физики возглавил кандидат физико-математических наук доцент М. С. Ковнер. На этой секции были заслушены доклады «Мирный атом — на службу водообеспечения человечества», «Об аналогиях в физике», «О методе «мирной массы» и его применении в решении физических задач», «Получение и исследование тонких кристаллических пленок», «Свип-генератор и осциллограф» и другие.

Доклады делали: *А. Мирухолова* (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси), *А. Езерский* (10 кл. с. ш. 40, Горький), *Ю. Хандрус* (10 кл. с. ш. 145, Киев), *И. Молан* (10 кл. с. ш. 34, Кишинев), *Н. Чайка* (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси), *М. Герштейн* (10 кл. с. ш. 40, Горький), *М. Гомаюнов* (10 кл. с. ш. 239, Ленинград) *и другие.*

Работали также секции астрономии, химии и краеведения.

Во время работы симпозиума учащиеся не только читали и обсуждали доклады. Они успели также познакомиться с работой школы № 40, с достопримечательностями города, побывали в музеях, встречались с учеными.

(*Продолжение см. на стр. 53*)

ЗАДАЧНИК Кванта

Задачи

Решения задач из «Задачника Кванта» можно присылать не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала. На конверте после адреса журнала укажите, решения каких задач вы посылаете (например, «Задачник Кванта» М126, Ф128). В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, шестизначный индекс и адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь). Решение каждой задачи должно быть написано на отдельном листе (листах); в конце каждого решения укажите свою фамилию. Звездочкой помечены задачи повышенной трудности.

М126. Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r, каким-то образом разрезан на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.

И. Д. Новиков

М127. Для каждого натурального числа n обозначим через $s(n)$ сумму его цифр (в десятичной записи). Назовем натуральное число m *особым*, если его нельзя представить в виде $m=n+s(n)$, где n — какое-то натуральное число. (Например, число 117 не особое, поскольку $117=108+s(108)=108+9$, а число 121, как нетрудно убедиться, — особое.) Верно ли, что особых чисел существует лишь конечное число?

М128. Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

М129. а) В ведро налили 12 *л* молока. Как, пользуясь лишь сосудами в 5 и 7 *л*, разделить молоко на две равные части?

б) * Решите общую задачу: при каких a и b можно разделить пополам $(a+b)$ *л* молока, пользуясь лишь сосудами в a *л*, b *л* и $(a+b)$ *л* ? *).

В. В. Ушаков

М130. Какое наибольшее число точек можно разместить

а) на плоскости;

б) * в пространстве,

так, чтобы ни один из треугольников с вершинами в этих точках не был тупоугольным?

Г. А. Гальперин

Ф138. Космонавт массой 100 *кг* находится вне космического корабля, масса которого равна 5 *т*, на фале длиной 64 *м*. Найти натяжение фала, если корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры тяжести.

При расчете считать, что корабль движется по круговой орбите, высота которой h от поверхности Земли пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли ($R=6400$ *км*).

---

*) За одно переливание из одного сосуда в другой можно вылить все, что там есть, или долить второй сосуд до верха.

Ф139. Футболист ударил по мячу, сообщив ему скорость v под углом α к горизонту, и попал в ближний нижний угол ворот. Если бы футболист ударил по мячу в том же месте футбольного поля и мяч полетел бы под тем же углом к горизонту, но со скоростью, на 5% большей скорости v, то он попал бы в верхнюю штангу ворот. Найти скорость, с которой начинает двигаться мяч, если высота ворот $h = 2$ *м*, а угол $\alpha = 30°$.

И. Ш. Слободецкий

Ф140. Будет ли давать правильные показания чашечный ртутный барометр, если часть его трубки (ниже уровня ртути в ней) сделана из очень мягкой резины?

Ф141. Из «черного ящика», содержащего неизвестную электрическую схему, выведены три провода. Два из них соединяют с землей и затем снимают зависимость тока, идущего по третьему проводу, от разности потенциалов между концом этого провода и землей. Соединяя разные пáры выводов с землей, строят графики для трех возможных вариантов включения схемы. Эти графики показаны на рисунке 1. Ток считается положительным, если он идет к схеме, находящейся в ящике, и отрицательным в противоположном случае. Придумайте простейшие схемы содержимого «черного ящика» и определите их параметры.

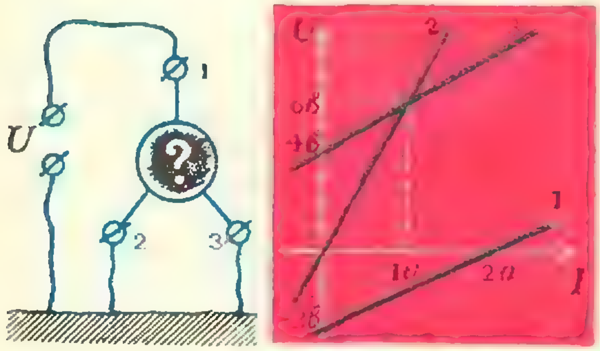


Рис. 1.

Б. Б. Буховцев

Ф142. Стальной шарик, подвешенный на нитке длины l, отклонили так, что нить приняла горизонтальное положение, и отпустили. В тот момент, когда нить составляла угол $\alpha = 30°$ с вертикалью, шарик ударился о неподвижную стальную плиту (рис. 2). На какую высоту поднимется шарик после удара о плиту, если удар можно считать абсолютно упругим?

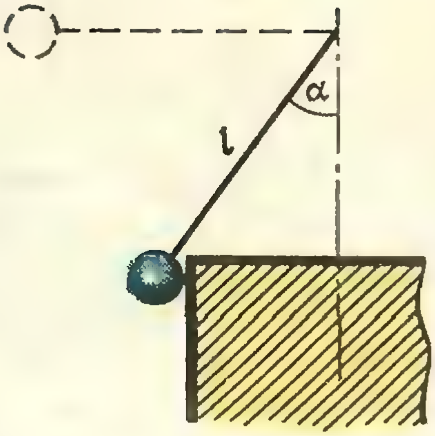


Рис. 2.

Г. Л. Коткин

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М84—М88 (решению задачи М85 посвящена отдельная статья «Иррациональность суммы радикалов», стр. 26—27).

М84

Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую l. На этой прямой взяты точки B и C так, что $AB=AC$. Через точки B и C проведены соответственно две произвольные секущие, из которых одна пересекает окружность в точках P и Q, вторая — в точках M и N. Пусть прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S. Докажите, что $AR=AS$.

Большинство читателей, приславших нам письма, решили эту задачу с помощью вычислений, основанных на теореме синусов для треугольника (подобным образом в книге В. Б. Лидского и др. «Задачи по элементарной математике» решена задача 395, являющаяся «вырожденным» частным случаем **М84**, когда точки B и C совпадают с A). Остроумное геометрическое решение нашел *С. Андросов* из Архангельска.

Пусть P', Q', M' и R' — точки, симметричные точкам P, Q, M и R относительно диаметра KL окружности, проходящего через точку A, E и E' — точки пересечения прямой l и окружности. Мы должны доказать, что точки R' и S совпадают. Мы покажем, что и точка R', и точка S лежат на окружности, проходящей через точки C, N и P'. Такая окружность существует только одна (случай, когда какие-либо две из точек C, N и P' совпадают, очевиден), и она пересекает прямую l, кроме точки C, еще только в одной точке, в которой должны лежать и R', и S.

Точки C, N, P' и S лежат на одной окружности, поскольку (рис. 1)

$$2\angle CSN = \smile EN + \smile QE' = \smile Q'E + \smile EN = \smile Q'N = 2\angle CP'N,$$

а точки C, N, P' и R' лежат на одной окружности, поскольку

$$2\angle CR'P' = \smile EP' + \smile M'E' = \smile ME + \smile EP' = 360^\circ - \smile ME'P' = 360^\circ - 2\angle CNP'.$$

(Еще легче проверить, что на одной окружности лежат точки C, N, P' и T, но мы предпочли не вводить лишнюю букву.)

В этом решении есть только один существенный недостаток: оно явно опирается на рисунок 1 и не учитывает, что конфигурация, описываемая в задаче, может иметь совсем другой вид; точки на прямых могут быть расположены в другом порядке, некоторые из точек B, R и даже вся прямая l могут лежать вне окружности (рис. 2) и т. п. Как исправить этот недочет? Нужно либо перечислить каким-то образом все возможные случаи расположения точек, либо переделать решение так, чтобы оно подходило сразу для всех случаев. Покажем, как можно это сделать, используя не совсем обычное определение «угла между прямыми».

Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, пересекающиеся в точке O. Обозначим через $\angle(l_1, l_2)$ угол, на который нужно повернуть вокруг точки O против часовой стрелки

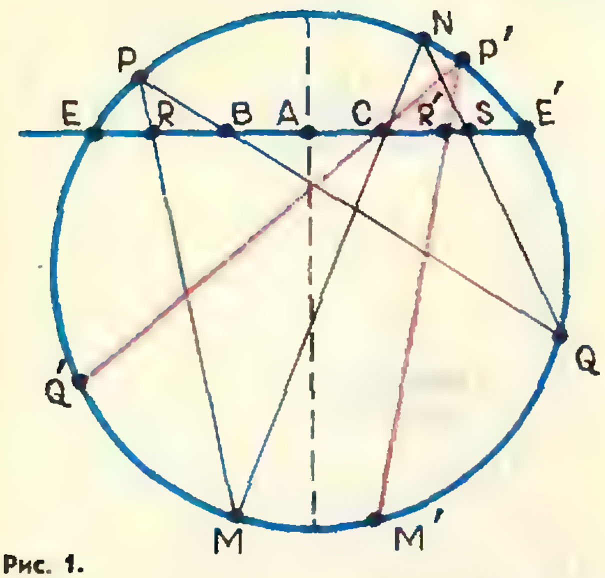


Рис. 1.

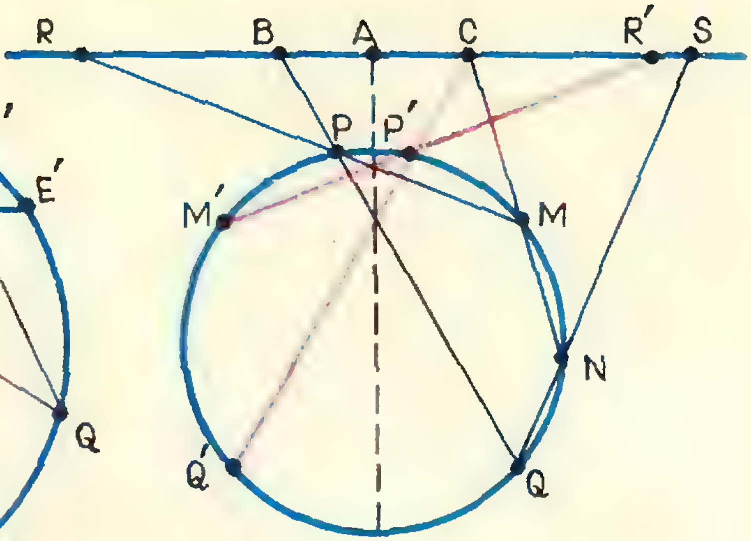


Рис. 2.

прямую l_1, чтобы она совпала с l_2 ($0^\circ < \measuredangle(l_1, l_2) < 180^\circ$). Если прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают, то, по определению, $\measuredangle(l_1, l_2) = 0$. Проверьте, что для любых двух данных точек U и V и данного угла α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) множеством точек X, для которых $\measuredangle(UX, VX) = \alpha$, будет окружность (строго говоря, за исключением самих точек U и V); другими словами, *четыре точки* U, V, X_1 *и* X_2 *лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда* $\measuredangle(UX_1, VX_1) = \measuredangle(UX_2, VX_2) \neq 0$ (рис. 3, *а*; сравнение рисунков 3, *а* и 3, *б* объясняет преимущества нового способа определения угла).

Вернемся к нашей задаче. Теперь утверждение, что пять точек C, N, P', S, R' лежат на одной окружности (откуда и следует, что R' совпадает с S) вытекает из равенств

$$\measuredangle(CS, NS) = \measuredangle(Q'Q, NQ) = \measuredangle(Q'P', NP') = \measuredangle(CP', NP');$$
$$\measuredangle(CR', P'R') = \measuredangle(MM', P'M') = \measuredangle(MN, P'N) = \measuredangle(CN, P'N).$$

Эти равенства легко проверить формально, не обращаясь к чертежу — нужно только помнить, какие точки лежат на одной прямой и какие — на одной окружности; кроме теоремы, выделенной выше курсивом, используется, что $Q'Q \parallel MM' \parallel l$. (Конечно, нужно еще разобрать «вырожденные» случаи, когда какие-нибудь две точки, определяющие в этих равенствах прямую, совпадают; все они довольно очевидны и мы не бу-

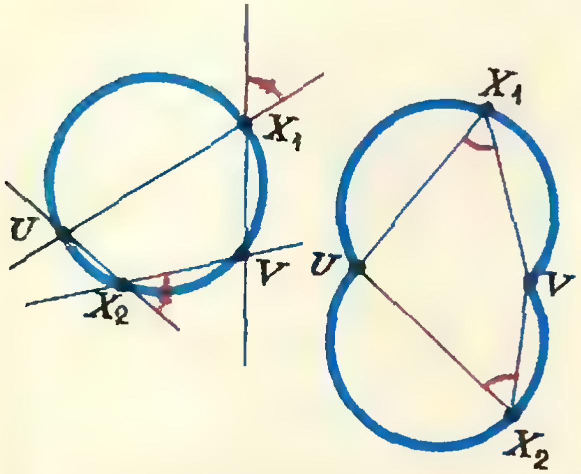


Рис. 3. Голубыми линиями показаны множества точек, для которых: а) $\measuredangle(UX, VX) = \alpha$ (левый рисунок) и б) $\angle UXV = \alpha$ (правый рисунок).

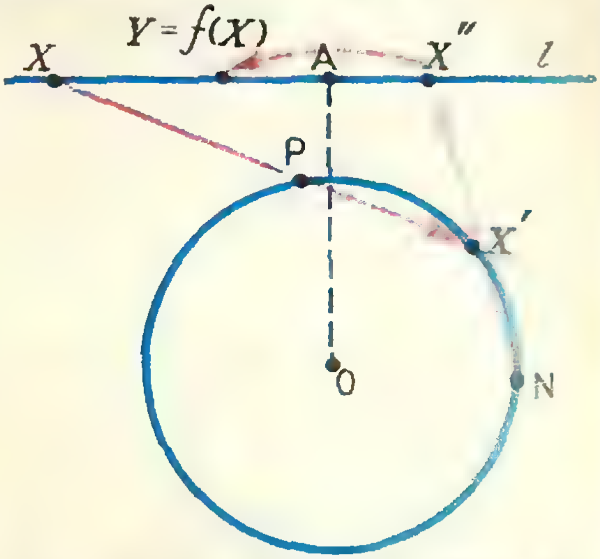


Рис. 4. Другая формулировка задачи М84: в результате трех отображений, показанных на рисунке, из точки X получается $Y = f(X)$; если проделать то же самое для точки Y, то получится, что $f(Y) = X$.

дем на них останавливаться.) Теперь задача полностью решена.

Приведем другую, более естественную формулировку этой задачи (подумайте, почему это та же самая задача!).

Пусть P и N — две различные точки окружности с центром O; A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на данную прямую l, и f — отображение, которое каждой точке X прямой l ставит в соответствие точку $f(X)$ этой же прямой по следующему правилу: если X' — точка пересечения прямой PX с окружностью, X'' — точка пересечения прямой NX' с l, то $f(X)$ — точка, симметричная X'' относительно A. Тогда отображение f совпадает с обратным к нему, то есть $f(f(X))=X$ для всех X (рис. 4).

Тем, кто знаком с основными понятиями проективной геометрии, мы предлагаем попробовать найти простое «проективное» доказательство этой теоремы (заметим, что даже в ее формулировке нужно считать l расширенной прямой, то есть добавить к l бесконечно удаленную точку — тогда отображения, о которых идет речь, будут взаимно однозначны). Для частного случая решение приводится в книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования» (ГИТТЛ, 1956 г.; ч. II, задача 177), но оно проходит лишь в том случае, когда прямая l пересекает окружность, и использует формулу «двойных отношений». План другого решения, «без вычислений», приводится на стр. 71 этого номера журнала.

Н. Б. Васильев

М86

Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размера 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку 2×2. Вместо нее удалось достать плитку 1×4. Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

Расчертим дно коробки на квадратики размера 1×1 и отметим те квадратики, которые стоят на нечетных местах в нечетных рядах (см. рис. 5). Заметим, что каждая плитка 1×4, закрывающая четыре квадратика на дне коробки, будет закрывать обязательно четное число отмеченных нами квадратиков (два или ни одного), а плитка 2×2 всегда закрывает ровно один отмеченный квадратик. Таким образом, если плитки целиком закрывают дно коробки, то количество плиток 2×2 имеет ту же четность, что и общее число отмеченных квадратиков на дне коробки. Поэтому, если количество плиток 2×2 изменилось на единицу (или вообще на нечетное число), то вновь заполнить коробку не удастся.

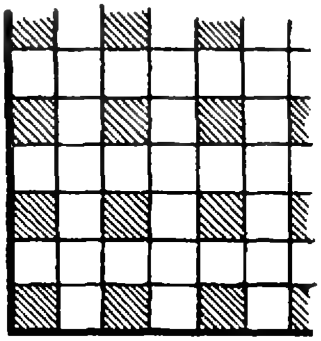


Рис. 5

Рис. 6.

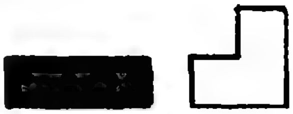


Рис. 7.

Подумайте, останется ли верным утверждение задачи, если вместо плиток 1×4 и 2×2 (рис 6) рассматривать плитки из трех квадратиков: прямоугольные 1×3 и «уголки» (рис. 7). Решение этой задачи вы найдете в конце журнала, на стр. 64, но не спешите туда заглядывать!

Правильные решения нашей задачи прислали *А. Григорян* и *Е. Карасик* из Баку, *Э. Туркевич* из Черновцов, *А. Черняк* из Минска и *А. Шамаев* из Москвы.

Л. Г. Лиманов

М87

Докажите, что если три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку, то три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности того же радиуса.

Пусть все три окружности радиуса r с центрами O_1, O_2 и O_3 пересекаются в точке A и, кроме того, попарно пересекаются в точках B_1 (O_2 и O_3), B_2 (O_3 и O_1) и B_3 (O_1 и O_2). Очевидно, что середины C_1, C_2, C_3 отрезков AB_1, AB_2, AB_3 являются в то же время серединами отрезков O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 соответственно (рис. 8). Поэтому у каждого из треугольника $B_1B_2B_3$ и $O_1O_2O_3$ стороны соответственно вдвое больше сторон треугольника $C_1C_2C_3$ (и параллельным им). Следовательно, $\triangle B_1B_2B_3 = \triangle O_1O_2O_3$. Но ясно, что радиус описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ равен r (действительно,

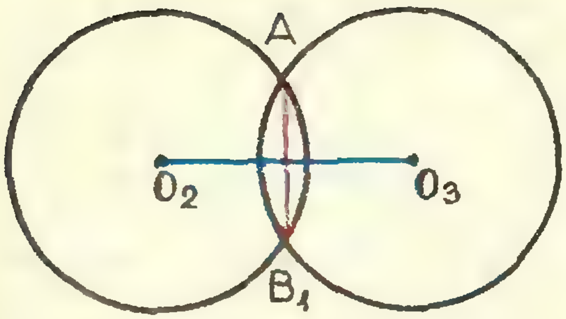


Рис. 8.

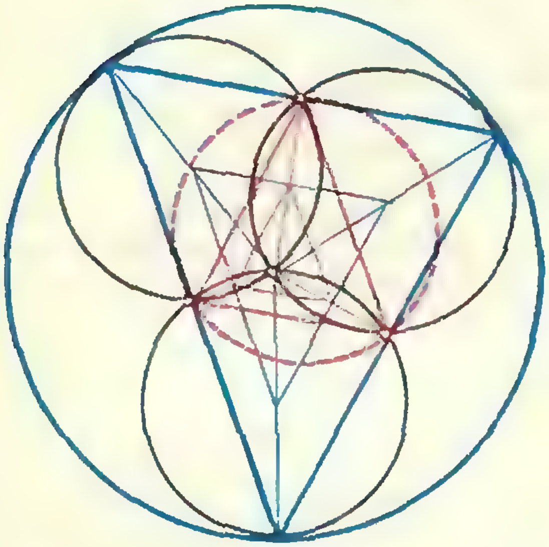


Рис. 9.

$AO_1=AO_2=AO_3=r$), поэтому и радиус описанной окружности треугольника $B_1B_2B_3$ тоже равен r, что и требовалось доказать.

Многие читатели доказывали, что треугольники $B_1B_2B_3$ и $O_1O_2O_3$ равны, более сложным способом, при котором приходилось отдельно рассматривать различные случаи взаимного расположения этих треугольников (мы нарочно в нашем решении не ссылались на рисунок, где проведены все упоминаемые там отрезки, чтобы подчеркнуть, что оно не зависит от их расположения). Решение, совершенно аналогичное нашему, можно получить, рассматривая вместо треугольника $C_1C_2C_3$ треугольник $D_1D_2D_3$, где D_1, D_2, D_3 — точки, диаметрально противоположные точке A в окружностях O_1, O_2 и O_3 соответственно; докажите, что B_1, B_2 и B_3 — середины сторон треугольника $D_1D_2D_3$. В конфигурации, которую мы получили (рис. 9). интересно еще то, что точка A является центром описанной окружности треугольников $O_1O_2O_3$ и $D_1D_2D_3$ и одновременно точкой пересечения высот треугольников $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$; последнее, впрочем, уже не используется в нашем решении.

Любопытно, что Д. Пойя (и у некоторых читателей, приславших нам письма) возникла совсем иная идея решения этой задачи. Отрывок из книги «Математическое открытие», в которой рассказывается о зарождении этой идеи, мы публикуем на стр. 67—69.

В. И. Березин

М58

Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

Приведем сразу ответ. Искомое соотношение: $c=\frac{ab}{3}-\frac{2}{27}a^3$ (или, что то же самое, один из корней должен равняться $-\frac{a}{3}$). Действительно, пусть x_1, x_2 и x_3 — корни нашего уравнения. Тогда, по теореме Виета,

$$x_1+x_2+x_3=-a.$$

С другой стороны, для того чтобы x_1, x_2, x_3 составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_1+x_3=2x_2.$$

Поэтому $x_1+x_2+x_3=3x_2$, откуда $x_2=-\frac{a}{3}$.

Постарайтесь вывести условия, при которых корни уравнения четвертой степени образуют арифметическую прогрессию.

Л. И. Москвичюте

В этом номере мы публикуем решения задач Ф92—Ф99

Ф92

Обруч массы m стоит на доске массы M (рис. 10). Коэффициент трения между доской и обручем k. Доска лежит на гладком столе. С каким ускорением будет двигаться доска, если обруч тянуть с силой F?

Запишем уравнения движения обруча и доски (уравнения II закона Ньютона). В горизонтальном направлении на обруч действуют две силы — сила F и сила трения $F_{тр}$ между доской и обручем (см. рис. 10). Центр тяжести тела — в данном случае центр обруча — движется так, как если бы к нему были приложены все силы, действующие на тело. Поэтому можно записать, что

$$ma_1=F-F_{тр} \qquad (1)$$

(a_1 — ускорение центра обруча).

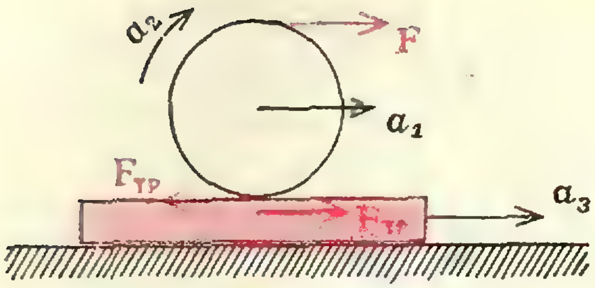


Рис. 10.

Обруч не только движется в горизонтальном направлении, но и вращается вокруг центра. Ускорение вращательного движения ему сообщают те же силы F и $F_{тр}$, но в этом случае они действуют «согласованно», раскручивая обруч в одну сторону. Ускорение вращательного движения обруча в системе координат, связанной с его центром *) обозначим a_2. Тогда мы можем записать, что

$$ma_2 = F + F_{тр} \text{ **)} \qquad (2)$$

Теперь запишем уравнение движения доски. В горизонтальном направлении на нее действует только одна сила — сила трения обруча о доску. Поэтому, если ускорение доски обозначить a_3, то

$$Ma_3 = F_{тр}. \qquad (3)$$

Итак, мы получили три уравнения, в которые входят четыре неизвестные величины: a_1, a_2, a_3 и $F_{тр}$. Чтобы найти эти неизвестные, нужно составить еще одно уравнение.

При движении обруча и доски возможны два случая: 1) обруч не проскальзывает относительно доски и 2) обруч проскальзывает относительно доски.

Рассмотрим первый случай: обруч не проскальзывает относительно доски. В этом случае скорость v_1 поступательного движения центра обруча, линейная скорость v_2 вращения обруча вокруг его центра и скорость v_3 доски связаны соотношением

$$v_2 = v_1 - v_3.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим систему координат, связанную с центром обруча. В этой системе земля движется влево со скоростью v_1 (рис. 11). Так как доска движется относительно Земли вправо со скоростью v_3, то скорость доски в системе координат, связанной с центром обруча, равна $v_1 - v_3$. С той же скоростью движется и нижняя точка обруча, касающаяся доски. Это и есть линейная скорость вращения обруча вокруг его центра.

Так как силы, действующие на обруч и доску, постоянны, то постоянны и ускорения a_1, a_2 и a_3. Пусть скорости v_1, v_2 и v_3 тела приобретают через время t после начала их движения. Тогда $v_1 = a_1 t$, $v_2 = a_2 t$ и $v_3 = a_3 t$. Следовательно,

$$a_2 t = a_1 t - a_3 t.$$

Отсюда

$$a_2 = a_1 - a_3. \qquad (4)$$

Мы получили уравнение, связывающее ускорения тел. Решая теперь совместно уравнения (1), (2), (3) и (4), находим

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{m}$$

и

$$a_3 = 0.$$

У нас получилось, что ускорение доски равно нулю. Из уравнения (3) ясно, что сила трения тоже равна нулю. Это связано с тем, что если к обручу, стоящему даже на абсолютно гладкой доске, приложить силу F так, как показано на рисунке 10, то ускорение поступательного движения обруча будет совпадать с ускорением его вращательного движения. При этом нижняя точка обруча катится по доске, не проскальзывая. Происходит это потому, что вся масса обруча сосредоточена в его тонком ободе и сила F сообщает обручу одинаковые ускорения поступательного и вращательного движения. Но это

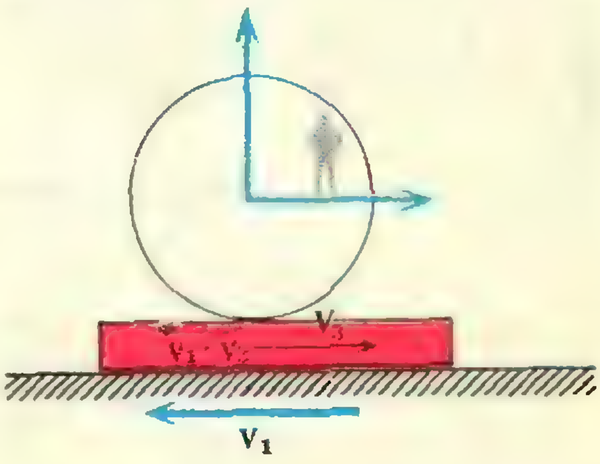


Рис. 11.

---

*) На самом деле система координат, связанная с центром обруча, не инерциальна. Но, рассматривая вращение обруча, это можно не учитывать, поскольку сила инерции приложена к центру тяжести обруча, и ее момент относительно центра обруча равен нулю.

**) Уравнение II закона Ньютона для вращающегося тела записывается следующим образом:

$$I\varepsilon = (F + F_{тр})\, r, \qquad (*)$$

где I — момент инерции, ε — угловое ускорение и r — радиус обруча (см. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение», «Квант» № 1, 1971).

Для обруча $I = mr^2$, $\varepsilon = \frac{a_2}{r}$. Если подставить эти значения в уравнение (*), то и получится уравнение (2).

означает, что сила трения не зависит от силы F и всегда равна нулю. Поэтому обруч не может проскальзывать относительно доски (сила трения не может быть равна kN), и второй случай мы можем не рассматривать.

Ф93

В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n, проделано отверстие небольшого радиуса r. По оси отверстия из сосуда горизонтально направляют тонкий луч света. До какого уровня h над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч света вышел из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения?

Изменением поперечного сечения струи пренебречь, показатель преломления жидкости считать достаточно большим.

Под наибольшим углом к поверхности воды луч света падает в точке A струи (рис. 12). Угол падения α, при котором луч в этой точке не испытывает полного внутреннего отражения, должен быть таким, что

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Это следует из закона преломления света $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}\right)$ и условия, что угол $\beta = 90°$. Касательная к струе в точке A составляет угол $\gamma = 90° - \alpha$ с горизонталью. Таким образом, луч света выйдет из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения, если угол, который образует касательная к струе в точке A, составляет с горизонтом угол γ такой, что $\cos\gamma = \frac{1}{n}$.

Но касательная к поверхности жидкости — это касательная к траектории движения частиц, вышедших у верхнего края отверстия. Поэтому направление касательной к поверхности жидкости совпадает с направлением вектора скорости частиц жидкости в точке A.

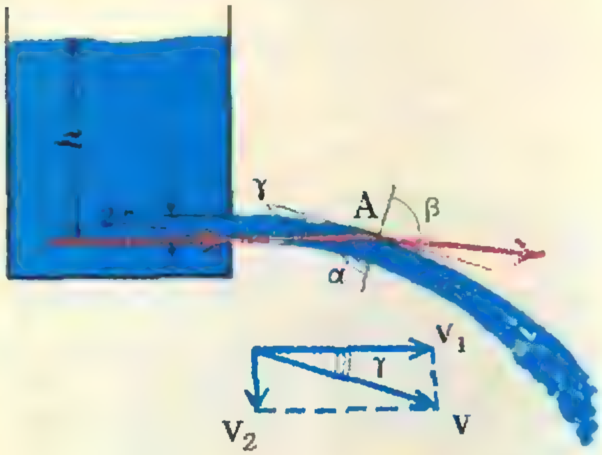


Рис. 12.

Эта скорость складывается из горизонтальной скорости v_1, которую имели частицы воды у отверстия сосуда, и из скорости v_2, приобретенной ими при свободном падении с высоты $2r$. Из закона сохранения энергии следует, что $\Delta mg\cdot 2r = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$ (Δm — масса частицы воды), поэтому $v_2 = \sqrt{4gr}$. Что же касается скорости v_1 вытекания жидкости из сосуда, то, как известно, она равна $\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием *).

Зная v_1 и v_2, нетрудно найти угол наклона касательной к поверхности жидкости в точке A к горизонту:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{4gr}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{2\frac{r}{h}}. \qquad (2)$$

Выражая теперь $\cos\gamma$ через $\operatorname{tg}\gamma$ —

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}$$

и учитывая, что $\cos\gamma = \frac{1}{n}$, получим

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{r}{h}}}.$$

Отсюда

$$h = 2r/(n^2-1).$$

Ф94

Над одной грамм-молекулой идеального газа совершают цикл (замкнутый процесс), состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 13). Температуры газов в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3 соответственно. Определить работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

Расширяясь по изобаре *2—3*, газ совершает работу

$$A_1 = P_2(V_2 - V_1) = P_2V_2 - P_2V_1 = RT_3 - RT_2 = R(T_3 - T_2).$$

При сжатии газа по изобаре *4—1* работа

---

*) Это следует также из закона сохранения энергии. Действительно, при вытекании массы воды Δm из сосуда с жидкостью потенциальная энергия воды уменьшается на величину Δmgh (можно просто считать, что масса воды Δm переместилась с поверхности жидкости к отверстию).

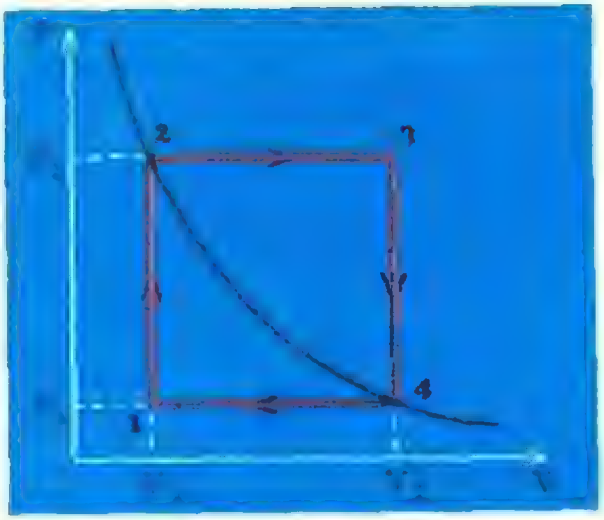


Рис. 13.

совершается уже над газом. Она равна

$$A_2 = P_1 (V_2 - V_1) = R (T_4 - T_1).$$

Полная работа, совершенная газом, очевидно, равна

$$A = A_1 - A_2 = (P_2 - P_1)\ (V_2 - V_1) = R (T_3 + T_1 - T_2 - T_4).$$

Так как точки 2 и 4 лежат на одной изотерме, то температура газа в них одинакова. Обозначим ее $T = T_2 = T_4$. Тогда $A = R (T_3 + T_1 - 2T)$. Точки 3 и 4 лежат на одной изохоре, поэтому $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_3}{T}$. Точки 2 и 1 тоже лежат на одной изохоре и $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T}{T_1}$. Из этих двух уравнений найдем, что

$$T = \sqrt{T_1 T_3}.$$

Следовательно,

$$A = R (T_1 + T_3 - 2 \sqrt{T_1 T_3}\,.)$$

Ф95

Поверхность реки образует наклонную плоскость. Может ли тело свободно плыть по реке со скоростью, превышающей скорость течения?

Если тело не перемещается относительно воды, то действующая на него со стороны воды сила трения равна нулю. Поэтому составляющая силы тяжести, параллельная поверхности воды (рис. 14), будет разгонять тело до тех пор, пока ее не уравновесит сила трения о воду (которая при малых скоростях пропорциональна скорости тела). При этом тело будет плыть со скоростью, большей скорости течения.

Теперь представим себе, что мы, оставив тонкую жесткую невесомую оболочку, убрали тело и налили в оболочку воду так, чтобы ее объем был равен объему погруженной части тела (рис. 15). Поскольку тело плавало, масса налитой воды равна массе тела. Следовательно, оболочка с водой эквивалентна телу, которое мы убрали. Но вода, налитая в оболочку, ничем не отличается от воды в реке. Трение в жидкости связано только с вязкостью самой жидкости и не зависит от поверхности тела. Это объясняется тем, что к поверхности тела «прилипает» тонкий слой молекул воды и трение определяется взаимодействием между собой именно молекул воды. Значит, можно совсем убрать оболочку, сила трения от этого не изменится. Получается, что тело должно плыть со скоростью, равной скорости течения.

Что же происходит на самом деле?

Разберемся вначале с тем, что значит «скорость течения». Из-за трения скорость течения реки в различных точках реки различна. Она увеличивается от дна к поверхности и от берега к середине реки. Поэтому неодинакова и скорость течения в том месте, где находится плывущее по реке тело. Этим вода в оболочке отличается от окружающей воды, ведь скорость воды в оболочке во всех точках одинакова.

Предположим, что скорость тела равна скорости течения у края тела, который находится ближе к берегу. Тогда скорость течения воды, проходящей мимо тела в других точках, больше скорости тела. Из-за этого вода должна увлекать тело, увеличивая его скорость. С другой стороны, когда скорость тела возрастет, оно должно тормозиться благодаря тому, что скорость его точек, находящихся ближе к берегу, больше скорости течения и сила трения препятствует движению тела. В результате тело должно плыть со скоростью, большей минимальной, но меньшей максимальной из скоростей течения на протяжении тела.

Ф96

Два одинаковых шарика связаны нитью. Найти высоту подъема этой системы, если один из шариков бросили вверх со скоростью v.

Импульс всей системы равен mv, а ее масса $2m$. Поэтому в начальный момент

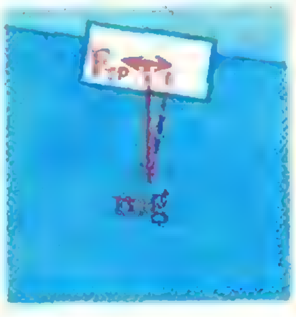


Рис. 14.

Рис. 15.

скорость центра масс системы равна $\frac{mv}{2m}=\frac{v}{2}$.

Запишем закон сохранения энергии для всей системы. При этом мы можем рассматривать движение не отдельных шариков, а центра масс системы, считая, что в нем сосредоточена вся масса системы. Если максимальная высота, на которую поднимается центр масс системы, равна h, то

$$2mgh=\frac{2m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2}.$$

Отсюда

$$h=\frac{v^2}{8g}.$$

Мы получили много решений этой задачи, однако в большинстве писем была одна и та же ошибка. Авторы решений полагали, что в тот момент, когда центр масс системы достигает максимальной высоты подъема, шарики неподвижны и их кинетическая энергия равна нулю. Это, однако, неверно. Шарики движутся и их кинетическая энергия в этот момент равна

$$\frac{mv^2}{2}-2m\cdot gh=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv^2}{4}=\frac{mv^2}{4}.$$

Ф97

Виток изолированного провода изогнут в виде восьмерки, кольца которой имеют радиусы $r_1=1$ *см* и $r_2=3$ *см*. Виток находится в магнитном поле с индукцией $B=10^4$ *гс*, перпендикулярном плоскости витка. Изоляция провода рассчитана на напряжение 10 *в*. Произойдет ли пробой изоляции, если магнитное поле резко выключить? Время выключения поля $\Delta t=10^{-3}$ *сек*.

Виток можно согнуть по-разному, при этом провода могут пересекаться, а могут и не пересекаться между собой. Мы рассмотрим оба случая.

Обозначим через E_1 и E_2 э. д. с. индукции, наводимые в контурах I и II (рис. 16), а через R_1 и R_2 — сопротивления этих контуров.

Если проволоки контура пересекаются (рис. 16, *а*), то обходя контур, нетрудно заметить, что э. д. с. E_1 и E_2 направлены в разные стороны. Поэтому ток, идущий по проволоке, равен

$$I=\frac{E_1-E_2}{R_1+R_2}.$$

Разность потенциалов между точками A' и A'', очевидно, равна разности E_1 и падения напряжения в контуре II (или же разности E_2 и падения напряжения в контуре I; в обоих случаях мы должны получить один и тот же результат)

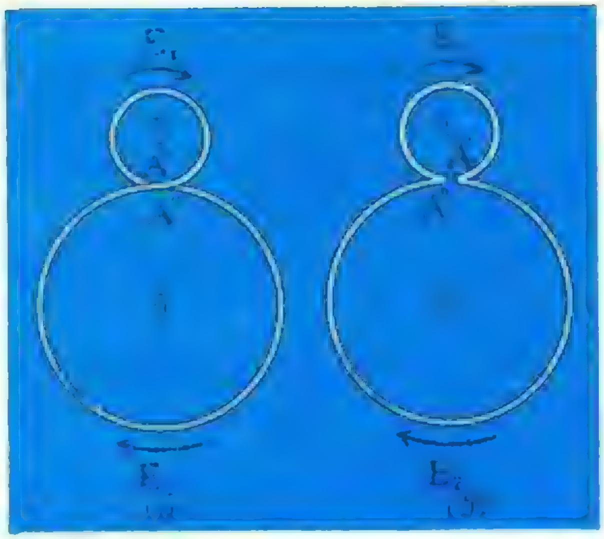


Рис. 16.

$$U=E_1-IR_1=E_1-\frac{E_1-E_2}{R_1+R_2}R_1=$$
$$=\frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1+R_2}.$$

Но

$$E_1=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{S\Delta B}{\Delta t}=\pi r_1^2\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t};$$

аналогично,

$$E_2=\pi r_2^2\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Сопротивления контуров равны

$$R_1=\rho\cdot 2\pi r_1,$$
$$R_2=\rho\cdot 2\pi r_2.$$

Отсюда получаем:

$$U=\pi r_1 r_2\frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (1)$$

Если проволоки контура не пересекаются (рис. 16, *б*), то э. д. с. E_1 и E_2 направлены в одну сторону. В этом случае

$$I=\frac{E_1+E_2}{R_1+R_2}$$

и

$$U=E_1-IR_1=\pi r_1 r_2\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (2)$$

Во втором случае разность потенциалов между точками A' и A'' проволоки меньше, чем в первом, в $\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$ раз.

Подставляя в формулу (1) численные значения величин, найдем, что $U=1$ *в*. Вычисленная по формуле (2) разность потенциалов еще меньше. Это означает, что изоляция не будет пробита.

Ф98

Какую максимальную разность потенциалов можно получить, имея в своем распоряжении источник с э. д. с. E и n одинаковых конденсаторов с емкостью C каждый?

Разберем вначале более простой случай с $n=2$.

Зарядив оба конденсатора от источника до разности потенциалов E и соединив вместе последовательно источник и оба конденсатора, можно получить разность потенциалов $3E$. Однако это не максимальная возможная разность потенциалов. Докажем, что имея два конденсатора и источник, можно получить разность потенциалов, сколько угодно близкую к $4E$.

Соединим последовательно источник с одним из конденсаторов, а второй конденсатор замкнем на эту пару: «—» конденсатора соединим с «—» источника, а «+» конденсатора с «+» второго конденсатора (рис. 17). При этом заряды на конденсаторах перераспределятся. Обозначая заряды на конденсаторах после перераспределения через q_1 и q_2, а падение напряжения на конденсаторах через u_1 и u_2, мы можем записать

$$E + u_1 = u_2. \qquad (1)$$

Суммарный заряд правых пластин конденсатора равен $2CE$. Этот заряд перераспределяется между пластинами, но измениться не может. Поэтому

$$q_1 + q_2 = 2CE. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$u_2 = \frac{3}{2} E.$$

Снова зарядим конденсатор 1 до разности потенциалов E, соберем ту же схему. Теперь u_2 станет равным $\frac{4}{7} E$.

Повторяя эту операцию много раз, можно зарядить конденсатор 2 до разности потенциалов, сколь угодно близкой к $2E$. Соединяя теперь источник и оба конденсатора последовательно, мы и получим разность потенциалов, сколь угодно близкую к $4E$.

Таким образом, ясно, что имея возможность с помощью двух конденсаторов получить батарею с э. д. с. $4E$, третий конденсатор можно зарядить уже до разности потенциалов $4E$, а затем, соединив последовательно конденсаторы и источник, получить разность потенциалов $8E$. До этой разности потенциалов можно зарядить четвертый конденсатор и т. д. Значит, имея n конденсаторов, один из них можно зарядить до разности потенциалов E, второй до разности потенциалов $2E$, третий до разности потенциалов $4E$ и так далее. n-й конденсатор можно зарядить до разности потенциалов $2^{n-1}E$. Соединив затем все конденсаторы и источник последовательно, можно получить разность потенциалов

$$E + (E + 2E + 4E + \ldots + 2^{n-1}E) = 2^n E.$$

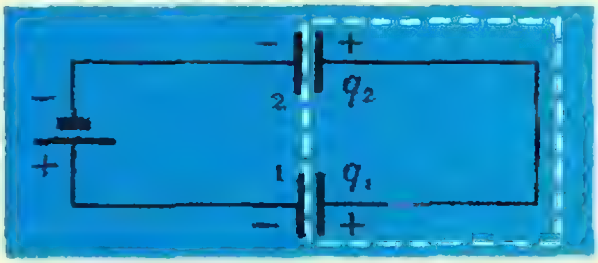


Рис. 17.

Ф99

На рисунке 18, *а* показаны $V—T$ диаграммы двух круговых процессов. При каком из них газ совершает бо́льшую работу: при процессе 1—2—3—1 или при процессе 1—3—4—1?

Перерисуем диаграммы процессов, показанных на рисунке, в координатах $P \to V$.

Точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, причем точке 1 соответствует меньший объем, чем точке 3. Поэтому, начертив изотерму, выберем две точки на ней — точки 1 и 3, как показано на рисунке 18, *б*. Теперь построить диаграммы циклов несложно. Линия 1—2 — это изобара, причем объем в точке 2 больше, чем объем в точке 1. Линия 2—3 — изохора. На диаграмме $P—V$ она должна быть вертикальна. Точно так же строится и диаграмма второго процесса.

Мы знаем, что работа, совершенная газом за цикл, равна площади фигуры, ограниченной графиком цикла. Но из рисунка видно, что площадь «красного» процесса больше площади «серого» процесса. Это означает, что бо́льшую работу газ совершает при процессе 1—2—3—1.

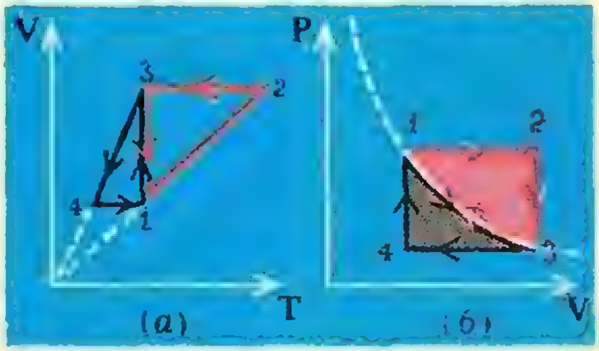


Рис. 18 (а, б).

Редакция получила 121 письмо с решениями задач **Ф92—Ф99**. Только один из читателей *А. Айрапетян* (Ереван) прислал правильное решение задачи **Ф92**. Наиболее легкими оказались задачи **Ф94** и **Ф99**. Мы получили много писем с верными решениями этих задач.

Правильные решения задач прислали: *А. Айрапетян* (Ереван), **Ф92**; *С. Арасланова* (п. Нижне-Ивкино Куменского р-на Кировской обл.) **Ф94, Ф95, Ф99**; *В. Белов* (Вологда) **Ф93, Ф94, Ф97, Ф99**; *А. Белоцкий* (Москва) **Ф94**; *А. Блохин* (Кисселевск Кемеровской обл.) **Ф93**; *В. Бронников* (п. Кильмезь Кировской обл.) **Ф94**; *Н. Вильданов* (Нижний Тагил) **Ф94**; *В. Гаврилов* (с. Снагость Курской обл.) **Ф99**; *С. Галахваридзе* (Тбилиси) **Ф99**; *В. Глембоцкий* (Ярославль) **Ф93, Ф94, Ф97, Ф99**; *С. Горбулин* (с. Красногвардейское Ставропольского края) **Ф96**; *Л. Дацевич* (Ленинград) **Ф99**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф93, Ф94, Ф95, Ф99**; *Г. Долидзе* (Тбилиси) **Ф99**; *В. Долматов* (Ташкент) **Ф94, Ф99**; *А. Домрачев* (Йошкар-Ола) **Ф93**; *Г. Зайцев* (Гагра) **Ф93, Ф94, Ф97, Ф99**; *М. Забежинская* (Ленинград) **Ф94**; *О. Заумыслова* (Москва) **Ф95**; *Н. Зыков* (Саратов) **Ф99**; *А. Иванов* (Льгов Курской обл.) **Ф99**; *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.) **Ф99**; *Кацнельсон* (Магнитогорск) **Ф94**; *Л. Книжнерман* (Москва) **Ф94, Ф96**; *А. Кожухов* (Комсомольск-на-Амуре) **Ф93**; *В. Коломийцев* (Ростов-на-Дону) **Ф99**; *В. Коротких* (Новокузнецк) **Ф94, Ф96**; *В. Котенов* (Москва) **Ф99**; *В. Кулич* (д. Могильно Ивановского р-на Брестской обл.) **Ф99**; *В. Кууск* (Ржев) **Ф94, Ф99**; *Г. Левин* (Куйбышев) **Ф94**; *И. Лобов* (Красноярск) **Ф93**; *В. Лукашин* (Москва) **Ф99**; *А. Лукьянов* (Тамбов) **Ф94, Ф99**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф95, Ф99**; *А. Мамула* (с. Дыбинцы Богуславского р-на Киевской обл.) **Ф99**; *В. Надежко* (Ленинград) **Ф94, Ф99**; *В. Недземский* (Ленинград) **Ф94**; *Я. Островский* (Курск) **Ф97**; *В. Пархоменко* (с. Покомибичи Гомельской обл.) **Ф94**; *М. Прегер* (Томск) **Ф96**; *В. Пшеничников* (с. Ключевка Новосергеевского р-на Оренбургской обл.) **Ф96**; *П. Сергеев* (Грозный) **Ф99**; *А. Семенов* (Фрунзе) **Ф94**; *И. Сидоров* (Москва) **Ф94, Ф99**; *Г. Симоненков* (Каунас) **Ф94**; *М. Соломонович* (Кишинев) **Ф94**; *Л. Сорокина* (Орел) **Ф99**; *А. Сосунов* (Баку) **Ф94**; *Сычев* (Альга Актюбинской обл.) **Ф99**; *Г. Фай* (Караганда) **Ф94**; *В. Файтелевич* (Армавир) **Ф99**; *Н. Федин* (Омск) **Ф94, Ф97, Ф99**; *А. Федченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.) **Ф94, Ф99**; *Г. Фурманов* (Черновцы) **Ф96**; *Е. Чудаков* (Москва) **Ф94**; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) **Ф99**; *В. Шалимов* (Воронеж) **Ф93**.

(Начало см. на стр. 41)

Следующий симпозиум проходил в Тбилиси в школе № 42 с 5 по 9 ноября 1971 года. Приехали не только участники симпозиума в Горьком, но и пополнение из физико-математических школ Душанбе, Еревана, Баку и Минска.

Секцией математики-1 руководил заслуженный деятель наук доктор физико-математических наук профессор Д. А. Квеселава. На этой секции были заслушаны доклады «Об одной минимальной проблеме», «Сравнение логарифмов», «Числа Фибоначчи», «Алгоритмы», «Индукция в геометрии», «Номография», «Инверсия», «Элементарное введение в математическую логику», «Теорема Эйлера», «Математика в общественных науках» и другие.

Секцией математики-2 руководил доктор физико-математических наук профессор И. Н. Карцивадзе. Школьники прочли доклады на темы «М. В. Остроградский», «Нетривиальные точки пересечения графиков функций», «Признаки делимости», «Прямая и обратная теоремы», «Применение теоремы о выпуклости функций к доказательству неравенств», «Некоторые вопросы из теории рефлексивных игр», «Что такое расстояние», «Н. И. Мусхелишвили» и другие.

С докладами на математических секциях выступили: *М. Керзнер* (10 кл. с. ш. 239, Ленинград), *С. Борисенко* (9 кл. с. ш. 145, Киев), *И. Пирадашвили* (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси), *С. Березницкий*, *Л. Левантовский* (9 кл. с. ш. 444, Москва), *Л. Попова* (9 кл. с. ш. 10, Минск), *Р. Слизинова* (10 кл. с. ш. 110, Ташкент), *О. Худавердян* (10 кл. ф.-м. ш. при Ереванском государственном университете), *М. Гварамадзе* (10 кл., с. ш. 42, Тбилиси), *Л. Полканов* (9 кл. с. ш. 10, Минск) и другие.

Работу секции физики возглавлял кандидат физико-математических наук доцент А. Р. Хволес. Были заслушаны доклады «Поведение шара в потоке воздуха», «Законы сохранения и симметрия пространства — времени», «Падение дождевой капли в ненасыщающем воздухе», «Квазары», «Второе начало термодинамики» и другие.

На физической секции выступили: *А. Саввин* (10 кл. с. ш. 239, Ленинград), *Д. Туревская* (10 кл. с. ш. 145, Киев), *И. Акопян* и *О. Давыдов* (10 кл. с. ш. 42, Тбилиси) и другие.

На симпозиуме работали также секции химии, истории и литературы.

Директор школы 444 г. Москвы,
В. Д. Головина

А. Хацет

Методы расчета эквивалентных сопротивлений

Любую цепь можно рассчитать, используя уравнения Кирхгофа. Однако они не входят в школьную программу и, кроме того, решать систему из большого числа уравнений со многими неизвестными — не лучший способ тратить время на экзамене. Поэтому нужно уметь пользоваться методами, позволяющими быстро найти сопротивление цепи. Об этих методах и рассказывается в статье ученика 10 класса 145 школы г. Киева, члена физического кружка Киевского дворца пионеров Александра Хацета.

1. Метод эквипотенциальных узлов

Идея метода состоит в том, чтобы различные узлы цепи, имеющие равные потенциалы, рассматривать как один узел. При этом потенциал в полученном «склеенном» узле равен общему значению потенциалов исходных узлов.

Если эквипотенциальные узлы соединить проводником (без сопротивления), то электрические условия во всех узлах и ветвях цепи не изменятся, так как по этому проводнику ток идти не будет.

Рассмотрим примеры.

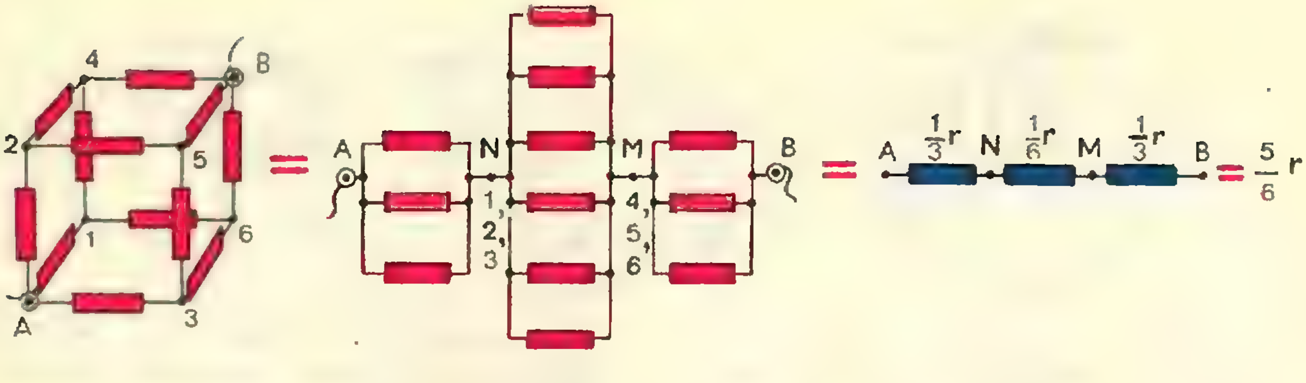
Задача 1. Найти сопротивление, эквивалентное участку цепи, изображенному на рисунке 1, *а* (все сопротивления на схеме одинаковы и равны *r*).

Решение. Нетрудно понять, что узлы 1, 2 и 3 имеют равные потенциалы. В самом деле, из соображений симметрии ясно, что токи, идущие по ветвям А-1, А-2 и А-3 — одинаковы. Поэтому благодаря равенству сопротивлений этих ветвей падения потенциала на них тоже одинаковы и одинаковы потенциалы узлов 1, 2 и 3.

Аналогично можно показать, что узлы 4, 5 и 6 тоже имеют равные потенциалы (эквипотенциальны).

Ясно, что сопротивление цепи не изменится, если эквипотенциальные узлы 1, 2 и 3 соединить вместе. Не изменится сопротивление цепи, если соединить и вторую тройку эквипотенциальных узлов.

Сделав это, мы получим цепь, эквивалентную данной (рис. 1, *б*). Сопротивление этой цепи найти нетрудно: сопротивление участка AN равно $\frac{1}{3}r\left(\frac{1}{R_{AN}}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)$, сопротивление участка NM равно $\frac{1}{6}r$, а сопротивление участка MB равно $\frac{1}{3}r$. Поэтому $R_{AB}=\frac{5}{6}r$.



а б в

Рис. 1.

Как же найти эквипотенциальные узлы? Во многих случаях этому помогает «симметрия» включения участков цепи. «Симметрия» в том смысле, что те или иные участки цепи, те или иные узлы совершенно равноправны.

Решим еще одну задачу.

Задача 2. Найти сопротивление участка цепи, показанного на рисунке 2, *а*. (Все сопротивления на схеме одинаковы и равны *r*.)

Решение. Заметим, что узлы 1 и 2, а также узлы 3 и 4 образуют пары эквипотенциальных узлов; соединяя соответствующие эквипотенциальные узлы вместе, получим эквивалентную схему (рис. 2, *б*), сопротивление которой подсчитать не трудно, пользуясь правилами нахождения сопротивления участков с параллельно и последовательно включенными сопротивлениями. Оно равно $^{7}/_{12}\,r$ (рис. 2, *в г, д*).

2. Метод исключения участков цепи

Этот метод тесно связан с предыдущим. Если участок цепи включен между двумя эквипотенциальными узлами, то этот участок можно из схемы исключить. При этом получится эквивалентная цепь, так как по исключенному участку ток не шел. Иногда после исключения участка эквипотенциальные узлы целесообразно соединить вместе. Рассмотрим примеры. Начнем с совсем простого.

Задача 3. Найти сопротивление участка цепи, показанного на рисунке 3, *а*.

Решение. Из соображений симметрии очевидно, что токи в ветвях *AM* и *AN* равны. Поэтому узлы *M* и *N* эквипотенциальны. Исключая участок *MN*, получаем эквивалентную цепь (рис. 3, *б*), сопротивление которой легко находится: $R = \frac{3}{2}r$.

Теперь решим более сложную задачу.

Задача 4. Найти сопротивление участка цепи *AB*, показанного на рисунке 4, *а*. Все сопротивления на схеме одинаковы и равны *r*.

Решение. Замечаем, что точки *F* и *F'* эквипотенциальны и, следова-

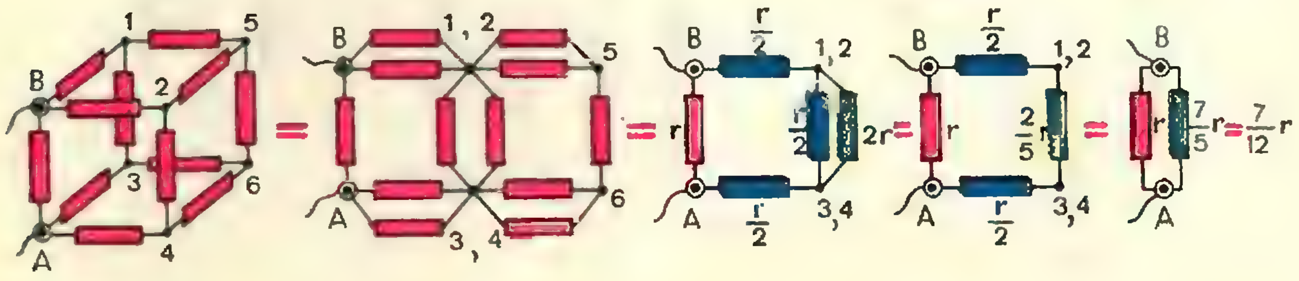
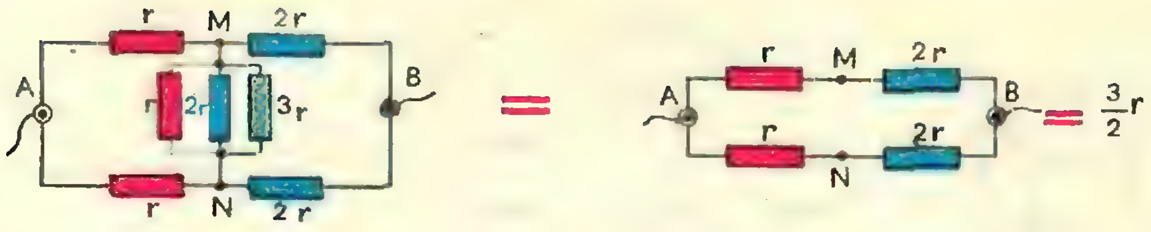


Рис. 2. а б в г д



а б

Рис. 3.

тельно, по участку FF' ток не идет. Поэтому можно удалить участок FF' и мы получим эквивалентную схему, изображенную на рисунке 4, *б*. После простых преобразований цепи (рис. 4, *в*) легко подсчитать, что ее сопротивление $R = \frac{7}{6}\,r$.

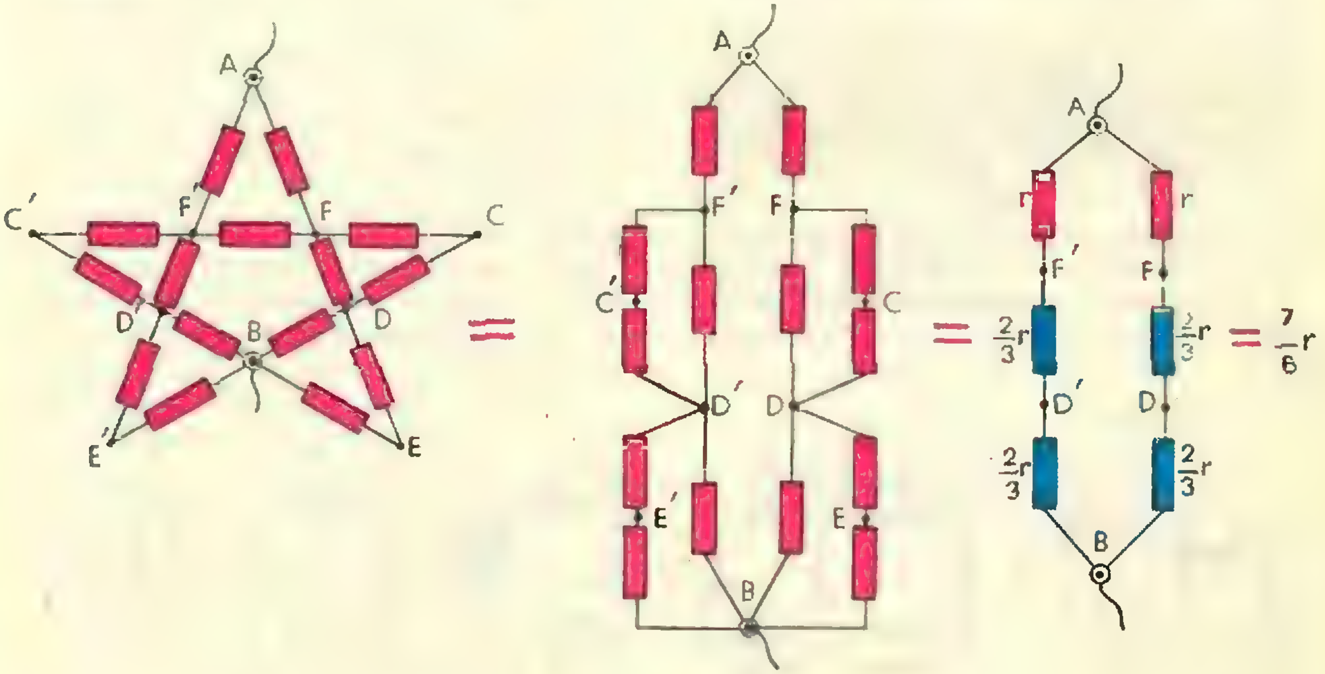
3. Метод «размножения» узлов

Этот метод тоже тесно связан с методом эквипотенциальных узлов. Если замена нескольких эквипотенциальных узлов одним (соединение узлов) приводила к эквивалентной цепи, то и обратная замена одного узла несколькими эквипотенциальными узлами не нарушит электрических условий в остальной части цепи.

Приведем примеры цепей, для которых такое преобразование целесообразно.

Задача 5. Найти сопротивление участка цепи, показанного на рисунке 5, *а*.

Заменим узел O тремя узлами; O_1, O_2 и O_3 (рис. 5, *б*). Однако нам нужно еще доказать, что эти цепи эквивалентны. Для эквивалентности цепей необходимо, чтобы узлы O_1, O_2 и O_3 были эквипотенциальны. Но это очевидно, так как разность потенциалов $\varphi_{O_2} - \varphi_A$ равна половине разности потенциалов точек A и B: $\varphi_{O_2} - \varphi_A = \frac{1}{2}\,u_{AB}$. Аналогично, из соображений симметрии включения сопротивлений нетрудно найти, что $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{1}{2}\,u_{AB}$ и $\varphi_{O_3} - \varphi_A = \frac{1}{2}\,u_{AB}$. Следовательно, $\varphi_{O_1} = \varphi_{O_2} = \varphi_{O_3}$, то есть узлы O_1, O_2 и O_3 эквипотенциальны. Теперь найти сопротивление цепи не составляет труда. Оно равно 0,8 r (рис. 5, *в*).



а б в

Рис. 4.

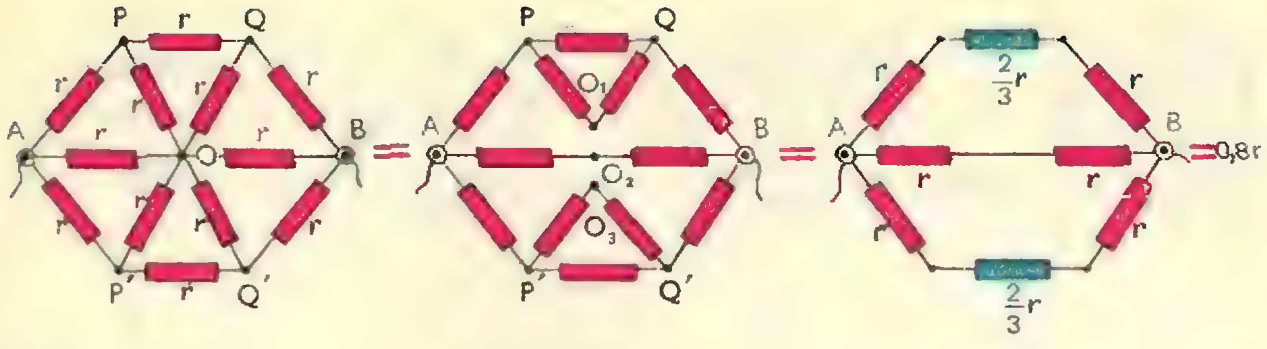


Рис. 5. а б в

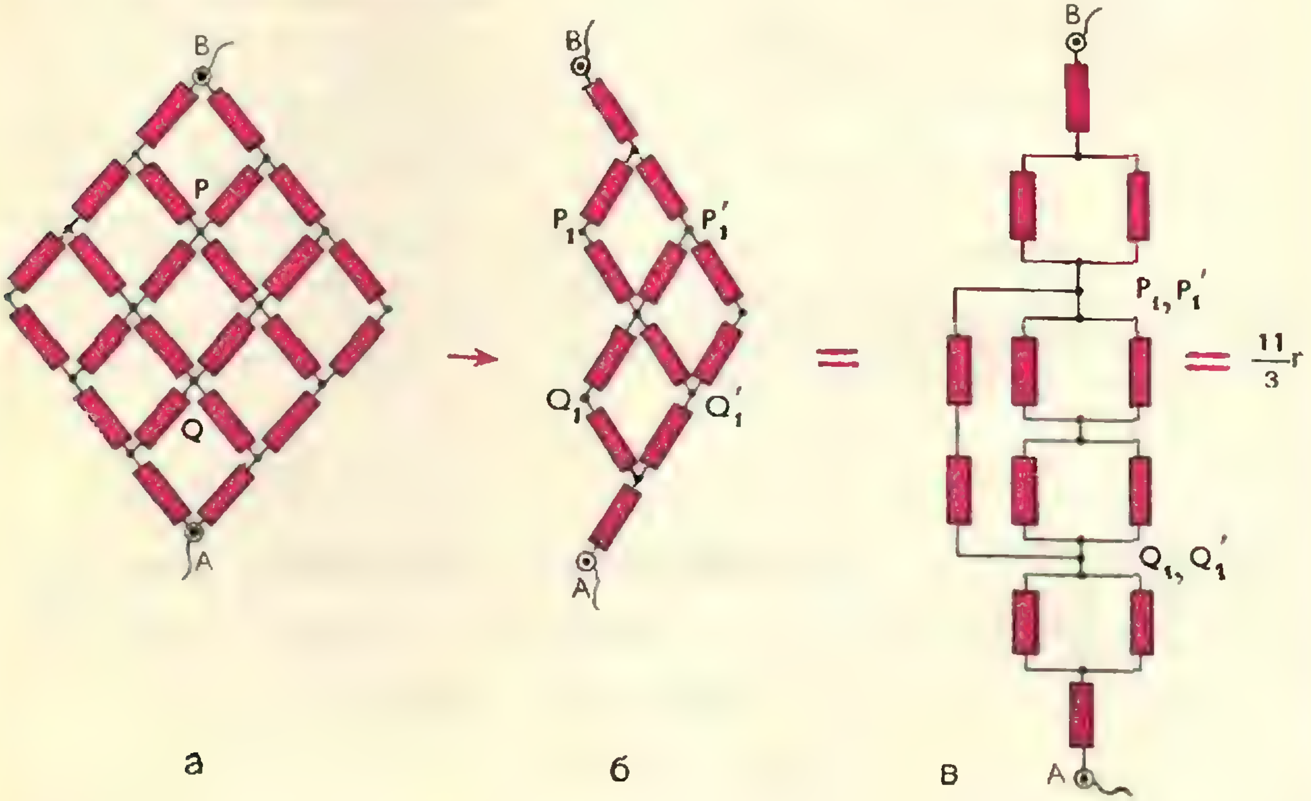
Задача 6. Определить сопротивление участка цепи AB, показанного на рисунке 6, *а*. Все сопротивления равны r.

Решение. Осуществим «раздвоение» узлов P и Q на попарно эквипотенциальные узлы P_1, P_2 и Q_1, Q_2. Теперь наша цепь — это параллельное соединение двух одинаковых цепей, так что достаточно рассмотреть одну из них (рис. 6, *б*). Нетрудно заметить, что узел P_1 эквипотенциален с узлом P_1', узлы Q_1 и Q_1' также эквипотенциальны. Поэтому их можно попарно соединить. Получим цепь, изображенную на рисунке 6, *в*. Ее сопротивление равно $\frac{11}{3}r$. Следовательно, сопротивление цепи, показанной на рисунке 6, *а*, равно $\frac{11}{6}r$.

4. Метод «расщепления» ветвей

Мы знаем, что несколько параллельных или последовательных ветвей можно заменить одной эквивалентной ветвью.

Приведенный ниже пример показывает, что иногда полезно применять эти правила в обратном направлении — не для «объединения» ветвей, а для их «расщепления».



а б в

Рис. 6.

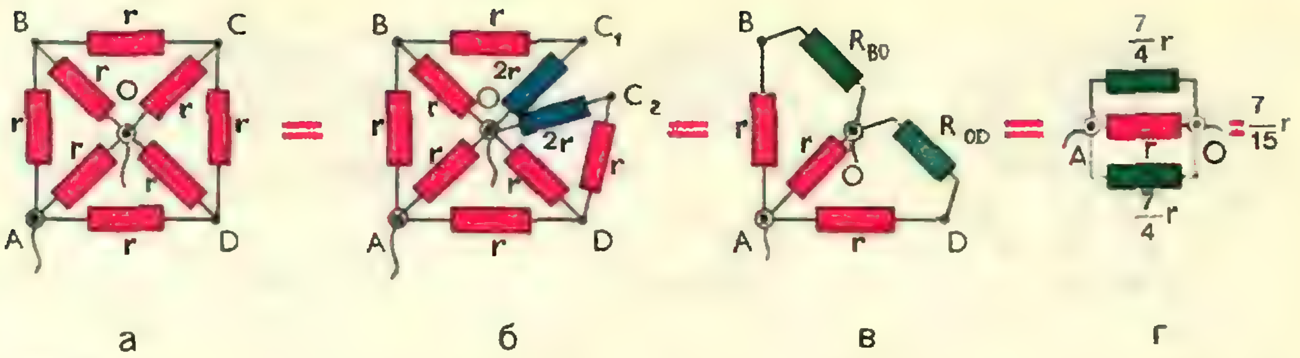

B
r
C
r
r
O
r
r
r
r
r
A
r
D
=
B
r
C_1
r
2r
r
C_2
r
2r
r
r
r
A
r
D
=
B
R_{BO}
r
r
O
R_{OD}
A
r
D
=
$\frac{7}{4}r$
A
r
O
$=\frac{7}{15}r$
$\frac{7}{4}r$
а
б
в
г

Рис. 7.

Задача 7. Найти сопротивление R цепи, показанной на рисунке 7, а.

Решение. Заменим ветвь OC двумя параллельными ветвями с равными между собой сопротивлениями $2r$. Затем раздвоим узел C на эквипотенциальные узлы C_1 и C_2 (их эквипотенциальность следует из соображений симметрии относительно узлов A и O). Цепь, показанная на рисунке 7, б, эквивалентна цепи на рисунке 7, а. Найдем ее сопротивление. Участки BO и BC_1O соединены параллельно. Поэтому сопротивление $R_{BO} = \frac{3}{4}r$. Аналогично, $R_{OD} = \frac{3}{4}r$. Теперь узлы A и O связаны тремя параллельными ветвями с сопротивлениями $\frac{7}{4}r$, r, $\frac{7}{4}r$. Общее сопротивление цепи равно $R = \frac{7}{15}r$ (рис. 7, г).

5. Рекуррентный метод

Рекуррентными методами решения задач называют обычно такие методы, при которых задача решается по шагам, причем на n-м шаге надо использовать результаты, полученные на предшествующих шагах. Рекуррентные методы в задачах расчета сопротивлений цепей особенно удобны, когда схема имеет повторяющуюся структуру и число сопротивлений велико.

Разберем простой пример.

Задача 8. Найти сопротивление цепи, показанной на рисунке 8, а, где $r_1 = \frac{r}{2}$, $r_2 = \frac{r}{2}$, $r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = r$.

Решение. Перерисуем цепь так, как показано на рисунке 8, б. Ясно, что расчет нужно вести с конца B. Заменяя сопротивление r_3, r_6 и r_2 эквивалентным сопротивлением $R = r_2 + \frac{r_3 r_6}{r_3 + r_6} = r$, получаем схему, показанную на рисунке 8, в. Теперь сопротивления R, r_5 и r_1, можно вновь заменить эквивалентным $R_1 = r_1 + \frac{Rr_5}{R + r_5} = r$ (рис. 8, г). Общее сопротивление цепи равно

$$\frac{R_1 r_4}{R_1 + r_4} = \frac{r}{2}.$$

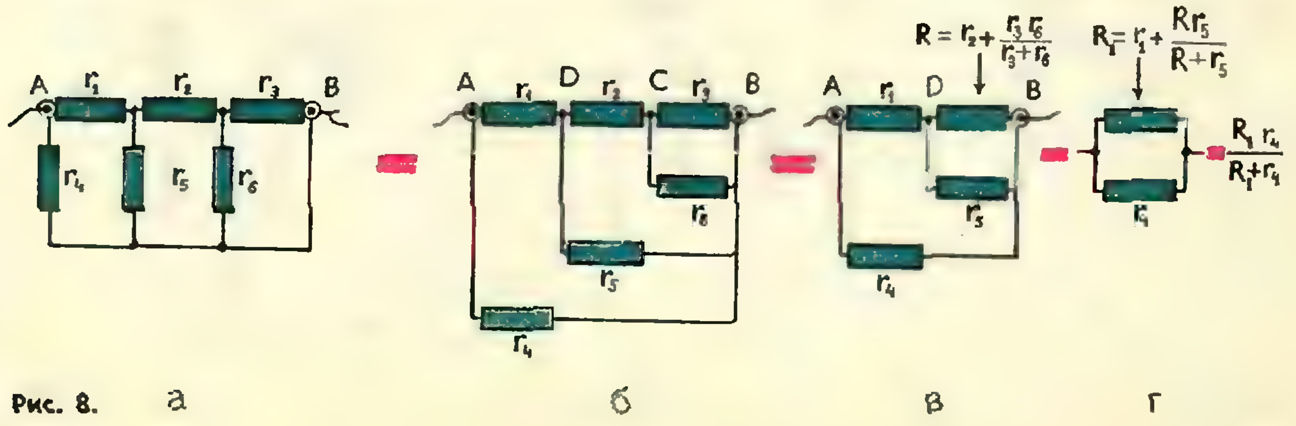
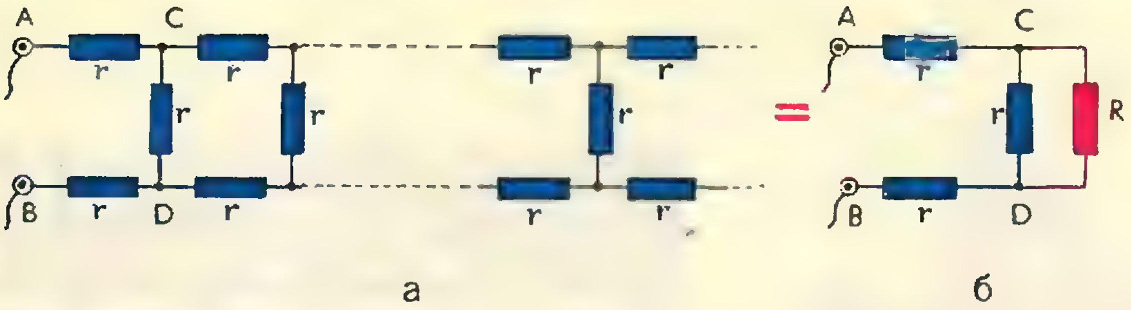

A
r_1
r_2
r_3
B
r_4
r_5
r_6
=
A
r_1
D
r_2
C
r_3
B
r_6
r_5
r_4
=
$R = r_2 + \frac{r_3 r_6}{r_3 + r_6}$
A
r_1
D
B
r_5
r_4
=
$R_1 = r_1 + \frac{Rr_5}{R + r_5}$
r_4
$= \frac{R_1 r_4}{R_1 + r_4}$
а
б
в
г

Рис. 8.



а б

Рис. 9.

6. Метод Иона Тихого

Н. Я. Виленкин в книге «Рассказы о множествах» поведал о воображаемом 1001-м звездном путешествии Иона Тихого, известного героя произведений замечательного польского писателя Станислава Лема.

В этом путешествии Ион встречался с такой проблемой: нужно поселить еще одного путешественника в гостинице, все номера которой заняты. Особенность задачи состоит в том, что в гостинице бесконечное число номеров. Ион решает задачу так: каждому обитателю гостиницы дается приказ — перейти в комнату с номером, на единицу бо̀льшим, чем номер его комнаты. При этом все прежние обитатели обеспечены жильем (ведь последнего-то номера нет в бесконечном ряду!), а комната № 1 освобождается для нового путешественника.

Этот способ можно применить, решая задачи на расчет цепей с бесконечным числом элементов. Заметим, что хотя в конкретных физических цепях число элементов всегда конечно, оно может быть столь велико, что его приближение можно считать бесконечным.

Для иллюстрации рассмотрим такую задачу.

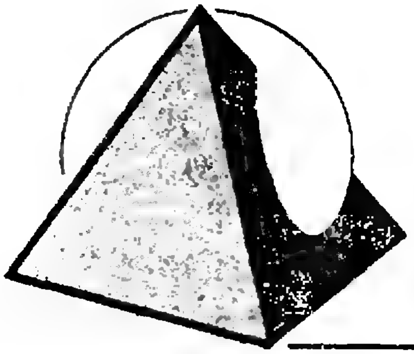
Задача 9. Найти сопротивление R участка цепи, содержащего бесконечное число сопротивлений (рис. 9, *а*), каждое из которых равно r.

Решение. Если мы, воспользовавшись идеей Иона Тихого, отделим первое звено из трех сопротивлений $ACDB$, то цепь и ее сопротивление не изменятся. Поэтому схема, изображенная на рисунке 9, а, эквивалентна представленной на рисунке 9, б. Теперь без труда находим

$$R_{AB} = 2r + \frac{Rr}{R+r} = R,$$

откуда $R = r(1+\sqrt{3})$.

Аналогично решаются и другие задачи для цепей с бесконечным числом сопротивлений.



ПИРАМИДА И СФЕРА

Ю. В. СИДОРОВ

На приемных экзаменах в институтах часто встречаются задачи, в которых речь идет о некотором расположении сферы (или нескольких сфер) относительно пирамиды. Решения таких задач основаны, по существу, на следующих трех фактах:

1) *если плоскость* (*или прямая*) *касается сферы, то расстояние от центра сферы до этой плоскости* (*или прямой*) *равно радиусу сферы;*

2) *если сфера касается двух пересекающихся плоскостей, то центр сферы лежит в биссекторной плоскости двугранного угла, образованного этими плоскостями;*

3) *если пирамида описана вокруг сферы, то*

$$V=\frac{1}{3}rS, \tag{1}$$

где r — радиус сферы, V и S — объем и полная поверхность пирамиды.

Эти факты известны каждому абитуриенту из школьного курса математики. Но в математике мало просто знать формулировки теорем — важно понимать эти теоремы и уметь применять их для решения задач.

Как правило, задачи, предлагаемые на вступительных экзаменах, формулируются просто, и большинство абитуриентов достаточно быстро находят какой-нибудь путь к решению. Но часто выбранный способ оказывается очень сложным и громоздким, требует длинных выкладок. Таким «формально-вычислительным» методом иногда очень трудно получить окончательный результат. Для каждой задачи нужно постараться найти как можно более короткое и «изящное» решение.

Иногда и на устном экзамене абитуриенту предлагают не решить задачу, а лишь указать путь решения, проверяя тем самым, насколько абитуриент ориентируется в данном разделе теории.

В этой статье мы и рассмотрим задачи, в которых использование несложных геометрических соображений помогает найти простое и красивое решение.

Задача 1 (МФТИ, 1966). *Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равные сферы так, что каждая сфера касается трех других сфер и трех граней тетраэдра. Найти радиус этих сфер.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, O — центр вписанной в него сферы, r — радиус этой сферы; M, N, K, L — центры данных сфер, их радиус мы обозначим через x.

Тетраэдр $MNKL$ — правильный, так как каждое его ребро равно $2x$. Грани тетраэдра $MNKL$ параллельны граням тетраэдра $ABCD$ (докажите!), а точка O удалена от каждой грани тетраэдра $MNKL$ на расстояние $r—x$. Следовательно, точка O является центром сферы, вписанной в тетраэдр

$MNKL$, и радиус этой сферы равен $r-x$.

Используя выражения для объема и полной поверхности правильного тетраэдра через его ребро, по формуле (1) находим

$$r=\frac{a}{2\sqrt{6}},\qquad r-x=\frac{x}{\sqrt{6}},$$

$$x=\frac{r\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}=\frac{a}{2(1+\sqrt{6})}.$$

Задача 2 (МФТИ, 1965). *Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A, и касающейся плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD и BC.*

Решение. Заметим, что искомый радиус r равен радиусу любой сферы, касающейся граней ABC, ACD и данной секущей плоскости (рис. 1), потому что $DH=HC$, $AC \parallel EF \parallel GH$, и надо лишь вписать сферу в призму, а затем пододвинуть ее к плоскости ABD. Расположим центр одной из таких сфер в плоскости, проходящей через ребро BD и перпендикулярной к ребру AC. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник MNK, у которого

$$KN=\frac{a}{2},\quad MN=KM=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

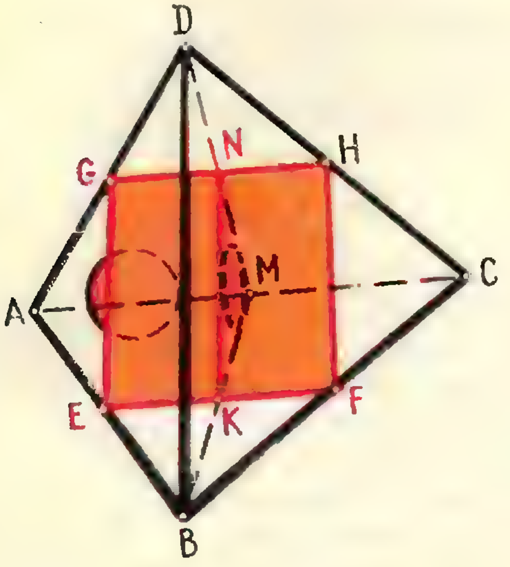


Рис. 1.

Используя выражение для радиуса вписанной в треугольник окружности через его площадь и полупериметр, находим

$$r=\frac{2S_{\triangle MNK}}{KN+2MN}=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}.$$

Задача 3 (МФТИ, 1963). *Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро пирамиды равно b. Найти радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.*

Решение. Пусть SK — высота данной пирамиды (рис. 2), O — центр сферы, $OM \perp BS$, $OM=OD=r$.

Заметим, что $BM=BD=\frac{a}{2}$, как две касательные к сфере, проведенные из точки B. Из подобия треугольников SOM и SBK находим

$$r=\frac{SM\cdot BK}{SK}=\frac{\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}}=$$

$$=\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

Задача 4 (МФТИ, 1965). *В данную правильную усеченную треугольную пирамиду с боковым ребром b можно поместить сферу, касающуюся всех граней, и сферу, касающуюся всех ребер. Найти стороны оснований пирамиды.*

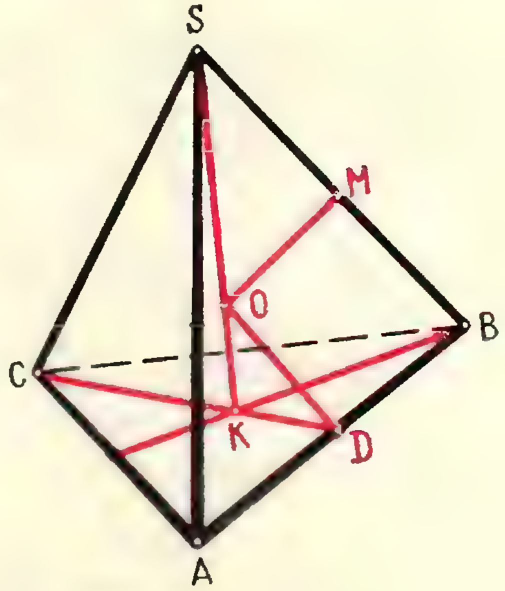


Рис. 2.

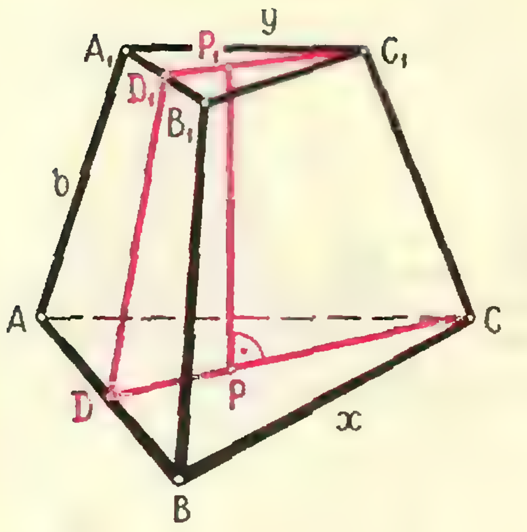


Рис. 3.

Решение. Пусть P и P_1 — центры оснований данной усеченной пирамиды, DD_1 — ее апофема (рис. 3). Обозначим стороны оснований через x и y. Из трапеции AA_1D_1D находим

$$DD_1^2 = b^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2.$$

Сфера, *вписанная* в пирамиду, касается оснований пирамиды в точках P, P_1 и касается апофемы DD_1 (докажите!). Следовательно,

$$DD_1 = PD + P_1D_1 = \frac{x+y}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$b^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = \frac{1}{12}(x+y)^2. \qquad (2)$$

В сечении сферы, *касающейся* всех ребер пирамиды, гранью BB_1C_1C получается окружность, вписанная в трапецию BB_1C_1C. Значит, $BC + B_1C_1 = BB_1 + CC_1$,

$$x + y = 2b. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и (3), находим

$$x = b\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

$$y = b\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Задача 5 (МФТИ, 1968). *Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды,*

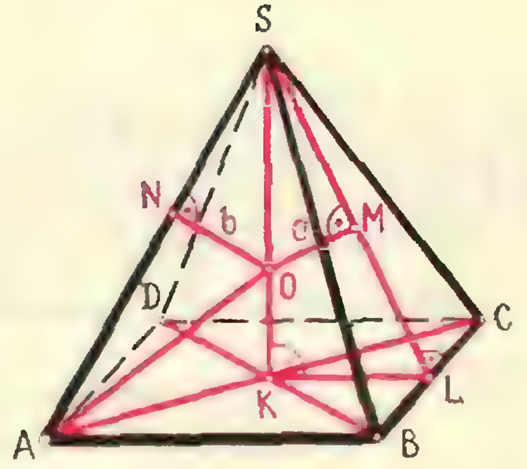


Рис. 4.

находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Найти радиус сферы.

Решение. Пусть O — центр сферы, описанной около пирамиды $SABCD$ (рис. 4), $OS = OA = R$ — радиус этой сферы, SK — высота пирамиды. Проведем $SL \perp BC$, $OM \perp SL$, $ON \perp AS$. По условию задачи $OM = a$, $ON = b$ (докажите!).

Так как $\triangle SOM \sim \triangle SKL$ и $\triangle SON \sim \triangle ASK$, то

$$\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{KL}{SK},$$

$$\frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{AK}{SK} = \frac{\sqrt{2}\,KL}{SK}.$$

Отсюда находим

$$\frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - a^2}},$$

$$R = \frac{ab}{\sqrt{2a^2 - b^2}}.$$

Задача 6 (МФТИ, 1971). *В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна b, а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается грани ACD в точке K. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB.*

Решение. Пусть DO — высота пирамиды (рис. 5). Точка K лежит на высоте DL треугольника ACD (докажите!). Сечением пирамиды данной плоскостью является равнобедренный треугольник ABM (докажите!). Найдем его боковую сторону AM.

Обозначим $\angle CAM$ через α, $\angle ACM$ через β. Заметим, что $LK = LO = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ как две касательные к вписанной в пирамиду сфере, проведенные из точки L (докажите!). Значит,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{KL}{AL} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Из прямоугольного треугольника *ОДL* находим

$$DL = \sqrt{OD^2 + OL^2} = \frac{5b}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{CL}{DL} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Теперь из треугольника ACM по теореме синусов получаем

$$AM = \frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{b}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta + \cos\alpha} = \frac{5b}{3\sqrt{3}}.$$

Наконец, находим площадь равнобедренного треугольника ABM:

$$S = \frac{1}{2}AB \times$$

$$\times \sqrt{AM^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{219}}{36}b^2.$$

Задача 7 (МФТИ, 1971). *Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребрах AB и CD расположены соответственно точки E и F. Прямая EF пересекает описанную около тетраэдра сферу в точках M и N так, что $ME : EF : FN = 3 : 12 : 4$. Найти длину EF.*

Решение. Обозначим EF через x, FC через y, BE через z (рис. 6). Найдем соотношение между x, y, z и a.

Из точки F опустим перпендикуляр FL на плоскость треугольника ABC. Так как тетраэдр правильный, то точка L лежит на высоте CK треугольника ABC.

Из прямоугольного треугольника CFL, учитывая, что $\angle KCD = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ (проверьте!), находим

$$CL = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad FL = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Так как $KL = KC - CL = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}}$, а $KE = \left|\frac{a}{2} - z\right|$, то из прямоугольного треугольника KLE полу-

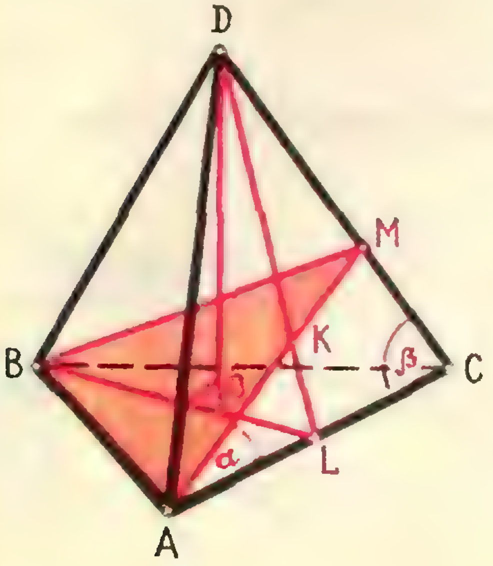


Рис. 5.

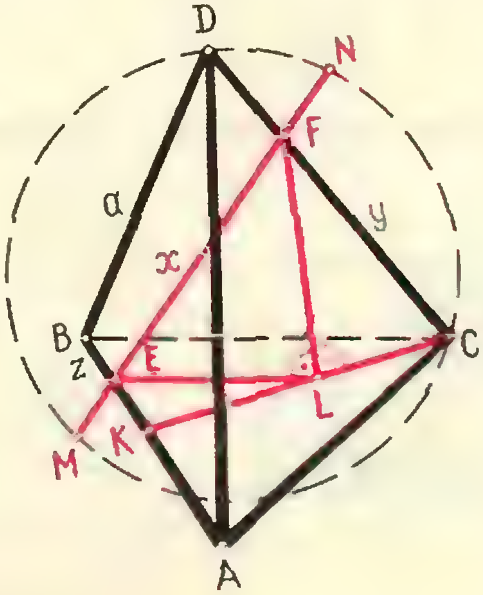


Рис. 6.

чаем $EL^2=KL^2+KE^2=a^2+\frac{1}{3}y^2+$ $+z^2-ay-az$.

Теперь из прямоугольного треугольника EFL находим $EF^2=FL^2+$ $+EL^2$, то есть

$$x^2=a^2-y(a-y)-z(a-z). \quad (4)$$

Последнее соотношение само по себе достаточно интересно и может быть использовано при решении других задач.

Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые EF и CD. Эта плоскость пересекает описанную около тетраэдра сферу по окружности, которая указана на рисунке 6. Для этой окружности отрезки MN и CD являются хордами, пересекающимися в точке F. Следовательно,

$$CF\cdot DF=MF\cdot NF$$

(докажите!), то есть

$$y(a-y)=\frac{5}{12}x^2. \quad (5)$$

Аналогично, из равенства

$$AE\cdot BE=ME\cdot NE$$

получаем

$$z(a-z)=\frac{1}{3}x^2. \quad (6)$$

Из соотношений (4), (5) и (6) находим

$$x^2=a^2-\frac{5}{12}x^2-\frac{1}{3}x^2, \quad x=\frac{2a}{\sqrt{7}}.$$

Упражнения

1. (МФТИ, 1966). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающейся построенной сферы.

2. (МФТИ, 1966). Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены две сферы радиусов $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем одна сфера вписана в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A, а другая — в трехгранный угол с вершиной в точке B. Найти длину ребра этого тетраэдра.

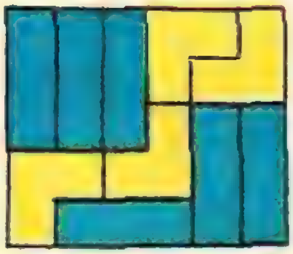
3. (МФТИ, 1967). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна a, высота пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Точки M, N и K являются серединами соответственно боковых ребер AS, BS и CS. Найти радиус сферы, касающейся основания пирамиды и прямых AK, CN и BM.

4. (МФТИ, 1968). В правильной шестиугольной пирамиде вписанная сфера проходит через центр описанной. Во сколько раз радиус описанной сферы больше радиуса вписанной?

5. (МФТИ, 1968). Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, находится на расстоянии $\sqrt{2}$ *см* от бокового ребра и на расстоянии $\sqrt{5}$ *см* от стороны основания. Найти радиус шара.

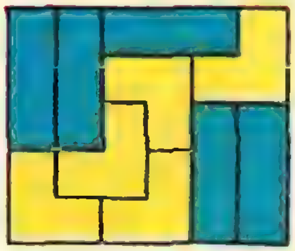
6. (МФТИ, 1969). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A, B, середину ребра CD и центр грани ABC.

7. (МФТИ, 1971). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна b, а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в эту пирамиду, касается боковой грани SAD в точке K. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB.



К задаче М86.

Утверждение становится неверным. На левом рисунке четыре уголка, а на правом — пять.



ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Отделение экономической кибернетики экономического факультета

1. Произведено два типа деталей. Первая деталь изготовлялась из сплава металлов M_1 и M_2, а вторая деталь — из сплава металлов M_3 и M_4. Если бы детали первого типа были сделаны только из металла M_1, то их общий вес был бы 1,6 *кг*, а если бы только из металла M_2, то 5,2 *кг*. Если бы детали второго типа были сделаны только из металла M_3, то их общий вес был бы 3 *кг*, а если бы только из металла M_4, то 4,5 *кг*. Стоимость одной детали первого типа — 3 рубля, ее вес 0,31 *кг*. Стоимость одной детали второго типа 5 рублей, ее вес 0,34 *кг*. Сколько произведено деталей каждого типа, если их общая стоимость равна 68 рублям?

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} x).$$

3. Найти минимальный член последовательности

$$a_n = n^2 - 8n + 15 - \frac{9}{(3n-16)^2+6},$$
$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

4. На плоскости лежат прямой круговой цилиндр радиуса R (то есть цилиндр касается плоскости по некоторой образующей) и, не пересекаясь с ним, шар радиуса r. Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно ρ. Найти минимально возможный радиус шара, который касался бы одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

5. Сколько существует шестизначных чисел, у которых на каждом четном месте стоит цифра, на единицу большая, чем слева от нее (разряды нумеруются слева направо)?

Отделение политической экономии экономического факультета

1. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на $P\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

2. Решить неравенство:

$$x > \frac{1}{x-1}.$$

3. Решить неравенство:

$$11 \sin x + \cos 2x - 6 \leqslant 0.$$

4. Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 13.

5. В двугранный угол 60° вписан шар радиуса R. Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол 45°.

Отделение биологии биолого-почвенного факультета

1. Решить уравнение:

$$\log_{\frac{1}{8}}\left[2^{x+1} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\right] +$$
$$+ \log_{\frac{1}{8}}\left[2^x + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}\right] = \frac{5}{3} + 3\log_{\frac{1}{8}}5.$$

2. Усеченный конус и правильная шестиугольная призма расположены так, что верхнее основание усеченного конуса вписано в верхнее основание призмы, а нижнее основание усеченного конуса описано около нижнего основания призмы. Известно, что высота усеченного конуса равна сумме радиусов его оснований. Найти отношение величин боковых поверхностей этих тел.

3. Смешав по 2 *см*^{3} трех веществ, получили 16 *г* смеси. Известно, что 4 *г* второго из этих веществ занимают объем на $\frac{1}{2}$ *см*^{3} больший, чем 4 *г* третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого вещества.

4. Решить неравенство:

$$\cos 6x - \frac{5}{2} < 2\sqrt{3}\sin 3x.$$

5. Биссектриса AE угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB=BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найти отношение периметров треугольников ABE и ECD.

Географический факультет и отделение почвоведения биолого-почвенного факультета

1. Работая одновременно на трех станках, за 7 часов обрабатывают 343 детали. За 2 часа на первом и втором станках вместе можно обработать столько же деталей, сколько на третьем станке за 5 часов. За 3 часа на первом станке можно обработать на 10 деталей больше, чем за 2 часа на втором станке. Сколько деталей в час можно обработать на первом станке?

2. Упростить выражение:

$$(a-b)\left[\frac{a^{\frac{1}{4}}}{\left(1+b^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}-\right.$$
$$\left.-\frac{b^{\frac{1}{4}}}{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+1\right)-2a^{\frac{1}{4}}}\right].$$

3. Решить уравнение:

$$8\cos x - 4\cos^3 x - 5\sin 2x = 0.$$

4. В треугольнике ABC дано: $AB=\sqrt{14}$, $BC=2$. Окружность, проходящая через точку B, середину D отрезка BC и касающаяся стороны AC, пересекает отрезок AB в точке E. Найти отношение, в котором эта окружность делит отрезок AB, если DE — диаметр этой окружности.

5. Решить неравенство:

$$\log_3(x-3)+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\log_3(2x^2-6x+7).$$

Московский автомобильно-дорожный институт

Вариант 1

1. Выполнить действия и упростить:

$$\frac{\dfrac{\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2+\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2}{2(m-n)}}{\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}}.$$

2. Груз массой в 60 *кг* производит давление на опору. Если массу груза уменьшить на десять килограммов, а площадь опоры уменьшить на 5 $дм^2$, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 *кг*. Определить площадь опоры.

3. Решить уравнение:

$$\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0.$$

4. Решить уравнение:

$$\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

5. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 *см*, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 *см*. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 2

1. Вычислить при $y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ выражение

$$\frac{(1-y)(y+2)}{y^2(1+y)^2}.$$

2. Мне было дано пятизначное число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученный результат утроить. Вместо этого я приписал к цифровой части заданного числа справа цифру 2 и получил правильный ответ. Какое число было задано?

3. Решить уравнение:

$$\frac{\log_3 x - 1}{\log_3\frac{x}{3}} - \log_3 x + \log_3^2 x = 3.$$

4. Решить уравнение:

$$(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x.$$

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 *см*, площадь его равна 24 $см^2$. Найти площадь описанного круга.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИИ

О книжке Пойя «Математическое открытие»

Автора этой книги читатели нашей страны знают давно. Еще в 1937—1938 гг. вышли его, совместно с Г. Сеге, двухтомные «Задачи и теоремы из анализа», в 1957 году — «Математика и правдоподобные рассуждения», в 1961 году — «Как решать задачу». В предисловии к последней книге Д. Пойя писал: «Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия». И далее: «Автор ставит себя иногда в положение ученика, иногда — в положение учителя... Однако, чаще всего... автор рассуждает с точки зрения лица, не являющегося ни учителем, ни учеником, а просто заинтересованного в решении стоящей перед ним задачи». Это «третье лицо» и есть, конечно, сам автор, известный ученый — математик. Что же касается исполнения им «по совместительству» двух других упомянутых ролей, то оно представляется не просто удачной литературной и педагогической находкой. Такое «совместительство» есть важнейшая составная часть творческого кредо Дьердя Пойа, которое он исповедует с редкостным постоянством.

В своей книге «Математическое открытие» Пойа продолжает и развивает мысли, высказанные в более ранних книгах (хотя ни одна из них не требует предварительного знакомства с другими — в этом лишний раз сказывается педагогическая искушенность автора). Верный своим принципам, Пойа не столько рассказывает о решении задач, сколько показывает, как это делается. И, конечно, приглашает следовать за ним. А затем и в самостоятельный путь. «Решение задач — практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь. И в этой книге вы не найдете волшебного ключа, открывающего все двери,— она не научит вас решать все задачи, но даст вам много хороших образцов для подражания и возможностей поупражняться. Но помните: если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!». Книга буквально напичкана интересными задачами и не менее интересными пояснениями к их решению. Соблазнительно, что и говорить, было бы попытаться дать в рецензии хоть какое-нибудь представление об этих задачах. Но такая попытка неминуемо обеднила бы и тем самым исказила представление о всей книге в целом. Посудите сами: содержание романа, даже очень большого, можно пересказать на пяти, ну, на десяти страницах. А как быть со сборником из тысячи небольших стихотворений? Привести целиком десяток лучших? Два десятка? А если все хороши? Да и кто поручится за объективность выбора?

Поэтому мы ограничимся тем, что перепечатаем без всяких изменений, без всяких сокращений и без всяких комментариев один параграф из книги Пойа. Мы вовсе не утверждаем, что это самый лучший параграф. Или самый типичный, что ли. Просто нам он очень нравится. И очень хочется, чтобы его прелестью проникся читатель. А если он сам найдет потом в книге что-либо, что понравится ему больше — не беда. Во всяком случае, сам Пойа меньше всего хотел бы воспитать своих учеников в полном единодушии и единообразии вкусов. Уж в этом-то ничего хорошего нет.

Прекрасно понимая, что простое перечисление названий глав книги Пойа способно озадачить читателя еще больше, чем ее интригующее название, мы тем не менее (а может быть, именно поэтому) не откажем себе в этом удовольствии: «Метод двух геометрических мест», «Метод Декарта», «Рекурсия», «Суперпозиция», «О задачах», «Расширение области применения метода», «Геометрическое представление процесса решения», «План и программа», «Задачи внутри задач», «Зарождение идеи», «Умственная работа», «Дисциплина ума», «Законы открытия», «Об учении, преподавании и обучении преподаванию», «Догадка и научный метод».

Ну что, не все здесь понятно? Ничего, это значит, что вам пора приниматься за «Математическое открытие». (Не забудьте запастись бумагой и карандашами!). А если книги этой у вас еще нет, прочтите для начала хотя бы следующий отрывок из нее.

* * *

Я позволю себе вольность и попытаюсь проделать небольшой эксперимент над читателем. Я сформулирую простую, но не слишком избитую геометрическую задачу, а затем попробую воссоздать последовательность идей, ведущих к ее доказательству. Я намерен продвигаться вперед медленно, очень медленно, выдавая последовательно секреты один за другим, причем каждый из этих секретов выдавая не сразу, а постепенно. Я надеюсь, что прежде, чем рассказ будет полностью доведен до конца, читатель сможет уловить главную идею если, конечно, что-нибудь не помешает этому, и так как эта идея окажется несколько неожиданной, то он сможет испытать удовлетворение от своего небольшого открытия.

А. *Если три окружности одного радиуса проходят через одну точку, то тот же радиус имеет и окружность, проходящая через остальные три точки их пересечения.*

Это и есть та теорема, которую нам нужно доказать. Утверждение теоремы коротко и ясно, но в нем как будто не хватает деталей. Сделав чертеж (рис. 1) и введя подходящие обозначения, мы приходим к следующему, более подробному варианту задачи:

Б. *Три окружности k, l, m одного радиуса r проходят через точку O. Окружности l и m пересекаются в точке A, m и k — в точке B, k и l — в точке C. Требуется доказать, что радиус окружности e, проходящей через точки A, B и C, также равен r.*

На рисунке 1 изображены четыре окружности k, l, m и e и четыре точки их пересечения. Однако эта фигура может показаться неудовлетворительной, потому что она не так уж проста и в то же время неполна; создается впечатление, что на ней что-то отсутствует; кажется, что нечто существенное не принято во внимание.

Мы имеем сейчас дело с окружностями. Что представляет собой окружность? Всякая окружность определяется местоположением ее центра и величиной ее радиуса: все точки окружности находятся на одинаковом (и равном радиусу) расстоянии от центра. Но мы забыли ввести в рассмотрение этот общий всем четырем окружностям радиус r; таким образом, мы не приняли во внимание существенную часть условия. Обозначим поэтому прежде всего центры наших окружностей: K для окружности k, L для окружности l и M для окружности m. В каком теперь месте лучше всего провести радиус r? По-видимому, нет смысла отдавать предпочтение какой-то одной из трех данных окружностей k, l и m или какой-нибудь одной из трех точек их пересечения A, B и C.

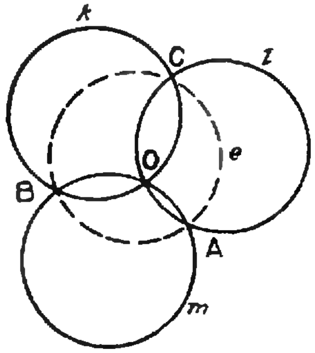


Рис. 1.

Поэтому соединим, пожалуй, каждый из трех центров со всеми тремя точками пересечения, принадлежащими соответствующей окружности: K с B, C и O, и так далее.

Получающаяся фигура (рис. 2) оказывается обескураживающе перегруженной. На ней столько линий — прямых и кривых,— что ее невозможно как следует «охватить взором»; она «не хочет стоять на месте». Эта фигура может напомнить некоторые рисунки, знакомые нам по старинным журналам,— такой рисунок намеренно делался неопределенным: если смотреть на него как обычно, то на нем видна одна фигура; если же повернуть журнал, придав ему специально выбранное положение, и рассматривать рисунок под определенным углом, то внезапно возникает другая фигура, поражающая вас как более или менее остроумный комментарий к первой. Можете ли вы распознать на нашей запутанной фигуре, перегруженной прямыми и окружностями, какую-нибудь другую, возможно, полезную для наших целей фигуру?

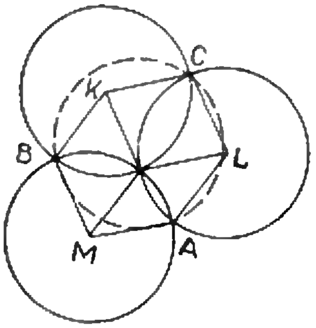


Рис. 2.

На эту нужную нам фигуру, скрывающуюся за переплетением линий нашего перегруженного деталями рисунка, мы можем либо напасть сразу, либо распознавать ее постепенно. К искомой фигуре нас могут привести те усилия, которые мы предпринимаем для решения предложенной задачи, или какое-нибудь второстепенное, несущественное обстоятельство. Так, например, когда мы были заняты перечерчиванием нашей несовершенной фигуры, мы могли заметить, что вся фигура целиком определяется входящей в ее состав «прямолинейной» (составленной из отрезков) частью (рис. 3).

Последнее обстоятельство кажется нам важным. Оно существенно упрощает геометрию рисунка и, возможно, проясняет логическую сторону дела. И оно приводит к следующей измененной формулировке нашей теоремы:

В. *Если каждый из девяти отрезков*

$$KO,\quad KC,\quad KB,$$
$$LC,\quad LO,\quad LA,$$
$$MB,\quad MA,\quad MO$$

равен r, то существует точка E такая, что каждый из от-

резков

$EA,\ EB,\ EC$

также будет равен r.

Последнее утверждение привлекает наше внимание к рисунку 3. Этот рисунок чем-то примечателен; он напоминает нам что-то знакомое. (Что именно?)

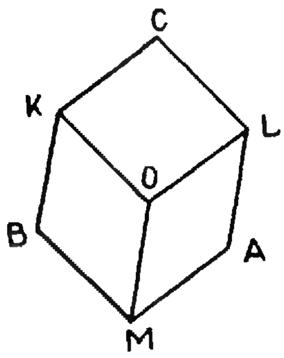


Рис. 3.

Конечно, у любого из четырехугольников, изображенных на рисунке 3, например у четырехугольника $OLAM$, все четыре стороны по условию равны друг другу, то есть все эти четырехугольники — ромбы. Ромб — хорошо знакомая нам фигура; выделив его мысленно на нашем рисунке, мы можем «видеть» всю фигуру лучше. (Что напоминает вам эта фигура в целом?)

Противоположные стороны ромба параллельны. Основываясь на этом обстоятельстве, можно разбить 9 отрезков, из которых составлена фигура, изображенная на рисунке 3, на три группы, в каждую из которых входят только параллельные друг другу отрезки; например, в одну из таких групп отрезков войдут отрезки AL, MO и BK. (Что может напомнить нам эта фигура теперь?)

Мы не должны забывать цели, к которой стремимся. Допустим, что заключение нашей теоремы справедливо. Нанося на рисунок центр E окружности e и три ее радиуса, оканчивающихся в точках A, B и C (рис. 4), мы (предположительно) получаем новые ромбы, новые параллельные отрезки. (Что напоминает нам вся фигура в целом теперь?)

Ну, конечно, рисунок 4 представляет собой проекцию 12 ребер параллелепипеда, расположенного таким образом, что все эти проекции имеют одинаковую длину.

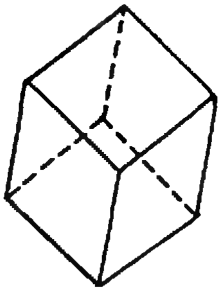


Рис. 4.

Рисунок 3 является проекцией «непрозрачного параллелепипеда»: мы видим только 3 его грани, 7 вершин и 9 ребер, в то время как 3 грани, 1 вершина и 3 ребра на рисунке не видны. Этот рисунок является частью рисунка 4, но такой частью, которая определяет всю интересующую нас фигуру. Если параллелепипед и направление проектирования выбраны так, что проекции девяти ребер, изображенных на рисунке 3, равны r (т. е. таковы, какими они и должны быть по условию задачи), то проекции трех оставшихся ребер также должны быть равны r. Из проекции E восьмой, невидимой вершины исходят три отрезка длиной r, а сама эта проекция является центром окружности, проходящей через точки A, B и C, радиус которой равен r.

Наша теорема доказана, причем доказана при помощи неожиданной остроумной идеи, заключающейся в том, что мы рассматриваем плоскую фигуру как проекцию пространственной фигуры.

(В этом доказательстве используются стереометрические понятия. Мне кажется, что беда здесь невелика, тем более, что она легко поправима. В самом деле, поскольку мы теперь знаем, что положение центра E может быть охарактеризовано весьма просто, длины отрезков EA, EB и EC можно ввести в рассмотрение, не прибегая ни к какой стереометрии. Однако мы не будем настаивать здесь на этой точке зрения.)

М. Л. Смолянский,
Ю. А. Гастев

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕЖДУНАРОДНЫМ ГЕОФИЗИЧЕСКИМ НАУЧНЫМ ПРОГРАММАМ

Геофизика — наука о физических процессах, протекающих на Земле, — включает в себя также исследование разнообразных явлений, наблюдаемых в различных слоях атмосферы, в водной оболочке, твердой земной коре и недрах нашей планеты. Геофизические явления часто охватывают большую часть земного шара или весь земной шар. Поэтому еще на заре развития геофизики стала ясна необходимость объединения усилий ученых разных стран для проведения исследований по единой программе в различных точках земного шара.

В октябре 1951 г. Международный Совет научных союзов решил провести Международный геофизический год. С 1 июля 1957 года по 31 декабря 1958 года ученые многих стран по специальной программе выполнили огромное количество согласованных исследований во всех районах земного шара. Международный геофизический год был крупнейшим научным мероприятием, в котором приняло участие более 50 тысяч ученых из 60 стран.

Самой новой и самой трудной задачей в это время явился запуск искусственных спутников Земли. Поэтому на эмблеме Международного геофизического года изображен земной шар с пролетающим вокруг него искусственным спутником.

В Советском Союзе выпущены три серии марок, посвященных Международному геофизическому году.

ИЗУЧЕНИЕ МЕТЕОРОВ

ОКЕАНОЛОГИЯ
СССР
почта
25
коп

ГЛЯЦИОЛОГИЯ
СССР
почта
10
коп

Они отображают важнейшие исследования, которые проводились в СССР по международной программе. На одной из марок первой серии (выпуск 1957 г.) изображен — хромосферно-фотосферный телескоп для изучения солнечной активности, на другой — обсерватория и радарная установка для наблюдения за метеоритами и на третьей — запуск ракеты для исследования верхних слоев атмосферы.

Вторая серия (выпуск 1958 г.) посвящена изучению геомагнетизма, полярных сияний и метеорологии.

В третьей серии вы видите марку с изображением советского научно-исследовательского судна «Витязь», изучающего разнообразные явления в океанах (в верхней части марки показан маршрут «Витязя» в Индийском океане), марку, посвященную гляциологии (изучение ледяного покрова Земли), а также марку, посвященную исследованию Антарктиды со схемой расположения советских антарктических станций. В этой же серии была выпущена марка, посвященная ракетным исследованиям. На всех четырех марках последней серии изображена эмблема Международного геофизического года.

А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задаче М84

Проективную прямую, дополненную бесконечно удаленной точкой, естественно представлять себе как окружность (когда точка X пробегает прямую, то X' проходит полный оборот по окружности).

Если точка X движется в одну сторону, то $Y=f(X)$ — в противоположную, поэтому отображение f имеет две неподвижные точки Z_1 и Z_2 такие, что $f(Z_1)=Z_1$; $f(Z_2)=Z_2$. (Это верно для любого *непрерывного* взаимно однозначного отображения f окружности на себя, меняющего направление обхода.

Если точка L — бесконечно удаленная точка прямой l, то, как нетрудно проверить, $f(f(L))=L$, причем $f(L)\neq L$. Отображение X—$f(f(X))$ проективное и имеет три неподвижные точки: Z_1, Z_2 и L, поэтому $f(f(X))=X$ для всех X.

К статье «Пирамида и сфера»

1. $\frac{a}{8}(\sqrt{6}\pm 1)$. 2. $(5\sqrt{6}+\sqrt{22})R$.

3. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. 4. $1+\sqrt{\frac{7}{3}}$. 5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *см.*

6. $\frac{3\sqrt{6}}{8}a$. 7. $\frac{3\sqrt{17}}{16}b^2$.

К «Вариантам вступительных экзаменов»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Отделение экономической кибернетики экономического факультета

1. 6 деталей первого типа и 10 деталей второго типа.

Указание. Если число произведенных деталей первого и второго типа обозначить через x и y соответственно, то $3x+5y=68$. Если бы детали первого типа изготовлялись из металла M_1, то каждая деталь весила бы 1,6/x *кг*, а если бы из металла M_2, то 5,2/x *кг*. Так как на самом деле каждая деталь первого типа весит 0,31 *кг* и изготовляется из *сплава* металлов M_1 и M_2, то $1{,}6/x<0{,}31<5{,}2/x$ (почему?), то есть $5\frac{5}{31}<x<16\frac{24}{31}$. Аналогично получаем, что $8\frac{14}{17}<y<13\frac{4}{17}$. Таким образом, задача сводится к отысканию таких *целых* значений x и y, которые удовлетворяют уравнению $3x+5y=68$ и условиям $6\leqslant x\leqslant 16$, $9\leqslant y\leqslant 13$. Это уже легко сделать прямым перебором, если переписать уравнение в виде $x=\frac{68-5y}{3}$ и последовательно придавать y значения 9, 10, 11, 12, 13.

2.

$$x=\operatorname{arctg}\frac{1+2k\pm\sqrt{(1+2k)^2-16}}{4}+n\pi,$$

где n — целое число, а k — целое число, за исключением $k=-2, -1, 0, 1, 2$, и

$x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+m\pi$, где m — целое число.

Указание. Уравнение приводится к виду

$$\cos(\pi\operatorname{tg}x+\pi\operatorname{ctg}x)=0,$$

или

$$\pi\operatorname{tg}x+\pi\operatorname{ctg}x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$$

Таким образом, для *каждого* целого k нужно найти *все* решения уравнения $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2}+k$, а затем отобрать из них те, которые входят в ОДЗ исходного уравнения (ОДЗ описывается условиями:

$$x\neq p\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+q\pi,\ \pi\operatorname{tg}x\neq\frac{\pi}{2}+r\pi,$$

$\pi\operatorname{ctg}x\neq s\pi$, p, q, r, s — целые числа). Если обозначить $\operatorname{tg}x$ через z, то придем к квадратному уравнению $z^2-\left(\frac{1}{2}+k\right)z+1=0$; оно имеет два (действительных) корня при каждом целом $k\neq-2, -1, 0, 1$. При $k=2$ один из корней придется отбросить, так как он не входит в ОДЗ.

3. $a_4=-\frac{31}{22}$.

Указание. Представим общий член последовательности в виде $a_n=f(n)+g(n)$, где

$$f(n)=n^2-8n+15,$$

$$g(n)=-\frac{9}{(3n-16)^2+6}.$$

Из свойств квадратного трехчлена следует, что функция $f(x)=x^2-8x+15$ возрастает при $x\geqslant 4$, а функция $g(x)=-\frac{9}{(3x-16)^2+6}$ возрастает при $x\geqslant 5\frac{1}{3}$ (докажите!). Поэтому при $n \geqslant 6$ общий член a_n последовательности как сумма двух возрастающих выражений будет возрастать с ростом номера n. Следовательно, наименьший член последовательности надо искать среди членов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Это можно сделать прямым перебором.

4. $\dfrac{\rho^2-(R-r)^2}{4(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

Указание. Доказать, что центр искомого шара лежит в плоскости, проходящей через центр данного шара и перпендикулярной к оси цилиндра.

5. 648 чисел.

Отделение политической экономии экономического факультета

1. 17%.

2. $\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2} < x < 1$, $x > \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3. $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{13\pi}{6}+2k\pi$,

$k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. 462462.

5. $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}R$ и $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}R$.

Указание. Обратить внимание, что существуют два шара, удовлетворяющих требованиям задачи.

Отделение биологии биолого-почвенного факультета

1. $x=-3$. 2. $\pi\sqrt{14}:12$. 3. 4 $г/см^3$.

4. $x \neq (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{n\pi}{3}$, где n — любое целое число. 5. 3 : 1. Указание. Пусть p_1, p_2 — периметры треугольников ABE и ECD соответственно, а $\angle BAE=\alpha$. Показать, что $p_1:p_2=\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right):\cos\alpha$. Установить далее, что $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{3}$.

Географический факультет

1. 16 деталей. 2. $a+b$.

3. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+n\pi$, где k и n — любые целые числа. 4. $AE:EB=4:3$. Указание. Доказать, что $\angle ABC=90°$. Воспользоваться далее теоремой: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть. 5. $3<x<10$.

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

Вариант 1

2. 15 $дм^2$. 3. $x=1/12$. 4. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $x_{2,3}=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$. 5. 5 *см*.

Вариант 2

1. 12. 2. 85714. 3. 1/3; 9. 4. $x=\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2}{3}\pi k$. 5. 25 π.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 1, 3-я стр. обложки)

1. Ясно, что если пробка заворачивается так, что человек должен нажимать на ключ сверху вниз, то максимальная сила, с которой он может давить на ключ, равна его весу. Однако в том случае, когда ключ должен идти от пола вверх, эта сила может быть значительно больше веса: сильный человек может легко поднять груз, значительно превышающий его собственный вес.

2. 24-мя нулями.

3. Лампочки одинаковой мощности нужно соединить параллельно между собой и затем получившиеся две группы лампочек соединить последовательно.

4. 24 суток.

5. У утки лапы расставлены шире, чем у курицы. Поэтому ее центр тяжести находится дальше от точки опоры, и за время шага, который у утки и курицы примерно одинаков, утка поворачивается на больший угол, чем курица: больше момент силы тяжести относительно точки опоры, и поэтому больше ускорение и угловая скорость вращения.

6. Кирпич обладает большей теплопроводностью, чем дерево. При потеплении поверхность деревянной стенки быстро становится теплой. Кирпичная стенка, «накопившая холод», передает его наружу, и ее температура оказывается ниже 0°C, то есть ниже температуры окружающего воздуха.

Квант
для младших школьников

1. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Куда налита каждая жидкость?

2. На рисунке изображена мишень. Куда надо попасть и сколько выстрелов сделать, чтобы выбить на ней ровно 100 очков?

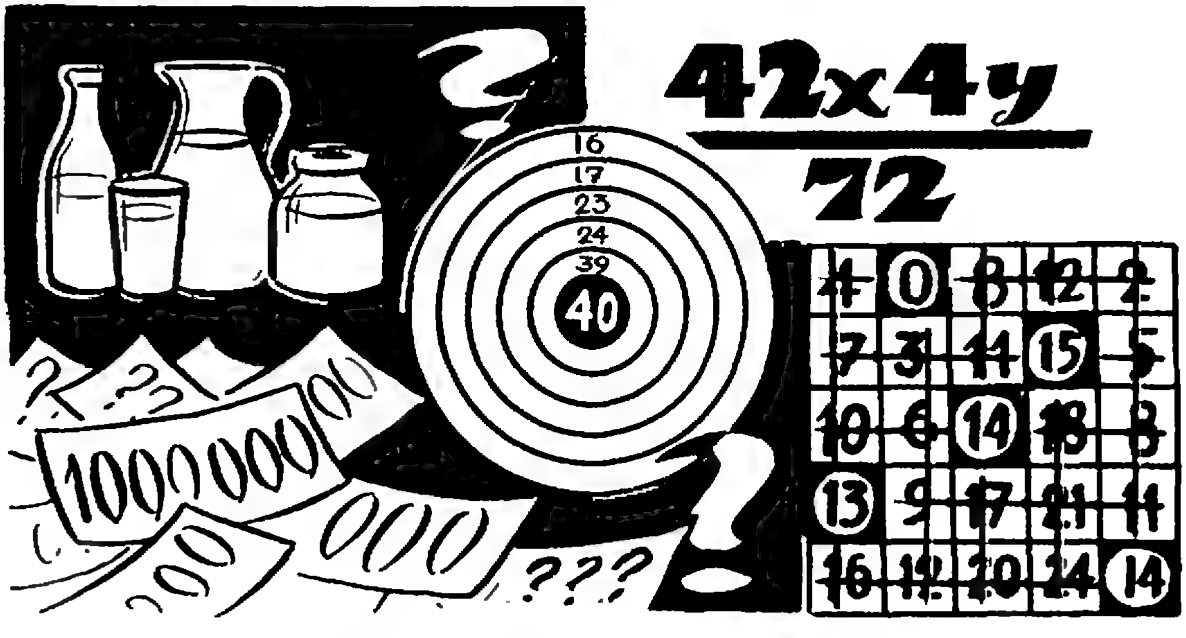
3. Найти цифры **x** и **y** пятизначного числа 42**x**4**y**, если известно, что это число делится на 72.

4. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых ее нет?

5. Дан квадрат размером 5×5, в котором записаны 25 чисел (см. рисунок). Выберем одно из чисел (произвольно), обведем его, а остальные числа, стоящие в том же столбце и в той же строке, зачеркнем. Затем выберем одно из оставшихся чисел, обведем его, а остальные числа в тех же строке и столбце зачеркнем. Так сделаем пять раз.

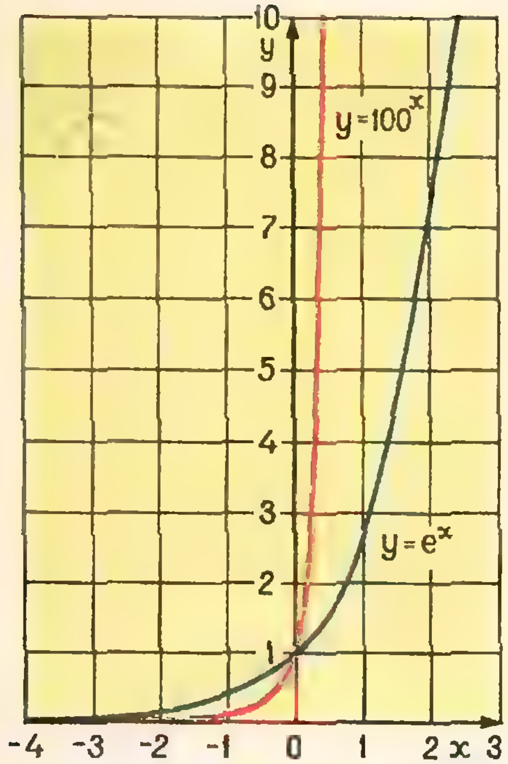
Возьмем сумму обведенных чисел. Оказывается, как бы мы ни выбирали числа, эта сумма всегда равна 56. Попробуйте разгадать это таинственное свойство приведенного квадрата.

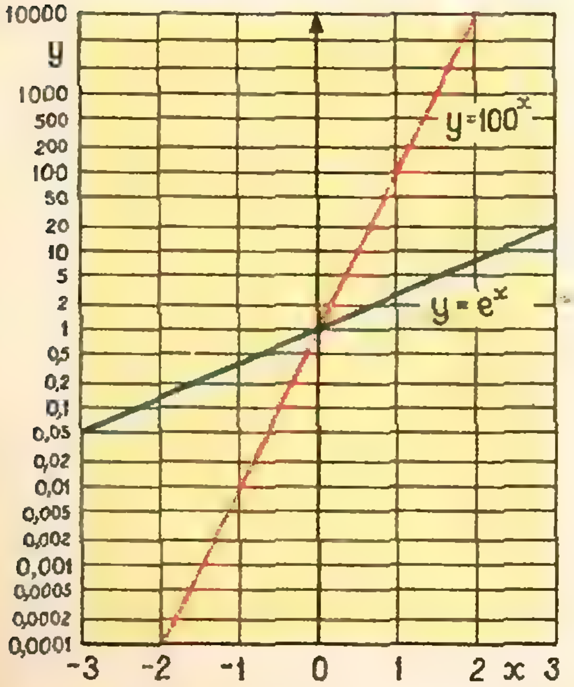
А. П. Савин
В. М. Розентуллер



ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 2





ГРАФИКИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

На четвертой странице обложки первого номера нашего журнала за 1972 год помещена заметка «Коротко об экспоненте». Там сказано, что многие величины изменяются во времени так, что скорость их изменения пропорциональна достигнутому ими значению. Общая форма такого рода показательной зависимости величины y от времени t записывается так:

$$y=y_0a^t,$$

где y_0 — значение величины y при $t=0$.

Поэтому важно уметь вычислять и изображать графически показательные функции

$$y=a^t$$

при разных основаниях a.

Для вычисления этих функций можно воспользоваться формулой.

$$y=10^{kt},\ \text{где}\ k=\lg a.$$

Таблица функции $y=10^x$ есть в сборнике таблиц Брадиса.

На верхнем рисунке слева изображены графики функций

$$y=e^x\,(e=2{,}71\ldots)\ \text{и}\ y=100^x.$$

Вы видите, что они очень быстро уходят вверх при возрастании x и на графике не отличаются от нуля при отрицательных x достаточно больших по абсолютной величине.

Существует, однако, замечательный способ графического изображения показательных функций на полулогарифмической бумаге (она продается в магазинах). Такое изображение наших двух функций дано на нижнем рисунке. Графики показательных функций на полулогарифмической бумаге оказываются прямыми. Как устроена эта бумага, можно понять из рисунка. Подробная статья о показательных функциях и точное описание полулогарифмической сетки будут даны в одном из ближайших номеров нашего журнала.

НОМЕР
3

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

3
МАРТ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

3 К 200-летию со дня смерти Исаака Ньютона — *А. Эйнштейн*
6 Динамическое программирование — *М. И. Рейтман*
14 Инертная масса — *Я. А. Смородинский*
18 Теорема Пифагора — *В. Н. Березин*
22 Почему гудят провода — *Л. Г. Асламазов*
24 Окружение десанта — *А. П. Савин*
28 В планиметрии — теорема, в стереометрии — нерешенная проблема — *И. М. Яглом*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

34 Искусственное солнечное затмение — *Р. Вуд*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

36 Победители конкурса «Кванта»
38 Задачи М131—М135; Ф133—Ф137
40 Решения задач М89—М95; Ф100—Ф105

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

50 Учитесь работать с логарифмами — *А. Я. Маргулис, Б. А. Радунский*
56 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года
58 Импульс. Закон сохранения импульса — *И. А. Зайцев*
64 Варианты вступительных экзаменов по физике 1971 года в Московский физико-технический институт — *В. Е. Белонучкин*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

65 Книга о самых грандиозных явлениях природы — *И. Е. Евгеньев*

ИНФОРМАЦИЯ

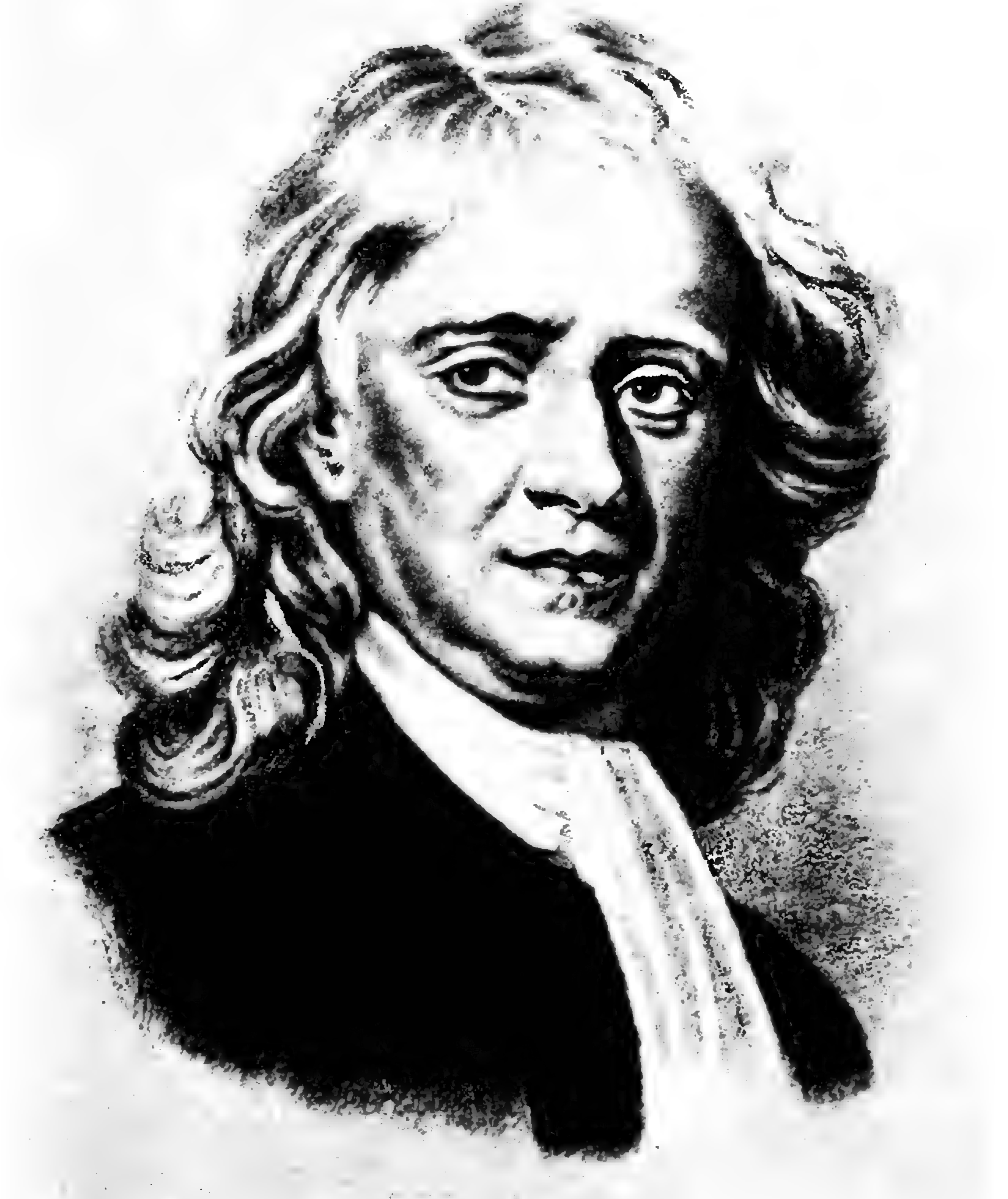
66 Государственные премии 1971 года — *В. А. Лешковцев*
69 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

72 Марки, посвященные Исааку Ньютону — *А.-В. Алтыкис*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
(3 стр. обл.)

СМЕСЬ *(стр. 27, 33, 55)*



Исаак Ньютон

(1642—1727)

К 200-летию со дня смерти Исаака Ньютона

А. Эйнштейн

В марте 1972 года исполняется 245 лет со дня смерти великого английского физика и математика Исаака Ньютона. В связи с этим мы помещаем небольшую статью другого великого физика Альберта Эйнштейна, опубликованную в 1927 году. Статья дается с небольшими сокращениями. Полный текст статьи опубликован на русском языке в четвертом томе собрания научных трудов Эйнштейна (издательство «Наука», 1967).

Нетрудно охарактеризовать научные деяния Ньютона, навсегда обеспечившие ему особое место в истории духовного развития человечества. Ньютон был первым, кто попытался сформулировать элементарные законы, определяющие временной ход обширного класса процессов в природе с высокой степенью полноты и точности. Его законам движения вместе с законом тяготения подчиняется движение всех небесных тел, происходящее под действием сил взаимного притяжения. Тем самым Ньютон осуществил мечты философов-материалистов древности — Демокрита и Эпикура, считавших, что должна существовать причинная взаимосвязь всех без исключения физических явлений. После этих успехов вряд ли остались какие-нибудь сомнения в том, что развитие вообще всех материальных явлений происходит с необходимой закономерностью, которую можно было бы сравнить с ходом часов. Кроме того, стало очевидно, что процессы мышления должны быть неразрывно связаны с материальными процессами, протекающими в мозгу, и поэтому стала неизбежной идея о том, что и в основе мышления и желаний человека и животных должны лежать те же строго причинные закономерности. Таким образом, Ньютон оказал своими трудами глубочайшее и сильнейшее влияние на все мировоззрение в целом.

Теперь мы знаем, что тяготение не является единственной силой, действующей в природе. Тяготение не может объяснить силы сцепления в телах, электрические силы, свет. Однако теория движения Ньютона, по-видимому, может служить вполне достаточным фундаментом для понимания любого физического процесса, если предположить, что между частицами материи помимо сил тяготения действуют еще и силы совсем иного рода. Такое расширение теории движения было начато еще самим Ньютоном, применившим ее, например, к теории света.

Таким образом, Ньютон заложил основы той совокупности законов природы, которая позволяет понять законы всех явлений. Ньютон считал, что этого можно достичь за счет сведения любых процессов к движениям частиц, взаимодействующих между собой. Эта программа продержалась вплоть до второй половины XVIII века и доказала свою плодотворность в области физики.

Попытаемся немного проникнуть в лабораторию ньютоновской мысли.

Поле деятельности для великого систематизатора, каким был Ньютон, подготовили Галилей и Кеплер. Галилей открыл, что «невозмущенное движение» тела прямолинейно и равномерно. При этом под «невозмущенным движением» тела следует понимать движение тела, на которое не действуют другие тела. В этом состоит закон инерции. Его можно сформулировать следующим образом: направление движения и скорость тела остаются постоянными, коль скоро отсутствуют внешние воздействия на тело, называемые силами. Галилей открыл также, что на поверхности Земли скорость свободно падающего тела в равные промежутки времени увеличивается на равные величины.

Ньютон поставил общий вопрос: как изменяется скорость свободного тела под действием произвольно заданной силы? Это гораздо более общая задача по сравнению с той, которую рассматривал Галилей, ибо действующая сила по своей величине и направлению может произвольно меняться со временем. Ответ на нее связан с рассмотрением произвольного движения; он должен содержать общий закон движения. Эта задача может быть решена с помощью решенной Галилеем задачи о падении свободного тела под действием силы тяжести, но она требует нового математического аппарата, специально созданного для этой цели Ньютоном, а именно: дифференциального и интегрального исчисления. Ньютона можно сравнить с поэтом, чьи стихи настолько тонки, что их можно написать только на новом языке, создать который должен сам поэт.

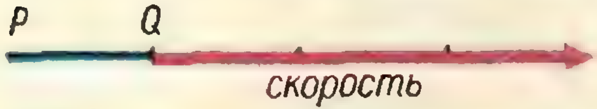


Рис. 1.

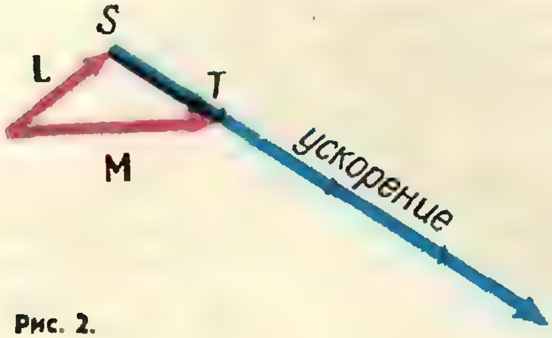


Рис. 2.

Что же такое, собственно говоря, скорость движущегося тела, представляющего собой материальную точку? Представим себе произвольное движение такого тела.

Рассмотрим два момента времени, разделенных между собой малым промежутком τ. В эти моменты времени тело находится в точках пространства P и Q, расположенных близко друг от друга (рис. 1). Отрезок $P - Q$ представляет собой путь, пройденный телом за время τ. Если представить себе, что отрезок $P - Q$ продолжен за точку Q и на его продолжении отложен отрезок, длина которого во столько раз превосходит длину отрезка $P - Q$, во сколько раз единица времени больше τ, то мы получим скорость материальной точки в точке P в виде стрелки определенной длины — так называемого вектора. Однако это не вполне точно. Произвольный выбор промежутка времени τ скажется, хотя и незначительно, на результате. Более точно можно было бы утверждать следующее: построенная нами стрелка тем точнее представляет скорость, чем меньше выбранный промежуток времени τ. Это — математически точное определение вектора скорости с помощью предельного перехода.

Ускорение определяется по скорости так же, как скорость — по заданному движению. В каждый момент времени скорость задается с помощью вектора. Представим себе, что скорость тела в некоторый момент времени задана вектором **L**, имеющим определенную длину и направление. По истечении малого промежутка времени τ скорость изменится, т. е. новый вектор скорости, **M**, будет иметь какую-то другую длину и другое направление. Представим себе, что начала векторов **L** и **M** перенесены в одну точку (рис. 2). Тогда концы векторов **L** и **M** совпадать не будут. Направленный отрезок $S - T$, соединяющий концы векторов, будет изображать изменение скорости за промежуток времени τ. Если отрезок $S - T$ продолжить за точку T и отложить от точки S новый отрезок, длина которого больше длины отрезка $S - T$ во столько раз, во сколько единица времени больше τ, то мы получим изменение скорости в единицу времени, то есть ускорение. Ускорение также будет изображаться стрелкой или вектором. В этом случае нам также потребуется предельный переход. Это определение будет тем точнее, чем меньше выбранный промежуток времени τ.

По Ньютону, ускорение, определение которого было только что сформулировано, можно измерить непосредственно по силам, действующим на материальную точку. Это не означает, однако, что вектор силы совпадает с вектором ускорения, ибо ясно, что для того чтобы привести в движение массу в 2 *кг*, требуется вдвое большая сила, чем для того, чтобы привести в движение массу в 1 *кг*. Так Ньютон пришел к необходимости введения массы тела и к установлению знаменитого закона движения:

Вектор ускорения × Масса = Вектор силы.

Это — фундамент всей механики и, пожалуй, всей теоретической физики.

Если предположить, что сила, действующая на материальную точку, задана для любого момента времени, то ускорение этой точки в любой момент времени будет известно. После этого нахождение ее скорости и положения для любого момента времени будет представлять собой уже не физическую, а чисто математическую задачу.

Но каким образом Ньютон мог найти силы, действующие на небесные тела? Ясно, что правильное выражение для этих сил он не мог высосать из пальца. Ему ничего не оставалось, как действовать в обратном порядке и найти эти силы по известным движениям планет и Луны. Зная эти движения, он вычислял ускорения, а зная их, смог найти силы. Все это он совершил, будучи 23-летним юношей и находясь в деревенском уединении.

Нам достались лишь скудные сведения о творческой лаборатории Ньютона. Однако весьма правдоподобно, что он поступил именно так, как мы говорили. Движение Луны вокруг Земли было известно; следовательно, было известно и ускорение, сообщаемое Землей Луне. Чтобы траектория движения Луны вокруг Земли была такой, как мы ее видим, необходимо, чтобы ускорение было направлено к центру Земли. Было известно также и ускорение, сообщаемое Землей телам, падающим вблизи ее поверхности. Путем сравнения Ньютон обнаружил, что эти ускорения относятся как обратные величины квадратов радиуса Земли и расстояния от Земли до Луны, соответственно. Таким образом, возникло предположение, что сила притяжения Земли изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Не будет ли любая масса вести себя так же, как Земля? Это предположение блестяще подтвердилось: гипотеза, примененная к силе тяготения Солнца, позволила полностью объяснить законы движения планет.

Единственным облачком на небосклоне Ньютона являлось то, что связь между расстоянием до Луны и ее траекторией, о которой говорилось выше, лишь приближенно, но отнюдь не точно удовлетворяла закону тяготения Ньютона. Однако спустя шесть лет Пикар, занимавшийся измерением длины меридиана, показал, что причиной этого расхождения была неточность в определении радиуса Земли, и тогда теория Ньютона встала на такую прочную основу, как ни одна теория до нее.

Ныне место ньютоновской схемы дальнодействующих сил заняла теория поля, претерпели изменение и его законы движения; но все, что было создано после Ньютона, является дальнейшим органическим развитием его идей и методов. И сегодня мы чтим его как одного из тех, кому современная духовная жизнь обязана своим началом.

М.И.РЕЙТМАН

Динамическое программирование

Лестница фараона

Дворец фараона славился своей роскошью: жемчужные занавесы, стены, отделанные янтарем, золотая посуда — всего не перечесть. Но больше всего поражала тех, кто допускался в тронный зал дворца, золотая лестница, которая вела к трону. Как выглядела эта лестница в разрезе, если перевести древнеегипетские меры в дециметры, вы видите на рисунке 1. Археологам не пришлось долго ломать головы, чтобы понять, отчего ступени лестницы были такими низкими, все объяснялось просто: престарелый фараон не хотел, чтобы подданные видели, как тяжело ему взбираться на трон, они могли утратить почтение, а кто знает, чем это могло кончиться? Поэтому он и повелел придворным ювелирам сделать лестницу с такими низкими ступенями, не выше 1,5 *дм*. Но время шло, и старый фараон скончался. Его молодой сын принял царство.

Молодой фараон слышал и раньше, как придворные посмеивались над наивной хитростью отца. И хотя сам он обычно взлетал на трон, прыгая через три ступеньки, но кривотолки продолжались. И молодой фараон решил покончить с ними, нарастив лестницу. Для этого он призвал придворных ювелиров и казначея и сказал им:

— Слуги мои! Повелеваю вам нарастить лестницу так, чтобы она имела самое большее четыре ступени. Устройте их, где хотите, но чтобы их было не больше четырех!

— Но государь, — робко вышел вперед казначей, — где взять столько золота? Вот я тут прикинул на листке папируса (и казначей показал то, что изображено на рисунке лестницы пунктиром). Лестница имеет ширину 1 *м*, или 10 *дм*. Значит, для ее наращивания понадобится $[3\times1{,}5+1{,}2\times(5+1)+1\times1+1\times3+$ $+0{,}8\,(3+4)+1{,}2\times11]\times10=345$ *дм*^{3} золота! Увы, государь, столько не найдется в нашей казне, разоренной войной с Эфиопией.

— Презренный! Ты бросаешь тень на мое могущество! Если через 7 дней лестница не будет готова, я сам утоплю тебя в священном Ниле, а ювелиры будут проданы в рабство. И не вздумай еще раз соваться со своими дурацкими чертежами!

Удрученный ушел казначей от фараона и отправился к своему другу. Не было человека искуснее, когда нужно было распланировать пирамиду или исчислить земельные наделы. Хотя друг и был по должности жрецом столичного храма, но слыл человеком расчетливым и практичным. Узнав о беде, он спросил:

— А сколько золота осталось в казне?

— 200 *дм*^{3}.

— Не густо! А может быть можно обойтись меньшим количеством, если иначе распланировать ступеньки?

— Я пробовал, — вздохнул казначей, — но вариантов так много, а времени в обрез.

— Ладно, друг, — сказал жрец.— Дай мне подумать, и приходи завтра.

Когда на следующий день убитый горем казначей приплелся к жрецу, тот встретил его довольной улыбкой.

— А скажи, друг, могу ли я рассчитывать на оставшееся золото, если обойдусь меньшим количеством?

— О боги! — воскликнул казначей, не веря своему счастью. — Ты получишь еще дюжину рабов и столько же мер зерна!

— Так смотри же! — и жрец протянул ему лист папируса, где был другой проект наращивания лестницы. — Этот проект требует лишь $171\ \text{дм}^3$ золота. А остальные $29\ \text{дм}^3$ — мои!

— Но скажи, о величайший из вычислителей, как ты нашел такой вариант? Я пробовал и так и сяк, но он мне не попадался!

— Слушай же, — молвил жрец.— Сначала я разобрал случаи, когда лестницы из разного числа ступенек заменяются всего одной ступенькой (рис. 2 *)). Чтобы числа были попроще, я буду вычислять только площадь f фигуры между сплошной и пунктирной линиями, а постоянный множитель, ширину лестницы, добавлю потом. Не возражаешь? Так вот, если бы первоначальная лестница состояла всего из одной ступеньки, то и наращивать было бы нечего:

$$f_1(1)=0.$$

Формула

$$f_1(2)=1{,}5\times3=4{,}5\ \text{дм}^2$$

показывает, что лестница заменяется одной ступенькой, а сначала их было две (две первые ступеньки лестницы фараона). Аналогично найдем

$$f_1(3)=1{,}5\times3+0{,}7\times(3+4)=9{,}4.$$

Ну а дальше

$$f_1(4)=9{,}4+1\times(3+4+1)=17{,}4$$
$$f_1(5)=17{,}4+1{,}2\times(3+4+1+5)=33.$$

— Все это понятно, — возразил казначей, — но зачем мне одна ступенька? Ведь фараон просил четыре! Да и лестница имеет их сейчас не пять, а куда больше!

— Не торопись! — улыбнулся жрец. — Пусть теперь новых ступенек станет больше — две. Давай теперь подсчитаем минимальные площади при двух ступеньках. $f_2(1)$ не имеет смысла, заменить одну ступеньку двумя мы не можем. Чтобы заменить две ступеньки двумя новыми, наращивать их не придется:

$$f_2(2)=0.$$

Вот $f_2(3)$ подсчитать несколько сложнее (рис. 3):

$$f_2(3)=\min\{(f_1(1)+0{,}7\times4),\ (f_1(2)+0)\}.$$

Величины в фигурных скобках соответствуют двум вариантам: надо

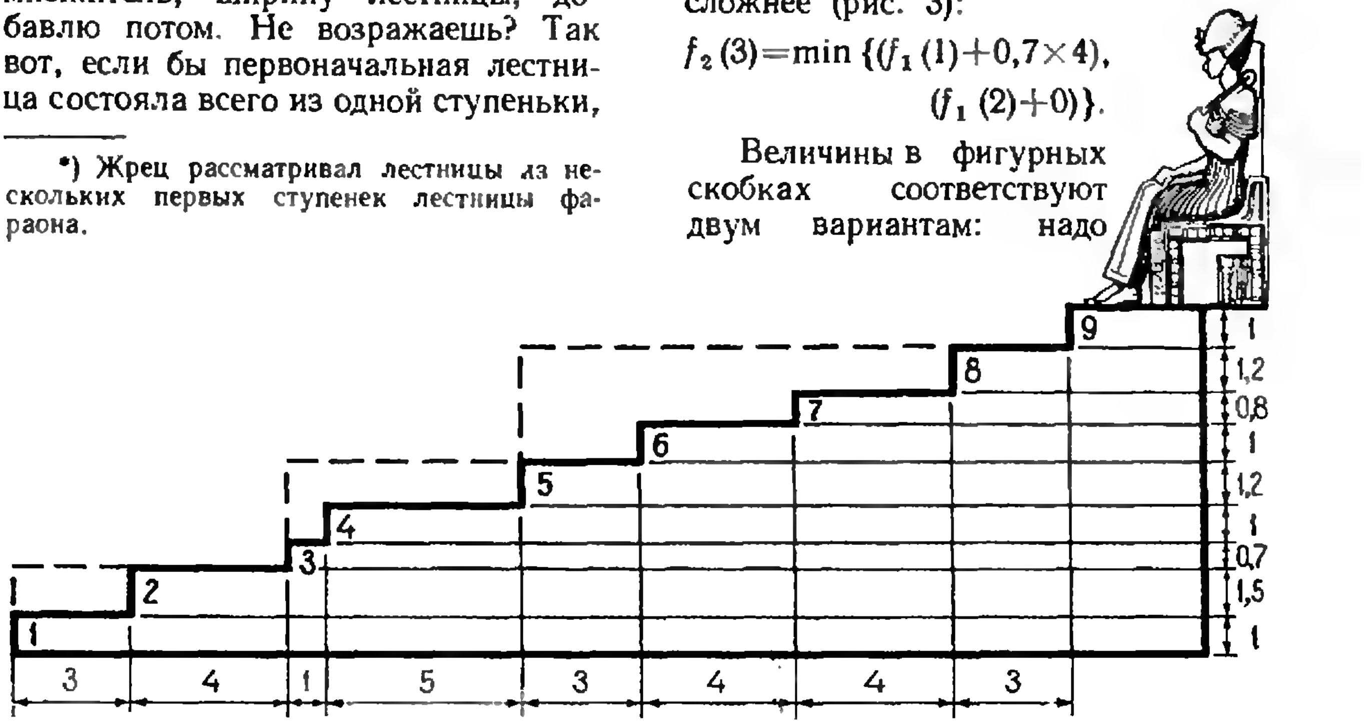


Рис. 1.

---

*) Жрец рассматривал лестницы из нескольких первых ступенек лестницы фараона.

нарастить или вторую, или первую ступеньку, а знак min показывает, что нужно взять наименьшую из них. Подставим в фигурные скобки величины $f_1(1)$ и $f_1(2)$, найденные раньше:

$$f_2(3) = \min\{(0+0{,}7\times4),\ (4{,}5+0)\}=2{,}8.$$

Теперь уже видно, что если в лестнице всего три ступеньки, а их число нужно сократить до двух, то наращивать нужно вторую ступеньку.

— А если бы ступенек было 4?

— Тогда

$$f_2(4) = \min\{(f_1(1) + 0{,}7\times4+1\times(4+1)),\ \boxed{f_1(2)+1\times1},\ (f_1(3)+0)\} = \min\{(0+7{,}8),\ \boxed{4{,}5+1},\ (9{,}4+0)\}=5{,}5,$$

то есть, если в лестнице было 4 ступеньки, а мы заменяем их двумя, то первую лучше всего закончить на второй старой (рис. 4).

— Погоди, я хочу убедиться, что понял,— прервал его казначей.— Значит, чтобы найти $f_2(5)$, нужно действовать так:

$$f_2(5) = \min\{(0+7{,}8+1{,}2\times(4+1+5)),\ \boxed{4{,}5+1\times1+1{,}2\times(1+5)},\ (9{,}4+1{,}2\times5),\ (17{,}4)\} = \min\{(19{,}8),\ \boxed{12{,}7},\ (15{,}4),\ (17{,}4)\}=12{,}7.$$

— Воистину, мудрые следят за казной государства, — польстил жрец. — А дальше

$$f_2(6) = \min\{(0+19{,}8+1\times(4+1+5+3)),\ (4{,}5+8{,}2+1\times(1+5+3)),\ (9{,}4+1{,}2\times5+8),\ \boxed{17{,}4+1\times3},\ (33+0)\} = \min\{(0+32{,}8),\ (4{,}5+17{,}2),\ (9{,}4+14{,}0),\ \boxed{17{,}4+3},\ (33+0)\} = \min\{(32{,}8),\ (21{,}7),\ (23{,}4),\ \boxed{20{,}4},\ 33\}=20{,}4.$$

Можно было бы продолжать и найти $f_2(7)$, но в этом нет нужды, как ты вскоре увидишь. Перейдем теперь к случаю, когда лестница заменяется тремя ступеньками.

Начнем с того, что найдем $f_3(4)$, то есть самый разумный вариант наращивания первых четырех ступенек. Ведь $f_3(1)$ и $f_3(2)$ лишены смысла (не стоит заменять одну или две ступеньки тремя), а $f_3(3)=0$ — наращивание трех ступенек до трех не требует никакого расхода золота. Чтобы найти $f_3(4)$, посмотрим, где может кончаться вторая ступенька. Конечно, или на 2-й, или на 3-й старой. Значит,

$$f_3(4) = \min\{\boxed{f_2(2)+1\times1},\ (f_2(3)+0)\} = \min\{\boxed{0+1},\ (2{,}8+0)\}=1.$$

Следовательно, наращивая 4 ступеньки так, чтобы их стало 3, нужно окончить новую вторую на второй

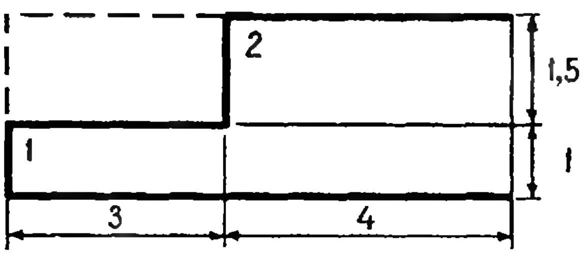


Рис. 2.

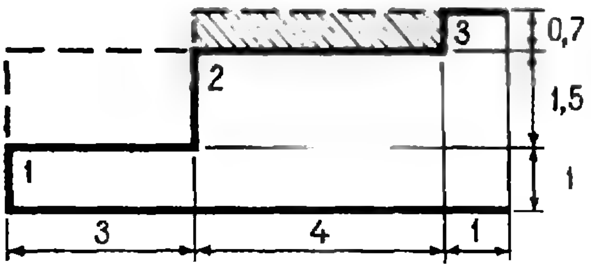


Рис. 3.

старой. Двинемся дальше:

$$f_3(5) =$$
$$= \min\{(f_2(2) + 1\times 1 + 1{,}2\times (1+5)),$$
$$(f_2(3) + 1{,}2\times 5), \quad \boxed{f_2(4) + 0}\} =$$
$$= \min\{(0 + 1 + 7{,}2), \quad (2{,}8 + 6),$$
$$\boxed{5{,}5 + 0}\} = 5{,}5,$$

$$f_3(6) = \min\{(f_2(2) + 8{,}2 + 1\times 9),$$
$$(f_2(3) + 6 + 1\times 8),$$
$$\boxed{f_2(4) + 1\times 3},$$
$$f_2(5) + 0\} = \min\{(0 + 17{,}2),$$
$$(2{,}8 + 14), \quad \boxed{5{,}5 + 3},$$
$$(12{,}7 + 0)\} = 8{,}5,$$

$$f_3(7) = \min\{(f_2(2) + 17{,}2 +$$
$$+ 0{,}8\times (1 + 5 + 3 + 4)),$$
$$(f_2(3) + 1{,}2\times 5 + 1\times 8 + 9{,}6),$$
$$\boxed{f_2(4) + 3 + 0{,}8(3 + 4)},$$
$$(f_2(5) + 0{,}8\times 4),$$
$$(f_2(6) + 0)\} = \min\{(0 + 27{,}6),$$
$$(2{,}8 + 23{,}6), \quad \boxed{5{,}5 + 8{,}6},$$
$$(12{,}7 + 3{,}2), \quad (20{,}4 + 0)\} = 14{,}1.$$

Наконец, как легко подсчитать, $f_3(8) = 24{,}3$.

Ну а теперь рассмотрим случай с четырьмя ступенями. Теперь уже рассматривать $f_4(4), \ldots, f_4(8)$ нет нужды: мы точно знаем, что последняя, четвертая ступенька кончается на старой девятой (иначе бы лестница имела больше четырех ступенек). Итак, нам остается найти $f_4(9)$:

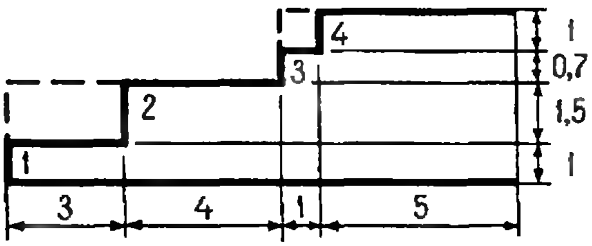


Рис. 4.

$$f_4(9) = \min\{(f_3(3) + 1{,}2\times 5 +$$
$$+ 1\times 8 + 0{,}8\times 12 + 1{,}2\times 16 + 1\times 19),$$
$$(f_3(4) + 1\times 3 + 0{,}8\times 7 +$$
$$+ 1{,}2\times 11 + 1\times 14),$$
$$(f_3(5) + 0{,}8\times 4 + 1{,}2\times 8 + 1\times 11),$$
$$(f_3(6) + 1{,}2\times 4 + 1\times 7),$$
$$\boxed{f_3(7) + 3\times 1},$$
$$(f_3(8) + 0)\} = \min\{(0 + 61{,}8),$$
$$(1 + 35{,}8), \quad (5{,}5 + 23{,}8),$$
$$(8{,}5 + 11{,}8), \quad \boxed{14{,}1 + 3},$$
$$(24{,}3 + 0)\} = 17{,}1.$$

Значит, всего на лестницу понадобится $17{,}1\times 10 = 171$ ($дм^3$) золота. А теперь давай найдем, где должны располагаться новые ступеньки. Заметим, что оптимальные варианты всюду взяты в рамку. В последний оптимальный вариант вошла стоимость трех новых ступенек $f_3(7) = 14{,}1$; значит, третья ступенька должна кончаться на 7-й старой. Теперь вернемся на шаг назад к определению $f_3(7)$ и увидим, что в $f_3(7)$ входит стоимость первых двух ступенек $f_2(4) = 5{,}5$. Следовательно, вторая ступенька должна кончаться на 4-й старой. И, наконец, в выражение для $f_2(4)$ входит $f_1(2) = 4{,}5$. Значит, первую ступеньку новой лестницы нужно окончить на второй ступеньке старой. Окончательно, самая дешевая лестница изображена на рисунке 5.

Теория динамического программирования

Мы не знаем, выполнил ли хитроумный казначей свое обещание жрецу, более того, мы не знаем, случилась ли вообще описанная история или она вымышлена. Но зато мы знаем, что она вполне могла произойти, ибо в рассмотренной задаче используются только два арифметических действия — сложение и умножение (если не считать определения платы жрецу, где потребовалось вычитание), а они были хорошо известны в Древнем Египте. Ну и еще немного используется здравый смысл. А между тем здесь применен математический аппарат, который получил распространение лишь лет двадцать назад; он называется динамическим программированием.

Вдумаемся, почему нам удалось найти оптимальное решение, не рассматривая всех возможных вариантов наращивания лестницы (а их очень много, и для их полного исследования жрецу действительно не хватило бы времени). Дело в том, что на каждом шаге мы разбивали общую задачу на ряд более простых.

Пусть требуется нарастить лестницу, имеющую N ступенек, так, чтобы она их имела n, где $N \gg n$, то есть N намного больше n. Допустим, что нам уже известно оптимальное распределение ступенек, когда их в новой лестнице j, где $j \leqslant n$. Пусть S_j — номер старой ступеньки, на которой кончается j-я новая. Очевидно, начинается эта j-я ступенька на $(S_{j-1}+1)$-й старой. Добавочная площадь лестницы, изображенная на рисунке 6 штриховкой, будет зависеть от S_{j-1} и S_j, то есть от того, где начинается и где кончается j-я ступенька; обозначим ее через $g(S_{j-1}, S_j)$. Пусть $f_j(S_j)$ — минимальная площадь для лестницы из S_j ступенек, заменяемой на j ступенек, а $f_{j-1}(S_{j-1})$ минимальная площадь лестницы из S_{j-1}-й ступенек, заменяемой на $j-1$ ступенек. Установим зависимость между этими величинами, то есть найдем такие значения переменных S_j, которые дают наименьшее значение добавочной площади:

$$g(S_1, S_2)+g(S_2, S_3)+\ldots+g(S_{n-1}, S_n), \qquad S_n=N.$$

Введем функцию

$$f_j(S_j)=\min_{S_1,\ldots,S_{j-1}}[g(S_1, S_2)+\ldots+g(S_{j-2}, S_{j-2})+g(S_{j-1}, S_j)],$$

где $j=1, 2, \ldots, n$. Заметим, что $g(S_{j-1}, S_j)$ не зависит от $S_1, \ldots, S_{j-2}$. Следовательно, $g(S_{j-1}, S_j)$ можно вынести за знак минимизации по $S_1, S_2, \ldots, S_{j-2}$ (аналогично тому, как сносят по оси OY параболу — самая низкая точка параболы от этого не изменится):

$$f_j(S_j)=\min_{S_{j-1}}\{g(S_{j-1}, S_j)+\min_{S_1\ldots S_{j-2}}[g(S_1, S_2), \ldots \ldots g(S_{j-2}, S_{j-1})]\}.$$

Но второй член в фигурных скобках мы обозначили через $f_{j-1}(S_{j-1})$. Отсюда получаем

$$\boxed{f_j(S_j)=\min_{S_{j-1}}\{g(S_{j-1}, S_j)+f_{j-1}(S_{j-1})\}.}$$

Это и есть уравнение Р. Беллмана, которое лежит в основе динамического программирования. Всмотритесь в проведенные численные выкладки, и вы увидите, что мы пользовались им

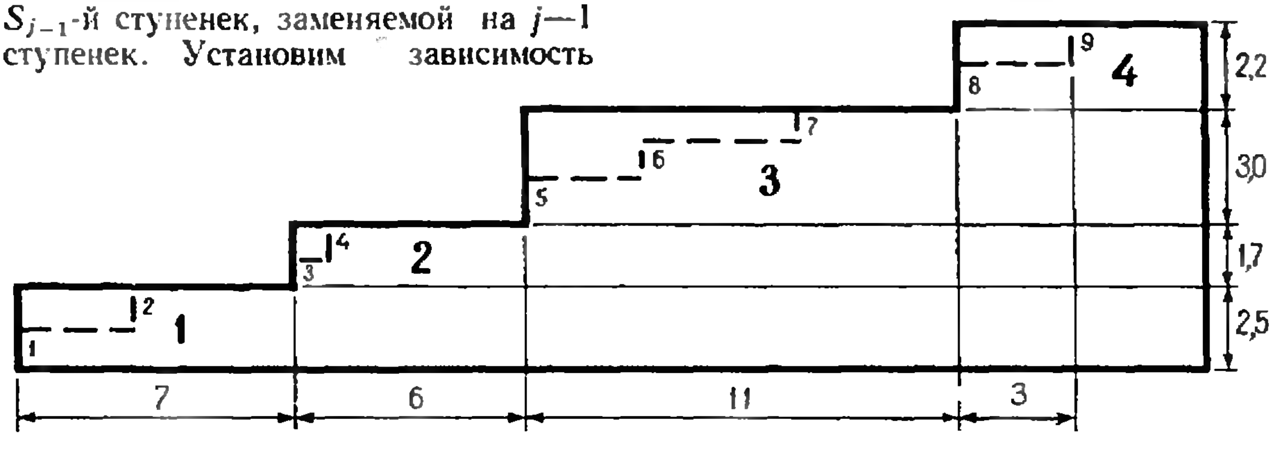


Рис. 5.

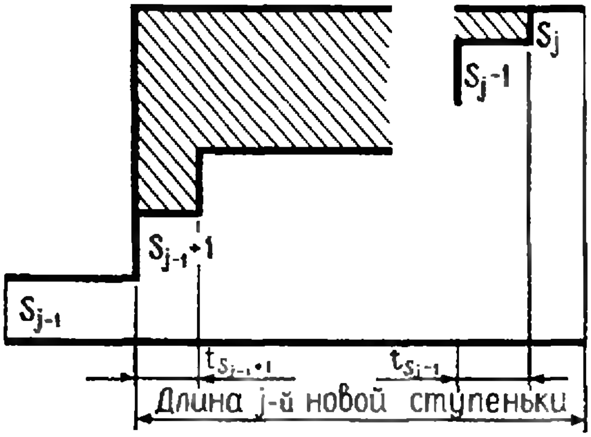


Рис. 6.

на каждом шаге. Его нужно понимать так: для отыскания минимума следует придавать S_j все возможные значения, начиная с 1, и для каждого найти и запомнить значение S_{j-1}, доставляющее наименьшую величину $f_j(S_j)$. А затем, дойдя до последнего значения $j=n$, нужно, «пятясь», вернуться назад и найти все оптимальные значения S_j.

Обсуждение метода и немного истории

Обратим внимание на то, что в описанном методе не накладывается никаких условий на вид функций $g(S_{j-1}, S_j)$. Этим динамическое программирование выгодно отличается от линейного *), в котором требуется, чтобы все рассматриваемые зависимости были линейными и переменные изменялись непрерывно. Поэтому уравнение Р. Беллмана и вышеописанный метод используются сейчас очень широко. Но, разумеется, не для удовлетворения прихотей фараонов. Попробуйте без него найти оптимальное соотношение весов ступеней космической ракеты, определить наилучший принцип унификации деталей, построить расписание, в котором было бы меньше всего простоев! Вы очутитесь в отчаянном положении казначея, сникшего перед обилием возможных вариантов. Разумеется, вручную с помощью динамического программирования почти не считают. Зато оно хорошо приспособлено для счета на электронных вычислительных машинах, метод легко программируется и не содержит всяких «подводных камней», которые, к сожалению, встречаются в линейном программировании.

Идея метода динамического программирования витала уже давно. В какой-то мере ее применял еще К. Маклорен (1698—1746). Однако окончательно оформилась она в работах американского математика Р. Беллмана и связывается с его именем.

Мы здесь показали применение динамического программирования к весьма простой задаче. Сразу же возникает мысль: а насколько применим этот метод к задачам более сложным? На него нужно отвечать с известной осторожностью. Дело в том, что при этом возникает специфическая трудность, которую назвали «проклятием размерности». Приходится перебирать так много разных возможностей и запоминать столько результатов, что метод теряет свои положительные черты.

Еще одно приложение

Звуки битвы то угрожающе нарастали, то отдалялись, но было ясно, что все кончено. В отчаянии сидел фараон перед своим шатром в окружении понурых придворных. Шатаясь, подбежал окровавленный гонец:

— Государь! Подходит подкрепление кочевников! Мы гибнем!

— Придется отступать. Нам нужно поскорее достичь Нила. Они не посмеют его перейти, — со стоном выдавил фараон, глядя на карту. — Но каким путем нам пойти? Скажи ты! Ты искусен в вычислениях и уже однажды помог мне, — обратился он к казначею.

— О, Осирис! — воскликнул казначей. — Но то была совсем другая задача! А теперь спроси у своих военачальников!

— Я им не верю. Эти глупцы предрекали мне победу.

«Теперь я пропал», — подумал казначей, вглядываясь в карту (рис. 7).

---

*) См., например, статью: А. Б. Каток, Экономика и линейные неравенства, «Квант» №№ 3, 4, 1971.

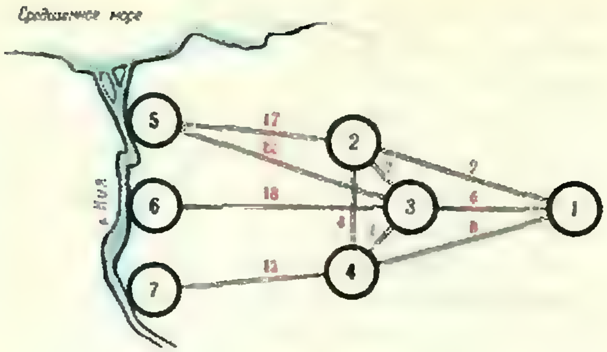


Рис. 7. Названия пунктов заменены цифрами в кружках, а числа между ними показывают длины переходов в днях.

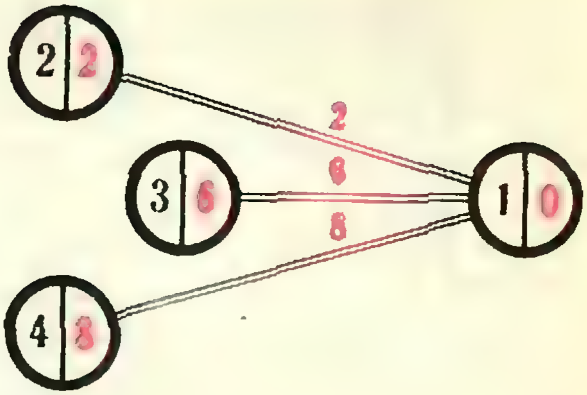


Рис. 8.

Внезапно его осенило: «А ведь ход мыслей жреца можно использовать и здесь!»

Рассмотрим сначала пути от места битвы 1 к ближайшим пунктам 2, 3 и 4, номера которых мы будем писать в каждом кружочке слева (рис. 8), а справа покажем длины путей (красным цветом). Например, чтобы достигнуть пункта 4 нужно 8 дней.

Теперь рассмотрим все пути из пунктов 2, 3, 4, не обращая внимания на пункт 1 (рис. 9). Некоторые пути уже привели к цели. Так, в пункт 5 привели два пути. Оставим лучший из них (он занял 18 дней), а худший исключим, пометив его знаком «минус». Одновременно исключим путь в пункт 7 (он занял 21 день), в пункт 6 (он занял 24 дня) и в пункт 2 (на первом шаге у нас был лучший путь за 2 дня). Осталось проверить всего 3 пункта: 3, 4, 5.

Анализ рисунка 10 дает, что лучший путь занимает 16 дней и ведет через пункты 2, 3, 5.

Заметим, что на последнем этапе казначей уже не интересовался, каким образом армия попала в пункты 3, 4 (сравните с задачей о лестнице!). То есть дальнейший наилучший путь не зависит от того, как мы оказались в каком-либо пункте. Это общее правило носит название «принципа оптимальности» и лежит в основе динамического программирования.

Упражнения

1. Для школьной мастерской решили сначала купить 9 разных токарных станков стоимостью 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160,

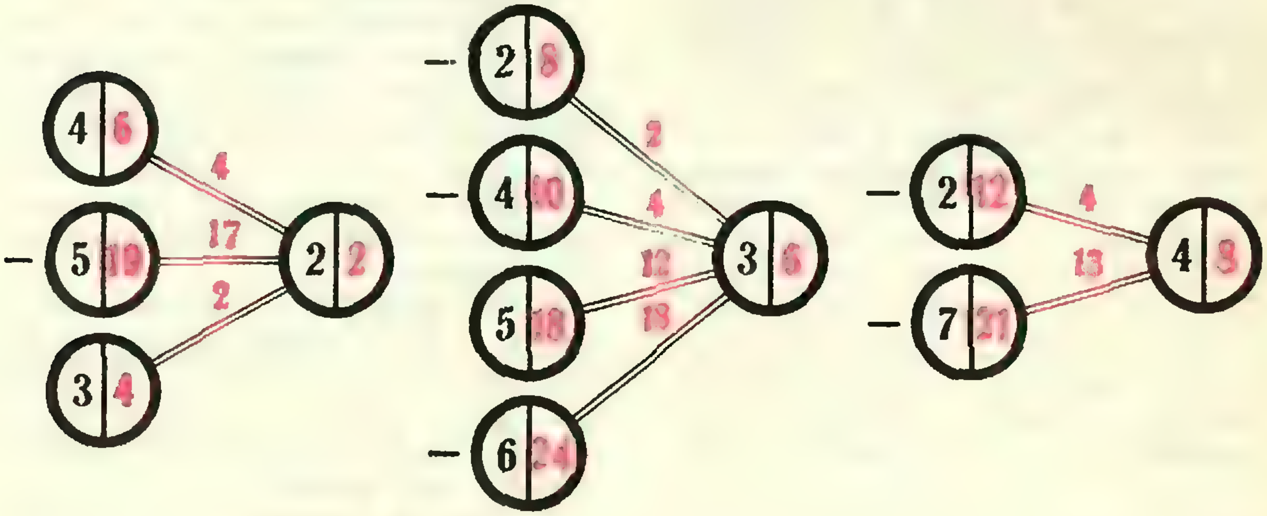


Рис. 9.

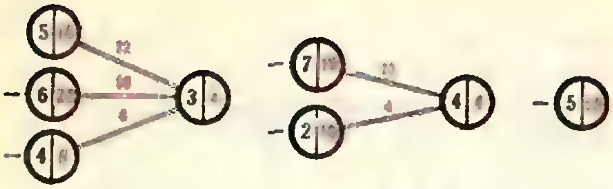


Рис. 10.

190 руб. Каждый из последующих станков в этом ряду может заменить любой предыдущий, но не наоборот. Например, станок за 100 руб. может обрабатывать те же детали, которые обрабатывает станок за 40 руб. Однако директор школы возразил:

— Слишком много типов станков! Нам будет трудно их обслуживать — ведь для каждого нужны свои запчасти. Давайте купим 9 станков, но всего четырех разных типов, причем так, чтобы купленные станки обладали не меньшими возможностями, чем исходные 9 станков.

— А какие типы станков мы возьмем?

— Выберем их так, чтобы заплатить за все 9 станков поменьше. Евгений Иванович, вы поможете нам выбрать типы станков? — обратился он к учителю математики.

Какие типы станков предложил выбрать учитель и сколько они стоили?.

2. То, что предложил проделать директор в предыдущей задаче, называется унификацией. Обычно на практике унификация дает экономическую выгоду. Но как эту выгоду подсчитать?

Пусть снова имеется 9 станков со стоимостями 16, 18, 19, 22, 23, 24, 24, 28, 33 руб. Требуется составить из них унифицированные серии, как это было сделано раньше, считая, что объединение станков в серии за счет упрощения обслуживания дает снижение затрат на серию по следующей таблице:

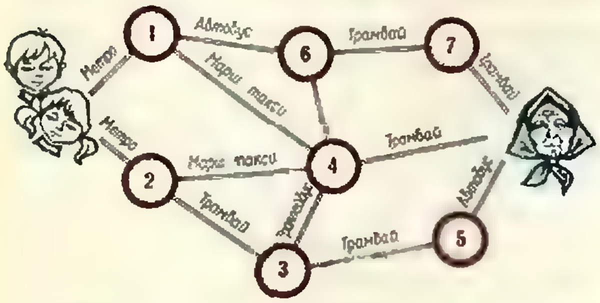


Рис. 11. Стоимости проезда: маршрутное такси — 10 коп., метро — 5 коп., автобус — 5 коп., троллейбус — 4 коп., трамвай — 3 коп.

Таблица

Число станков в серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Снижение стоимости	0	12	16	18	20	20	21	21	21

3. — Ну вот, — сказала Нина старшему брату Виктору.— Говорила тебе, что не нужно покупать мороженое! Как теперь мы доберемся до бабушки? У нас осталось всего 30 копеек

— Погоди, — возразил Виктор. — Во-первых, это ты предложила купить мороженое. Во-вторых, нам сейчас поможет динамическое программирование. Мы проходили его в школьном математическом кружке.

И он стал быстро чертить на бумаге схему маршрутов (рис. 11). Какой путь нужно избрать Виктору и Нине (ей десять лет), чтобы попасть к бабушке?

4. Приближался вечер, а Петя еще не знал, что задано по геометрии. Узнать это можно, например, у Лены (до ее дома 12 *мин*), но номера квартиры Петя не знает. Его знает Вася, но до него 10 *мин* ходьбы и еще 6 от Васи до Лены. Можно пойти к телефону-автомату (это рядом, но там всегда очередь 3 *мин*) и позвонить Юре. Но Юра из другого класса, и он может дать только адреса Лены или Зины (она живет в 6 *мин* ходьбы от Пети, и только она знает телефон Лены и может ей позвонить). Хотя нет, это может еще Саша, который живет в 4 *мин* от Юры, и Юра знает где. Есть еще сосед по парте, Витька, он никогда не знает, что задано, но ему можно позвонить и попросить сбегать к Лене (от него 8 *мин* ходьбы до Лены), а потом позвонить снова. Да, и еще Зину можно упросить проводить к Люсе (это займет 5 *мин*), она тоже знает задание. Наконец, можно искать Лену, не зная квартиры (на поиски уйдет 4 *мин*), или попросить Витьку позвонить Жене — пусть тот сходит к Лене (до нее 4 *мин*) или к Люсе (до нее 6 *мин*).

Как Пете быстрее всего узнать задание, если считать, что время идет только на ожидание и ходьбу, а все разговоры происходят мгновенно?

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

ИНЕРТНАЯ МАССА

Начиная изучать физику, мы сразу встречаемся с важным, фундаментальным понятием: масса тела или масса материальной точки.

Что же такое масса?

Отвечать на вопросы, относящиеся к основным понятиям физики, всегда трудно. Ньютон (1642—1727) в классическом труде «Математические начала натуральной философии» начал изложение механики с определения массы. Он, правда, вместо слова «масса» писал «количество материи» и определял его так: количество материи есть мера таковой, устанавливаемая в зависимости от ее плотности и объема.

Такое определение, к сожалению, мало что говорит. В самом деле, для того чтобы так определить массу, надо сначала дать определение плотности, а этого мы сделать не можем, если не вводить новых понятий.

Масса фигурирует в разных задачах, и мы не всегда отдаем себе отчет в том, что массой, строго говоря, характеризуют разные свойства тела. Можно указать по крайней мере три различных случая, когда речь идет о массе, и в каждом из этих случаев мы имеем в виду разные понятия.

I. Покупая что-либо в продовольственном магазине, мы говорим, например, о килограмме сахара, зная, что масса разных порций сахара складывается (как говорят, масса аддитивна). Здесь массой мы измеряем количество вещества.

II. Встречаясь на мосту с дорожным знаком, на котором написано «10 т», шофер знает, что через этот мост запрещено проезжать машине, общий вес которой больше 10 тонн. В этом случае массой измеряется сила притяжения к земле.

III. Вычисляя траекторию протона в ускорителе, мы записываем уравнение движения, которое связывает ускорение с массой. В этом случае масса выступает как мера инертности протона — как инертная масса.

То, что во всех трех случаях мы можем пользоваться одной и той же величиной, есть удивительное свойство природы, о котором мы и хотим здесь рассказать.

В обычных условиях все три случая действительно описываются одной и той же массой. Это утверждение справедливо только до тех пор, пока мы рассматриваем физические тела, состоящие из частиц, которые движутся со скоростями намного меньшими, чем скорость света.

Если скорость частиц велика, как, например, у протонов и нейтронов, входящих в состав атомного ядра, то положение меняется. Масса системы уже не будет равна сумме масс своих частей (как говорят, масса перестает быть аддитивной величиной). Ускорение не пропорционально силе и само понятие массы становится сложным.

Мы будем рассматривать способы определения массы не в порядке их важности, а так, как это удобно для последовательного изложения.

Количество вещества

Начнем с простого вопроса. Что имеется в виду, когда мы покупаем килограмм сахара или принимаем 0,5 грамма аспирина? Нас, конечно, не интересует ускорение, которое можно сообщить этому количеству сахара или аспирина. Не интересует нас и сила их притяжения к Земле.

Нас интересует определенное количество, число порций сахара или аспирина, а совсем не масса. Мы просто пользуемся тем, что нужное количество можно определить взвешиванием. При этом используется аддитивность массы и ее пропорциональность силе земного притяжения. Эталоном массы в этом случае может служить, например, кусок сахара, так что можно простым счетом измерить массу любых количеств сахара. Единственное условие состоит в том, чтобы все куски сахара были одинаковыми.

А как узнать, что два куска сахара одинаковы? Можно сосчитать, сколько молекул сахара содержится в каждом куске (сделать это трудно, но, допустим, что мы это можем). Если оба куска содержат равное количество молекул, то их масса одинакова. Но при этом мы предполагаем, что все молекулы сахара одинаковы, то есть используем новое физическое свойство — тождественность молекул. Постулируя это свойство и аддитивность массы, мы получаем возможность сравнивать массы разных порций одного и того же вещества.

Так можно установить шкалу масс для сахара, для масла, для меди, для железа. Однако надо еще иметь способ сравнивать массы образцов, сделанных из разных веществ. Как, например, сравнить массы медного и железного шаров?

Это можно сделать, изучая столкновение упругих шаров.

Именно так поступил Христиан Гюйгенс (1629—1695) еще до того, как Ньютон открыл свои законы *). Гюйгенс рассматривал центральное соударение двух упругих шаров равной массы.

Предположим, что два упругих шара равных масс летят навстречу друг другу с одинаковыми по абсолютной величине скоростями (рис. 1). После столкновения шары разлетятся в разных направлениях. Кажется очевидным, что скорости, с которыми шары разлетятся, также одинаковы по абсолютной величине. Почему?

Скорость разлета определяется только массами шаров и скоростями их сближения. Следовательно, ни один из шаров не имеет преимущества перед другим, и их движение должно оставаться симметричным. Это и означает, что они разлетятся с одинаковыми скоростями. И наоборот, из того, что шары разлетаются с одинаковыми скоростями, следует, что их массы равны.

В действительности то, что скорости после соударения определяются полностью начальными скоростями и массами шаров, а не зависят, например, от величины шаров, температуры или еще каких-нибудь величин, ниоткуда не следует. Только потому, что опыт подтвердил такое предположение, мы можем использовать изложенный метод сравнения масс тел, сделанных из различных материалов.

Способ Гюйгенса дает возможность сравнивать между собой то, что можно назвать шкалами масс для разных веществ. Гюйгенс сам не развивал эту идею. Он рассуждал просто: «...Я рассматриваю тела из одного вещества или же принимаю, что величина тел определяется их весом...». Под «величиной» Гюйгенс понимал «массу».

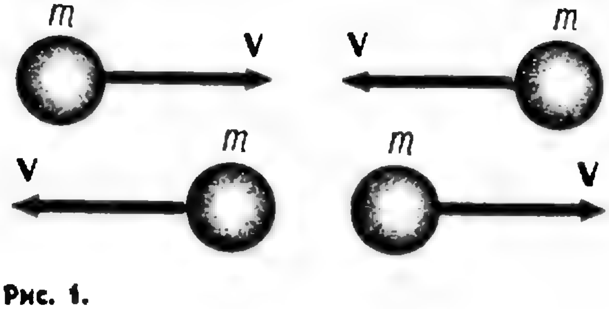


Рис. 1.

---

*) В печати эти соображения появились лишь после смерти Гюйгенса в 1703 г. в мемуаре «О движении тел и столкновениях». Но результаты были получены в 1652 г.

Закон сохранения количества движения

Напишем закон сохранения импульса в случае столкновения двух тел (импульс равен произведению массы на скорость $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$). Пусть два тела до столкновения имели импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Их импульсы после столкновения обозначим через $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$. Тогда закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'.$$

Отмечая массы и скорости тел индексами 1 и 2, можно написать

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2',$$

или

$$m_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_1')=-m_2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2').$$

Обозначая абсолютные величины векторного изменения скорости через $|\Delta\mathbf{v}_1|$ и $|\Delta\mathbf{v}_2|$, получим

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\Delta\mathbf{v}_2|}{|\Delta\mathbf{v}_1|}.$$

Таким образом, измеряя изменение скоростей сталкивающихся тел, можно сравнивать их массы. Так определял понятие массы французский механик Барре де Сен-Венан (1797—1886) *).

Массу можно определить и по отношению ускорений:

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|}=\frac{m_2}{m_1}\ \text{**)}.$$

Связь отношения масс с отношением ускорений можно принять за способ сравнения масс, как это и делается в учебнике. Только надо помнить, что этот способ не единственный.

Центростремительное ускорение

Мы уже говорили, что Гюйгенс раньше Ньютона понял некоторые законы движения (занимаясь законами столкновения упругих шаров). Насколько хорошо понимал Гюйгенс механику, видно из того, что он первым правильно сформулировал законы движения по окружности и ввел понятие центростремительного ускорения. Ведь если мы умеем измерять силу (например, с помощью пружины, используя закон Гука), то можно измерить массу без помощи сил тяготения, измеряя центростремительное ускорение вращающегося тела.

Сам Гюйгенс рассматривал движение в системе координат, связанной с вращающимся телом. В этой системе нужно учитывать центробежную силу инерции, поэтому формулировка Гюйгенса была следующей: «Когда два равные тела движутся по равным окружностям с неравной скоростью, но оба равномерно, то центробежная сила быстрейшего относится к центробежной силе тела, движущегося медленнее, как квадраты их скоростей».

Эталон массы

В качестве эталонов длины и времени сейчас приняты длина волны определенной линии в спектре криптона и частота колебаний водородного мазера. Такие эталоны лучше искусственных, так как их можно воспроизвести в любой хорошей лаборатории, а пропасть или испортиться они не могут. Почему же в качестве эталона массы нельзя использовать, например, массу протона? Мы знаем, что в химии и ядерной физике почти так и делается. В качестве единицы массы принята атомная единица массы, равная $^1/_{12}$ массы изотопа углерода C^{12}. Измерениями для массы протона в этих единицах получена очень точная величина

$$M_p=1{,}00727661\ (8)\ \text{ат. ед.}$$

---

*) Это определение массы становится неправильным, как только скорости приближаются к скорости света c. Дело можно поправить, если в определении импульса заменить скорость $\mathbf{v}$ на «релятивистскую» скорость $\mathbf{u}$ по формуле

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и написать вместо разностей v_1-v_1' и v_2-v_2' соответственно u_1-u_1' и u_2-u_2'. Масса m в этом случае называется массой покоя.

**) Это определение можно получить из предыдущего, если брать разности скоростей в два очень близких момента времени.

Однако в таком виде формула верна только для тел, которые движутся с малыми (по сравнению с c) скоростями.

Цифра в скобках означает, что возможная неточность в этой величине оценивается в 8 единиц в последнем, восьмом знаке.

Таким образом, масса протона известна с очень большой точностью. К сожалению, эта большая точность достижима только в атомных единицах. Величина массы протона в обычных единицах (*кг*) известна значительно хуже:

$$M_p = 1{,}672614\ (11)\cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Здесь возможная ошибка затрагивает уже шестой знак! Хотя это и большая точность, но все же недостаточная для утверждения протона в качестве эталона масс.

Почему же так получается? Трудность состоит в том, что физики не умеют с достаточной точностью сосчитать число протонов в заданном количестве водорода (например, в 1 киломоле). С этим связано то, что сравнительно плохо измерено число молекул в 1 киломоле:

$$A = 6{,}02217\ (4)\cdot 10^{26}\ \textit{молекул/кмоль}.$$

Возможная ошибка здесь составляет почти 7 миллионных от измеренной величины. Это слишком плохо для эталона! Только при большей точности измерения протон сможет занять подобающее ему место естественного эталона массы.

Дефект массы

Поговорим еще немного об аддитивности массы.

Если бы все тела состояли из одинаковых частей, каких-нибудь корпускул (или монад, как их называли древние), отличаясь друг от друга только плотностью — числом корпускул в единице объема, то вопрос о массе тел решался бы просто. Массы всех тел определяли бы числом таких корпускул, и на этом бы все трудности заканчивались. Может быть, именно об этом думал Ньютон, когда считал, что плотность тела — понятие более простое, чем его масса?

Но мир устроен сложнее. Атомы построены из разных элементарных частиц: электронов, протонов, нейтронов. Поэтому, переходя от молекул к их составным частям, мы только заменим вопрос о сравнении масс разных атомов вопросом о сравнении масс разных элементарных частиц. Кроме того, как это известно из теории относительности, массы протонов и нейтронов нельзя просто складывать друг с другом, когда эти частицы входят в состав ядра. При образовании ядра выделяется энергия E * и масса ядра уменьшается по сравнению с суммой масс всех протонов и нейтронов на величину

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}.$$

Определить массу атома по числу частиц нельзя, строго говоря, даже в принципе. Масса в этом случае не аддитивна, то есть масса ядра не равна сумме масс составляющих его частиц. Аддитивность массы справедлива до тех пор, пока мы разделяем тело на такие части, которые почти не взаимодействуют между собой, например, когда мы распиливаем железный брусок.

Оценим, например, ту ошибку, которую мы сделаем, если будем считать, что масса атома водорода равна сумме массы протона и массы электрона. Для того чтобы оторвать электрон — ионизовать атом,— надо затратить энергию в 13,5 электрон-вольт. (Иначе говоря, надо приложить к системе протон — электрон разность потенциалов 13,5 *в*.) 1 электрон-вольт равен $1{,}6\cdot 10^{-19}$ джоулей. Отсюда получаем

$$\Delta m = 2{,}4\cdot 10^{-35}\text{кг}.$$

Сравним это число с массой протона $1{,}7\cdot 10^{-27}$ *кг*. Мы видим, что ошибка (если считать массу атома водорода как сумму масс протона и электрона) очень мала и скажется лишь в восьмом знаке. Этой поправкой можно пренебречь. Для ядерных реакций этот эффект вносит уже достаточно большой вклад, и пренебречь им нельзя.

---

*) E есть, конечно, и энергия, которую надо сообщить ядру, чтобы оно «развалилось» на протоны и нейтроны.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В. Н. Березин

Своеобразна судьба иных теорем и задач...Как объяснить, например, столь исключительное внимание со стороны математиков и любителей математики к теореме Пифагора? Почему многие из них не довольствовались уже известными доказательствами, а находили свои, доведя за двадцать пять сравнительно обозримых столетий количество доказательств до нескольких сотен?

Когда речь идет о теореме Пифагора, необычное начинается уже с ее названия. Считается, что сформулировал ее впервые отнюдь не Пифагор. Сомнительным полагают и то, что он дал ее доказательство. Если Пифагор — реальное лицо (некоторые сомневаются даже в этом!), то жил он, скорее всего, в VI—V в. до н. э. Сам он ничего не писал, называл себя философом, что значило, в его понимании, «стремящийся к мудрости», основал пифагорейский союз, члены которого занимались музыкой, гимнастикой, математикой, физикой и астрономией. По-видимому, был он и великолепным оратором, о чем свидетельствует следующая легенда, относящаяся к пребыванию его в городе Кротоне: «Первое появление Пифагора пред народом в Кротоне началось речью к юношам, в которой он так строго, но вместе с тем и так увлекательно изложил обязанности юношей, что старейшие в городе просили не оставить и их без поучения. В этой второй речи он указывал на законность и на чистоту нравов, как на основы семейства; в следующих двух он обратился к детям и женщинам. Последствием последней речи, в которой он особенно порицал роскошь, было то, что в храм Геры доставлены были тысячи драгоценных платьев, ибо ни одна женщина не решалась более показываться в них на улице...» Тем не менее еще во втором столетии нашей эры, т. е. спустя 700 лет, жили и творили вполне реальные люди, незаурядные ученые, находившиеся явно под влиянием пифагорейского союза и относящиеся с большим уважением к тому, что согласно легенде создал Пифагор.

Несомненно также, что интерес к теореме вызывается и тем, что она занимает в математике одно из центральных мест, и удовлетворением авторов доказательств, преодолевших трудности, о которых хорошо сказал живший до нашей эры римский поэт Квинт Гораций Флакк: «Трудно хорошо выразить общеизвестные факты».

Первоначально теорема устанавливала соотношение между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника: *квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.* Именно в такой формулировке доказывается эта теорема с помощью рисунков, приведенных на первой странице обложки. Здесь на верхнем левом рисунке выделен штриховыми линиями прямоугольный треугольник, на катетах и гипотенузе которого построены квадраты, на гипотенузе — наружу, на катетах — внутрь треугольника. Стороны этих квадратов продолжены везде, где один из квадратов налегает на другой. При этом образовалось несколько треугольников, трапеций и один голубой квадрат. Равные фигуры окрашены в одинаковый цвет. На тот факт, что треугольник, образованный из красной трапеции и желтого треугольника, равновелик (более того, симметричен) треугольнику, образованному из фиолетового треугольника и зеленой трапеции, обращает внимание фрагмент в правом верхнем углу.

В нижней части рисунка на катетах прямоугольного треугольника (белого) те же самые квадраты построены внешним образом. Попутно в одном из них фиолетово-зеленый треугольник заменен на равновеликий ему красно-желтый. Теперь уже совсем нетрудно показать, что фигура, составленная из двух квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равновелика квадрату, построенному на гипотенузе этого треугольника. Для этого заменяем еще раз зеленую трапецию вместе с фиолетовым треугольником на красную трапецию плюс желтый треугольник и замечаем, что образованная при этом фигура оказывается равносоставленной с квадратом, построенным на гипотенузе данного прямоугольного треугольника. Тем самым доказана и теорема Пифагора.

А вот еще одно доказательство, использующее равносоставленность. На рисунке 1 окрашенный в зеленый цвет отрезок равен одному из катетов расположенного в нижней части чертежа прямоугольного треугольника, а красный треугольник — равнобедренный и прямоугольный. Доказав, что угол между двумя разрезами — слева и внизу — прямой, усматриваем, как из частей данной фигуры, представляющей собой объединение квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника, можно сложить либо два квадрата, либо один. Причем во втором случае сторона квадрата равняется гипотенузе того самого притаившегося треугольника. Шарнирное крепление на рисунке 2 показывает, что был отрезан прямоугольный треугольник, представляющий половину красного, и повернут относительно «шарнирной» точки на 135°. На рисунке 3 использованы разрезы рисунка 1. Вновь около шарнирных точек отделенные треугольники поворачиваются на 135° каждый.

Как проводить доказательство теоремы в случае, когда меньший из катетов более половины большего, вы легко установите сами.

Современная геометрия предпочитает арифметическую формулировку теоремы Пифагора, а именно: если стороны прямоугольного треугольника измерены одним и тем же

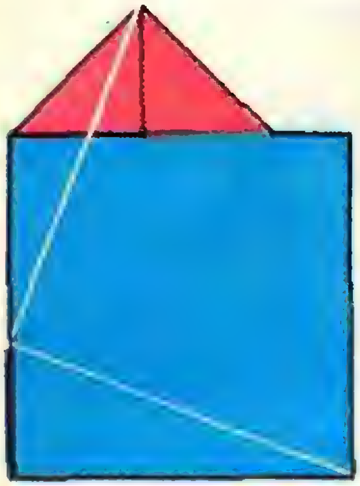


Рис. 1.

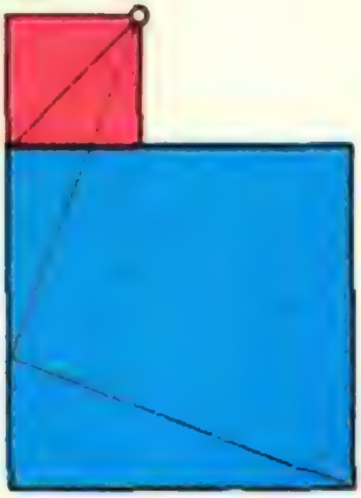


Рис. 2.

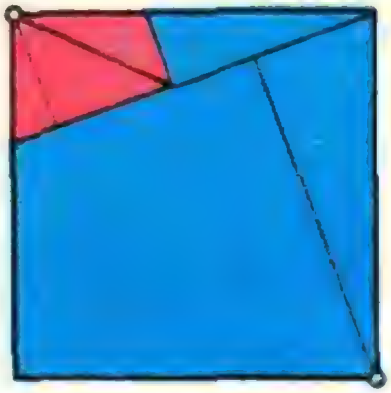


Рис. 3.

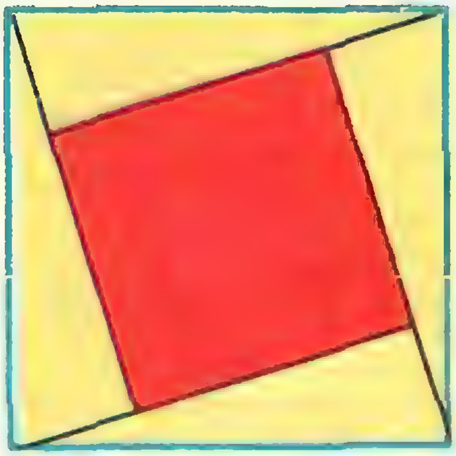


Рис. 4.

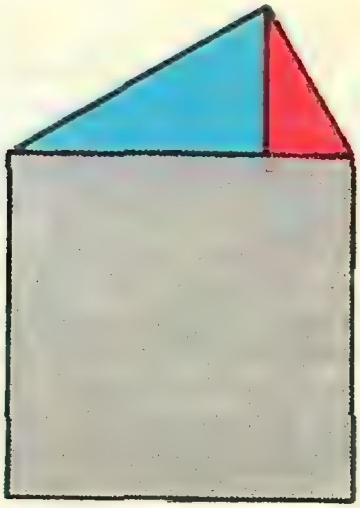


Рис. 5.

масштабом, то квадрат числа, выражающего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, выражающих катеты. Коротко: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Два доказательства, использующих такую формулировку, мы сейчас и проведем.

На рисунке 4 изображен квадрат с выделенными на нем четырьмя равными прямоугольными треугольниками. Именно из такого рисунка исходил в своем доказательстве в XII веке индийский математик Бхаскара-Ачариа.

Пусть сторона большого квадрата (она же — гипотенуза прямоугольного треугольника, окрашенного здесь в желтый цвет) равна c. Пусть также два его катета равны соответственно a и b. Тогда, в согласии с чертежом, $(a-b)^2+\frac{4ab}{2}=c^2$, то есть $c^2=a^2+b^2$. Следовательно, если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его катетов действительно равна квадрату гипотенузы.

На рисунке 5 один из трех данных прямоугольных треугольников — объемлющий. Все три треугольника — попарно подобные. В этом и ключ к доказательству, ибо площади подобных фигур, построенных соответственно на катетах и гипотенузе данного прямоугольного треугольника, находятся в том же отношении, в каком площади квадратов, построенных на этих катетах и гипотенузе. Иначе говоря, с помощью рисунка мы получаем равенство $ka^2+kb^2=kc^2$, где a и b — катеты объемлющего треугольника, c — его гипотенуза, k — число, равное отношению площади объемлющего треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Сокращая обе части равенства на k, получаем, как следствие, теорему Пифагора.

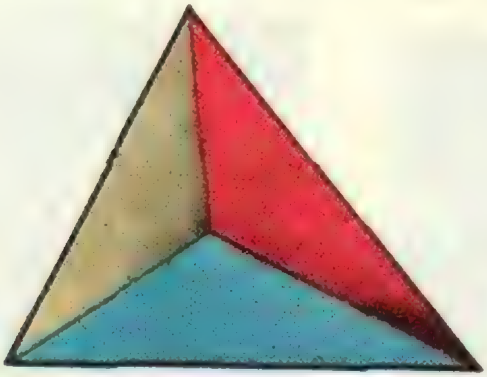


Рис. 6.

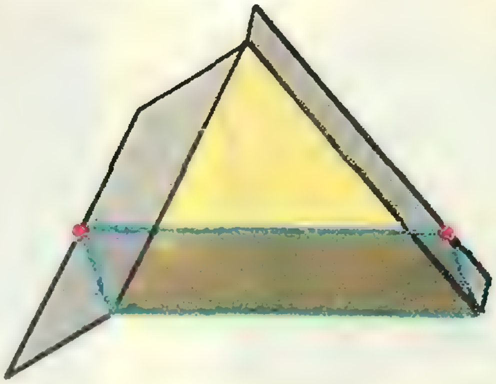


Рис. 7.

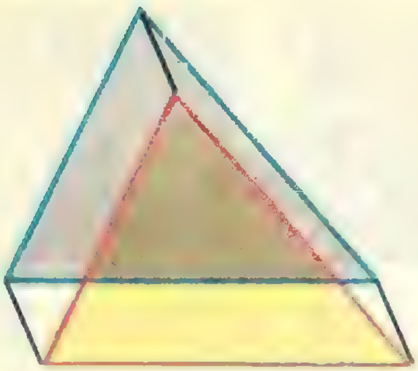


Рис. 8.

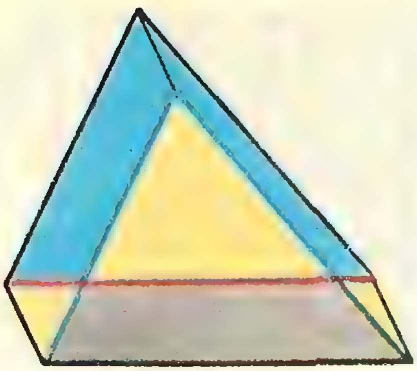


Рис. 9.

Вероятно, за многие столетия со времени открытия теоремы Пифагора немало школьников получало плохие оценки за те или иные ошибки, допущенные при доказательстве. Но, несомненно, более коварной и опасной в этом смысле явилась теорема, ей обратная, на которую в действительности часто надо бы ссылаться в тех случаях, когда школьники ссылаются на теорему Пифагора. Вот формулировка обратной теоремы: если для треугольника со сторонами a, b и c справедливо соотношение $a^2+b^2=c^2$, то треугольник этот — прямоугольный, причем против стороны c находится прямой угол. Доказательство чертежа не требует и проводится очень просто. Действительно, пусть нам дан треугольник, для сторон которого соблюдается соотношение $a^2+b^2=c^2$. Построим теперь прямоугольный треугольник с катетами a и b. Тогда, по прямой теореме Пифагора, гипотенуза этого, построенного нами треугольника будет равняться $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Следовательно, он будет равен по трем сторонам данному треугольнику, который поэтому должен быть прямоугольным.

Приведем теперь два обобщения теоремы Пифагора.

Первое — стереометрическое. Оно установлено впервые, по-видимому, в XVII столетии и довольно часто встречается в прикладной математике. Оказывается, что сумма квадратов площадей трех прямоугольных треугольников, являющихся гранями тетраэдра и имеющих общую вершину при прямых углах (рис. 6), равна квадрату площади невидимой грани этого тетраэдра. Доказательство указанного факта предлагается вам провести самостоятельно.

Второе обобщение — теорема Паппа Александрийского (III век н. э.). Она гласит: во всяком треугольнике параллелограмм, построенный на одной стороне треугольника внутрь его и имеющий две другие вершины вне треугольника, равновелик сумме двух параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма. Короче говоря, на рисунке 7 площадь нижнего параллелограмма равна сумме площадей параллелограммов, построенных на боковых сторонах треугольника.

На рисунке 8 отчетливо выделяются два равных, а потому и равновеликих треугольника с параллельными соответственными сторонами. На рисунке 9 выделены две трапеции на боковых сторонах данного треугольника, сумма площадей которых равна площади трапеции, построенной на его основании. Отсюда сразу следует справедливость теоремы Паппа. Много доказательств теоремы Пифагора, некоторые из которых исключительно изящны, вы можете найти в книге В. Литцмана «Теорема Пифагора». О самом Пифагоре рассказывается в книге Б. Л. Ван-дер-Вардена «Пробуждающаяся наука».

ПОЧЕМУ ГУДЯТ ПРОВОДА

Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Еще древние греки заметили, что струна, натянутая на ветру, иногда начинает мелодично звучать — петь. Возможно, уже тогда была известна эолова арфа, названная так по имени бога ветра Эола. Эолова арфа состоит из рамки, на которой натянуто несколько струн; ее помещают в таком месте, где струны приводятся в движение ветром. Если даже ограничиться одной струной, можно получить целый ряд различных тонов. Нечто подобное, но с гораздо меньшим разнообразием тонов происходит, когда ветер приводит в движение телеграфные провода.

Довольно долго это явление и многие другие, связанные с обтеканием тел воздухом и водой, не были объяснены. Только Ньютон, основоположник современной механики, дал первый научный подход к решению таких задач.

По закону сопротивления движению тел в жидкости или газе, открытому Ньютоном, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости:

$$F = k\rho v^2 S.$$

Здесь v — скорость тела, S — площадь его сечения, перпендикулярного направлению скорости, ρ — плотность жидкости.

В дальнейшем выяснилось, что формула Ньютона верна не всегда. В том случае, когда скорость движения тела мала по сравнению со скоростями теплового движения молекул, закон сопротивления Ньютона уже не справедлив. При медленном движении сила сопротивления пропорциональна скорости тела, а не ее квадрату, как при быстром движении. Такая ситуация возникает, например, при движении мелких капель дождя в облаке или при оседании осадка в стакане. Однако в современной технике с ее стремительными скоростями обычно справедлив закон сопротивления Ньютона.

Казалось бы, раз известны законы сопротивления, можно объяснить гудение проводов или пение эоловой арфы. Но это не так. Ведь если бы сила сопротивления была постоянной, то ветер просто натягивал бы струну, а не возбуждал ее звучания.

В чем же дело? Чтобы объяснить звучание струны, оказывается недостаточно тех простых представлений о силе сопротивления, которые мы только что разобрали. Давайте обсудим более детально некоторые типы течения жидкости вокруг неподвижного тела (это удобнее, чем рассматривать движение тела в неподвижной жидкости, а ответ, разумеется, будет тот же).

Посмотрите на рисунок 1. Это случай малой скорости жидкости. Линии тока огибают цилиндр (на рисунке показано сечение) и плавно продолжаются за ним. Такой поток называется ламинарным. Сила сопротивления в этом случае обязана своим происхождением внутреннему трению в жидкости — вязкости и пропорциональна V. Скорость жидкости в любом месте, так же как и сила сопротивления, не зависит от времени (поток стационарный). Этот случай для нас не представляет интереса.

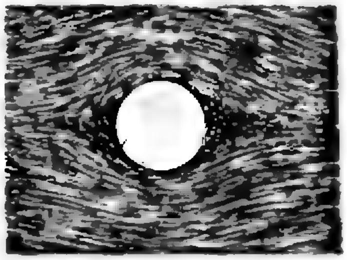


Рис. 1.

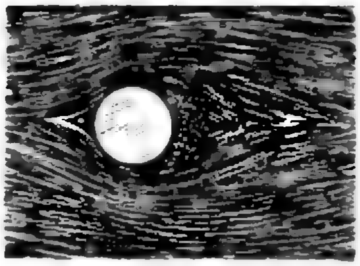


Рис. 2.

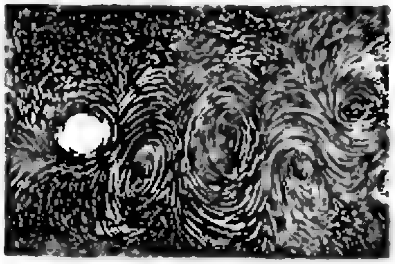


Рис. 3.

Но взгляните на рисунок 2. Скорость потока увеличилась, и в области за цилиндром появились водовороты жидкости — вихри. Трение в этом случае уже не определяет полностью характера процесса. Все большую роль начинают играть изменения количества движения, происходящие не в микроскопическом масштабе, а в масштабе, сравнимом с размерами тела. Сила сопротивления пропорциональна V^2.

И, наконец, на рисунке 3 скорость потока несколько возросла, и вихри выстроились в правильные цепочки. Вот он, ключ к объяснению загадки! Эти цепочки вихрей, периодически срывающихся с поверхности струны, и возбуждают ее звучание.

Явление правильного расположения вихрей позади обтекаемого тела впервые было изучено экспериментально немецким физиком Бенаром в начале нашего века. Но только благодаря последовавшим вскоре работам Кармана такое течение, казавшееся сначала весьма своеобразным, получило объяснение. По имени этого ученого система периодических вихрей сейчас называется дорожкой Кармана.

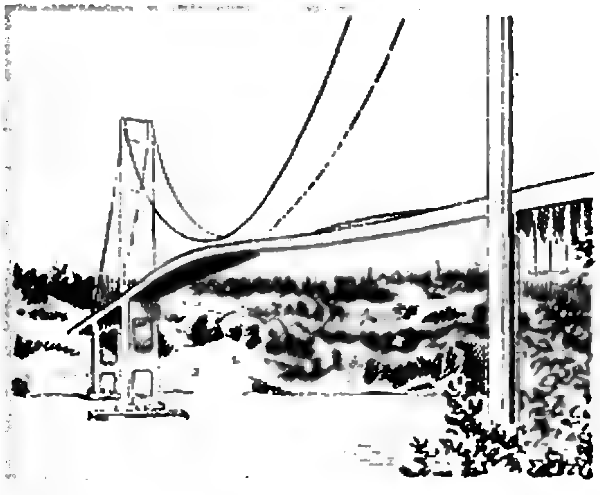


Рис. 4.

Однако по мере возрастания скорости у вихрей остается все меньше и меньше времени, чтобы расплываться на большую область жидкости. Вихревая зона становится узкой, вихри перемешиваются, и поток становится хаотичным и нерегулярным (турбулентным). Правда, при очень больших скоростях в экспериментах последнего времени обнаружено появление какой-то новой периодичности, но детали ее до сих пор еще не ясны.

Может показаться, что вихревая дорожка Кармана — просто красивое явление природы, не имеющее практического значения. Но это не так. Провода линий электропередачи также колеблются под действием ветра постоянной силы из-за отрыва вихрей. В местах крепления проводов к опорам возникают значительные усилия, которые могут приводить к разрушениям. Под действием ветра раскачиваются высокие дымовые трубы.

Однако, наиболее широкую известность, безусловно, приобрели колебания Такомского моста в Америке. Этот мост простоял всего несколько месяцев и разрушился осенью 1940 года. На рисунке 4 показан вид моста во время колебаний. Вихри отрывались от несущей конструкции проезжей части моста. После длительных исследований мост был воздвигнут снова, только поверхности, обдуваемые ветром, имели другую форму. Таким образом, была устранена причина, вызывающая колебания моста.

Окружение десанта

А. П. Савин

Игра в крестики-нолики на клетчатой бумаге давно стала одним из любимых развлечений школьников и студентов, поскольку ручка или карандаш и листок бумаги в клетку, у них всегда под рукой.

В задаче **М91** был предложен новый вариант этой игры.

М 91. Двое играют в «крестики» и «нолики» на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим своим ходом он должен ставить крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседней с данной клеткой считается любая, имеющая с ней общую сторону или общую вершину. Второй играющий каждым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом друг с другом). Докажите, что, как бы ни играл первый, второй может его «запереть»: добиться того, чтобы первому больше некуда было поставить крестик.

Исследуйте аналогичные игры, в которых второму разрешается за один ход ставить не три, а только два или только один нолик. Каков здесь будет результат при правильной игре партнеров: удастся ли ноликам «запереть» крестики (и какое наибольшее число ходов могут «продержаться» крестики) или игра может продолжаться до бесконечности?

Попробуйте изучить другие варианты этой игры: когда соседними с данной считаются только клетки, имеющие с ней общую сторону; когда плоскость разбита не на квадраты, а на правильные шестиугольники; когда первому разрешается ставить сразу p крестиков, а второму — q ноликов.

Действия крестиков очень похожи на действия десанта, пытающегося избежать окружения, поэтому мы и назвали эту игру «окружение десанта».

Простейший вариант этой игры таков: начинающий ставит крестик, второй — три нолика на любые три свободных поля, затем первый ставит

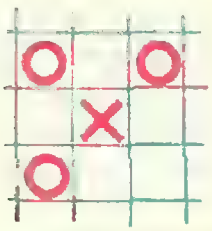


Рис. 1.

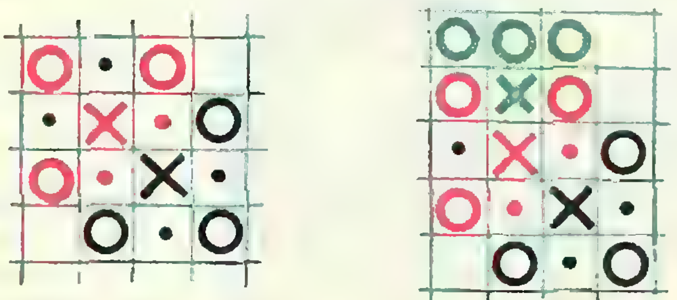


Рис. 2. *а)* *б)*

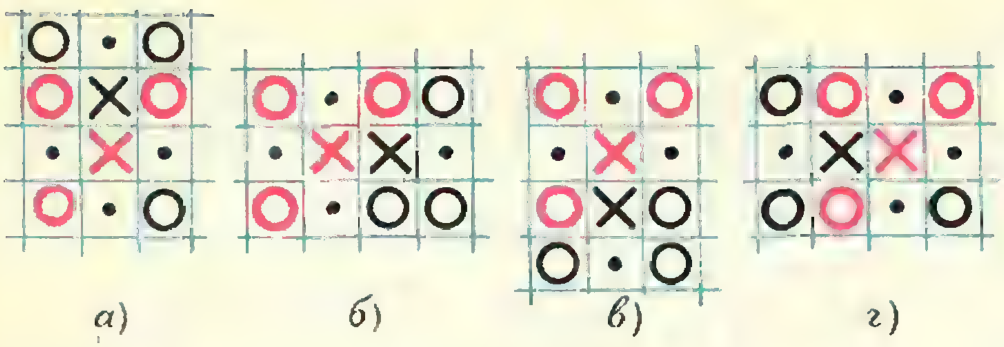

а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 3.

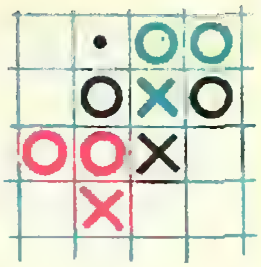


Рис. 4.

еще один крестик на свободное поле, соседнее с тем, где уже стоит крестик, а второй — еще три нолика на свободные поля. И так далее, каждый раз крестики ставятся на свободные поля, соседние с теми, где уже стоят крестики, а нолики — на любые свободные поля. Начинающий старается поставить как можно больше крестиков, а второй — помешать ему это сделать.

В этом варианте задачу решили многие наши читатели. Они показали, что начинающий может поставить не более 7 крестиков. На рисунке 1 показана стратегия ноликов при первом ходе, обеспечивающая этот результат. Действительно, после этого начинающий может поставить крестик на одно из пяти полей. Нетрудно видеть, что, лишь ставя его на юго-восточное поле, первый может надеяться при правильной игре поставить семь крестиков, потому что при ответе ноликов, изображенном на рисунке 2, *а*, он может надеяться лишь на то, чтобы поставить крестики на поля, отмеченные точками, причем из двух полей, отмеченных красными точками, он сможет поставить крестик не более чем на одном. Как при этом должен ставить нолики второй, ясно из рисунка 2, *б*.

Если же начинающий ставит второй крестик на другое поле, то после хода второго получается одна из ситуаций, изображенная на рисунке 3, где уже лишь 4 поля (они также отмечены точками), на которые начинающий может поставить крестик при правильной игре второго. Она заключается в отрезании всех полей продвижения от поставленного вместо точек крестика, аналогично тому, как это делалось и в первом случае (рис. 2, *б*).

Попробуем теперь усложнить задачу ноликов. Разрешим второму ставить при своем ходе не по 3 нолика, а лишь по 2. Интересно, что если с самого начала пытаться ставить нолики на клетки, соседние с крестиками, то второй не сможет задержать движения крестиков. Посмотрите на рисунок 4. Здесь нолики не могут помешать продвижению крестиков вверх (красные значки — первый ход, черные — второй, зеленые — третий).

Это ясно, поскольку каждым своим ходом нолики перекрывают лишь два поля из трех, ведущих вверх.

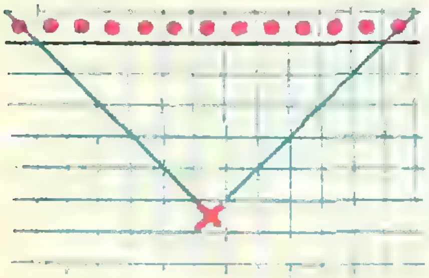


Рис. 5.

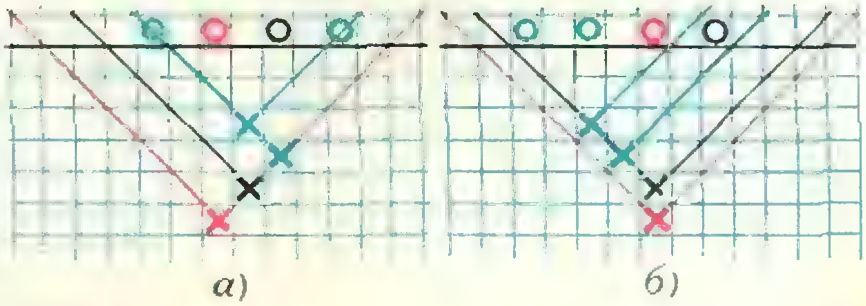

а) *б)*

Рис. 6.

Казалось бы, что тут уже нолики не смогут окружить крестики и, тем более, если на каждый крестик второй ставит лишь по одному нолику. Последнее утверждение содержится в подавляющем большинстве писем.

А если второму попытаться организовать вдалеке от первого крестика оборону? Сможет ли он хотя бы помешать движению крестиков вверх? Оказывается, да! И даже в случае, если на каждый крестик первого второй отвечает лишь одним ноликом. Эту стратегию второго (она нам понадобится и для окончательного решения задачи) назовем «отражением лобовой атаки».

Итак, мы пытаемся остановить движение крестиков вверх. Посмотрите на рисунок 5. Казалось бы, невозможно не пропустить крестики выше горизонтальной линии, ведь через шесть ходов крестики могут оказаться на любом из 13 квадратов, отмеченных точками, а второй за это время сможет поставить лишь 6 ноликов. Теперь посмотрим на рисунок 6. Игра началась, и с каждым ходом крестики угрожают все меньшему числу полей за горизонтальной чертой.

После второго хода — одиннадцати полям, после третьего — девяти, после четвертого — семи. Но второму удается поставить за четыре хода нолики так, что на угрожаемых полях они стоят через поле. (Попробуйте доказать самостоятельно, что при любой игре первого второй сможет это сделать.)

Теперь после пятого хода крестиков получится одна из двух ситуаций, изображенных на рисунке 7. В случае а) второй может ставить нолики в две оставшиеся незаполненные клеточки в любом порядке, а в случае б) он сначала ставит нолик в среднюю клетку, а потом, в зависимости от хода первого, в левую или в правую, и крестикам путь прегражден.

Итак, «лобовая атака» отбита! Второй может не пропустить крестики выше шестой горизонтали (от той, где стоит первый крестик).

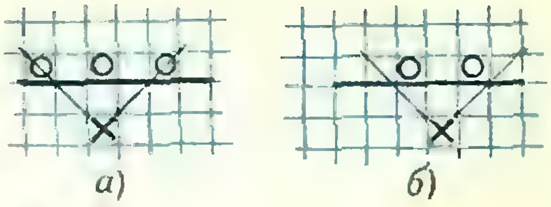

а) б)

Рис. 7.

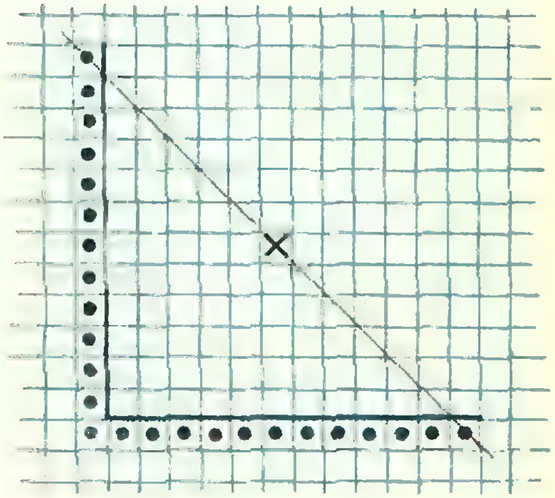


Рис. 8.

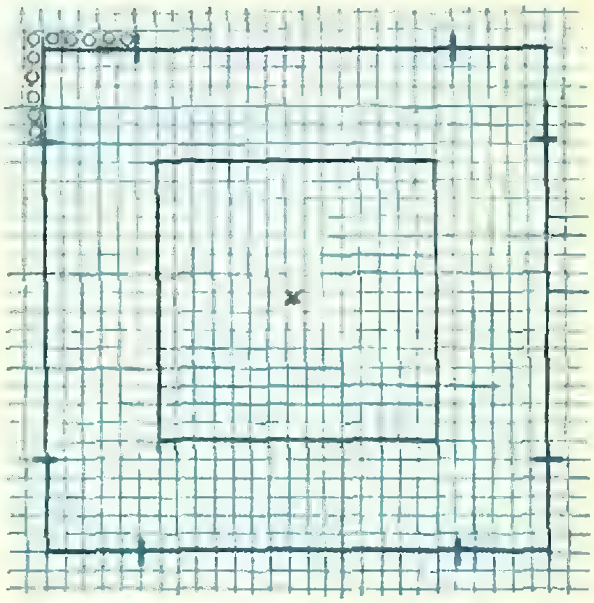


Рис. 9.

Казалось бы, задача уже решена. Ведь таким же образом мы сможем не пропустить крестики в любом из направлений, то есть ограничить, например, все крестики внутри некоторого квадрата. Однако этот вывод преждевременен, мы не учли возможности «атаки на угол».

Если крестик стоит на диагонали обороняемого квадрата, то он угрожает почти вдвое большему числу полей за пределами квадрата, чем при «лобовой атаке» на сторону этого квадрата, например, на рисунке 8 он угрожает, как и раньше (рис. 5), тринадцати полям каждой стороны, а в совокупности 25 полям.

Неужели ноликам не выдержать этой атаки? На помощь ноликам приходит возможность брать в качестве плацдарма обороны стороны сколь угодно большого квадрата. Возьмем большой квадрат (гораздо больший, чем на рисунке 9) и проведем в нем квадрат, отстоящий от сторон первого на шесть клеток. Центр квадрата возьмем в той клетке, где был поставлен первый крестик. Пока крестики будут находиться внутри меньшего квадрата, сторонам квадрата лобовая атака не угрожает и за то время, пока крестики будут продвигаться к стороне (или углу) внутреннего квадрата, нолики смогут укрепить свои позиции в углах большого квадрата, например, поставить в каждом углу по 11 ноликов (рис. 9), тем самым «атака на угол» будет лишена смысла, а атаку на сторону мы научились отбивать, если она начинается с расстояния в шесть клеток от стороны. Чтобы поставить в каждом углу по 11 ноликов (на самом деле можно обойтись и меньшим числом), потребуется внутренний квадрат со стороной в 87 клеток, а следовательно, внешний квадрат будет иметь сторону в 99 клеток.

Точно сформулировать «выигрывающую» стратегию ноликов и исследовать другие варианты этой игры (например, выяснить, при каких p и q нолики не могут «запереть» крестики, если за один ход ставится p крестиков и q ноликов) мы предоставляем читателям.

● ● ●

Задачи

1. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1, пересекаются в одной точке. Обобщить это утверждение на случай шести точек, выбранных на сторонах тетраэдра.

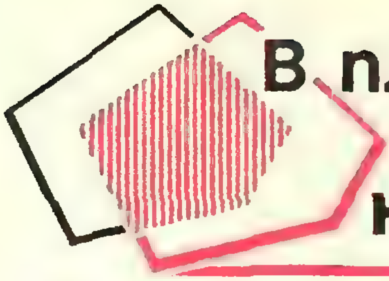
2. Дан пятиугольник $ABCDF$. Через концы каждой его стороны и точку пересечения двух соседних с ней сторон проводят окружность. Доказать, что эти окружности пересекаются в пяти точках (отличных от вершин пятиугольника), лежащих на одной окружности.

3. Через точку P, лежащую внутри угла BAC, провести две равные окружности, одна из которых касается прямой AB, а другая — прямой AC.

4. Две окружности касаются (с одной стороны) прямой l в точке C, а прямая m параллельна l и пересекает обе окружности в точках S, T, X, Y (последовательно). Доказать, что точка C лежит на биссектрисе одного из двух углов, образованных парами касательных к окружностям в точках S, T или X, Y.

5. Треугольник вписан в окружность, причем квадраты длин его сторон пропорциональны длинам перпендикуляров, опущенных из противоположных вершин на фиксированную касательную к окружности. Доказать, что одна из сторон лежит на диаметре окружности.

6. Две окружности радиусов R и r расположены так, что квадрат расстояния между центрами окружностей равен $R^2+14Rr+r^2$. Доказать, что существует бесконечно много троек окружностей, касающихся попарно друг друга и обеих данных окружностей.



В планиметрии — теорема, в стереометрии — нерешенная проблема

И. М. Яглом

В № 6 журнала «Квант» за 1971 год была помещена следующая задача (задача М89):

Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать такие три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник. (Например, на рисунке 1, где многоугольник обведен черной линией, три красные прямые удовлетворяют требуемому условию, а три синие — нет.)

Эта задача имеет много разных решений. Однако прежде чем рассказать ее решение, скажем о том, почему она интересна.

На рисунке 2 вы видите треугольник ABC и три меньших треугольника Ab_1c_1, Ba_1c_2 и Ca_2b_2, подобных ABC и получающихся из ABC сжатиями к точкам A, B и C — вершинам исходного треугольника. Треугольники Ab_1c_1, Ba_1c_2 и Ca_2b_2 не только подобны ABC — они гомотетичны ABC, то есть *подобны ABC и параллельно ему расположены.* (Последнее означает, что отвечающие друг другу, скажем, в подобных треугольниках ABC и Ab_1c_1 отрезки обязательно параллельны между собой.) Ясно, что если треугольники Ab_1c_1, Ba_1c_2 и Ca_2b_2 лишь немного меньше исходного треугольника ABC, то они полностью покрывают треугольник ABC.

На рисунке 3 изображен параллелограмм $ABCD$ и четыре меньших параллелограмма $Ab_1c_1d_1$, $Ba_1d_2c_2$, $Cb_2a_2d_3$ и $Da_3b_3c_3$, получающихся из $ABCD$ сжатиями к его вершинам A, B, C, D. Ясно, что если эти четыре параллелограмма $Ab_1c_1d_1$, $Ba_1d_2c_2$, $Cb_2a_2d_3$ и $Da_3b_3c_3$ лишь немного меньше исходного параллелограмма $ABCD$, то они полностью покрывают его. Таким образом, *всякий треугольник можно покрыть тремя меньшими его и гомотетичными ему треугольниками, а всякий параллелограмм можно покрыть четырьмя меньшими его и гомотетичными ему параллелограммами.*

Но, более того, нетрудно видеть, что 3 есть наименьшее число гомотетичных данному треугольнику ABC треугольников, которыми можно покрыть треугольник ABC, а 4 — наименьшее число гомотетич-

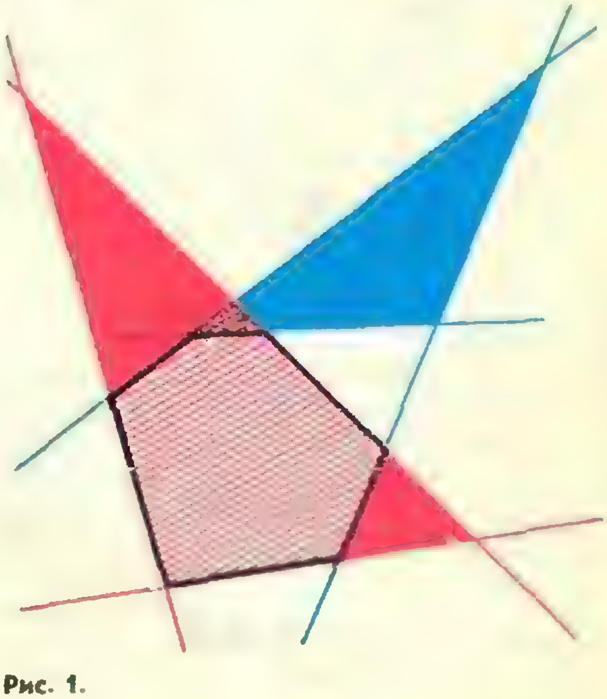


Рис. 1.

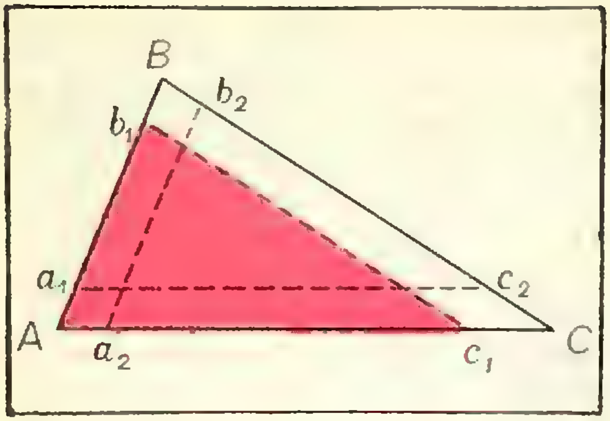


Рис. 2.

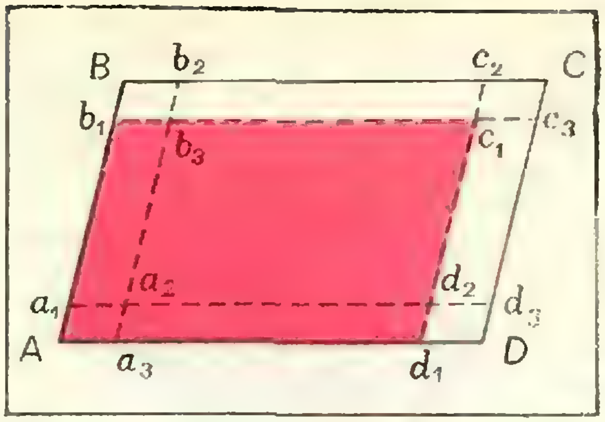


Рис. 3.

ных данному параллелограмму *ABCD* параллелограммов, которыми можно покрыть параллелограмм *ABCD*. В самом деле, если сторона *AB* параллелограмма *ABCD* равна *c*, то и всякий принадлежащий *ABCD* отрезок, параллельный *AB*, будет не превосходить *c*; поэтому в гомотетичном *ABCD* и меньшем *ABCD* параллелограмме всякий параллельный *AB* отрезок будет меньше *c*. Отсюда следует, что обе вершины *A* и *B* параллелограмма *ABCD* не могут быть покрыты (*никаким!*) параллелограммом, гомотетичным *ABCD* и меньшим его. Таким образом устанавливается, что каждую вершину параллелограмма *ABCD* нам придется покрывать своим параллелограммом, меньшим *ABCD* и гомотетичным *ABCD*; поэтому общее число покрывающих *ABCD* меньших параллелограммов неизбежно окажется не меньше 4 (по числу вершин *ABCD*). Точно так же устанавливается, что общее число покрывающих треугольник *ABC* треугольников, гомотетичных *ABC* и меньших его, не может быть меньше 3 (ибо каждую вершину *ABC* придется покрывать своим треугольником).

Задача о том, сколько гомотетичных данному (выпуклому) многоугольнику *M* и меньших его многоугольников достаточно, чтобы покрыть *M*, была поставлена в 1960 году кишиневскими математиками И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом (несколько раньше — в середине 50-х годов — родственная задача была сформулирована немецким геометром Ф. Леви) *).

При этом ими была доказана следующая теорема, которую сегодня часто называют теоремой Гохберга — Маркуса:

Каждый отличный от параллелограмма выпуклый многоугольник M может быть покрыт тремя гомотетичными M и меньшими M многоугольниками; для параллелограмма же наименьшее возможное число гомотетичных ему и меньших его многоугольников (конечно, тоже параллелограммов!), *которыми можно полностью покрыть исходный параллелограмм, равно четырем.*

Оригинальное доказательство теоремы Гохберга — Маркуса (причем — сразу для произвольных выпуклых фигур) читатель может найти во второй из названных в конце этой замет-

---

*) И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус сформулировали эту задачу не для выпуклых многоугольников, а для произвольных *выпуклых фигур F* (то есть фигур *F*, через каждую точку границы которой можно провести прямую *l* так, что *F* лежит по одну сторону от *l* — сравните рисунки 4, *а* и *б*). Ясно, что так поставленная задача шире той, о которой говорим мы (ибо выпуклый многоугольник является частным случаем выпуклой фигуры). Однако можно доказать, что решение общей (относящейся к произвольным выпуклым фигурам) задачи можно свести к решению той же задачи для выпуклых многоугольников (это следует из того, что каждую выпуклую фигуру *F* можно заменить «очень похожим на нее» выпуклым многоугольником *M* — например, вписанным в *F* многоугольником с очень большим числом сторон).

ки книг; здесь же мы покажем, как можно вывести доказательство этой теоремы из результата задачи М89. В самом деле, пусть ABC — фигурирующий в условии этой задачи треугольник, содержащий внутри себя (отличный от параллелограмма!) выпуклый многоугольник $M \equiv A_1A_2A_3\ldots A_n$, причем сторона AB треугольника содержит отрезок A_1A_2, сторона BC — отрезок A_kA_{k+1} и сторона CA — отрезок A_lA_{l+1} (рис. 5). Выберем теперь внутри M некоторую точку O и соединим ее с какими-то точками P, Q и R отрезков A_1A_2, A_kA_{k+1} и A_lA_{l+1}. Три отрезка OP, OQ и OR разрежут M на три части m_1, m_2 и m_3. Сожмем теперь многоугольник M к точке A. Если полученный таким путем из M многоугольник M_1 (см. рис. 5) мало отличается от M, то он обязательно полностью покроет m_1 — для доказательства этого достаточно сравнить границы многоугольников M_1 и m_1 (проведите сами аккуратно это рассуждение!). Аналогично показывается, что гомотетичными M и меньшими M многоугольниками M_2 и M_3, получающимися из M сжатиями к точкам B и C, можно полностью покрыть части m_2 и m_3 многоугольника M. Итак, M *можно покрыть тремя многоугольниками* (многоугольниками M_1, M_2 и M_3), *гомотетичными M и меньшими M.*

Мы доказали, что для каждого отличного от параллелограмма выпуклого многоугольника M число гомотетичных M и меньших M многоугольников, которыми можно полностью покрыть M, *не больше чем* 3. Можно также доказать, что для любого (не вырождающегося в отрезок прямой) такого многоугольника это число в точности *равно* 3 (см. задачу 1 на стр. 32).

* * *

Вернемся теперь к задаче М89. Вот одно из простейших ее решений. Заметим, что *если выпуклый многоугольник M не треугольник и не параллелограмм, то у него найдутся две непараллельные стороны, не имеющие общей вершины* [*]). Продолжая их до точки пересечения, мы получим выпуклый многоугольник M_1 с меньшим чем у M числом сторон, содержащий M (рис. 6). Если этот многоугольник M_1 снова не треугольник и не параллелограмм, то мы и с ним можем поступить, как с M — и так до тех пор, пока не получим содержащий M *треугольник или параллелограмм*, стороны которого, очевидно, получаются продолжением сторон M.

Если последний многоугольник, к которому мы придем в процессе наших преобразований исходного многоугольника M, является *треугольником*, то тем самым задача М89 оказывается решенной (рис. 7). Если же в конце мы придем к *парал-*

---

[*]) Если многоугольник M имеет пять или больше сторон, то это следует из того, что никакой выпуклый многоугольник не имеет трех или более параллельных между собой сторон; для четырехугольника же, отличного от параллелограмма, это следует из определения параллелограмма.

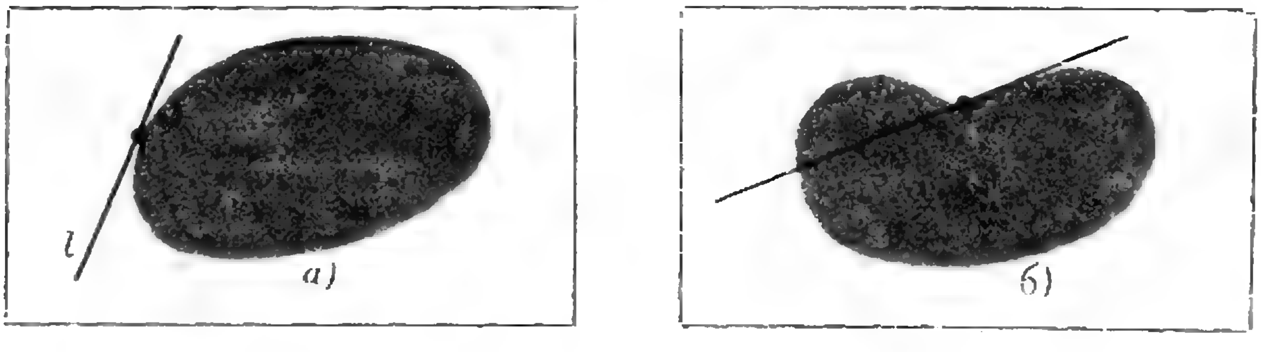


Рис. 4.

лелограмму $ABCD$, но сам исходный многоугольник M не параллелограмм, то какая-то из вершин A, B, C и D параллелограмма не будет являться вершиной M. Пусть, например, точка A не является вершиной M (рис. 8). Рассмотрим тогда ближайшую к A вершину K, принадлежащую отрезку AB, и исходящую из этой вершины K сторону KL, не принадлежащую прямой AB. Так как многоугольник M выпуклый и одна из его сторон принадлежит отрезку AD, то сторона KL может идти только так, как это изображено на рисунке 8 (ибо весь многоугольник M должен лежать по одну сторону от KL). Но в таком случае три прямые BC, CD и KL, совпадающие с тремя сторонами многоугольника M, определяют удовлетворяющий условиям задачи М89 треугольник.

Итак, *единственным многоугольником, для которого не существует требуемого треугольника, является параллелограмм.*

Итак, мы видим, что теорема Гохберга — Маркуса не является особенно сложной — самым трудным пунктом ее доказательства можно считать решение задачи М89. Но от И. Ц. Гохберга и А. С. Маркуса (а также и от Ф. Леви) идет стереометрический вариант той же задачи:

Для каждого выпуклого многогранника M *указать наименьшее число гомотетичных* M (то есть подобных M и параллельно M расположенных*)) *многогранников, которыми можно полностью покрыть многогранник* M — и эта проблема оказалась несравненно труднее соответствующей планиметрической задачи.

Нетрудно видеть, что для тетраэдра T (треугольной пирамиды) на-

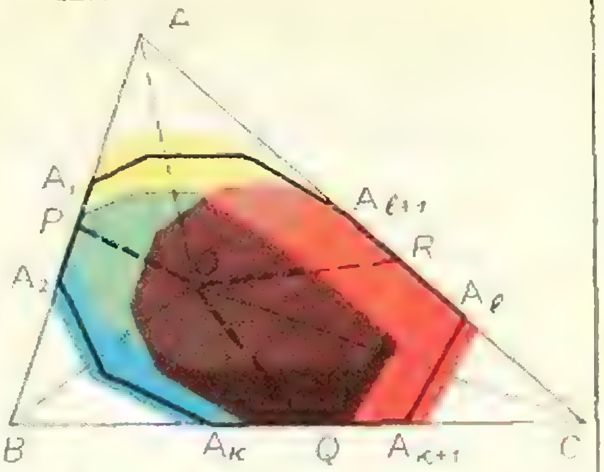


Рис. 5.

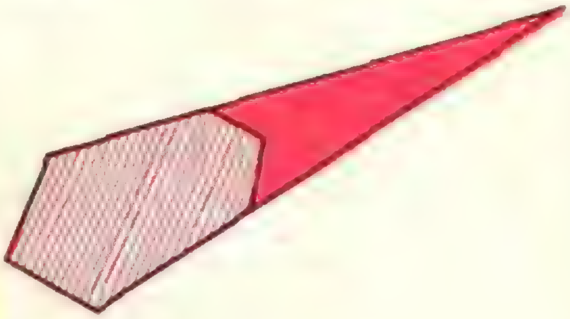


Рис. 6

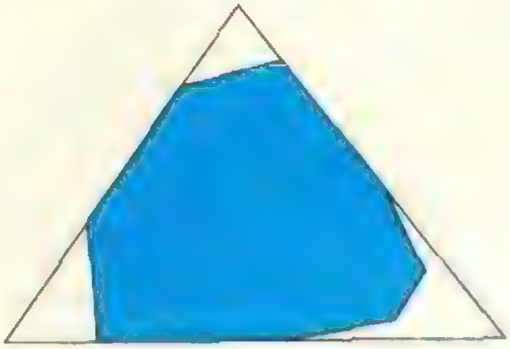


Рис. 7.

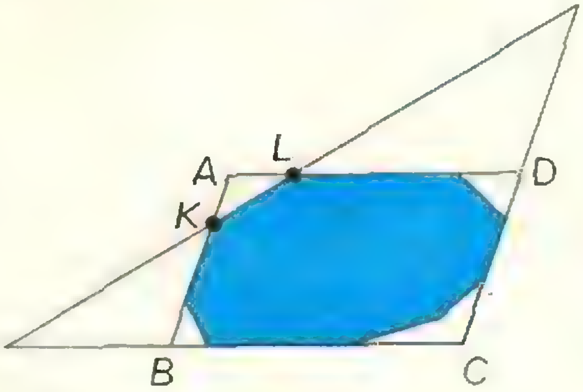


Рис. 8.

---

*) Два (выпуклых) многогранника M и μ называются *гомотетичными*, если они подобны (то есть это суть многогранники одного вида и все размеры одного из них пропорциональны соответствующим размерам второго), и каждому отрезку AB многогранника M соответствует в многограннике μ отрезок ab, параллельный AB.

именьшее число гомотетичных ему и меньших его тетраэдров, которыми можно покрыть T, равно четырем; для куба же K соответствующее число меньших кубов равно восьми (докажите это!). Нетрудно видеть, что интересующее нас в поставленной стереометрической задаче число *может принимать любые значения между* 4 *и* 8 (см. задачу 2 в конце статьи). Существует предположение, что *никакие другие значения это число принимать не может* (причем восьми оно равно только в том случае, когда рассматриваемый многогранник является *параллелепипедом*!). Однако доказать это утверждение пока удалось только в одну сторону (см. задачу 3 в конце статьи). Доказательство же (или опровержение) того, что рассматриваемое число никогда не может быть больше восьми, пока составляет проблему, решить которую не удалось никому — и это несмотря на то, что эту проблему пытались решить многие известные математики.

Раздел геометрии, к которому относятся рассматриваемые в настоящей заметке задачи, возник сравнительно недавно — всего каких-нибудь 15—20 лет назад. Этот раздел носит название *комбинаторной геометрии*; для него характерна простота условий большинства рассматриваемых задач (зачастую понятных любому школьнику!), но, к сожалению, решения этих задач, как правило, довольно сложны. Комбинаторной геометрии посвящено сегодня много десятков книг и сотни, если не тысячи, научных статей. Некоторые доступные и школьникам книги указаны в конце этой заметки.

Все поставленные ниже задачи относятся к комбинаторной геометрии; они тесно связаны с темой настоящей заметки. Звездочками отмечены задачи, решение которых не известно автору заметки; здесь особенно хотелось бы обратить внимание на задачу 6, которая кажется мне весьма интересной (но, возможно, и весьма трудной!).

Упражнения

1. Доказать, что никакой выпуклый многоугольник (не вырождающийся в отрезок прямой) нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными данному и меньшими его.

2. Обозначим наименьшее число гомотетичных выпуклому многограннику M и меньших его многогранников, которыми можно полностью покрыть M, через $s(M)$; тогда $s(T)=4$, где T—тетраэдр, и $s(K)=8$, где K — куб.

Укажите такие три многогранника A, B и Г, что

$$s(A)=5, \quad s(B)=6, \quad s(Г)=7.$$

3. Докажите, что никакой (не вырождающийся в плоский многоугольник) выпуклый многогранник M нельзя покрыть тремя многогранниками, гомотетичными M и меньшими M.

4. Докажите, что каждый выпуклый многоугольник можно покрыть тремя меньшими M и подобными M (но не обязательно гомотетичными M) многоугольниками.

5. Каково наименьшее число меньших M и подобных M многоугольников, которыми можно покрыть следующий выпуклый многоугольник M:

а) треугольник со сторонами a, b и c (искомое число, разумеется, может зависеть от величин a, b и c);

б) прямоугольник со сторонами m и n;

в*) параллелограмм со сторонами m и n и углом $\alpha \leqslant 90$?

6*). Из результата задачи 4 следует, что минимальное число меньших выпуклого многоугольника M и подобных ему многоугольников, которыми можно его покрыть, всегда равно 2 или 3. Охарактеризовать класс тех многоугольников M, для которых это число равно 2.

Литература по комбинаторной геометрии

1. Г. Хадвигер, Г. Дебруннер. Комбинаторная геометрия плоскости, М., «Наука», 1965.

2. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, Разбиение фигур на меньшие части, М., «Наука», 1971.

3. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., «Наука», 1965.

4. И. М. Яглом. О комбинаторной геометрии, М., «Знание», 1971.

Неужели открытие?

После рассмотрения приближенных численных решений уравнений высших степеней методами проб, хорд, касательных и итераций на итоговом факультативном занятии по теме: «Приближенные решения уравнений», учащиеся попробовали исследовать следующий «новый» метод численного решения уравнений.

Пусть на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень x_0, а функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке и на концах его принимает значения разных знаков. Проведем хорды AC и BC дуги графика заданной функции на отрезке $[a, b]$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A\,[b;\ f(b)]$ и $C\,(x_0;\ 0)$:

$$\frac{f(b)-y}{f(b)-0}=\frac{b-x}{b-x_0},$$

из которого находим

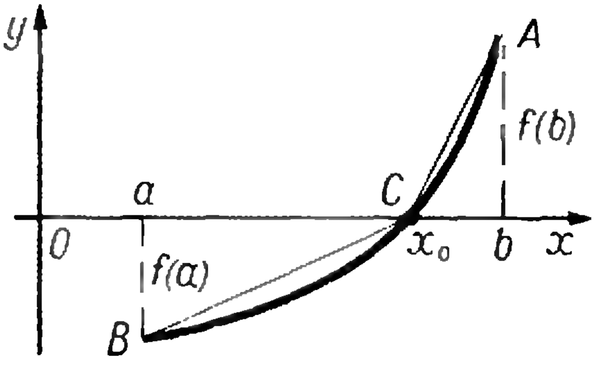
$$y=f(b)-\frac{b-x}{b-x_0}f(b).$$

Аналогично запишем уравнение прямой, проходящей через точки $B\,[a;\ f(a)]$ и $C\,(x_0;\ 0)$:

$$\frac{f(a)-y}{f(a)-0}=\frac{a-x}{a-x_0},$$

откуда

$$y=f(a)-\frac{a-x}{a-x_0}f(a).$$



Чтобы найти координаты точки пересечения этих прямых, решим систему

$$\begin{cases} y=f(b)-\dfrac{b-x}{b-x_0}f(b), \\ y=f(a)-\dfrac{a-x}{a-x_0}f(a). \end{cases}$$

Выписывая цепочку равенств

$$f(b)-\frac{b-x}{b-x_0}f(b)=f(a)-\frac{a-x}{a-x_0}f(a),$$

$$f(b)\left[1-\frac{b-x}{b-x_0}\right]=f(a)\left[1-\frac{a-x}{a-x_0}\right],$$

$$f(b)\cdot\frac{x-x_0}{b-x_0}=f(a)\cdot\frac{x-x_0}{a-x_0},$$

$$\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{b-x_0}{a-x_0},$$

находим

$$x_0=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}.$$

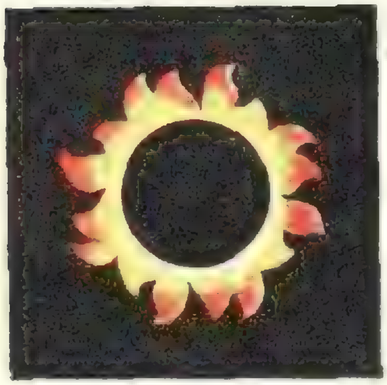
Получена формула для корня данного уравнения $f(x)=0$! Учащиеся от неожиданного результата с большим возбуждением восторженно воскликнули даже: «Эврика!».

Но через несколько минут в аудитории восстановилась тревожная тишина. Все были ошеломлены и каждого мучал вопрос: «Как же так?» Крупные ученые — математики Абель и Эварист Галуа дали исчерпывающее доказательство, что для всех уравнений выше четвертой степени составить формулы точного решения нельзя.

Где же была допущена ошибка?

Я. М. Клейман

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»



ИСКУССТВЕННОЕ СОЛНЕЧНОЕ ЗАТМЕНИЕ

Р. Вуд

При исследовании солнечной короны желательно иметь искусственную корону со свойствами, как можно более близкими к свойствам настоящей. Приспособление, описанное ниже, предназначено именно для этой цели. Искусственная корона настолько похожа на настоящую, что это поражает всякого, кто был свидетелем полного солнечного затмения. Сходство настолько полное, что стоит добавить несколько деталей для того, чтобы чисто эстетически усилить эффект и получить изображение солнечного затмения, которое трудно отличить от подлинного. Отличие состоит лишь в том, что столбы свечения получаются прямыми, а не искривленными, как на фотографиях. Хорошо воспроизводятся зеленовато-голубой цвет неба и характерный жемчужный блеск короны. Искусственное затмение на лекционных демонстрациях дает аудитории яркое представление о красоте явления. Рисунки и фотографии не производят такого впечатления. Каждый, кто смонтирует описанную ниже установку, будет вознагражден красивой картиной солнечного затмения.

Все, что требуется, — это шестисвечевая лампа накаливания и стеклянный резервуар. Размер резервуара не имеет большого значения, для этой цели хорошо подойдет, например, стеклянный аквариум. Резервуар наполняется чистой водой, к которой добавляется ложка или две спиртового раствора мастики. Мастика моментально выпадает в осадок, и вода становится похожей на молоко.

Провода, ведущие к лампе, пропускаются через короткую стеклянную трубку. К концу трубки при помощи сургуча прикрепляется лампа (рис. 1). Следует обратить внимание на то, чтобы соединение было плотным, иначе в трубку попадает вода. На лампу наклеиваются пять или шесть полос фольги с промежутками 0,5—1 *мм*. Толщина полос примерно такая же. Полосы

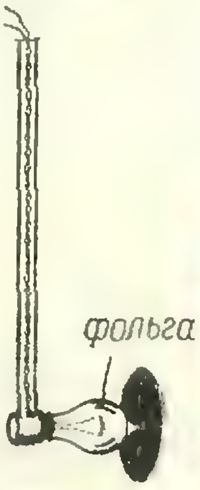


Рис. 1.

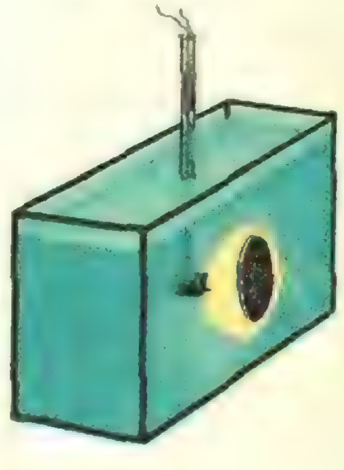


Рис. 2.

наклеиваются на противоположные стороны лампы. Проходящие между ними лучи и образуют столбы свечения. Число полос, их ширину и расположение, дающие наилучший эффект, легко определить опытным путем.

К колбе лампы сургучом или любым не растворяющимся в воде клеем прикрепляется металлический диск. Диаметр диска несколько больше диаметра лампы, он закрывает прямой свет от лампы и соответствует темному диску Луны. Вся система опускается в аквариум, причем лампа находится в горизонтальном положении, а металлический диск помещается вблизи лицевого стекла (рис. 2). Неплохо в цепь лампы включить реостат, тогда можно регулировать интенсивность освещения. При включении тока можно увидеть прекрасную корону, вызванную рассеянием света лампы на взвешенных в воде мелких частичках мастики. Несимметричная нить лампы дает неоднородное освещение, и это усиливает эффект. Если столбы свечения слишком резко очерчены или слишком широки, это легко исправить, заменив полоски фольги.

Однако картина затмения еще не совершенна, цвет «неба» слишком светлый и сравнительно яркий. Если добавить в раствор какой-нибудь голубовато-зеленый краситель, «небо» приобретает таинственный цвет и корона выступает более отчетливо. Добавлением краски можно добиться того, что «небо» будет сильно окрашено, и при этом ни в малейшей степени не изменится цвет короны. Это обстоятельство весьма удивительно, так как и цвет «неба», и цвет короны усиливаются одними средствами.

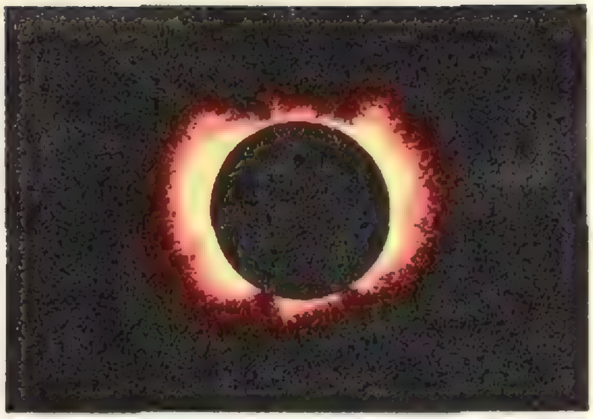


Рис. 3.

Итак, получено прекрасное воспроизведение околосолнечной атмосферы, корона бледно-золотого цвета с жемчужным блеском, обладающая различимой структурой. Видны выступающие туманные столбы свечения, теряющиеся на голубовато-зеленом фоне «неба». Благодаря неоднородному освещению видны не только столбы, но и затемненные области. Эффект усиливается, если глаза полузакрыты.

Рисунок 3 сделан с фотографии одного из таких искусственных затмений. К сожалению, значительная часть тонких деталей, полученных на негативе, при печати утеряна.

Публикуемая статья заимствована из журнала «Nature» за 1901 год. Публикация подготовлена Г. А. Сорокиным.

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА „КВАНТА"

Мы уже сообщали (см. «Квант» № 1 за 1970 г. и 1971 г.), что школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад. За прошлый, 1971 год редакция получила более полутора тысяч писем с решениями и отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже мы публикуем список школьников 7—10 классов, которые получили право участвовать в Московской и Ленинградской городских олимпиадах, а также в областных, краевых и республиканских (в АССР и союзных республиках без областного деления) олимпиадах.

К участию в математической олимпиаде допущены

А. Блохин — Киселевск Кемеровской обл., с. ш. 27;
С. Боубатрын — Молд. ССР, п. Глодяны, с. ш. 2;
Л. Брагинский — Фрунзе, с. ш. 61;
А. Бредо — Минск, с. ш. 10;
А. Бугай — Изяслав, с. ш. 5;
А. Винер — с. Городковка Винницкой обл., с. ш. 1;
А. Вольберг — Ленинград, с. ш. 239;
Г. Высоцкая — Красноярск, с. ш. 81;
А. Гольберг — Москва, с. ш. 2;
А. Гордиенко — с. Полтавченское Кущевского р-на Краснодарского края, с. ш. 37;
А. Григорян — Баку, с. ш. 211;
В. Грицевич — Чортков Тернопольской обл., с. ш. 1;
Е. Гундарь — Ворошиловград, с. ш. 17;
Л. Дацевич — Ленинград, с. ш. 38;
А. Жумадильдаев — Алма-Ата, шк.—инт. 56
В. Запорожская — Сосница Черниговской обл.;
А. Заславский — Калинин, с. ш. 20;
И. Игнатьев — с. Сарманово ТАССР;
М. Илларионов — Воронеж. с. ш. 58;
И. Кашапов — Москва, фмш МГУ;
Ю. Кисин — Старая Русса, с. ш. 1;
Т. Кислицина — с. Шаранга Горьковской обл.;
Л. Книжнерман — Москва, с. ш. 259;
С. Конягин — Саратов, с. ш. 19;
В. Копылов — Уфа, с. ш. 7;
В. Кореняко — Воронеж, с. ш. 58;
Н. Корниенко — Минск, с. ш. 50;
Р. Косой — Одесса, с. ш. 116;
А. Каримов — Москва, фмш при МГУ
А. Кутуков — Баку, с. ш. 151;
Л. Лазарева — Ленинград, с. ш. 298;
В. Логинов — Москва, с. ш. 91;
В. Лузгин — Москва, фмш МГУ;
С. Лягушин — Днепропетровск, с. ш. 23;
А. Макаричев — Львов, с. ш. 14;
Г. Макаров — Златоуст, с. ш. 25;
А. Меркурьев — Ленинград, фмш;
М. Перельмутер — Киев, с. ш. 145;
М. Прегер — Томск, с. ш. 51;
А. Пухальский — Москва, с. ш. 2;
А. Редченко — с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл., Куяновская с. ш.;
М. Розов — Минск, с. ш. 50;
А. Сбоев — п. Медведок Нолинского р-на Кировской обл.;

В. Сервах — Фрунзе, с. ш. 61;
Ш. Слепой — Черновцы, с. ш. 5;
Б. Слепченко — Челябинск, с. ш. 106;
А. Слинкин — Москва, с. ш. 2;
В. Терентьев — г. Павлово Горьковской обл., с. ш. 9;
Я. Томсинский — Ленинград, с. ш. 211;
А. Удальцов — Калининград Московской обл., с. ш. 8;
В. Файтелевич — Армавир, с. ш. 1;
Н. Фаткуллин — Казань, с. ш. 131;
Г. Фильковский — Баку, с. ш. 134;
О. Худавердян — Ереван, фмш;
Е. Часовников — с. Парыгино Зыряновского р-на, В-Казахстанской обл.;
А. Черняк — Минск, с. ш. 50;
А. Шамаев — Москва; с. ш. 179;
А. Шерстюк — Николаев, с. ш. 2;
Р. Шигапов — Люберцы Московской обл., с. ш. 6;
Ф. Шмидель — Москва, с. ш. 444;
И. Шпарлинский — Москва, с. ш. 2;
В. Шувгез — г. Электросталь Московской обл., с. ш. 14.

К участию в физической олимпиаде допущены

В. Авсейков — Севастополь, с. ш. 43;
А. Александров — Глазов, с. ш. 14;
П. Амосов — Ярославль, с. ш. 12;
С. Арасланова — Нижне-Ивкинская с. ш. Куменского р-на Кировской обл.;
В. Белов — Вологда, с. ш. 8;
А. Блохин — Киселевск Кемеровской обл., с. ш. 27;
Л. Брагинский — Фрунзе, с. ш. 61;
А. Братковский — Москва, с. ш. 62;
И. Братовская — г. Усолье-Сибирское, с. ш. 2;
А. Будников — Славянск Донецкой обл., с. ш. 11;
А. Бузулуцков — Новосибирск, с. ш. 130;
С. Галахваридзе — Тбилиси, фмш;
С. Горбулин — Красногвардейское Ставропольского края, с. ш. 1;
Е. Громак — Новокузнецк, с. ш. 102;
М. Дзик — с. Кратово Аромашевского р-на Тюменской обл.;
Л. Дацевич — Ленинград, с. ш. 38;
Е. Долгов — Москва, с. ш. 681;
Г. Долидзе — Тбилиси, фмш;
В. Долматов — Ташкент, с. ш. 147;
М. Забежинская — Ленинград, с. ш. 211;
С. Запесочный — Ужгород, с. ш. 3;
О. Заумыслова — Москва, с. ш. 842;
Н. Зыков — Саратов, с. ш. 13;
А. Истомин — Подольск, с. ш. 13;
Я. Итин — г. Речица Гомельской обл., с. ш. 5;
М. Кацнельсон — Магнитогорск, с. ш. 53;
Ю. Кисин — Старая Русса, с. ш. 1;
Т. Кислицина — с. Шаранга Горьковской обл.;
Л. Книжнерман — Москва, с. ш. 259;
Л. Коган — Черновцы, с. ш. 35;
М. Колодочкин — Москва, с. ш. 612;
П. Конев — г. Плес Ивановской обл., с. ш. 3;
В. Кореняко — Воронеж, с. ш. 58;
С. Корнилов — Грозный, с. ш. 2;
В. Коротких — Новокузнецк, с. ш. 11;
В. Котенов — Москва, с. ш. 215;
В. Крылов — Иваново, с. ш. 6;
С. Кузьмич — Житомир, с. ш. 8;
В. Кулич — г. Иваново Брестской обл., с. ш. 2;
В. Кууск — Ржев, с. ш. 4;
Г. Левин — Куйбышев, с. ш. 135;
Ю. Лурье — Грозный, с. ш. 1;
А. Мамуля — с. Дыбинцы Богуславского р-на Киевской обл.;
Ю. Марзанов — х. Родниковский Краснодарского края, с. ш. 9;
М. Мирон — Куйбышев, с. ш. 11;
И. Мацяс — Макеевка, с. ш. 22;
Л. Менькова — г. Александров Владимирской обл., с. ш. 4;
В. Надежко — Ленинград, с. ш. 239;
В. Неджельский — Ленинград, с. ш. 30;
А. Панфилов — Свердловск, с. ш. 43;
Ю. Полонский — Зеленодольск ТАССР, с. ш. 3;
С. Поташев — Ульяновск, с. ш. 48;
М. Прегер — Томск, с. ш. 51;
Л. Рудицер — Харьков, с. ш. 118;
Л. Сафиуллин — с. Б. Сабы ТАССР;
А. Семенов — Фрунзе, с. ш. 9;
И. Сидоров — Москва, с. ш. 738;
Г. Симоненков — Каунас, с. ш. 10;
А. Слепышев — Кривой Рог, с. ш. 95;
М. Соломонович — Кишинев, с. ш. 34;
Е. Сычугов — п. Красный Уралец Курганской обл.;
А. Удальцов — Калининград Московской обл., с. ш. 8;
В. Файтелевич — Армавир, с. ш. 1;
Г. Фаст — Караганда, с. ш. 21;
Г. Фурман — Черновцы УССР, с. ш. 35;
М. Хомченко — Витебск, с. ш. 29;
О. Худавердян — Ереван, фмш;
Е. Часовников — с. Парыгино Зыряновского р-на В-Казахстанской обл.;
С. Чекмарев — Москва, с. ш. 160;
Г. Шепетько — Д.-Городок Брестской обл., с. ш. 2;
А. Шерстюк — Николаев, с. ш. 2;
Р. Шигапов — Люберцы Московской обл., с. ш. 6;
И. Юрченко — Киев, с. ш. 145.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Задачи

Решения задач из «Задачника «Кванта» просим присылать не позднее полутора месяцев после выхода из печати соответствующего номера. На конверте после адреса журнала напишите, решения каких задач вы высылаете (например, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Наука», редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта» М131, Ф134). В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, шестизначный почтовый индекс и адрес (а также школу и класс, в котором вы учитесь).

Звездочкой отмечены более трудные задачи.

М131. Докажите, что четыре точки, в которых биссектрисы углов между продолжениями противоположных сторон вписанного четырехугольника пересекают его стороны, являются вершинами ромба (рис. 1).

Мурат Уртембаев, ученик 10 класса школы № 56 г. Алма-Аты

М132. Пусть по окружности выписано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждое из которых равно (+1) или (—1), причем сумма n попарных произведений соседних чисел равна 0 (как в задаче **М93**, стр. 42) и вообще для каждого $k=1, 2, \ldots, n-1$ сумма n попарных произведений чисел, отстоящих друг от друга на k мест, равна 0 (то есть $x_1x_3+x_2x_4+\ldots=0$, $x_1x_4+x_2x_5+\ldots=0$ и т. д.); пример для $n=4$ дан на рис 2).

а) Докажите, что n — квадрат целого числа.

б)* Существует ли такой набор n чисел при $n=16$?

(Полное решение вопроса: *при каких n такой набор чисел существует, нам не известно.*)

М133. Один из простейших многоклеточных организмов — водоросль «вольвокс» — представляет собой сферическую оболочку, сложенную, в основном, семиугольными, шестиугольными и пятиугольными клетками (то есть клетками, имеющими семь, шесть или пять соседних; в каждой

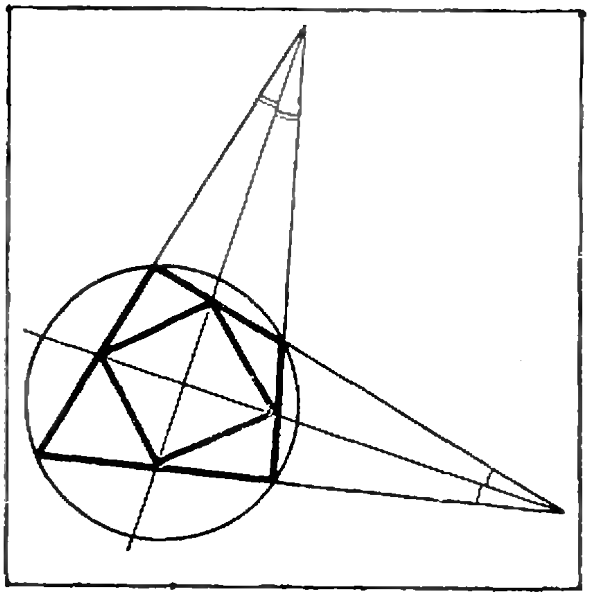


Рис. 1.

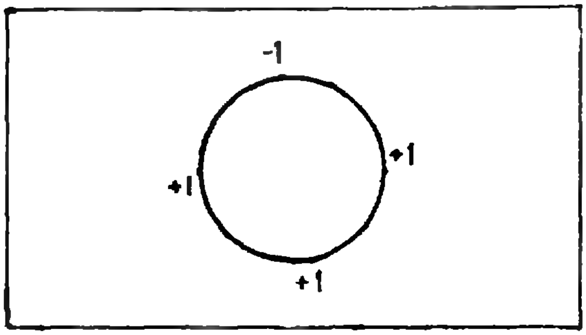


Рис. 2.

«вершине» сходятся три клетки (рис. 3). Бывают экземпляры, у которых есть и четырехугольные, и восьмиугольные клетки, но биологи заметили, что если таких «нестандартных» клеток (менее чем с пятью и более чем с семью сторонами) нет, то пятиугольных клеток всегда ровно на 12 больше, чем семиугольных (всего клеток может быть несколько сотен и даже тысяч). Не можете ли вы объяснить этот факт?

В. Маресин

М134. Какое множество точек заполняют центры тяжести треугольников, три вершины которых лежат соответственно на трех сторонах AB, BC и AC данного треугольника ABC?

Л. Г. Макаров

М135*. Докажите, что для каждого натурального $n>1$ верно тождество

$$\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\times$$
$$\times\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=c_n\sin nx,$$

где c_n — некоторое число (зависящее от n), и найдите c_n.

В. Маресин

Ф143*. Самолет садится на палубу авианосца, имея скорость 100 *км/час*. Зацепившись за канат торможения, самолет пробегает до полной остановки 50 *м*. Определить перегрузки при посадке, если коэффициент упругости каната не меняется по мере его растяжения. Масса пилота 70 *кг*.

Ф144. Каким должен быть коэффициент трения стержня о пол для того, чтобы он мог стоять так, как показано на рисунке 4? Длина нити, удерживающей стержень, равна длине стержня.

И. А. Зайцев

Ф145. Идеальный газ сначала переходит из состояния *1* (P_1, V_1, T_1) в состояние *2* (P_2, V_1, T_2). Затем из состояния *2* газ медленно и адиабатически (без подвода тепла) переходит в состояние *3* (P_3, V_3, T_3). Известно, что при переходе *2→3* газ совершает работу, равную количеству тепла, сообщенного газу при переходе *1→2*. Показать, что $T_3=T_1$. Изобразить процессы *1→2* и *2→3* на плоскости VT.

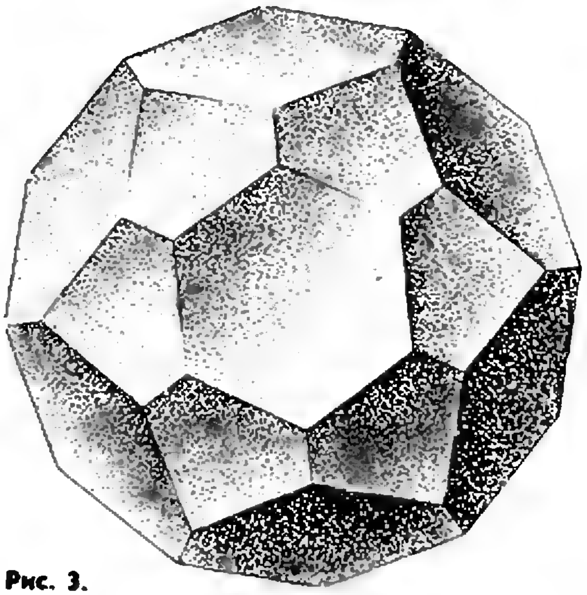


Рис. 3.

Ф146. Имеется батарея с э. д. с. 100 *в* и внутренним сопротивлением 2 *ом*. На нагрузке нужно получить напряжение 20 *в*, причем при изменении сопротивления нагрузки от 50 до 100 *ом* напряжение на ней должно меняться не более чем на 2%. Придумайте простую схему для питания нагрузки и рассчитайте параметры этой схемы.

А. Р. Зильберман

Ф147*. В модели атома Резерфорда и Бора электроны вращаются вокруг ядра на определенных круговых орбитах. При переходе с одной орбиты на другую, более близкую к ядру, атом испускает фотон. Какова энергия и частота фотона, испущенная атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиуса $r_1=2{,}1\cdot10^{-8}$ *см* на орбиту радиуса $r_2=5{,}3\cdot10^{-9}$ *см*?

С. М. Козел

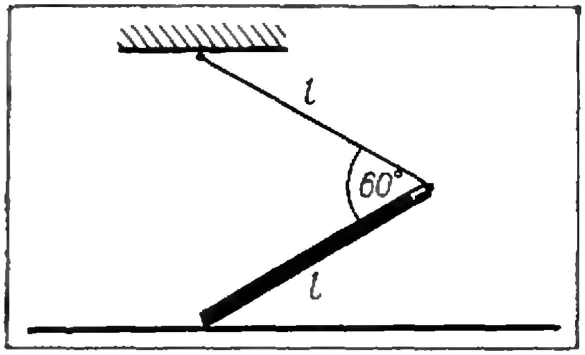


Рис. 4.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач M89—M95; Ф100—Ф107

M89

Решение этой задачи содержится в заметке И. М. Яглома на стр. 28.

M90

Докажите, что если $x_1<x_2<x_3\dots$ — натуральные числа, то

$$\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3}+\dots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}. \qquad (*)$$

Предположим сначала, что $x_n\leqslant n^2$. Тогда

$$\frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i}\leqslant\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i}=\underbrace{\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_i}+\dots+\frac{1}{x_i}}_{x_i-x_{i-1}\ \text{слагаемых}}.$$

Последняя сумма, очевидно, не превосходит содержащей столько же слагаемых суммы

$$\frac{1}{x_{i-1}+1}+\frac{1}{x_{i-1}+2}+\dots+\frac{1}{x_i-1}+\frac{1}{x_i}.$$

Но тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i}<\frac{1}{x_0+1}+\dots+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+1}+\dots+\frac{1}{x_i}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}+1}+\dots+\frac{1}{x_n}<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2}.$$

Предположим теперь, что среди чисел $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ есть большие чем n^2.

Если $x_i>n^2$, то

$$\frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i}<\frac{\sqrt{x_i}}{x_i}=\frac{1}{\sqrt{x_i}}<\frac{1}{n}.$$

Таким образом, каждое слагаемое со знаменателем x_i, большим n^2, меньше $\frac{1}{n}$. Следовательно, сумма всех таких слагаемых (их не более чем n) меньше 1. Но сумма остальных слагаемых, как уже было показано выше, меньше $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2}$, что и завершает доказательство неравенства (*)

Ю. И. Ионин

M91

Решению задачи M91 посвящена отдельная заметка «Окружение десанта» на стр. 24.

M92

Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом строго придерживаться такого распорядка: каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — ездить в магазин за продуктами и каждый пятый день решать задачи по математике. (В первый день Петя проделывал и то, и другое, и третье, и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ездить в магазин и решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?

Эта задача привлекла внимание многих наших читателей. Вот ее подробное решение.

Занумеруем все дни: 1, 2, 3, ..., 90.

Выясним, сколько раз Петя ходил купаться. Он делал это в первый день, а потом через день. Значит, он ходил купаться в дни с нечетными номерами (рис. 1). Таких дней 90:2=45. Следовательно, он ходил купаться 45 раз.

Точно так же можно выяснить, сколько было дней, когда он ездил в магазин, и сколько, когда решал задачи. Ездил в магазин он в те дни, номера которых при делении на 3 дают остаток 1. (Таких дней 90:3=30 (рис. 2).) А задачи решал в те дни, номера которых при делении на 5 дают остаток 1. (Таких дней 90:5=18 (рис. 3).)

Однако для того, чтобы узнать, сколько было у Пети «скучных» и сколько «приятных» дней, этого еще не достаточно. Следует еще узнать, сколько было дней, когда Петя (*a*) купался и ездил в магазин, (*b*) купался и занимался математикой, (*c*) ездил в магазин и занимался математикой и (*d*) купался, ездил в магазин и занимался математикой. Чтобы не решать каждую из этих задач в отдельности, мы докажем такую общую лемму.

Лемма. Среди натуральных чисел, меньших N, остаток q при делении на n дают $\left[\frac{N-1-q}{n}\right]+1$ чисел ($q\neq 0$). (Напомним, что через $[x]$ обозначают целую часть числа x: наибольшее целое число, не превосходящее x.)

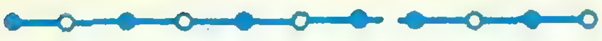


Рис. 1.

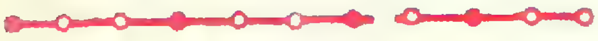


Рис. 2.

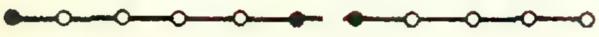


Рис. 3.

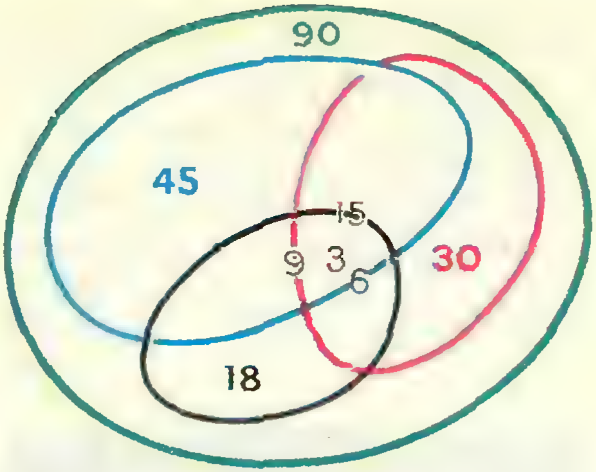


Рис. 4.

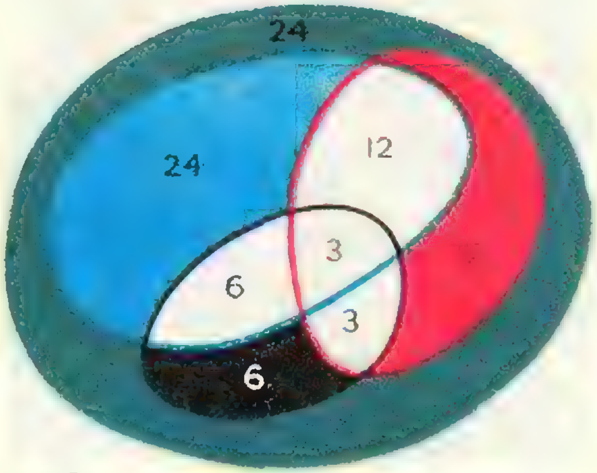


Рис. 5.

Доказательство леммы. Остаток q при делении на n дают числа

$$q,\ q+1\cdot n,\ q+2\cdot n,\ \ldots,\ q+kn,\ \ldots$$

Поскольку нас интересуют только числа, меньшие N, нам нужно найти такое целое k, что $q+kn<N\leqslant q+(k+1)n$. Перепишем это неравенство так:

$$kn\leqslant N-1-q<(k+1)n,$$

и, наконец, так: $k\leqslant\frac{N-1-q}{n}<k+1$.

Поэтому $k=\left[\frac{N-1-q}{n}\right]$, а всего чисел, меньших N и дающих остаток q при делении на n, существует $\left[\frac{N-1-q}{n}\right]+1$ (единица появляется из-за числа $q=q+0\cdot k$).

Теперь уже просто получить ответы на вопросы *a*, *b*, *c* и *d*. Действительно, каждый из этих вопросов можно переформулировать так: сколько натуральных чисел, меньших 91, дают остаток 1 при делении на n_i, где n_i зависит от вопроса: $n_a=6$, $n_b=10$, $n_c=15$ и $n_d=30$. Подставляя эти числа в нашу формулу, получаем, что было:

15 дней, когда Петя купался и ездил в магазин;

9 дней, когда Петя купался и решал задачи;

6 дней, когда Петя ездил в магазин и решал задачи;

3 дня, когда Петя купался, ездил в магазин и решал задачи.

Теперь мы уже можем вычислять, сколько было «скучных» и сколько «приятных» дней. Всего Петя провел в деревне 90 дней. 3 дня он занимался тремя делами, 15+9+6=30 дней — хотя бы двумя делами и 45+30+18=93 дня — хотя бы одним делом. Поэтому (см. рис. 4, 5) 90—93+30—3=24 дня он ничем не занимался. Итак, «скучных» дней было 24. Аналогично вычисляется число «приятных» дней: всего Петя купался 45 дней, купался и занимался еще чем-нибудь он 15+9=24 дня, и, наконец, всеми тремя делами он занимался 3 дня. Окончательно, «приятных» дней было 45—24+3=24.

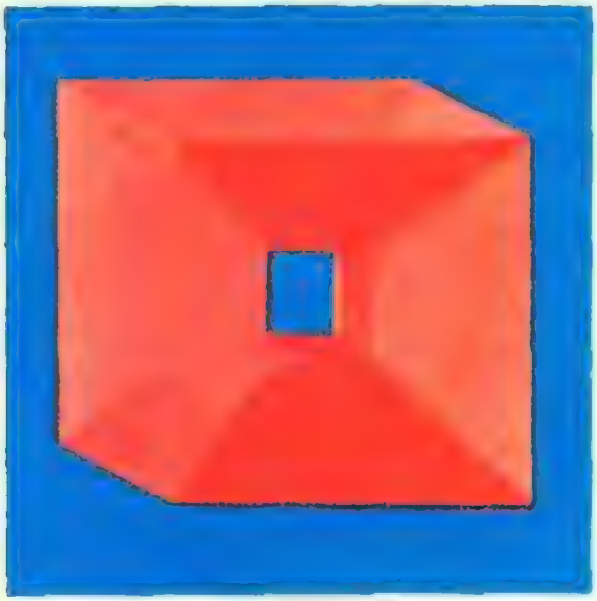


Рис. 6.

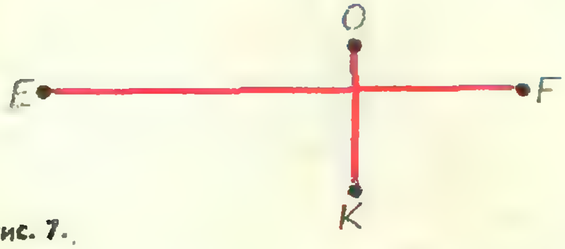


Рис. 7.

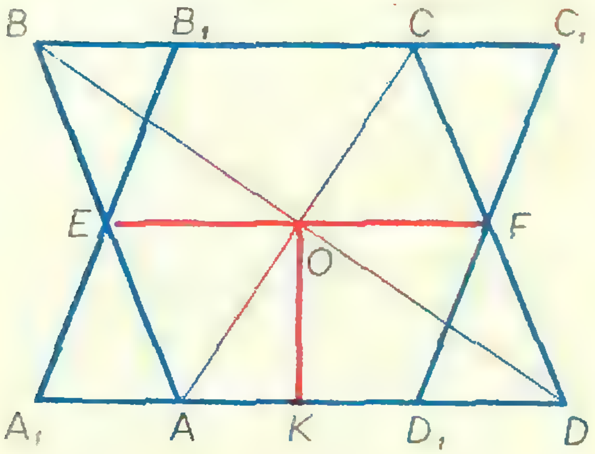


Рис. 8.

M93

Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно плюс или минус единице. Известно, что

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0.$$

Докажите, что n делится на четыре.

Поскольку в сумме $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1$ ровно n слагаемых, то n четно — число минус единиц в этой сумме равно числу плюс единиц. Остается показать, что число минус единиц четно. Перемножим для этого все слагаемые

$$x_1x_2\cdot x_2x_3\cdot x_3x_4\cdot\ldots\cdot x_nx_1=x_1^2x_2^2\cdot\ldots x_n^2=1.$$

Поэтому количество минус единиц действительно четно и n делится на 4.

M94

Докажите, что не существует многогранника, у которого к каждой вершине и к каждой грани примыкает не менее чем по четыре ребра.

Допустим, что такой многогранник существует. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — плоские углы его граней. Сосчитаем двумя разными способами, чему равно их среднее арифметическое. Сгруппируем углы по граням. Тогда, поскольку у каждой грани по крайней мере четыре угла, среднее арифметическое ее углов не меньше 90°. Отсюда сразу следует, что и среднее арифметическое всех углов не меньше 90°. Сгруппируем их теперь по вершинам. Поскольку к каждой вершине примыкает хотя бы четыре угла, а сумма всех углов при вершине меньше 360°, то среднее арифметическое углов при вершине меньше 90° *). Но тогда и среднее арифметическое всех углов меньше 90°. А, как мы доказали выше, оно не меньше 90°. Полученное противоречие и доказывает, что таких выпуклых многогранников не существует.

Другое решение задачи можно получить, основываясь на формуле Эйлера **). Пусть

---

*) В этом месте мы пользуемся выпуклостью многогранника. Как заметили некоторые наши читатели, можно построить невыпуклый многогранник с «дыркой», у которого каждая грань четырехугольник и в каждой вершине сходятся четыре ребра (см. рис. 6).

**) О формуле Эйлера можно прочитать в книге: Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика?, «Просвещение», 1967.

$В$ — количество вершин, $Р$ — ребер, а $Г$ — граней многогранника. Тогда для выпуклого многогранника (и вообще для многогранника без «сквозных дыр») справедливо такое равенство:

$$В-Р+Г=2.$$

В нашем многограннике к каждой вершине примыкает не менее четырех ребер. Поэтому $Р \geqslant \frac{4В}{2}$. (Пополам надо делить потому, что каждое ребро примыкает к двум вершинам.) Аналогично, поскольку к каждой грани примыкает хотя бы четыре ребра, $Р \geqslant \frac{4Г}{2}$. Поэтому $2Р \geqslant 2(В+Г)$, то есть $Р \geqslant В+Г$, а по формуле Эйлера $В+Г=Р+2$. Таким образом, из существования многогранника, обладающего указанными свойствами, следовало бы, что $Р \geqslant Р+2$, что противоречиво.

М95

На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия EF и опущен перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам EF и OK (рис. 7)?

Построение трапеции. Проведем через точку K прямую l, параллельную отрезку EF. Отыщем середину M отрезка EF. Найдем точку N пересечения прямой l и прямой OM. Построим параллелограмм с вершинами E, N и F, для которого отрезок EF является диагональю. Обозначим его четвертую вершину через P. Проведем через нее прямую l', параллельную l. Проведем через точку O прямые, параллельные сторонам параллелограмма $ENFP$. Точки, в которых эти прямые пересекают прямые l и l', являются вершинами трапеции.

Наше построение основано на том, что прямая OM делит основания трапеции пополам. Доказательство этого несложного факта и доказательство правильности построения мы оставляем читателям. (Кроме этого мы пользовались тем, что средняя линия треугольника параллельна его стороне.)

Другое решение задачи можно получить, основываясь на том, что точка Q пересечения продолжений боковых сторон лежит на прямой OM и отношения расстояний до прямых l и l' для точек O и Q одинаковы. Пользуясь этим, после того как построены прямые l и l', можно построить точку Q и, соединив ее с точками E и F, найти вершины трапеции.

Исследование. Разберем различные случаи расположения отрезков EF и OK.

1. Точка O лежит на отрезке EF. Тогда решений нет (если точка O является серединой отрезка EF, то прямую OM можно провести почти произвольно — подойдет любая прямая, пересекающая отрезок EF в точке O. Соответствующие трапеции превращаются в параллелограммы (рис. 8)).

2. Точка O не лежит на отрезке EF. Тогда решение единственно. Однако если перпендикулярные отрезки EF и OK нарисованы произвольно (а не получены «стиранием» настоящей трапеции), то наше построение не всегда приводит к трапеции.

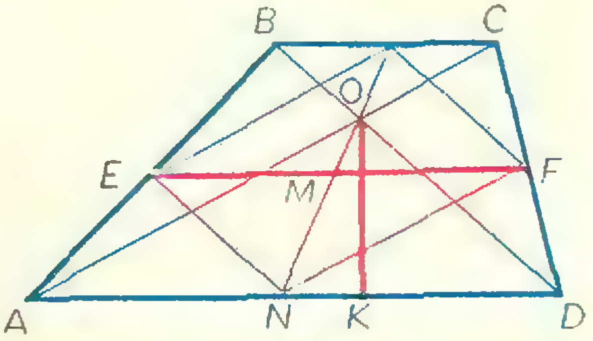


Рис. 9 а.

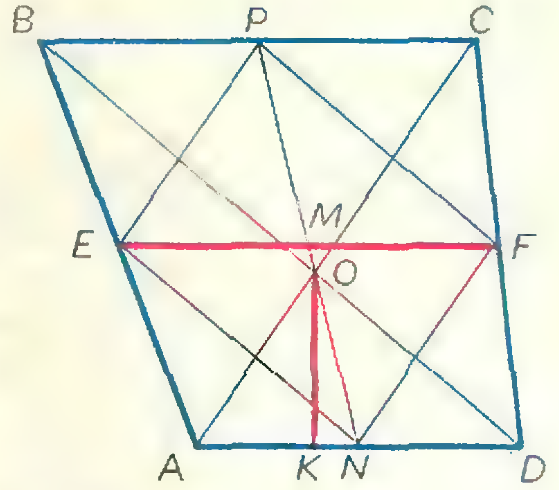


Рис. 9 б.

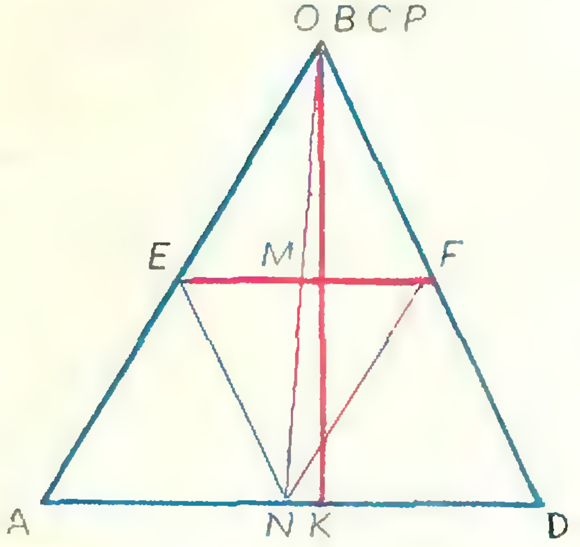


Рис. 10.

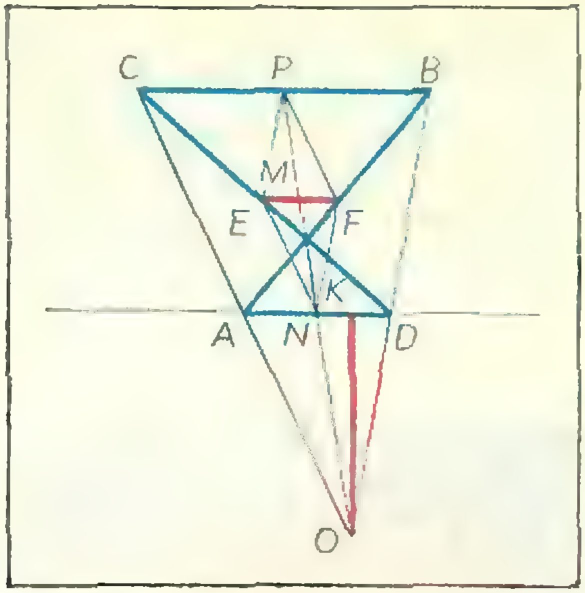


Рис. 11 а.

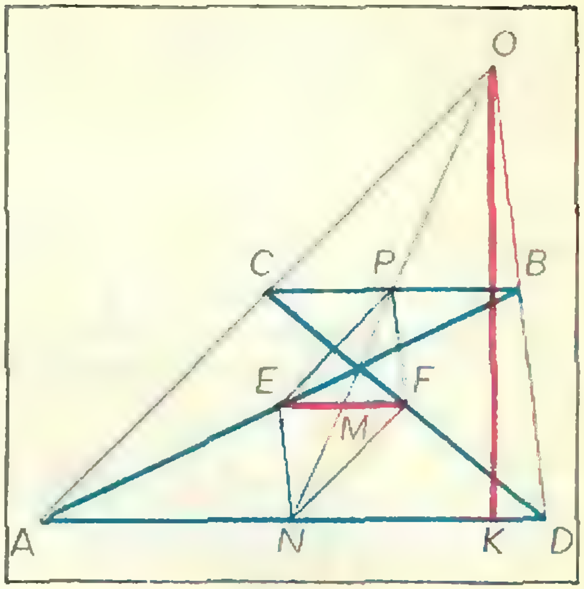


Рис. 11 б.

Трапеция получается только, если отрезок OM короче отрезка MN (рис. 9, *а*, *б*). Если отрезки OM и MN равны, то получится треугольник (рис. 10). Если же OM больше MN, то получается «самопересекающаяся трапеция» (рис. 11, *а*, *б*).

Правильные решения задач прислали: *Н. Башкина* (Курган-Тюбе) **М92**; *С. Боубатрин* (Глодяны МССР) **М92**; *А. Аляев* (Пачелмы Пензенской обл.) **М92**, **М95**; *А. Бугий* (Изяслав) **М93**, **М95**; *В. Гамолич* (Одесса) **М93—М95**; *В. Гончаренко* (Майкоп) **М95**; *В. Афанасьев* (Коломна) **М95**; *О. Волков* (Свердловск) **М95**; *О. Винер* (с. Городовка Винницкой обл.) **М92**, **М95**; *А. Довжиков* (Ленинград) **М95**; *В. Зубарев* (Архангельск) **М95**; *И. Братовская* (г. Усолье-Сибирское) **М92**; *А. Заславский* (Калинин) **М95**; *Г. Златкус* (Советск Калининградской обл.) **М92**; *В. Запорожская* (пос. Сосницы Черниговской обл.) **М92**, **М95**; *А. Гольберг* (Москва) **М92—М95**; *В. Кореняко* (Воронеж) **М92**, **М94**, **М95**; *А. Николаев* (Москва) **М92—М94**; *В. Грицевич* (г. Чортков Тернопольской обл.) **М93**, **М94**; *Т. Кислицина* (с. Шаранга Горьковской обл.) **М95**; *С. Величко* (Докучаевск Донецкой обл.) **М95**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **М95**; *Р. Косой* (Одесса) **М92**, **М95**; *Л. Книжнерман* (Москва) **М92**; *Л. Лазарева* (Ленинград) **М92**; *В. Логинов* (Москва) **М93**; *Т. Казанов* (Тбилиси) **М95**; *А. Григорян* (Баку) **М93**, **М94**; *М. Илларионов* (Воронеж) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Сбоев* (пос. Медведок Кировской обл.) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Кольцов* (Горький) **М92**, **М95**; *А. Кущуков* (Баку) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Слинин* (Лазовая Харьковской обл.) **М94**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) **М95**; *В. Наджко* (Ленинград) **М95**; *Л. Рудицер* (Харьков) **М95**; *В. Терентьев* (г. Павлов Горьковской обл.) **М92**; *Г. Макаров* (Златоуст Челябинской обл.) **М93**, **М95**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **М92**, **М93**, **М95**; *С. Мукльгин* (Новосибирск) **М92**; *И. Порутчикова* (г. Сокольники Тульской обл.) **М92**; *М. Розов* (Минск) **М92—М95**; *М. Прегер* (Томск) **М94—М95**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **М92—М95**; *П. Сергеев* (Грозный) **М95**; *А. Слинкин* (Москва) **М92**; *А. Шимаев* (Москва) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Удальцов* (Калининград Московской обл.) **М92**, **М93**, **М95**; *О. Худавердян* (Ереван) **М93**, **М95**; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) **М92**, **М93**; *Г. Фильковский* (Баку) **М92**, **М95**; *Ю. Якушин* (Ломоносов) **М92**; *Е. Часовников* (с. Парыгино Зыряновского р-на) **М92**; *И. Юргель* (Глубокое БССР) **М92**; *С. Чекмарев* (Москва) **М93**; *Н. Фаткуллин* (Казань) **М93**, **М95**; *А. Черняк* (Минск) **М92**, **М93**, **М95**; *В. Мальченко* (Славянск-на-Кубани) **М92**; *Р. Сольцас* (Вильнюс) **М95**; *П. Сухов* (Саратов) **М95**; *А. Шерстюк* (Николаев) **М93**, **М95**; *Л. Резник* (Ленинград) **М92**, **М95**

Л. Лиманов

* * *

Ф100

На высоте $h=200$ км плотность атмосферы равна $\rho=1{,}6\cdot10^{-10}$ кг/м^3. Оцените силу сопротивления, испытываемую спутником с поперечным сечением $S=0{,}5$ м^2 и массой $m=10$ кг, летящим на этой высоте.

Как подсчитать силу сопротивления, рассказано в этом номере журнала в статье «Импульс. Закон сохранения импульса». За время Δt спутник сталкивается с частицами воздуха, находящимися в объеме $S\times v\cdot\Delta t$ (v — скорость спутника). Масса этих частиц равна $\rho Sv\Delta t$, а импульс, приобретаемый ими при столкновении со спутником, равен $\rho Sv\Delta t\cdot v=\rho Sv^2\Delta t$. Согласно второму закону Ньютона на частицы воздуха действует со стороны спутника сила $F=\frac{\rho Sv^2\,\Delta t}{\Delta t}=\rho Sv^2$. По третьему закону Ньютона точно такой же величины сила, только направленная в противоположную сторону, действует на спутник.

Чтобы найти величину силы сопротивления, действующей на спутник, нужно знать скорость спутника.

Будем считать, что спутник движется по круговой орбите радиуса $R=R_\text{З}+h$ ($R_\text{З}$ — радиус Земли). Так как центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$ спутнику сообщает сила тяготения $F_\text{т}=\gamma\frac{mM_\text{З}}{R^2}$ ($M_\text{З}$ — масса Земли), то согласно второму закону Ньютона

$$\gamma\frac{mM_\text{З}}{R^2}=\frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

$$v^2=\gamma\frac{M_\text{З}}{R}.$$

Поэтому сила сопротивления

$$F=\rho\frac{S\gamma M_\text{З}}{R}=\frac{\rho S\gamma M_\text{З}}{R_\text{З}+h}.$$

Подставляя сюда численные значения всех величин ($\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$, $M_\text{З}\approx6\cdot10^{24}$ кг, $R_\text{З}=6{,}4\cdot10^6$ м), найдем

$$F\approx4{,}8\cdot10^{-3}\ \text{н}.$$

Найдем теперь, как сопротивление атмосферы влияет на движение спутника. Предположим, что изменение орбиты спутника за один оборот невелико. Тогда, сделав один полный оборот, спутник будет двигаться тоже по круговой орбите. Радиус этой орбиты обозначим R_1. Будем считать, что потенциальная энергия спутника равна нулю бесконечно далеко от Земли. Тогда по аналогии гравитационного поля с электрическим можно заключить, что на расстоянии R от центра Земли потенциальная энергия спутника отрицательна и равна $-\gamma\frac{M_\text{З}m}{R}$. Полная энергия спутника равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E=-\gamma\frac{M_\text{З}m}{R}+\frac{mv^2}{2}.$$

Но $v^2=\gamma\frac{M_\text{З}}{R}$. Это означает, что кинетическая энергия спутника равна $\gamma\frac{M_\text{З}m}{2R}$, то есть составляет по абсолютной величине половину потенциальной энергии спутника. Полная энергия спутника равна

$$E=-\gamma\frac{M_\text{З}m}{R}+\frac{1}{2}\gamma\frac{M_\text{З}m}{R}=-\frac{1}{2}\gamma\frac{M_\text{З}m}{R}.$$

После того как спутник сделает один полный оборот, его энергия станет равной

$$E_1=-\frac{1}{2}\gamma\frac{M_\text{З}m}{R_1}.$$

Изменение энергии спутника равно работе силы сопротивления F на пути $2\pi R$:

$$E-E_1=2\pi R\cdot F,\ \text{или}$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\frac{M_\text{З}m}{R}+\frac{1}{2}\gamma\frac{M_\text{З}m}{R_1}=2\pi R\cdot\rho\frac{S\gamma M_\text{З}}{R}.$$

Отсюда

$$\Delta h=R-R_1=4\pi\frac{\rho S}{m}R\cdot R_1.$$

Так как $R\approx R_1$, то можно считать $RR_1\approx R^2$ и

$$\Delta h\approx\frac{4\pi\rho SR^2}{m}\approx3{,}5\ \text{км}.$$

Как видно, предположение о том, что изменение радиуса орбиты спутника за один виток невелико, было правильным. Спутник будет двигаться по спирали, каждый из витков которой мало отличается от окружности. Если бы плотность атмосферы не зависела от высоты, то такой спутник упал бы на Землю, сделав $n=\frac{200\ \text{км}}{3{,}5\ \text{км}}\approx57$ витков вокруг Земли. Но плотность атмосферы увеличивается с уменьшением высоты. Поэтому на высоте 120—110 км сопротивление так велико, что спутник уже не может закончить виток и падает вниз, сгорая в плотных слоях атмосферы.

Ф101

К висящей очень тонкой пружине с жесткостью k подвешен шарик. Вначале пружина не растянута. Затем шарик отпускают. Какой максимальной скорости достигнет шарик при своем движении? Масса шарика m.

Запишем уравнение движения шарика. На него действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения пружины $F=kx$, где x — деформация пружины. По второму закону Ньютона

$$mg-kx=ma.$$

Из этого уравнения следует, что ускорение шарика a вначале направлено вниз и уменьшается, затем становится равным нулю при $x=\frac{mg}{k}$, а потом снова возрастает, но направлено уже вверх.

Скорость шарика возрастает, пока его ускорение направлено вниз, и уменьшается, когда оно направлено вверх. Поэтому скорость шарика максимальна при $x=\frac{mg}{k}$. Для того чтобы найти ее, запишем закон сохранения энергии. Если шарик опустился на расстояние x, то его потенциальная энергия уменьшилась на величину mgx, а кинетическая — возросла на $\frac{mv^2}{2}$ (раньше она была равна нулю). Часть потенциальной энергии шарика, равная $\frac{kx^2}{2}$, пошла на увеличение потенциальной энергии деформации пружины. Поэтому

$$mgx=\frac{kx^2}{2}+\frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда при $x=\frac{mg}{k}$ получим

$$v_{\max}=g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ф102

В герметически закрытом сосуде смешали поровну кислород и гелий. Затем в стенке сосуда сделали отверстие. Каков состав молекулярного пучка, выходящего из него?

Энергия молекул газа зависит только от его температуры. Поскольку газы в сосуде находятся в равновесии и их температуры одинаковы, то

$$\frac{m_{O_2}v_{O_2}^2}{2}=\frac{m_{He}v_{He}^2}{2},$$

где v_{O_2} и v_{He} — средние скорости движения молекул газов, m_{O_2} и m_{He} — их массы. Из этой формулы следует, что

$$\frac{v_{O_2}}{v_{He}}=\sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}.$$

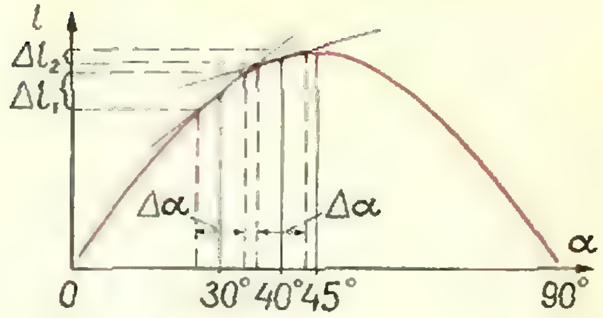


Рис. 12.

Будем для простоты считать, что молекулы газа могут двигаться только в трех взаимно перпендикулярных направлениях и скорости всех молекул одинаковы и равны средней скорости. Тогда в направлении к отверстию движется одна шестая часть молекул каждого из газов. За время Δt из сосуда вылетают те молекулы газа, которые вначале находились на расстоянии, не большем $v\Delta t$ от отверстия. То есть это молекулы кислорода, находящиеся в объеме $v_{O_2}\Delta t\cdot s$ и молекулы водорода, находящиеся в объеме $v_{He}\Delta t\cdot s$ (s — площадь отверстия). Всего таких молекул кислорода $N_{O_2}=v_{O_2}sn_{O_2}\Delta t$ и молекул гелия $N_{He}=v_{He}sn_{He}\Delta t$, где n_{O_2} и n_{He} — число молекул кислорода и гелия в единице объема. Если в сосуде имеются равные количества молекул обоих газов, то $n_{O_2}=n_{He}$ и

$$\frac{N_{O_2}}{N_{He}}=\frac{v_{O_2}}{v_{He}}=\sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Если же массы газов в сосуде равны, то $m_{O_2}n_{O_2}=m_{He}n_{He}$ и

$$\frac{N_{O_2}}{N_{He}}=\frac{v_{O_2}}{v_{He}}\,\frac{n_{O_2}}{n_{He}}=\sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}\cdot\frac{m_{He}}{m_{O_2}}=\frac{1}{16\sqrt{2}}.$$

Ф103

Из пушки делают две серии выстрелов, наклонив ствол под углами 30° и 40° к горизонту. В каком случае попадания снарядов будут более кучными, если разброс вызван неточным прицеливанием, а не разбросом начальных скоростей снарядов? Сопротивление воздуха считать пренебрежимо малым.

Найдем вначале зависимость дальности полета снаряда от угла его вылета. Запишем для этого кинематические уравнения движения снаряда. Если скорость снаряда равна v_0, а угол, под которым снаряд вылетает из орудия, равен α, то в вертикальном направлении вдоль оси y снаряд движется с ускорением $a=-g$ и начальной скоростью $v_{0y}=v_0 \sin\alpha$. Поэтому изменение координаты y снаряда определяется уравнением

$$y=v_0 t \sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

По горизонтали вдоль оси x снаряд движется равномерно со скоростью $v_x=v_0 \cos\alpha$. Поэтому

$$x=v_0 t \cos\alpha.$$

В момент падения на землю $y=0$ и

$$v_0 t \sin\alpha-\frac{gt^2}{2}=0.$$

Отсюда можно найти время движения снаряда. Оно равно $t=\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Подставляя теперь это выражение в уравнение движения по горизонтали, найдем, что дальность полета снаряда равна

$$x_{\max}=\frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Это выражение максимально при sin $\sin 2\alpha=1$, то есть при $\alpha=45°$.

Нарисуем график зависимости дальности полета снаряда от α (рис. 12). При малых отклонениях $\Delta\alpha$ угла вылета снаряда график зависимости $x_{\max}(\alpha)$ можно заменить прямой — касательной к действительному графику $x_{\max}(\alpha)$. Чем больше наклон этой касательной, тем больше ошибка в дальности полета снаряда при одной и той же ошибке $\Delta\alpha$ в угле вылета снаряда.

Из рисунка 12 видно, что при малых углах вылета снаряда угол наклона касательной к горизонту (к оси 0α) больше, чем при больших. Это означает, что при малых углах вылета снаряда изменение дальности при изменении угла вылета больше, чем при больших, и при стрельбе с углом наклона ствола в 40° кучность попадания снарядов будет выше, чем при угле 30°.

Этот же результат можно получить и с помощью формул. Пусть ошибка в угле вылета снаряда мала и составляет $\Delta\alpha$. Тогда ошибка Δx в дальности полета снаряда составляет

$$\Delta x=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha-\frac{v_0^2}{g}\sin[2(\alpha+\Delta\alpha)]=$$

$$=2\frac{v_0^2}{g}\cos(2\alpha+\Delta\alpha)\sin\Delta\alpha\approx$$

$$\approx 2\frac{v_0^2}{g}\cos 2\alpha\cdot\Delta\alpha.$$

Таким образом, Δx пропорционально $\Delta\alpha$, но коэффициент пропорциональности зависит от α. Он тем больше, чем меньше угол α.

Ф104

В закрытом сосуде имеется несколько капель жидкости разной величины. Что произойдет с ними через продолжительное время?

Давление насыщенного пара у поверхности капли зависит от ее радиуса. Покажем это.

Представим себе замкнутый сосуд, в котором имеется капиллярная трубка, не смачиваемая жидкостью. Давление в точке B больше давления в точке A (рис. 13) на величину $\rho_{\text{п}} gh$:

$$P_B=P_A+\rho_{\text{п}} gh,$$

где h — разность уровней жидкости в капилляре и в сосуде, $\rho_{\text{п}}$ — плотность пара.

Так как пленка жидкости в капилляре находится в равновесии под действием двух сил: силы поверхностного натяжения, равной $2\pi r\sigma$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения, r — радиус капилляра) и силы давления жидкости на глубине h, равной $\rho_{\text{ж}} gh\cdot\pi r^2$ ($\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости), то

$$2\pi r\delta=\pi\rho_{\text{ж}} ghr^2.$$

Отсюда

$$h=\frac{2\sigma}{\rho_{\text{ж}} gr}$$

и

$$P_B=P_A+\frac{2\sigma}{r}\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Таким образом, давление над поверхностью жидкости тем больше, чем меньше ее радиус кривизны.

Это означает, что давление насыщенного пара над каплей тем больше, чем меньше радиус этой капли. Значит, если над поверхностью маленькой капли пар насыщен, то над поверхностью большой капли он не будет насыщенным. Это приведет к тому, что пар будет конденсироваться на большой капле, понижая тем самым давление пара у поверхности малой капли. Это, в свою очередь, приведет к испарению маленькой капли. В результате в сосуде через некоторое время останется только одна большая капля.

Тот же результат можно получить и из самых общих рассуждений. Предположим, что в сосуде налита жидкость (поверхность жидкости плоская) и имеется капля.

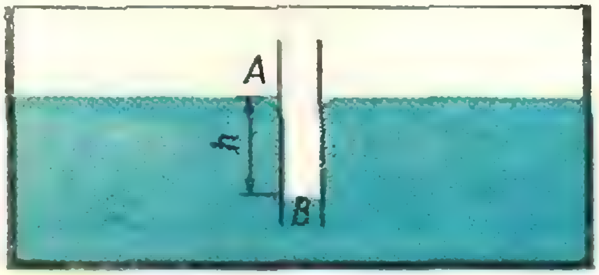


Рис. 13.

При испарении жидкости с плоской поверхности площадь поверхности жидкости не меняется. В то же время при испарении капли площадь поверхности жидкости уменьшается. Чем больше поверхность жидкости, тем больше энергия системы. А как мы знаем, всякая система, предоставленная самой себе, стремится перейти в состояние с минимальной энергией. Поэтому если в сосуде имеется капля жидкости и жидкость с плоской поверхностью, то равновесие наступит тогда, когда капля полностью испарится и сконденсируется на плоской поверхности. (Это означает, что давление насыщенных паров над каплей больше, чем над плоской поверхностью жидкости.) Если в сосуде имеются капли разного размера, то мелкие капли будут испаряться и конденсироваться на более крупных, пока в сосуде не останется только одна большая капля.

Ф105

Груз массы m прикреплен к стержню длины l. Другой конец стержня шарнирно прикреплен к вертикальной оси. Нарисуйте примерный график зависимости угла α, образуемого стержнем с вертикалью, от угловой скорости ω вращения оси.

Если шарик вращается по окружности и стержень составляет с вертикалью угол α, то центростремительное ускорение шарику сообщает равнодействующая силы тяжести и силы натяжения стержня. Эта равнодействующая направлена горизонтально и равна $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (рис. 14). Запишем уравнение движения шарика:

$$mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = m\omega^2 R \quad \text{или} \quad g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \omega^2 l \sin\alpha.$$

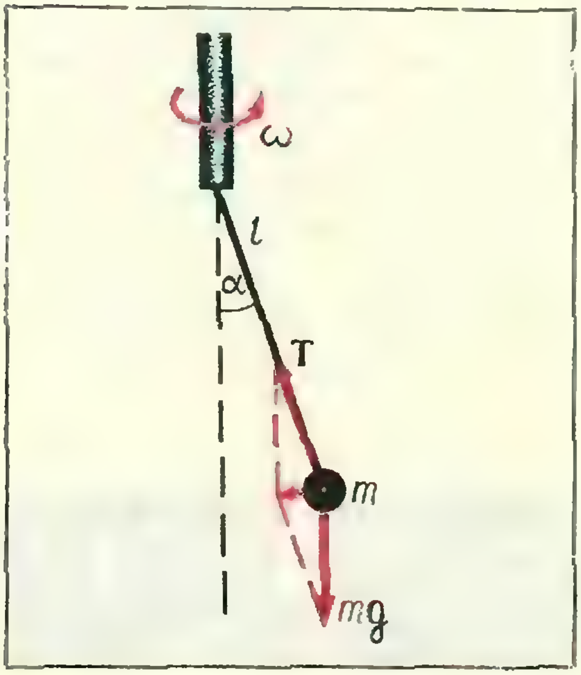


Рис. 14.

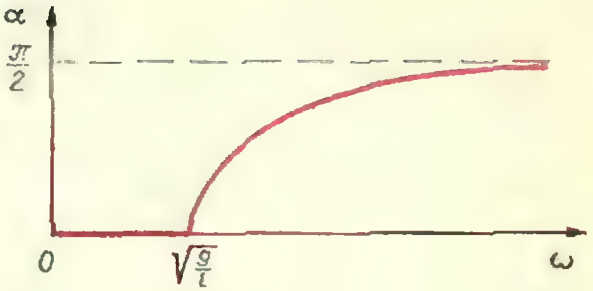


Рис. 15.

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Это выражение справедливо, однако, только при $\omega^2 l \geqslant g$, то есть при $\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{l}}$. Если $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$, то $\frac{g}{\omega^2 l} > 1$, а $\cos\alpha$ должен быть меньше 1! При $\omega^2 l < g$ $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha > m\omega^2 R$, то есть равнодействующая силы тяжести и силы натяжения нити сообщает шарику ускорение больше, чем ускорение при вращении по окружности. Поэтому стержень с шариком будет вращаться, оставаясь вертикальным. График зависимости α от ω показан на рисунке 15.

Ф106

Два электрона находятся на расстоянии l друг от друга, причем в этот момент скорость одного из них равна нулю, а скорость другого равна v и направлена под углом 45° к линии, соединяющей электроны. Каким будет угол между скоростями электронов, когда они вновь окажутся на расстоянии l друг от друга?

Система из двух электронов замкнута — на нее не действуют внешние силы. Поэтому, не рассматривая взаимодействие в деталях, мы можем записать закон сохранения импульса. Если скорости электронов в интересующий нас момент времени равны $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, то

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2.$$

Взаимодействие электронов упругое — оно происходит без потери механической энергии. Так как, кроме того, электроны в интересующий нас момент времени находятся на том же расстоянии l, что и в начальный, потенциальная энергия их взаимодействия осталась прежней. Поэтому не изменилась и полная кинетическая энергия электронов. Следовательно, можно записать закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}. \qquad (2)$$

Из первого уравнения следует, что три вектора $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ образуют треугольник.

Из второго уравнения следует, что этот треугольник прямоугольный и угол между векторами скоростей электронов равен 90

Ф107

В схеме, изображенной на рисунке 16, вольтметр измеряет падение напряжения на сопротивлении $R = 300$ *ком*. Каким должно быть сопротивление вольтметра для того, чтобы его показания отличались не более чем на 2% от действительного значения u_R? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

В отсутствие вольтметра сопротивления R и R_1 включены последовательно. Поэтому падение напряжения на сопротивлении R равно $u_R = \frac{R}{R+R_1}E$. При подключении вольтметра он будет измерять падение напряжения на участке, состоящем из параллельно включенных сопротивлений R и сопротивления вольтметра r. Вольтметр покажет величину

$$u' = \frac{\frac{Rr}{R+r}}{\frac{Rr}{R+r}+R_1}E.$$

По условию показание вольтметра должно отличаться не более чем на 2% от значения u_R. Поэтому

$$\frac{u_R - u'}{u_R} \leqslant 0{,}02.$$

Подставив в это уравнение выражения для u_R и u', найдем, что сопротивление вольтметра не должно превышать 3675 *ком*.

Правильные решения прислали: *В. Авсейков* (Севастополь) **Ф103, Ф105—Ф107**; *А. Александров* (Глазов УАССР) **Ф100**; *П. Амосов* (Ярославль) **Ф100**; *С. Арасланова* (Нижне-Ивкино Кировской обл.) **Ф103, Ф107**; *В. Белов* (Вологда) **Ф100—Ф105, Ф107**; *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.) **Ф106, Ф107**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **Ф101**; *А. Бритковский* (Москва) **Ф103, Ф104, Ф106**; *А. Будников* (Славянск Донецкой обл.) **Ф101**; *А. Бузулуков* (Новосибирск) **Ф107**; *Ю. Гиви Долидзе* (Тбилиси) **Ф101**; *В. Глембоцкий* (Ярославль) **Ф101, Ф102**; *Е. Громак* (Новокузнецк) **Ф103, Ф106**; *М. Дзик* (с. Кратово Армавирского р-на Тюменской обл.) **Ф101, Ф103**; *А. Довсипевич* (Москва) **Ф101**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф100, Ф101**; *Е. Домов* (Москва) **Ф03, Ф106**; *Г. Зайцев* (Гагра) **Ф101, Ф103, Ф106, Ф107**; *С. Запесочный* (Ужгород Закарпатской обл.) **Ф101**; *Н. Зыков* (Саратов) **Ф101**; *О. Заумова* (Москва) **Ф100**; *А. Иванов* (Льгов Курской обл.) **Ф102**; *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.) **Ф101**; *А. Истомин* (Подольск Московской обл.) **Ф103, Ф105**; *Т. Казанов* (Тбилиси) **Ф103, Ф106**; *А. Каримов* (Уфа) **Ф101**; *Т. Кисмицына* (с. Шаранга Горьковской обл.) **Ф105, Ф107**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **Ф103**; *Л. Книжнерман* (Москва) **Ф100—Ф103**; *Л. Коган* (Черновцы) **Ф101**; *М. Колодочкин* (Москва) **Ф101**; *С. Корнилов* (Грозный) **Ф101**; *В. Коломийцев* (Ростов-на-Дону) **Ф101**; *П. Конев* (Плес Ивановской обл.) **Ф101**; *В. Катанов* (пос. Цалка ГССР) **Ф101**; *В. Котенов* (Москва) **Ф101**; *В. Крылов* **Ф100**; *С. Кузьмич* (Житомир) **Ф103, Ф105, Ф107**; *В. Кумич* (д. Могильно Брестской обл.) **Ф101**; *В. Куцк* (Ржев) **Ф100, Ф101, Ф104, Ф106**; *Г. Леви* (Куйбышев) **Ф101**; *В. Лукашин* (Москва) **Ф101**; *Ю. Лурье* (Грозный **Ф101**; *А. Мамула* (с. Добиицы Богуславского р-на Киевской обл.) **Ф101, Ф102, Ф107**; *Ю. Мурзанов* (пос. Родниковский Краснодарского края) **Ф101**; *М. Марон* (Куйбышев) **Ф100, Ф101**; *И. Мацяс* (Макеевка) **Ф100**; *Л. Менькова* (Александров Владимирской обл.) **Ф101**; *В. Нидежко* (Ленинград) **Ф101, Ф107**; *А. Николаев* (Москва) **Ф103, Ф104**; *А. Панфилов* (Свердловск) **Ф107**; *С. Поташев* (Ульяновск) **Ф100, Ф101**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск ТАССР) **Ф101**; *М. Прегер* (Томск) **Ф100, Ф101, Ф105, Ф106**; *Л. Рудицер* (Харьков) **Ф101, Ф105**; *Л. Сифиулин* (с. Б. Сабы ТАССР) **Ф107**; *П. Сергеев* (Грозный) **Ф100, Ф101, Ф103, Ф106, Ф107**; *И. Сидоров* (Москва) **Ф100, Ф101**; *Г. Симоненков* (Каунас) **Ф106**; *М. Соломонович* (Кишинев) **Ф101**; *Е. Сычугов* (пос. Красный Уралец Курганской обл.) **Ф101**; *М. Тайц* (Москва) **Ф101**; *О. Таталинская* (Алма-Ата) **Ф101**; *И. Турищев* (Кропоткин Краснодарского края) **Ф100, Ф102, Ф103, Ф105, Ф107**; *А. Удальцов* (Калининград Московской обл.) **Ф105**; *В. Файтелевич* (Армавир) **Ф100—Ф102**; *Г. Фаст* (Караганда) **Ф104**; *Н. Федин* (Омск) **Ф100—Ф103, Ф105, Ф107**; *Г. Фурманов* (Черновцы УССР) **Ф101**; *М. Хомченко* (Витебск) **Ф102**; *О. Худавердян* (Ереван) **Ф103, Ф107**; *С. Чекмарев*(Москва) **Ф100—Ф103, Ф105, Ф107**; *Е. Часовников* (с. Парычино Зыряновского р-на) **Ф101**; *С. Черников* (Семипалатинск) **Ф101**; *Ж. Шепетко* (Д.-Городок Брестской обл.) **Ф103, Ф104, Ф107**; *А. Шерстюк* (Николаев УССР) **Ф107**; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) **Ф101**; *В. Шувалов* (Электросталь) **Ф101**; *И. Юрченко* (Киев) **Ф101**.

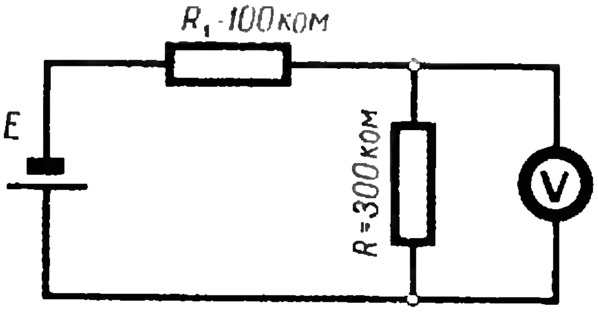


Рис. 16.

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

УЧИТЕСЬ РАБОТАТЬ С ЛОГАРИФМАМИ

А. Я. Маргулис, Б. А. Радунский

Определение логарифма

Как известно, *логарифмом числа* N *по основанию* a ($a>0$; $a\neq1$) *называется показатель степени, в которую надо возвести основание* a, *чтобы получить данное число* N, *то есть при* $a>0$, $a\neq1$ $x=\log_a N$, *если* $a^x=N$.

Математической записью определения логарифма является так называемое основное логарифмического тождество:

$$a^{\log_a N}=N \quad (a>0,\ a\neq1,\ N>0).$$

Напомним, что всякое положительное число при любом (положительном и отличном от единицы) основании имеет логарифм, а отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.

10 следствий из основного тождества

Если числа a и b положительны и отличны от единицы ($M>0$ и $N>0$), то справедливы следующие соотношения (свойства логарифмов):

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N, \tag{1}$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N, \tag{2}$$

$$\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M, \tag{3}$$

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}, \tag{4}$$

$$\log_b a\times\log_a N=\log_b N, \tag{4'}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}, \tag{5}$$

$$\log_{a^k} N=\frac{1}{k}\log_a N \qquad (k\neq0), \tag{6}$$

$$\log_{a^k} N^k=\log_a N \qquad (k=0), \tag{7}$$

$$\frac{\log_a N}{\log_a M}=\frac{\log_b N}{\log_b M} \quad (M\neq1), \tag{8}$$

$$\log_a N\times\log_b M=\log_a M\times\log_b N, \qquad (9$$

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}. \tag{10}$$

Формулы (1), (2) и (3) называют *правилами логарифмирования*. Они позволяют находить логарифмы произведения (1), частного (2) и степени (или корня) (3). Эти же формулы позволяют находить число по его логарифму, то есть производить *потенцирование*.

Формула (4) имеет особое значение — это *формула перехода к новому основанию*. Благодаря этой формуле нет необходимости иметь таблицы логарифмов при разных основаниях: достаточно иметь, например, таблицу десятичных логарифмов, чтобы по формуле (4) найти логарифм по любому интересующему нас основанию.

Формула (8) показывает, что *отношение логарифмов* двух чисел *не зависит от основания*.

Доказательства формул (1) — (5) проводятся в школьном курсе *); формулы (6) и (7) читатель без труда докажет сам, переходя к основанию a по формуле (4). В справедливости формулы (8) легко убедиться, если заметить, что и левая, и правая ее части равны числу $\log_M N$ (почему?); формула (9) есть просто иная запись равенства (8). А вот обоснование формулы (10):

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}.$$

Замечание

Мы предполагали, что $M>0$ и $N>0$. Однако при решении логарифмических уравнений (или неравенств), когда в роли M и N выступают *выражения* от неизвестного x, преобразования по указанным выше формулам могут привести к неравносильным уравнениям (неравенствам). В подобных случаях следует пользоваться более общими формулами **); например, если $M(x)\cdot N(x)>0$, то

$$\log_a M(x)\cdot N(x) = \log_a|M(x)| + \log_a|N(x)|.$$

Сейчас мы такие вопросы рассматривать не будем. Наша цель состоит в том, чтобы показать, как основные свойства логарифмов применяются для упрощения выражений, вычисления одних логарифмов через другие и их сравнения по величине.

Упрощение выражений, содержащих логарифмы

Внимательно разберите с карандашом и бумагой приводимые примеры; важно понять, где используются перечисленные выше формулы (мы специально проводим преобразования подробно, но почти без пояснений).

Пример 1. *Упростить*: $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2$.

Решение. $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=\log_3 5\cdot\log_5 2\cdot\log_2 3=\log_3 2\cdot\log_2 3=$ $=\log_3 3=1$.

Пример 2. *Упростить выражение*:

$$N=\frac{\log_a\left|b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right|\cdot\lg a\cdot\log_a^{\frac{1}{2}}100}{\left(\lg a\cdot 2^{\log_2\lg a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\lg^{-\frac{1}{2}}a^2}.$$

Решение. Укажем сначала область допустимых значений параметров: $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$ (так как a и b служат основаниями логарифмов), $a>1$ (для существования $\log_2\lg a$ должно быть $\lg a>0$, откуда $a>1$), окончательно

---

*) См., например, Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, М., «Просвещение», 1970, §§ 183—186.

**) Подробнее см. Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, Пособие по математике для поступающих в вузы, М., «Наука», 1970.

$$a>1;\ b>0;\ b\neq 1.$$

Имеем

$$\log_a\left[b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right]\cdot\lg a\cdot\log_a^{\frac{1}{2}}100=\log_a b^{\log_b a}\cdot\lg a\sqrt{2\log_a 10}=$$

$$=\frac{\log_a a\cdot\lg a\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\lg a}}=\sqrt{2\lg a};\qquad \left(\lg a\cdot 2^{\log_2\lg a}\right)^{\frac{1}{2}}\lg^{-\frac{1}{2}}a^2=$$

$$=\frac{\sqrt{\lg a\cdot\lg a}}{\sqrt{2\lg a}}=\sqrt{\frac{\lg a}{2}};$$

окончательно, $N=\dfrac{\sqrt{2\lg a}}{\sqrt{\dfrac{\lg a}{2}}}=2.$

Пример 3. *Упростить выражение:*

$$\left(b^{\frac{\log_{1000}a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{1000}b}{\lg a}}\right)^{3\log_{ab}(2a+3b)}$$

Решение. Параметры должны удовлетворять условиям $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$; $b\neq 1$ и $ab\neq 1$ (объясните почему).

Имеем $b^{\frac{3\log_{1000}a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{3\log_{1000}b}{\lg b}}=b^{\frac{\lg a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\lg b}{\lg b}}=ab,$
поэтому

$$N=(ab)^{\log_{ab}(2a+3b)}=2a+3b.$$

Пример 4. *Упростить выражение:*

$$N=\left[\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\sqrt{2}\log_a^{\frac{1}{2}}b.$$

Решение. Параметры должны удовлетворять условиям: $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$, $b\neq 1$ (объясните почему); кроме того, для существования $\log_a^{\frac{1}{2}}b$ должно быть $\log_a b\geqslant 0$. Поэтому окончательно: $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$. Далее,

$$N=\left[\sqrt{\frac{(\log_a b-1)^2}{2\log_a b}}+\sqrt{\frac{(\log_a b+1)^2}{2\log_a b}}\right]\sqrt{2\log_a b}=|\log_a b-1|+(\log_a b+1)=$$

$$=\begin{cases}2\log_a b, & \text{если } b\geqslant a>1 \text{ или } 0<b\leqslant a<1;\\ 2, & \text{если } a\geqslant b>1 \text{ или } 0<a\leqslant b<1.\end{cases}$$

Примеры 2 и 4 наглядно показывают, как важно учитывать область допустимых значений параметров.

Вычисление одних логарифмов через другие

Пример 5. *Дано:* $\log_{30}3=a$; $\log_{30}5=b$; *найти* $\log_{30}8$.

Решение. $\log_{30}8=3\log_{30}2=3\log_{30}\frac{30}{15}=3(\log_{30}30-\log_{30}3-$
$-\log_{30}5)=3(1-a-b).$

Здесь все просто, потому что, во-первых, основания всех логарифмов одинаковы и, во-вторых, можно выразить число 2 через числа, логарифмы которых заданы (или известны), то есть через числа 30, 3 и 5. Очевидно это не всегда легко сделать.

Пример 6. *Дано*: $\lg 196=a$; $\lg 56=b$; найти $\lg 0{,}175$.

Решение. Представить число 0,175 через известные числа 196, 56 и 10 не так-то просто. Преобразуем:

$$\lg 0{,}175=\lg\frac{175}{1000}=\lg\frac{7}{40}=\lg 7-2\lg 2-1.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению $\lg 7$ и $\lg 2$.

Условия задачи можно записать в виде двух равенств:

$$2\lg 2+2\lg 7=a,$$

$$3\lg 2+\lg 7=b.$$

Из них находим

$$\lg 2=\frac{2b-a}{4};\qquad \lg 7=\frac{3a-2b}{4}.$$

Поэтому

$$\lg 0{,}175=\frac{3a-2b}{4}-\frac{4b-2a}{4}-1=\frac{5a-6b-4}{4}.$$

Пример 7. *Дано*: $\log_{14}7=a$; $\log_{14}5=b$; *найти* $\log_{35}28$.

Решение. В случае разных оснований целесообразно перейти к одному основанию:

$$\log_{35}28=\frac{\log_{14}28}{\log_{14}35}=\frac{\log_{14}2\cdot 14}{\log_{14}5\cdot 7}=\frac{1+\log_{14}\frac{14}{7}}{a+b}=\frac{2-a}{a+b}.$$

Пример 8. *Дано*: $\log_{12}27=a$; *найти* $\log_6 16$.

Решение. $\log_6 16=4\log_6 2=4\dfrac{\log_{12}2}{\log_{12}6}=\dfrac{4\log_{12}2}{\log_{12}\frac{12}{2}}=\dfrac{4\log_{12}2}{1-\log_{12}2}.$

Остается найти $\log_{12}2$. По условию задачи

$$a=\log_{12}27=3\log_{12}3=3\log_{12}\frac{12}{4}=3(1-2\log_{12}2).$$

Отсюда $\log_{12}2=\dfrac{3-a}{6}$, а потому

$$\log_6 16=\frac{4\cdot\frac{3-a}{6}}{1-\frac{3-a}{6}}=\frac{4(3-a)}{3+a}.$$

Сравнение логарифмов по величине

Знаяя свойства логарифмической функции, легко отвечать на такие вопросы: *какое из двух чисел больше*: $\log_2 3$ *или* $\log_3 2$?

$(\log_2 3>\log_3 2$, ибо $\log_2 3>1$, а $\log_3 2<1)$;

$\log_{\frac{1}{2}}3$ *или* $\log_3 1{,}1$? $\left(\log_{\frac{1}{2}}3<0,\quad \log_3 1{,}1>0;\quad \log_{\frac{1}{2}}3<\log_3 1{,}1\right)$;

$\log_3 5$ *или* $\log_4 5$? ($\log_3 5>\log_4 5$ — объясните почему);

$\log_{\frac{1}{2}}3$ *или* $\log_{\frac{1}{2}}4$? $\left(\log_{\frac{1}{2}}3>\log_{\frac{1}{2}}4\text{ — объясните почему}\right)$.

При решении более сложных примеров, кроме использования свойств логарифмической функции, придется производить различные преобразования.

Пример 9. (МГУ, химфак, 1969). *Без таблиц определить, что больше:* $\log_{20}80$ *или* $\log_{80}640$?

Решение. Максимально упростим заданные логарифмы и приведем их к одному основанию:

$$\log_{20} 80 = 1 + 2\log_{20} 2 = 1 + \frac{2}{\log_2 20},$$

$$\log_{80} 640 = 1 + 3\log_{80} 2 = 1 + \frac{3}{\log_2 80}.$$

Остается сравнить числа $\frac{2}{\log_2 20}$ и $\frac{3}{\log_2 80}$. Но $\log_2 20>0$; $\log_2 80>0$, а $2\log_2 80=\log_2 6400<3\log_2 20=\log_2 8000$. Поэтому $\frac{2}{\log_2 20}<\frac{3}{\log_2 80}$, то есть $\log_{20}80<\log_{80}640$.

Пример 10. (МГУ, ф-т психологии, 1969). *Не пользуясь таблицами, доказать, что* $\log_3 7>\log_7 27$.

Решение. Так как $\log_7 27 = 3\log_7 3 = \frac{3}{\log_3 7}$ и $\log_3 7>0$, то достаточно доказать, что $\log_3^2 7>3$ или $\log_3 7>\sqrt{3}$, или $7>3^{\sqrt{3}}$.

Попробуем подобрать «удобное» приближение для иррационального показателя степени. Именно, используя тот факт, что $\sqrt{3}<1{,}75=\frac{7}{4}$, сравним 7 и $3^{\frac{7}{4}}$, то есть 7^4 и 3^7. Из неравенств $7^4=2401>3^7=2187$ следует $7>3^{\frac{7}{4}}>3^{\sqrt{3}}$, а потому $\log_3 7>\log_7 27$.

Пример 11. *Без таблиц определить, что больше:* $\log_5 7$ *или* $\log_{13}17$?

Решение. Приведение к одному основанию ничего хорошего, очевидно, не дает. Однако этот пример решается проще двух предыдущих. Заметим, что $1<\log_5 7<2$, $1<\log_{13}17<2$. Сравним тогда числа

$$\log_5 7 - 1 = \log_5 7 - \log_5 5 = \log_5 \frac{7}{5}$$

и

$$\log_{13} 17 - 1 = \log_{13} 17 - \log_{13} 13 = \log_{13} \frac{17}{13}.$$

Но $\log_5 \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{17}{13}$ (объясните почему), а тогда $\log_5 7>\log_{13}17$.

Пример 12. *Доказать, что при любом натуральном* $n>1$

$$\log_n (n+1)>\log_{n+1}(n+2).$$

Решение. Очевидно, что $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} > \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$. Поэтому, используя свойства логарифмической функции, имеем (при $n>1$)

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1}.$$

Преобразуя левую и правую части, сразу получаем, что

$$\log_n (n+1)>\log_{n+1}(n+2).$$

Отсюда, например, следует, что

$$\log_2 3>\log_3 4> \dots >\log_{k+1}(k+2).$$

Пример 13. (МГУ, филфак, 1969). *Доказать, не пользуясь таблицами, что* $\log_2 3 > \log_3 5$.

Решение. Непосредственно применить метод, использованный в двух предыдущих примерах, не удается (убедитесь в этом). Поэтому поступим так: $\log_2 3 = \log_8 27$;

$$\log_3 5 = \log_9 25, \text{ а } \frac{27}{8} > \frac{25}{9}.$$

Далее, $\log_8 \frac{27}{8} > \log_9 \frac{27}{8} > \log_9 \frac{25}{9}$ или $\log_8 27 - 1 > \log_9 25 - 1$, откуда $\log_2 3 > \log_3 5$.

Упражнения

Упростить следующие выражения:

1. $\frac{1}{5}\left(2a^{\log_2 b} + 3b^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a}}\right)$.

2. $\left[1 + 2^{\frac{\lg a}{\lg \sqrt{2}}} - a^{1 + \frac{1}{\log_a a^2}}\right]^{\frac{1}{2}} -$
$- 3\log_3 2 \times \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

3. $\sqrt{\log_a b + \log_b a + 2} \cdot \log_{ab} a \cdot \log_a^{\frac{3}{2}} b$.

Вычислить без помощи таблиц:

4. $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

5. (МГУ, ф-т психологии, 1971).

$$\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}.$$

6. Вычислить $\log_6 32$, если $\log_{12} 2 = a$.
7. Вычислить $\log_5 0,18$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.
8. Вычислить $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = \alpha$, $\log_{12} 18 = \beta$.

Без помощи таблиц определить, что больше:

9. $\log_2 3$ или $\log_{\frac{1}{4}} 5$?

10. $\log_4 5$ или $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$?

11. $\log_5 7$ или $\log_8 3$?

12. $\log_2 3$ или $\log_5 8$?

13. (МГУ, мехмат, 1971). $3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866$ или $\log_2 1863$?

14. (МГУ, химфак, 1969). $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$?

15. (МГУ, ф-т психологии, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_3 16 > \log_{16} 729$.

16. (МГУ, филфак, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_5 14 > \log_7 18$.

ЗАДАЧИ

1. Найти все треугольники с целочисленными сторонами, площадь которых выражается тем же числом, что и периметр.

2. На плоскости даны два непараллельных отрезка AB и CD. Построить такую точку P, что треугольники PAB и PCD подобны, причем углы APB и CPD равны.

3. Дан треугольник ABC. Построить такую точку M, что если A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых BC и AM, CA и BM, AB и CM, то M является центром тяжести треугольника $A_1B_1C_1$. Обобщить задачу на случай, когда M — центр тяжести системы заданных масс m_A, m_B, m_C, помещенных в точках A_1, B_1, C_1.

4. Дан треугольник ABC. На его высотах отложены отрезки AA_1, BB_1, CC_1, имеющие соответственно длины l, m, n. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Доказать, что для любого треугольника справедливо неравенство $p^2 - bc > S\sqrt{3}$ (a, b, c — длины сторон, p — полупериметр, S — площадь треугольника).

6. Дан треугольник ABC. Проведем окружность с центром A и радиусом, равным высоте AD, и прямую через точки пересечения этой окружности со сторонами AB и AC. Аналогичное построение выполним для двух других вершин треугольника. Доказать, что получившиеся прямые пересекаются в таких точках A_1, B_1, C_1, что

1) точки A_1, B_1, C_1 лежат на биссектрисах углов A, B, C треугольника ABC;

2) треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, вершинами которого являются точки касания сторон треугольника ABC с вписанной окружностью;

3) центр окружности, вписанной в ABC, является точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Белорусский политехнический институт

Вариант 1

1. Объем прямого кругового конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным α. Найти объем пирамиды.

2. Не решая уравнения

$$x^2-2x-15=0,$$

вычислить сумму квадратов и сумму кубов его корней.

3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 2x\cdot\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0.$$

4. Решить неравенство:

$$(3x-1)\log_2 x>0.$$

Вариант 2

1. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Объем пирамиды равен V. Найти объем шара.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}10^{3-\lg(x-y)}=250,\\ \sqrt{x-y}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x+y}=\dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}}.\end{cases}$$

3. Решить уравнение:

$$(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x.$$

4. Решить неравенство:

$$5^{\frac{x+2}{3-x}}>25.$$

Куйбышевский политехнический институт имени В. В. Куйбышева

Факультет автоматики и информационно-измерительной техники

1. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определить площадь сечения и объемы частей пирамиды, на которые она разделена сечением, зная сторону основания a и угол α, образованный плоскостью сечения с основанием.

2. Стоимость 70 экземпляров первого тома и 60 экземпляров второго тома составляла 230 руб. В действительности за все эти книги уплатили 191 руб., так как была произведена скидка: на первый том — на 15%, а на второй том — на 20%. Найти первоначальную цену каждого из томов.

3. Решить уравнение:

$$9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}.$$

4. Решить неравенство:

$$(\log_{\sin x}2)^2<\log_{\sin x}(4\sin^3 x).$$

Электротехнический факультет

1. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол α. Вычислить объем конуса.

2. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, сумма которых равна 56. Известно, что если к этим числам прибавить соответственно 7, 12 и 9, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию.

3. Решить уравнение:

$$\lg\sqrt{x+3}=1-0{,}5\lg(x+24).$$

4. Найти область определения функции:

$$y=\frac{2}{\sqrt{4\sin x\cos x-1}}.$$

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности имени И. М. Губкина

Вариант 1

1. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 7 часов и второй 4 часа, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили, что им остается выполнить 1/18 всей работы. За сколько часов каждый из рабочих, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

2. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}}=\sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^3 x\cdot\cos x-\cos^3 x\cdot\sin x=\cos^2\frac{\pi}{3}.$$

4. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Найти объем шара, вписанного в эту пирамиду.

Вариант 2

1. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

2. Решить уравнение:

$$\log_{\sqrt{x}} a\cdot\log_{a^2}\frac{a^2}{2a-x}=1.$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2.$$

4. В прямой круговой конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса острый угол α. Найти объем конуса.

Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова

Факультет экономической кибернетики

1. Решить уравнение:

$$\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11.$$

2. Лодочник проплыл в лодке по течению реки расстояние от A до B и затем вернулся обратно в пункт A. Выяснилось, что против течения лодочник плыл на $6^2/_3$ часа больше, чем по течению. Определить скорость, с какой бы он плыл в стоячей воде, и скорость течения реки, если известно, что за 3 часа лодочник проплыл по течению реки столько же километров, сколько за 7 часов против течения. Расстояние от A до B равно 21 *км*.

3. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение:

$$\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4}=\cos^3\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{2}.$$

Факультет экономики материально-технического снабжения

1. Решить уравнение:

$$27^x+3^{x+4}=82\cdot 9^x.$$

2. Два туриста при посадке в самолет имели 94 *кг* багажа. За излишек веса первый турист уплатил 1 руб. 50 коп., а второй — 2 руб. Если бы один турист путешествовал со всем багажом, ему пришлось бы уплатить 13 руб. 50 коп. Сколько килограммов груза может перевозить каждый пассажир бесплатно?

3. Дана правильная четырехугольная пирамида высоты H, все пять граней которой равновелики. Найти полную поверхность пирамиды.

4. Решить уравнение:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x.$$

Московский институт стали и сплавов

Физико-химический факультет и факультет полупроводниковых материалов и приборов

1. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

2. При каких a неравенство

$$\frac{3}{2}x^2+(3^a-2^a)x+6^{a-2}<0$$

не имеет решений?

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=\sqrt{2}+4,\\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2.\end{cases}$$

4. Решить уравнение:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

Факультет металлургии черных металлов и сплавов и факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов

1. Отрезок AB, длина которого равна a, параллелен плоскости P. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные отрезку AB и образующие с плоскостью P углы α и β. Расстояние между точками пересечения плоскости P с проведенными прямыми равно b. Найти расстояние от отрезка AB до плоскости P.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1.$$

3. Решить неравенство:

$$\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}>1.$$

4. Решить уравнение:

$$\sin x\cdot\cos 2x+\sin 2x\cdot\cos 5x=\sin 3x\cdot\cos 5x.$$

ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

И. А. Зайцев

Эта статья посвящена задачам на одну из самых важных тем школьного курса физики — закон сохранения импульса. Такие задачи можно часто встретить в экзаменационных билетах. В статье использованы задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по физике в Московском физико-техническом институте, на физических факультетах Московского государственного университета, Новосибирского государственного университета и в ряде других вузов.

Импульсом (или количеством движения) материальной точки называется произведение ее массы на скорость. Так как скорость — это вектор, а масса — величина скалярная, то импульс — тоже векторная величина. Направление вектора импульса совпадает с направлением вектора скорости.

Если у нас имеется несколько материальных точек или частиц, то можно говорить об импульсе системы материальных точек. Он равен векторной сумме импульсов отдельных точек. Так, например, если у нас имеется две материальные точки, одна из которых имеет массу m_1 и скорость $\mathbf{v}_1$, а вторая — массу m_2 и скорость $\mathbf{v}_2$, то импульс $\mathbf{p}$ системы этих материальных точек равен сумме $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ (рис. 1). Важно не забывать, что импульсы частиц складываются векторно, то есть геометрически (по правилу треугольника или по правилу параллелограмма). В том случае, когда скорости частиц направлены вдоль одной прямой, импульсы можно складывать алгебраически. При этом импульсы частиц, движущихся в противоположные стороны, следует брать с противоположными знаками.

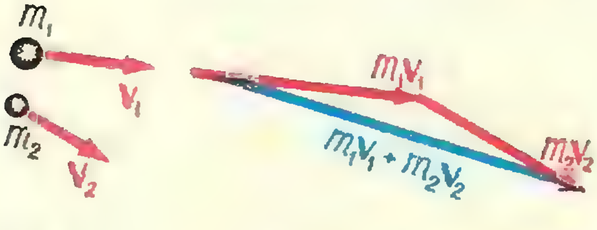


Рис. 1.

Для того чтобы найти импульс тела, различные точки которого имеют разные скорости, его разбивают мысленно на маленькие части (в пределе бесконечно маленькие) и затем складывают импульсы этих частей. Найдем таким способом импульс однородного диска, вращающегося вокруг своей оси. Ясно, что всегда можно найти два таких элемента диска с массами Δm, линейные скорости которых равны по абсолютной величине и противоположно направлены (рис. 2). Сумма импульсов этих элементов, очевидно, равна нулю. А так как диск можно всегда разбить на пары таких элементов, то отсюда следует, что импульс всего диска равен нулю.

Иное дело, если диск катится по горизонтальной поверхности (рис. 3). Пусть скорость центра диска равна $\mathbf{v}_0$. Скорость любого малого элемента Δm диска можно представить как сумму линейной скорости $\mathbf{v}_1$ ее вращения вокруг центра диска (в системе координат, связанной с центром диска) и скорости $\mathbf{v}_0$ ее поступательного движения: $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_0$. Импульс диска равен сумме импульсов отдельных его элементов, то есть

$$\mathbf{p}=\Sigma\Delta m\mathbf{v}=\Sigma\Delta m\mathbf{v}_1+\Sigma\Delta m\mathbf{v}_0.$$

Но первый член в этой сумме, очевидно, равен импульсу диска в системе координат, связанной с его центром. В этой системе координат центр диска неподвижен и импульс диска равен нулю. Поэтому импульс диска, катящегося по горизонтальной плоскости, равен $\mathbf{p}=\Sigma\Delta m\mathbf{v}_0$. Вынося постоянный множитель $\mathbf{v}_0$ за знак суммы, найдем

$$\mathbf{p}=\mathbf{v}_0\Sigma\Delta m=M\mathbf{v}_0,$$

где M — масса диска.

Импульс тела зависит от системы координат. Пусть в системе координат B тело массы m движется со скоростью $\mathbf{v}_B$. Его импульс $\mathbf{p}_1=m\mathbf{v}_B$. Система координат B движется со скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы координат A. Чтобы найти импульс тела в системе координат A, надо к $\mathbf{p}_1$ прибавить $m\mathbf{v}_0$ — произведение массы тела на скорость системы координат B относительно системы координат A. Это правило — следствие того, что скорость любой точки в системе координат B складывается из скорости этой точки в системе координат A и скорости системы координат B относительно системы координат A (рис. 4): $\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_B+\mathbf{v}_0$. Отсюда

$$m\mathbf{v}_A=m\mathbf{v}_B+m\mathbf{v}_0=\mathbf{p}_1+m\mathbf{v}_0.$$

Пользуясь понятием «импульс», второй закон Ньютона можно записать так:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}.$$

Если на тело действует сила $\mathbf{F}$ в течение времени Δt, то импульс тела изменяется на величину $\Delta(m\mathbf{v})=\mathbf{F}\Delta t$. Произведение силы $\mathbf{F}$ на время ее действия Δt называют импульсом силы. И говорят, что изменение импульса тела равно импульсу действующей на него силы.

Воспользовавшись такой формой записи второго закона Ньютона, найдем, например, среднюю силу, действующую на плиту, с которой абсолютно упруго сталкивается шарик массы m, летящий

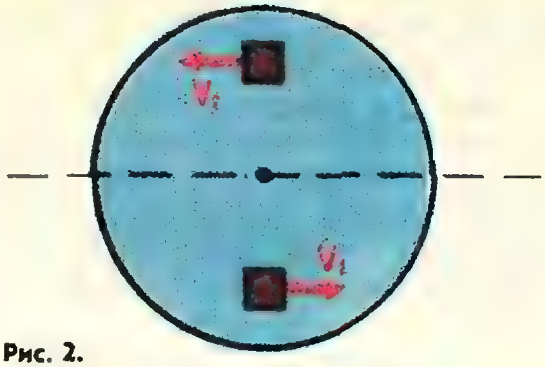


Рис. 2.

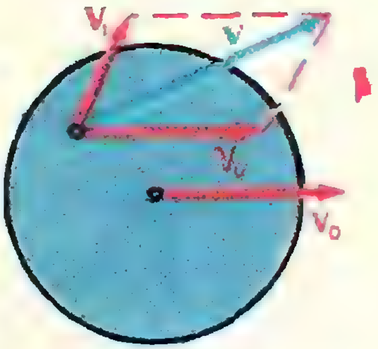


Рис. 3.

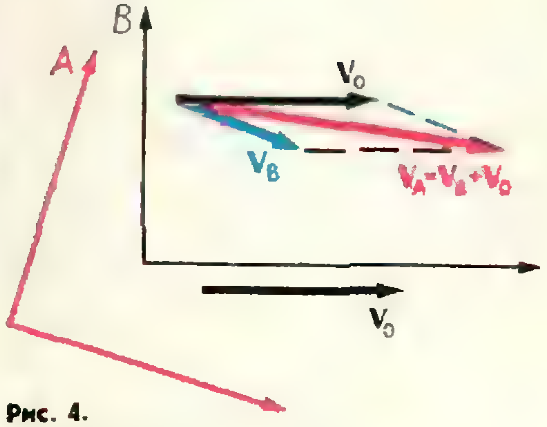


Рис. 4.

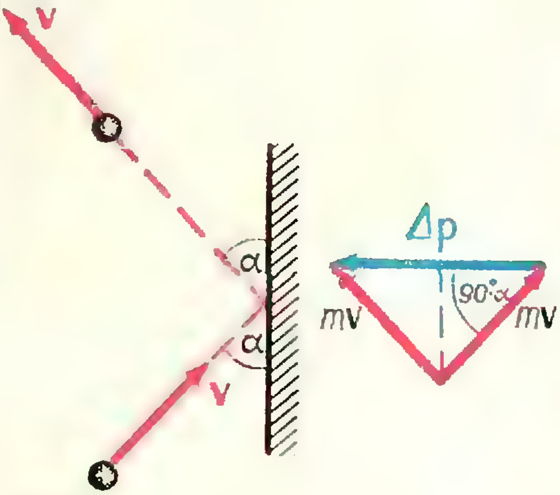


Рис. 5.

со скоростью **v** под углом α к плите (рис. 5). Время соударения шарика с плитой равно τ.

Так как столкновение абсолютно упруго, то шарик отскакивает от плиты под таким же углом α, под каким подлетает к ней, и с той же по величине скоростью v. Нетрудно найти изменение импульса Δp шарика при ударе. Оно равно

$$2mv\cos(90°-\alpha)=2mv\sin\alpha$$

и направлено перпендикулярно плите. Это означает, что при столкновении шарика с плитой на шарик действует средняя сила

$$F=\frac{2mv\sin\alpha}{\tau}.$$

Согласно третьему закону Ньютона точно такая же сила, но направленная противоположно, действует на плиту.

Если одна и та же сила действует на два тела одно и то же время, то импульсы этих тел меняются одинаково, независимо от их начальных масс или скоростей. Пусть, например, две частицы с массами m и $2m$ движутся так, как показано на рисунке 6, *а* — первая частица (m) движется со скоростью v в направлении, перпендикулярном направлению движения второй частицы ($2m$), скорость которой равна $2v$. На частицы в некоторый момент времени начинают действовать одинаковые силы, причем эти силы действуют на частицы одинаковое время. После прекращения действия сил частица массы m движется со скоростью $2v$ в направлении, противоположном направлению ее первоначального движения. С какой скоростью и в каком направлении движется вторая частица после прекращения действия силы?

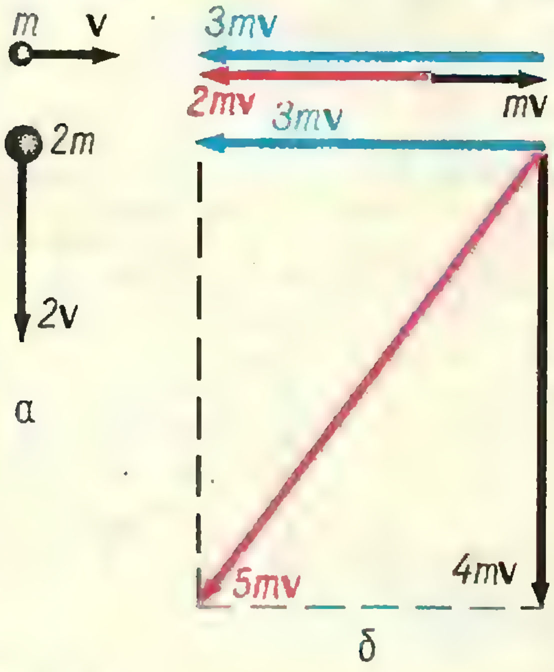


Рис. 6.

Найдем импульс силы, действующей на каждую частицу. Нужно не забывать, что импульс и изменение импульса — величины векторные. Импульс первой частицы изменился по направлению и по величине и стал равным $2mv$. Изменение импульса первой частицы равно $3mv$ (рис. 6, *б*). Так как и на вторую частицу действует такая же сила в течение того же самого времени, то и импульс второй частицы меняется на $3mv$. Сложив первоначальный импульс второй частицы с изменением импульса, найдем, что импульс частицы массы $2m$ стал равен $5\,mv$ и направлен под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ к направлению первоначального движения этой частицы (см. рис. 6, *б*). Разделив импульс частицы на ее массу, найдем, что скорость частицы массы $2m$ после прекращения действия силы равна $2{,}5v$.

Теперь решим более сложную задачу.

Космический корабль, имеющий лобовое сечение $S=50$ *м*² и скорость $v=10$ *км/сек*, попадает в облако микрометеоров, плотность которого $n=1$ *м*$^{-3}$ (то есть в одном кубическом метре пространства находится один микрометеор). Масса каждого микрометеора $m=0{,}02$ *г*. Насколько должна возрасти сила тяги двигателя, чтобы скорость корабля не изменилась? Удар микрометеоров об обшивку корабля считать абсолютно неупругим.

За время Δt корабль сталкивается с микрометеорами, которые в начальный момент находились от него на расстоянии, меньшем $v\cdot\Delta t$ (рис. 7). Масса M всех этих микрометеоров равна $mnSv\Delta t$. До столкновения с кораблем скорости и импульсы микрометеоров были равны нулю, а после неупругого

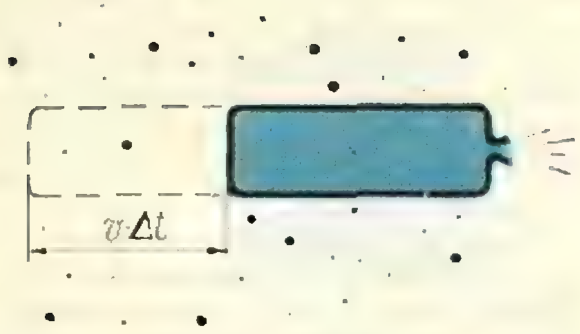


Рис. 7.

столкновения с кораблем скорости микрометеоров стали равны v. Это означает, что при столкновении микрометеора с обшивкой корабля микрометеор приобретает импульс mv. Микрометеоры, попавшие на обшивку корабля за время Δt, приобретают суммарный импульс $Mv = mnSv\Delta t \cdot v = mnSv^2\Delta t$. Это означает, что на микрометеоры действует сила

$$F = \frac{Mv}{\Delta t} = mnSv^2.$$

Согласно третьему закону Ньютона такая же по величине сила, но направленная в противоположную сторону, действует на обшивку корабля. Поэтому для того, чтобы при попадании корабля в облако метеоров его скорость не изменилась, сила тяги двигателя корабля должна увеличиться на $mnSv^2 = 10^5$ *н*.

Если на тело не действуют силы или действующие силы взаимно уравновешиваются, то импульс тела не меняется. Точно так же, если на систему тел не действуют внешние силы (такая система тел называется замкнутой или изолированной), то суммарный импульс системы тел не меняется.

Решим такую задачу. Нейтрон с энергией $E = 10^{-15}$ *дж* поглощается первоначально неподвижным ядром кадмия ($A = 112$). Определить скорость вновь образовавшегося ядра ($A = 113$).

Система нейтрон — ядро изолированная, и ее импульс не меняется.

Если массу нейтрона обозначить m, а его скорость v, то $E = mv^2/2$. Отсюда мы найдем, что скорость нейтрона до его столкновения с ядром кадмия была равна $v = \sqrt{2E/m}$. До столкновения импульс нейтрона был равен $mv = m\sqrt{2E/m}$, а импульс ядра был равен нулю. Поэтому до столкновения импульс системы был равен $m\sqrt{2E/m}$. Если скорость ядра, образовавшегося в результате поглощения нейтрона ядром кадмия, обозначить u, а его массу M, то импульс этого ядра равен Mu. Запишем теперь закон сохранения импульса:

$$Mu = m\sqrt{2E/m}.$$

Отсюда найдем, что

$$u = \frac{m\sqrt{2E/m}}{M}.$$

Напомним еще раз, что импульс — величина векторная. Поэтому, когда мы говорим о сохранении импульса изолированной системы, важно помнить, что сохраняется не только величина импульса, но и его направление. Сохраняются и составляющие импульса по любым направлениям, например по двум осям координат. Решим, используя это, следующую задачу.

Ядро массы m, летящее со скоростью $\mathbf{v}$, распадается на две части одинаковой массы, причем один из осколков деления летит со скоростью $\mathbf{u}_1$ под углом α к направлению полета ядра до его распада. Найти скорость и направление полета второго осколка ядра.

Введем такую систему координат: ось x направим по скорости ядра до распада (рис. 8). Если скорость второго осколка ядра обозначить $\mathbf{u}_2$, а угол, который образует вектор $\mathbf{u}_2$ с направлением скорости ядра до распада (с осью x), обозначить β, то на основании

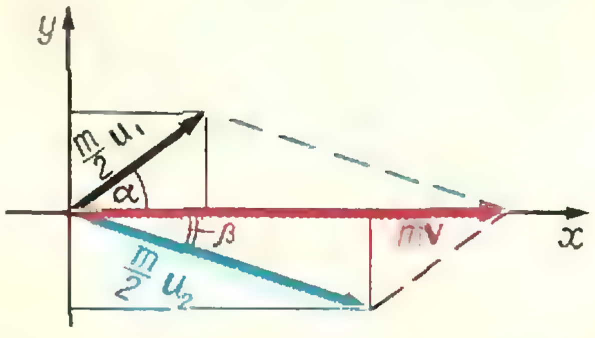


Рис. 8.

закона сохранения импульса мы можем записать:

$$\frac{m}{2}u_1\cos\alpha+\frac{m}{2}u_2\cos\beta=mv$$

— для составляющих импульсов по оси x,

$$\frac{m}{2}u_1\sin\alpha-\frac{m}{2}u_2\sin\beta=0$$

— для составляющих импульсов по оси y.

Из этих уравнений находим

$$u_2=\sqrt{u_1^2+4v^2-4vu_1\cos\alpha},$$

$$\sin\beta=\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+4v^2-4vu_1\cos\alpha}}\sin\alpha.$$

Если система не изолирована и на нее действует некоторая сила **F**, то полный импульс системы не сохраняется. Однако сохраняется составляющая импульса в направлении, перпендикулярном силе **F**. На этом основано решение большого числа задач. Решим, например, такую задачу.

На железнодорожной платформе, движущейся со скоростью v, укреплено орудие. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом. Орудие произвело выстрел, после чего скорость платформы уменьшилась в n раз. Найти скорость u снаряда (относительно земли), если он вылетает из ствола под углом α к горизонту. Масса снаряда m, масса платформы с орудием (без снаряда) M.

Система орудие — платформа — снаряд не является изолированной: на нее действует сила тяжести и сила реакции Земли. Однако в горизонтальном направлении на платформу с пушкой и снаряд внешние силы не действуют. Это означает, что горизонтальная составляющая импульса системы не должна при выстреле измениться. Поэтому

$$mu\cos\alpha+M\frac{v}{n}=(M+m)v.$$

Отсюда

$$u=v\frac{mv+M\frac{n-1}{n}}{m\cos\alpha}.$$

Если система частиц или тел изолирована и ее импульс не меняется, то не меняется и скорость центра масс системы (центра тяжести). В частности, если в некоторый момент система двигалась так, что скорость центра масс была равна нулю, то эта скорость остается равной нулю все время. Поэтому не меняется и положение центра масс. Рассмотрим пример.

Человек массы m находится на корме лодки массы M, стоящей в пруду. Длина лодки L. На сколько сдвинется лодка относительно берега, если человек перейдет с кормы лодки на нос?

Так как в горизонтальном направлении на систему лодка — человек силы не действуют, положение ее центра масс должно сохраниться. Но положение центра масс системы определяется положением центров масс лодки и человека (рис. 9). Пусть первоначально расстояние между центром масс системы ($O_с$) и центром масс лодки ($O_л$) равно x.

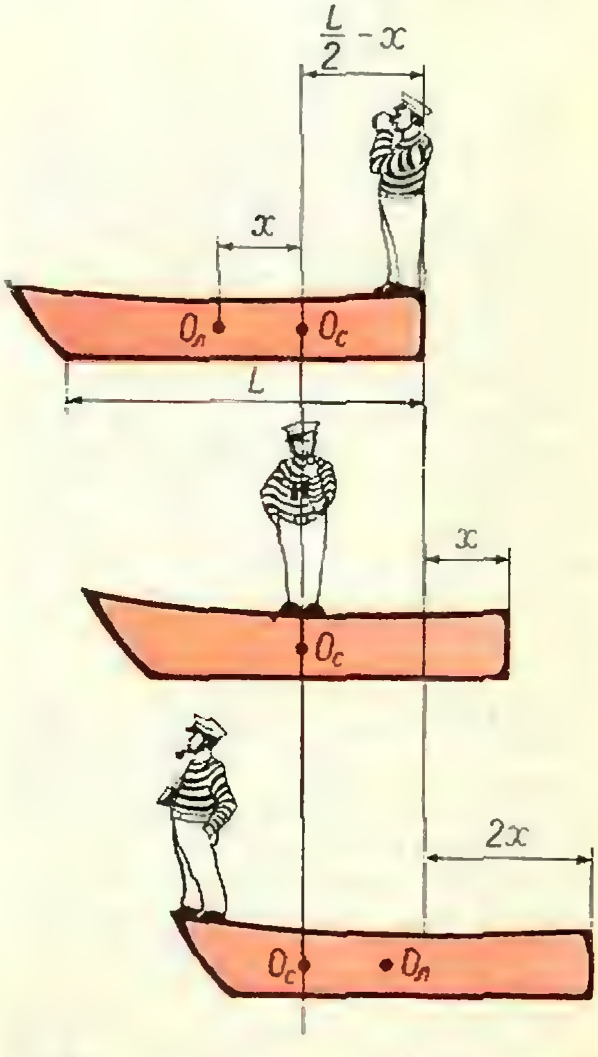


Рис. 9.

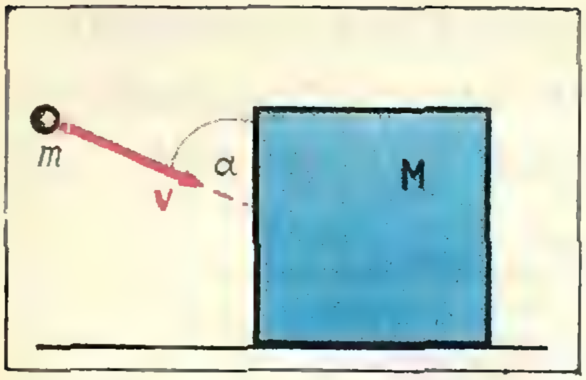


Рис. 10.

Тогда $Mx=m(L/2-x)$, откуда $x=\frac{m}{2(M+m)}L$. Когда человек перейдет с кормы лодки на ее середину, то, очевидно, положение его центра масс должно совпадать с положением центра масс системы. Следовательно, и положение центра масс лодки должно также совпадать с положением центра масс системы, то есть лодка должна переместиться на расстояние x. На такое же расстояние переместится лодка при переходе человека на нос. Следовательно, полное перемещение лодки

$$l=2x=\frac{m}{M+m}L.$$

Упражнения

1. Найти среднюю силу, действующую на плиту при абсолютно неупругом столкновении с ней шарика массы m, летящего со скоростью v в направлении, составляющем с плитой угол α. Время соударения равно τ.

2. С какой силой давит на плечо ручной пулемет при стрельбе, если масса пули $m=10$ *г*, ее скорость при вылете $v=800$ *м/сек* и скорострельность пулемета $n=600$ выстрелов в минуту?

3. Два шарика падают в облаке пыли. Во сколько раз отличаются скорости шариков, если диаметр одного из них вдвое больше диаметра другого?

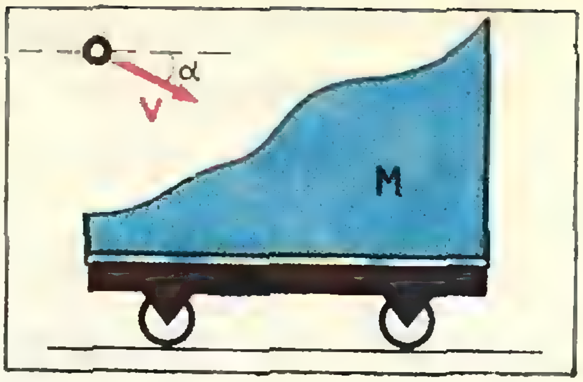


Рис. 11.

4. Шарик, летящий горизонтально со скоростью v, ударяется о тяжелую стальную плиту, движущуюся ему навстречу со скоростью u. С какой скоростью будет двигаться шарик после абсолютно упругого соударения? Силой тяжести пренебречь.

5. Пуля массы m, летящая горизонтально со скоростью v, попадает в кубик, лежащий на гладком полу, и пробивает его насквозь. Масса кубика M. Скорость пули после вылета равна u. Какая часть первоначальной энергии пули перешла в тепло?

6. При взрыве снаряда массы $M=60$ *кг* образовались три одинаковых осколка. Их общая кинетическая энергия равна $E=2{,}9\cdot 10^7$ *дж*. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков, если до разрыва снаряд летел со скоростью $v=800$ *м/сек*?

7. Шарик массы m, летящий со скоростью v, сталкивается под углом α с кубиком массы M, стоящим на гладком полу (рис. 10). Найти скорость шарика после удара. Удар считать абсолютно упругим.

8. Шарик массы m, летящий со скоростью v, составляющей угол α с горизонтом, попадает в покоющуюся платформу с песком массы M (рис. 11) и застревает в песке. Найти скорость платформы.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ФИЗИКЕ 1971 года В МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На письменном экзамене по физике в МФТИ, как всегда, предлагались 4 задачи. В каждом билете одна из задач, по мнению составителей, наиболее трудная, отмечена звездочкой. Мнение абитуриентов иногда оказывалось иным.

Для получения оценки «удовлетворительно» надо было справиться с любыми двумя задачами, «хорошо» ставилось за три задачи, «отлично» получали те, кто решили верно все четыре задачи.

Приведем в качестве примера два билета из числа предлагавшихся на экзамене.

Билет № 1

1. Из духового ружья стреляют в спичечный коробок, лежащий на расстоянии $l=30$ *см* от края стола. Пуля массы $m=1$ *г*, летящая горизонтально со скоростью $v_0=150$ *м/сек*, пробивает коробок и вылетает из него со скоростью $v=v_0/2$. Масса коробка $M=50$ *г*. При каких значениях коэффициента трения между коробком и столом коробок упадет со стола?

2. Два вертикальных цилиндрических сообщающихся сосуда заполнены водой и закрыты поршнями массы $M_1=2$ *кг* и $M_2=3$ *кг* (рис. 1). Когда на первый поршень поместили гирю массы $m=1$ *кг*, то в положении равновесия он установился на $h=10$ *см* ниже второго поршня. Когда эту гирю переставили на второй поршень, то он оказался на 10 *см* ниже первого. Как расположатся поршни в отсутствие гири?

3*. Для того чтобы произошла ядерная реакция между двумя α-частицами, необходимо, чтобы расстояние между ними не превышало $r=4\cdot10^{-13}$ *см*. Какую минимальную кинетическую энергию $E_{\min}$ нужно сообщить одной из α-частиц, чтобы она вступила в ядерную реакцию с другой α-частицей, которая была неподвижной и находилась на большом расстоянии от первой? Заряд α-частицы равен $2l=3,2\cdot10^{-19}$ кулона.

Примечание. Обратите внимание, что в момент максимального сближения α-частицы имеют одинаковые скорости.

4. Энергия солнечных лучей, падающих на поверхность Луны, частично поглощается (коэффициент поглощения $k=90\%$) и частично рассеивается. Считая, что освещенная поверхность Луны рассеивает свет равномерно в телесный угол 2π, найти, во сколько раз освещенность поверхности Земли во время полнолуния меньше освещенности, создаваемой прямыми солнечными лучами? Угловой диаметр Луны, видимый с Земли, принять равным $\alpha=10^{-2}$ радиана.

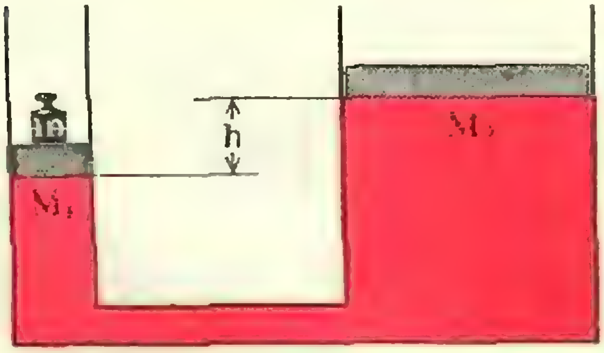


Рис. 1.

Билет № 2

1*. Самолет садится на палубу авианосца, имея скорость $v=108$ *км/час*. Зацепившись за канат торможения, он пробегает путь $S=30$ *м* до полной остановки. Определить максимальный вес пилота при посадке (перегрузку) считая, что коэффициент упругости каната не изменяется по мере его растяжения. Масса пилота $m=70$ *кг*.

2. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью диссоциирован на атомы, а диссоциацией водорода еще можно пренебречь, давление равно P. При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциированы, давление в сосуде $3P$. Каково отношение чисел грамм-атомов азота и водорода в смеси?

3. В старой аккумуляторной батарее, состоящей из n последовательно соединенных банок, резко возросло внутреннее сопротивление одной из банок и стало равным $\rho=10\ r$. Считая э. д. с. всех банок одинаковыми, определить, при каком сопротивлении нагрузки R мощность, выделяемая на этом сопротивлении, не изменяется при коротком замыкании поврежденной банки. Внутреннее сопротивление нормальной банки r.

4. Внутри стеклянной капиллярной трубки находится газ при низком давлении, в котором зажжен электрический разряд, так что весь столб газа является источником рассеянного излучения. Под каким максимальным углом $\varphi_{\max}$ к радиусу может выйти световой луч через внешнюю стенку капилляра? Внутренний и внешний радиусы капилляра равны соответственно $r=2$ *мм* и $R=4$ *мм*.

В. Е. Белонучкин

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Книга о самых грандиозных явлениях природы

Представьте себе звезду, вокруг которой обращается миллион планет. На каждой из этих планет миллион стран, а в каждой стране миллион городов. Каждый город имеет миллион зданий, состоящих из миллиона комнат, а в каждой комнате собран миллион атомных бомб. А теперь вообразите, что произошло бы, если все эти бомбы одновременно взорвались? Произошел бы взрыв, сравнимый по своей мощности с тем, какой мы наблюдаем, глядя на взорвавшуюся галактику. Так один из астрономов пытался дать наглядное представление о мощности происходящих в космосе взрывов.

Рекомендуемая читателю книга В. Г. Горбацкого*) начинается с объяснения взрывных процессов, рассказывает об общих свойствах взрывов, происходящих в земных условиях, сопоставляет различные взрывы по количеству освобождаемой энергии. Затем автор переходит к методам изучения космических взрывов. Кратко описав приемники электромагнитного излучения (одной из форм которого является видимый свет)—телескопы, радиотелескопы и другие устройства, он много внимания уделяет спектрам небесных тел, ибо именно по спектрам удается установить физические свойства этих тел.

Следующий раздел автор посвящает описанию состояния вещества во Вселенной. Это необходимо знать читателю, так как космический взрыв заключается в быстром изменении состояния какого-либо небесного тела. Здесь ведется рассказ о звездах различных типов, их внутреннем строении и физических свойствах, а также о различных звездных скоплениях вплоть до гигантских объединений — галактик, содержащих десятки и сотни миллиардов звезд. Эти небесные тела и их системы являются гигантскими сгустками энергии. Вопросу о роли различных видов энергии во Вселенной автор посвящает очередной раздел книги. Он проводит ряд подсчетов, из которых, например, следует, что заключенная в Солнце тепловая энергия составляет 10^{48} *эрг*, а суммарная энергия излучения в нем на пять порядков меньше.

Закончив изложение материала, необходимого для понимания основного текста книги, автор переходит к непосредственному рассмотрению взрывов, происходящих в космосе. Начинает он с взрывных процессов, происходящих на Солнце,—с так называемых хромосферных вспышек, энергия которых соответствует энергии взрыва «всего лишь» миллиарда мегатонных бомб. Дальше он переходит к взрывам все более и более грандиозным. Это и вспышки, происходящие на некоторых звездах, и вспышки новых звезд, когда слабенькие звездочки начинают светить в сотни тысяч раз ярче, чем прежде, и колоссальные вспышки сверхновых звезд, в максимум блеска светящих как целая звездная система.

Автор детально рассказывает о недавно открытых интереснейших объектах, — квазарах и пульсарах,— привлекающих сейчас особое внимание астрономов, о ядрах галактик и взрывающихся галактиках, с описания которых начинается эта рецензия.

В книге не только описываются различные взрывные процессы в космосе, но и рассматривается роль взрывов в развитии звезд и галактик, разбираются возможные причины взрывов, зачастую еще гипотетические. Несомненно, она представит большой интерес для тех, кто интересуется современным естествознанием.

И. Е. Евгеньев

---

*) В. Г. Горбацкий. Космические взрывы. Изд. 2-е, перераб. и дополн., М., «Наука», 1972.

ИНФОРМАЦИЯ

Государственные премии 1971 года

Среди работ, удостоенных Государственных премий в области науки и техники в 1971 году, имеются три работы по различным разделам физики и одна работа по астрономии.

Группа научных сотрудников Института атомной энергии имени И. В. Курчатова и Научно-исследовательского института электрофизической аппаратуры имени Д. В. Ефремова (Л. А. Арцимович, В. Д. Шафранов, В. С. Стрелков, Д. П. Иванов, К. А. Разумова, В. С. Муховатов, Е. П. Горбунов, С. В. Миронов, А. К. Спиридонов, А. М. Ус, М. П. Петров, Н. А. Моносзон), возглавляемая академиком Л. А. Арцимовичем, удостоена премии за цикл работ *«Получение и исследование высокотемпературной термоядерной плазмы на установках «Токамак»*.

Человечество стремится к непрерывному расширению своих энергетических ресурсов. Наряду с тепловыми электростанциями и гидроэлектростанциями недавно появились атомные электростанции. Они способны обеспечить людей энергией на весьма длительный срок. Но еще более богатые энергетические ресурсы связаны с решением проблемы управляемых термоядерных реакций.

Если бы мы научились нагревать водород до сотен миллионов градусов и поддерживать такую сверхвысокую температуру в течение нескольких минут, вода превратилась бы в великолепное топливо. При столь высоких температурах атомные ядра самого легкого в природе элемента — водорода объединялись бы в более тяжелые ядра гелия, освобождая огромное количество энергии. Такой процесс слияния легких ядер физики назвали термоядерной реакцией. Термоядерная реакция возникает при взрыве водородной бомбы. Но управлять ею в момент взрыва мы не можем.

Уже около двадцати лет ученые многих стран ищут пути к осуществлению управляемой термоядерной реакции. Важный вклад в эти исследования внесли советские физики.

При огромных температурах атомы водорода, сталкиваясь друг с другом, разрушаются на электрически заряженные осколки, образуя так называемую плазму. Горячая плазма очень капризна и неустойчива. Она легко преодолевает все преграды и мгновенно отдает свою энергию стенкам того сосуда, в котором она заключена. Для изоляции плазмы от стенок сосуда используют различные комбинации магнитных полей, ограничивающих движение заряженных частиц. Однако плазма различными способами преодолевает эти искусственные преграды. Поэтому сроки существования горячей плазмы (или, как говорят, время ее жизни) до недавних пор не превышали миллионных долей секунды.

10 лет тому назад в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова были начаты исследования термоядерных установок нового типа, получивших название «Токамак». Это странное название образовано из следующих слов: ТОроидальная КАмера в МАГнитном поле (со временем окончание «маг» превратилось в более удобное «мак»).

Тороидальная металлическая камера по форме напоминает обыкновенную автомобильную камеру. Из нее тщательно откачивают воздух, после чего вводят в камеру небольшое количество так называемого тяжелого водорода — дейтерия. Атомы дейтерия вдвое тяжелее обычных атомов водорода.

Камера охватывает сердечник мощного трансформатора, соединенного с батареей электрических конденсаторов, энергия которых достигает миллиона джоулей. При разрядке конденсаторов в камере происходит электрический пробой газа и создается дейтериевая плазма. В ней возникает индукционный ток. Он нагревает плазму до температуры в 5 миллионов градусов. Магнитное поле, связанное с индукционным током, препятствует утечке заряженных частиц плазмы на внутреннюю стенку тора. Однако изолирующие свойства магнитного поля индукционного тока оказываются недостаточно сильными, и горячая плазма почти мгновенно попадает на стенку камеры.

В установках «Токамак» на наружную поверхность тора одевают катушки, создающие сильное импульсное магнитное поле, силовые линии которого параллельны стенкам тора. Напряженность дополнительного магнитного поля в камере достигает 40 000 гаусс. Это поле существенно улучшает магнитную изоляцию дейтериевой плазмы. Время жизни горячей плазмы возрастает до 0,05 секунды.

За такой срок атомные ядра дейтерия успевают много раз столкнуться друг с другом. При этом образуются атомные ядра гелия и возникают свободные нейтроны. Происходящая в «Токамаках» термоядерная реакция может быть записана в виде следующей формулы:

$${}^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

Образующиеся в этой реакции ядра гелия принадлежат так называемому «легкому» гелию; они втрое тяжелее ядер обычного водорода.

В ходе работ по созданию и исследованию термоядерных установок «Токамак» Л. А. Арцимович и его сотрудники построили теорию, описывающую поведение плазмы в этих установках и разработали методы измерения различных характеристик плазмы (температуры ионов и электронов, концентрации, времени жизни и т. д.). Многолетние исследования привели к замечательным результатам. Эксперименты показали, что в установках «Токамак» удается подавить влияние всех наиболее опасных механизмов неустойчивости плазмы. Благодаря этому получены рекордные сроки существования горячей плазмы. Впервые в истории науки зарегистрированы потоки термоядерных нейтронов в лабораторных условиях.

Результаты, достигнутые советскими физиками, оказались настолько неожиданными, что многие зарубежные ученые, узнав о них, выразили сомнение в их достоверности. Однако проведенные в 1969 году совместно советскими и английскими учеными эксперименты по измерению основных характеристик горячей плазмы в установке «Токамак-3» подтвердили эти результаты.

Исследование горячей плазмы в установках «Токамак» стало основным направлением работ по управляемому термоядерному синтезу в СССР. Аналогичные установки строятся сейчас в США, Франции, ФРГ, Японии, Италии и ряде других стран. Специалисты считают, что результаты, достигнутые советскими учеными, открывают реальную перспективу создания термоядерных электростанций на основе установок, подобных «Токамакам». Правда, это потребует увеличения температуры, концентрации и времени жизни горячей плазмы.

Вторая премия по разделу физики присуждена коллективу научных сотрудников Физико-энергетического института, Объединенного института ядерных исследований, Института атомной энергии имени И. В. Курчатова и Центрального института авиационного моторостроения имени П. И. Баранова в составе Д. И. Блохинцева, И. М. Франка, Ф. Л. Шапиро, И. М. Маторы, Е. П. Шебалина, С. К. Николаева, В. Т. Руденко, Ф. И. Украинцева, И. С. Головнина, Г. Е. Блохина, И. И. Бондаренко. Этот коллектив удостоен Государственной премии *за создание атомного реактора нового типа — исследовательского импульсного реактора на быстрых нейтронах* (сокращенно его называют ИБР).

Атомные реакторы служат могучими источниками энергии. Одновременно они производят огромное количество свободных нейтронов. Нейтроны являются одним из новых средств изучения природы вещества и атомных ядер. С их помощью можно, например, выяснить такие детали строения кристаллической решетки, которые не удается установить никакими другими методами.

Поток нейтронов из атомного реактора непрерывен. А для многих исследований, напротив, нужны прерывистые пучки нейтронного излучения. Обычно их получают при помощи специального устройства, которое называется механическим селектором. Подобно затвору фотоаппарата селектор пропускает нейтроны, идущие по специальному каналу в защитной оболочке реактора, лишь в течение малых промежутков времени. Однако механические селекторы очень сильно ослабляют поток нейтронов.

В 1955 году в Физико-энергетическом институте был предложен и рассчитан принципиально новый тип атомного реактора — импульсный реактор на быстрых нейтронах. Действующий реактор этого типа был построен в 1960 году в Дубне. Он является уникальным источником мощных прерывистых нейтронных пучков. Его создатели, образно говоря, приручили атомный взрыв.

В атомных реакторах обычно присутствует специальное вещество, замедляющее нейтроны, которые образуются при делении тяжелых ядер и осуществляют цепной процесс. В атомной бомбе, напротив, замедлитель отсутствует. Там цепной процесс создают очень быстрые нейтроны.

Ядерное взрывчатое вещество (уран-235 или плутоний-239) обладает так называемой критической массой. Взрыв становится возможным только после того, как масса куска взрывчатого вещества превысит эту критическую величину. Поэтому в бомбе имеется не один, а два или более куска ядерного взрывчатого вещества, масса каждого из которых меньше критической. Их соединение вызывает взрыв.

Реактор ИБР работает на таких же быстрых нейтронах, как и атомная бомба. Принцип его действия необычайно прост и остроумен. Два куска ядерного взрывчатого вещества с общей массой, чуть меньшей критической, помещаются вблизи друг от друга. В небольшой зазор между ними на короткое мгновение вводится третий кусочек, дополняющий прежние куски до критической массы. Однако начавшаяся вслед за этим цепная реакция деления ядер мгновению прерывается, так как дополнительный кусочек взрывчатого вещества тут же удаляется из зоны реакции.

Конструкция реактора ИБР такова. Две плоские коробки с плутонием-239 раздвинуты на небольшое расстояние друг от друга. В образовавшийся между ними зазор вводится край стального диска диаметром около одного метра. В диск впрессован небольшой плоский вкладыш из урана-235. Скорость вращения диска составляет около 5000 оборотов в минуту. При каждом обороте диска урановый вкладыш на мгновение оказывается между коробками с плутонием, вызывая возникновение цепной реакции. Но вслед за этим вкладыш удаляется из плутония и цепной процесс обрывается. Таким путем ИБР создает мощные всплески нейтронного излучения продолжительностью в несколько стотысячных долей секунды.

Они отделены друг от друга значительно бо́льшим интервалом времени, в течение которого никаких нейтронов не возникает.

Возникающие в реакторе нейтроны имеют весьма различные энергии. Однако импульсный реактор позволяет сравнительно легко выделять нейтроны с определенной величиной энергии то есть осуществлять так называемую нейтронную спектрометрию. Для этого достаточно включить регистрирующую аппаратуру в тот момент, когда к ней подойдут нейтроны нужной нам энергии (более быстрые нейтроны пройдут раньше, более медленные — позднее).

Для выделения нейтронов с заданной энергией в Дубне от реактора ИБР до зала, где ставятся эксперименты, проложена 1000-метровая металлическая труба, из которой откачан воздух. Большая длина пути облегчает разделение нейтронов по энергиям (вблизи реактора нейтроны разных энергий идут весьма близко друг от друга), а труба препятствует рассеянию нейтронов.

При средней мощности порядка 25 киловатт реактор ИБР во многих экспериментах заменяет обычный реактор непрерывного действия мощностью до 100 000 киловатт, а в некоторых случаях до 1 000 000 киловатт.

На реакторе ИБР выполнено много ценных исследований в области физики атомных ядер и физики твердого тела, получивших широкую международную известность.

Огромную трудность для теоретической физики представляют задачи о взаимодействии нескольких тел. Особенно трудны такие задачи в области квантовой механики, где сама природа взаимодействующих частиц намного сложнее, чем у тел, изучаемых обычной механикой Ньютона. Такие задачи не имеют точных решений, а их приближенные решения требуют огромной вычислительной работы. Ленинградский физик-теоретик Л. Д. Фаддеев в цикле работ *«Корректная постановка и исследование квантовой задачи трех частиц («Уравнения Фаддеева»)»* нашел пути к точному решению таких задач. Развитый им метод позволяет решать многие сложные задачи в области атомной и ядерной физики, а также физики элементарных частиц. Этот метод используется для расчета таких систем, как атом и два взаимодействующих с ним электрона, три взаимодействующие ядерные частицы (протоны или нейтроны), ядро и две взаимодействующие с ним ядерные частицы и т. п. Недавно этот новый метод расчета удалось распространить на случай взаимодействия четырех и более частиц. За успешное решение целого класса сложных задач квантовой механики Л. Д. Фадееву присуждена Государственная премия.

Группа советских астрономов в составе Е. П. Аксенова, В. Г. Демина, Г. Н. Дубошина, Е. А. Гребеникова и М. Д. Кислика удостоена Государственной премии за «цикл *работ по современным проблемам и методам небесной механики, опубликованных в* 1958—1968 *годах*».

При решении различных задач о движении планет и искусственных спутников в небесной механике обычно поступают следующим образом. В качестве первого приближения считают траекторию движения исследуемого небесного тела эллиптической. Затем вносят поправки и уточнения, связанные с влиянием различных неучтенных обстоятельств (или, как говорят астрономы, возмущений). К ним относятся: несимметричность центрального притягивающего тела (например, Земли), влияние соседних планет, притяжение Солнца, собственное вращение исследуемого космического тела и т. д. При этом первоначальная траектория движения искажается: эллипс начинает покачиваться, поворачиваться в плоскости орбиты, которая, в свою очередь, также меняет пространственную ориентацию. Учет возмущений дает сложную траекторию движения.

Однако эти приближенные методы расчета траекторий небесных объектов пригодны лишь при условии, что возмущения со стороны других объектов, а также отклонения рассматриваемых тел от сферической формы и неравномерное распределение масс внутри них незначительны. Они не в состоянии учесть взаимодействие между поступательным и вращательным движением рассматриваемых тел. В действительности даже при исследовании движения долгоживущих спутников Земли и Луны рассчитать их орбиты на длительный срок обычными методами либо крайне трудно, либо вообще невозможно. Не удается получить надежные результаты и для спутников Марса, Юпитера, так называемых «резонансных» астероидов, комет, проходящих вблизи Юпитера.

Авторы премированного цикла работ предложили совершенно новые методы решения подобных задач. Они отказались от кеплеровских эллиптических орбит и нашли более точные неэллиптические орбиты, используемые в качестве первого приближения. Построенные ими модели гравитационных полей взаимодействующих космических объектов намного точнее, чем в классической механике, описывают реальные гравитационные поля Земли, Луны и других небесных тел. Созданная авторами теория возмущений позволила учитывать взаимное влияние одновременно происходящих поступательных и вращательных движений небесных тел.

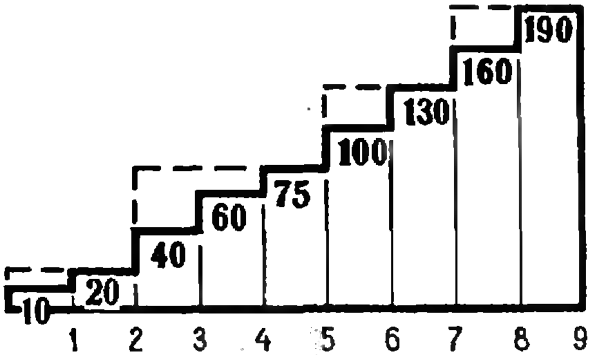
С помощью этой теории можно рассчитывать на длительные сроки точные орбиты искусственных спутников Земли с учетом неоднородностей ее поля тяготения, возмущающего влияния Луны и Солнца, светового давления солнечных лучей и ряда других факторов. Удалось также получить достаточно точные решения задач о движении спутников Марса Фобоса и Деймоса, одного из ближайших спутников Юпитера, «резонансных» астероидов типа Еулалии, комет, близко подходящих к Юпитеру.

В. А. Лешковцев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Динамическое программирование»

1. Стоимость первоначальной партии станков — 785 руб., а унифицированной наилучшим образом — 905 руб. (см. рисунок). Решение строится аналогично задаче о лестнице. Действительно, если по оси ординат откладывать стоимость станков, то общая стоимость всей партии станков представится в виде площади «лестницы». Стоимость унифицированной серии представится в виде «лестницы» с меньшим числом ступеней, изображенной пунктиром.



3. Виктору и Нине хватит тридцати копеек, если ехать через пункты 2, 3, 4.

4. Через Юру и Зину у Лены за 9 *мин*.

К статье «Учитесь работать с логарифмами»

1. $a^{\log_2 b}$. Обратите внимание, что ответ можно записать и иначе: $b^{\log_2 a}$. 2. $-a$, если $0<a<1$; $a-2$, если $a>1$; при остальных значениях a выражение не имеет смысла. 3. $\log_a b$, если $a>1$, $b>1$ или $0<a<1$, $0<b<1$; при остальных значениях a и b выражение не имеет смысла. 4. Докажите, что $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$. 5. 3. 6. $\frac{5a}{1-a}$. 7. $\frac{a+2b-2}{1-a}$. 8. $\frac{5-\beta}{2(\alpha\beta+\alpha-2\beta+1)}$. 9. $\log_2 3 > \log_{\frac{1}{4}} 5$. 10. $\log_4 5 = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$. 11. $\log_5 7 > \log_8 3$. 12. $\log_2 3 > \log_5 8$. 13. $3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866 < \log_2 1863$. 14. $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.

«К вариантам вступительных экзаменов по математике»

БЕЛОРУССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Вариант 1

1. $\frac{2V}{\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 2. 34, 98

3. $x_1 = \frac{k\pi}{5}$, $x_2 = \pm\frac{3\pi}{8} + n\pi$, где k и n — любые целые числа.

4. $0 < x < \frac{1}{3}$, $x > 1$.

Вариант 2

1. $\frac{2\pi V}{\sin^3 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. 2. $x = 20$, $y = 16$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, где k и n — любые целые числа.

4. $\frac{4}{3} < x < 3$.

КУЙБЫШЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Факультет автоматики и информационно-измерительной техники

1. Площадь сечения: $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$; объемы частей пирамиды: $\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{192}$ и $\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{64}$.

2. Цена первого тома 2 руб., второго тома 1 руб. 50 коп.

3. $x = \frac{3}{2}$.

4. $2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{6}$,

$$2n\pi + \frac{5\pi}{6} < x < (2n+1)\pi,$$

где n — любое целое число. Указание. Обозначить $\log_{\sin x} 2$ через z и, решив неравенство $z^2 < 2z+3$, свести задачу к решению двойного неравенства $-1 < \log_{\sin x} 2 < 3$. Это последнее равносильно двойному неравенству $0 < \sin x < \frac{1}{2}$.

Электротехнический факультет

1. $\frac{2\pi R^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha$.

2. 8, 16, 32 и 32, 16, 8.

3. $x = 1$.

4. $\frac{\pi}{12}+k\pi<x<\frac{5\pi}{12}+k\pi$, где k — любое целое число.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ НЕФТЕХИМИЧЕСКОЙ И ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ имени Н. М. ГУБКИНА

Вариант 1

1. Первый — за 18 часов, второй — за 24 часа.

2. $x_1=4$, $x_2=-9$.

3. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}$, где n — любое целое число.

4. $\frac{\pi a^3\sin^3\alpha\sin^3\varphi}{(1+\cos\varphi)^3}$. Указание. Доказать, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Вычислить объем пирамиды V и ее полную поверхность S, а затем использовать формулу $V=\frac{1}{3}Sr$, где r — радиус вписанного в пирамиду шара.

Вариант 2

1. 38,8%. 2. $x=a$.

3. $z_1=\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7}$, $z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, $z_3=\frac{\pi}{2}+m\pi$, где k, n, m — любые целые числа.

4. $-\frac{\pi r^3}{24}\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\cos^6\alpha}$. Обратить внимание, что угол при основании в осевом сечении конуса, равный $180°-2\alpha$, не может превосходить прямого угла.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА имени Г. В. ПЛЕХАНОВА

Факультет экономической кибернетики

1. $x_1=-11$, $x_2=1$, $x_3=-5-\sqrt{14}$, $x_4=-5+\sqrt{14}$.

2. Собственная скорость лодки 3 *км/час*, скорость течения 1,2 *км/час*.

3. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

4. $x_1=(4k+2)\pi$, $x_2=(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4n\pi$, где k и n — любые целые числа.

Факультет экономики материально-технического снабжения

1. $x_1=0$, $x_2=4$. 2. 40 *кг*. 3. $^4/_3H^2$.

4. $x_1=\frac{(8k+1)\pi}{16}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}+\frac{2n\pi}{3}$, где k и n — любые целые числа.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ СТАЛИ И СПЛАВОВ

Физико-химический факультет и факультет полупроводниковых материалов и приборов

1. $\frac{1}{6}S\operatorname{tg}\beta\sqrt{S\sin\alpha}$.

2. $|a|\leqslant 1$.

3. $x=-4$, $y=6$.

4. $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $x_3=(-1)^m\frac{\pi}{6}+m\pi$, где k, n, m — любые целые числа.

Факультет металлургии черных металлов и сплавов и факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов

1. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}\sin\alpha\sin\beta}{|\sin(\alpha\pm\beta)|}$.

2. $x=-1$. 3. $x>91/9$.

4. $x_1=\frac{k\pi}{3}$, $x_2=\frac{2n\pi}{9}$, где k и n — любые целые числа.

К статье «Импульс. Закон сохранения импульса»

1. Изменение импульса шарика равно $mv\sin\alpha$. Поэтому

$$F_{ср}=\frac{mv\sin\alpha}{\tau}.$$

2. $F=\frac{mvn}{1\ мин}=80\ н$.

3. Сила сопротивления, действующая на шарик, пропорциональна площади сечения шарика и квадрату его скорости $F=k\frac{\pi d^2}{4}v^2$. Эта сила растет с увеличением скорости и при некоторой скорости становится равной силе тяжести mg. После этого скорость шарика не меняется. Так как $m=\frac{1}{6}\pi d^3\rho$ (ρ — плотность шарика), то

$$\frac{1}{6}\pi d^3\rho g=k\frac{\pi}{4}d^2v^2.$$

Отсюда

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{d\rho g}{k}}.$$

Таким образом, $v\sim\sqrt{d}$. Это означает, что отношение скоростей шариков равно $\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}=\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ То есть скорость шарика с вдвое большим диаметром в $\sqrt{2}$ раз больше скорости второго шарика.

4. $v+2u$. Указание. Перейти в систему координат, связанную с плитой. Система шарик — плита не изолированная, так как скорость плиты не меняется.

5. Скорость кубика равна $v'=\frac{m}{\mu}(v-u)$. В тепло перешла энергия $E=\frac{mv^2}{2}-\frac{M\left[\frac{m}{\mu}(v-u)\right]^2}{2}$. Разделив это выражение на $\frac{mv^2}{2}$, найдем, что в тепло перейдет $1-\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{u}{v}\right)^2$ часть энергии пули.

6. $v_{\max}\approx 1500$ *м/сек*. Указание. Скорость одного из осколков максимальна, если он будет лететь в направлении полета снаряда, а два других осколка — в противоположную сторону.

7. В вертикальном направлении составляющие скорости шарика $v_1=v\sin\alpha$ не меняются. В горизонтальном направлении система изолирована. Записав законы сохранения энергии импульса, нетрудно найти, что горизонтальная составляющая скорости шарика будет равна $v_2=v\cos\alpha\,\frac{M-m}{M+m}$. Скорость шарика после столкновения равна $\sqrt{v_1^2+v_2^2}=v\sqrt{2(1-mM\cos 2\alpha)}$.

8. $u=\frac{m}{M+m}\,v\cos\alpha$.

К «Вариантам вступительных экзаменов по физике в МФТИ»

Билет № 1

1. Пуля передает коробку импульс $\frac{mv_0}{2}$, следовательно, энергия коробка $\frac{m^2v_0^2}{8M}$. Эта величина должна превышать максимально возможную работу против сил трения $Mgkl$. Отсюда $k<\frac{m^2v_0^2}{8M^2gl}\approx 0{,}375$.

2. Первый поршень расположится на $\frac{5}{3}$ *см* выше второго.

3. Из закона сохранения импульса следует, что в момент максимального сближения частиц они обе движутся со скоростью $\frac{v}{2}$. Их полная кинетическая энергия равна $\frac{2m\cdot\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{mv^2}{2}$ и составляет половину начальной энергии движущейся α-частицы.

Значит, $\frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{E_{\min}}{2}$, откуда $E_{\min}=4{,}6\cdot 10^{-15}$ *дж*.

4. Луна рассеивает энергию $(1-k)\,E_0\pi R_л^2$, а в единичный телесный угол $\frac{1-k}{2}\,E_0R_л^2$ (здесь $k=0{,}9$, E_0 — освещенность Луны и Земли прямыми солнечными лучами, R_0 — радиус Луны). На единицу поверхности Земли попадает энергия $\frac{1-k}{2}\,E_0R_л^2\cdot\frac{1}{r_{лз}^2}$, где $r_{лз}$ — расстояние от Луны до Земли. Но $\frac{R_л}{r_{лз}}=\frac{\alpha}{2}$. Отсюда искомое отношение освещенностей $\frac{8}{(1-k)\,\alpha^2}=8\cdot 10^5$.

Билет № 2

1. $P_{\max}=220$ *кг*.

2. $\frac{1}{2}$.

3. Ток в цепи при замыкании поврежденной банки не должен измениться, то есть $\frac{n\varepsilon}{R+\rho+(n-1)r}=\frac{(n-1)\varepsilon}{R+(n-1)r}$. Отсюда $R=\rho r(n-1)$.

4. 30°.

«Квант» для младших школьников» (см. «Квант» № 2, 1972)

1. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, а вода в стакане.

2. 8 выстрелов: 4 раза в 17 и 2 раза в 16.

3. $42048=72\cdot 584$.

4. Больше тех чисел, в которых единица встречается.

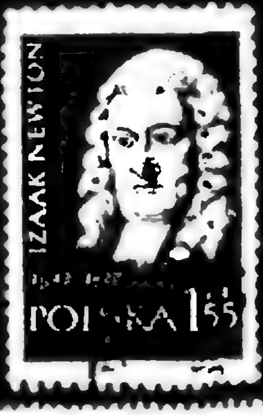
5. Числа первого столбца можно представить в виде $1+3a$ где a — номер строки. Аналогичные выражения для чисел остальных столбцов таковы: $-3+3b$, $5+3c$, $9+3d$, $-1+3e$.

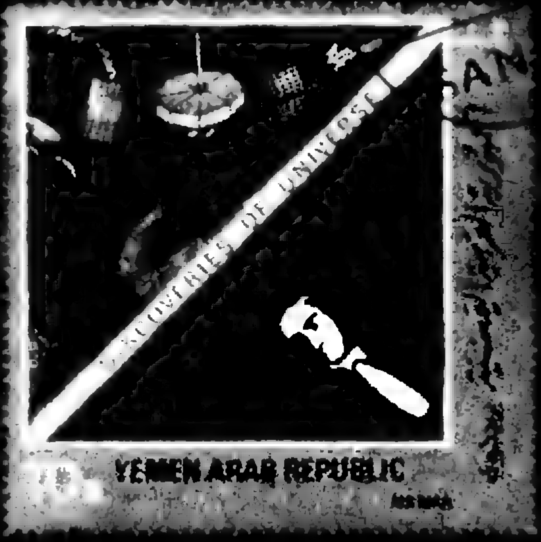
Сумму обведенных чисел можно записать в виде

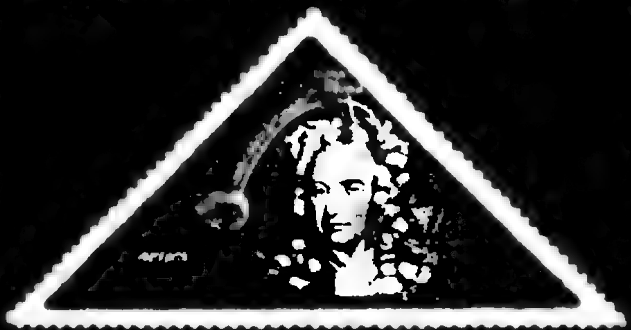
$$1+3a-3+3b+5+3c+9+3d-1+3e=11+3\,(a+b+c+d+e),$$

где вместо a, b, c, d, e надо подставить соответствующие номера строк. В каждой строке выбирается ровно одно число, поэтому $a+b+c+d+e=1+2+3+4+5=15$, а упомянутая сумма равна $11+3\times 15=56$.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА







МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ИСААКУ НЬЮТОНУ

В этом году исполняется 245 лет со дня смерти гениального английского физика и математика Исаака Ньютона. Он родился в тот год, когда умер Галилей. Уже в школе Ньютон обнаружил необыкновенные способности к математике. В 19 лет он поступил в Кембриджский университет и, будучи еще студентом, доказал теорему, которая была впоследствии названа «теоремой о биноме Ньютона». К 24 годам Ньютон заложил основы своих будущих великих открытий: дифференциального и интегрального исчисления, всемирного тяготения, теории света и цвета.

В 26 лет Ньютон стал руководителем физико-математической кафедры в Кембриджском университете. В 1672 году его избрали членом Королевского Общества (Английская Академия Наук), президентом которого он стал в 1703 году.

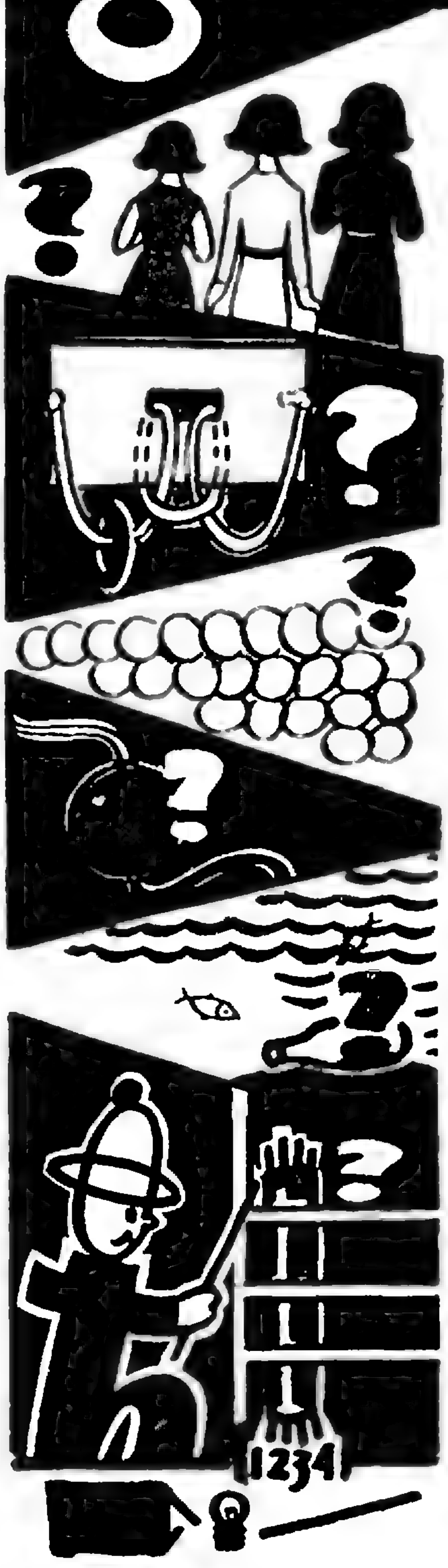
Первая марка с портретом Ньютона была выпущена во Франции в 1957 году. Затем марки с его портретами выпускались в ряде других стран. На фото вы видите марку Польской народной республики, две марки Йемена и Парагвайскую марку, посвященные Ньютону. На одной из марок Йемена рядом с портретом Ньютона изображен построенный им отражательный телескоп. Любопытно отметить, что на этой марке дата рождения Ньютона (1643 г.) не совпадает с аналогичной датой, указанной на остальных марках (1642 г.). Дело в том, что Ньютон родился 25 декабря 1642 г. по так называемому старому стилю. По новому стилю, которым мы пользуемся, день рождения Ньютона приходится на 4 января 1643 г.

Следует отметить, что в Англии, на родине Ньютона, до настоящего времени не выпущено марок, посвященных великому ученому.

А. В. Алтыкис

КВАНТ

ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ



1. Три подруги вышли в белом, зеленом и синем платьях. Их туфли были одного из тех же трех цветов. Известно, что только у Ани цвета платья и туфель совпадали. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми, Наташа была в зеленых туфлях. Определить цвет платья каждой из подруг.

2. Не развязывая веревки (см. рисунок), передвиньте кольцо из левой петли в правую.

3. У мальчика имеется 25 медных монет. Имеется ли среди них семь монет одинакового достоинства?

4. Провода подключены к однородному металлическому шару в диаметрально противоположных его точках. В каком сечении шара выделяется при пропускании через шар электрического тока больше тепла?

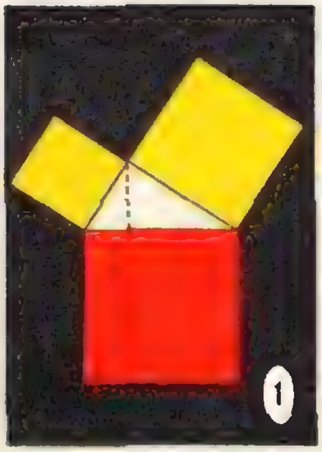
5. В море на глубине нескольких километров затонула незакупоренная бутылка. Увеличилась или уменьшилась вместимость бутылки из-за давления воды?

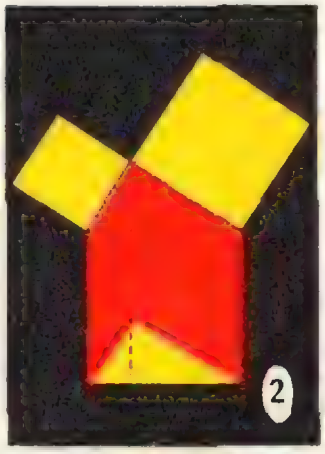
6. Четыре одинаковых проводника заключены в трубу, соединяющую этажи здания. Провода выступают из трубы на нижнем и верхнем этажах на несколько сантиметров. Концы проводов на нижнем этаже перенумерованы. Как, совершив наименьшее число операций, узнать номера концов на верхнем этаже, имея в своем распоряжении батарейку, лампочку и короткий кусок провода?

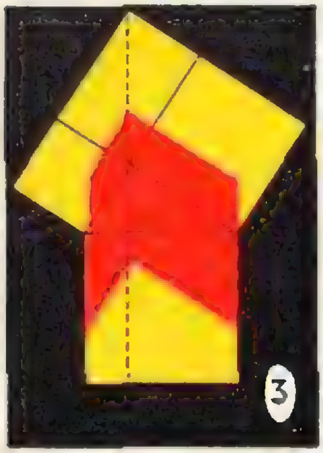
ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

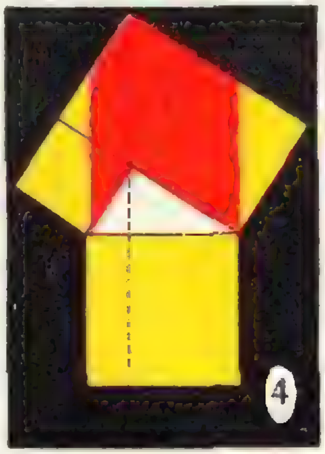
Квант 3

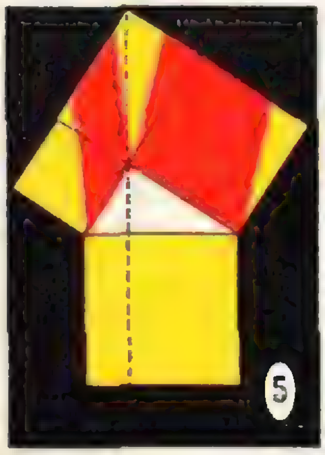
27|1-42

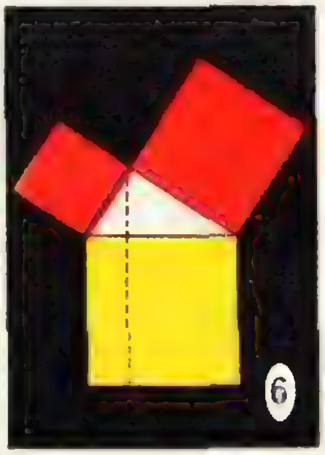












ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В КАРТИНКАХ

На рисунках запечатлены последовательные этапы доказательства теоремы Пифагора. Красной краски, затраченной на то, чтобы покрасить квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 1), оказывается ровно столько, сколько ее требуется, чтобы покрасить квадраты, построенные на катетах этого треугольника (рис. 6). На рисунке 2 квадрат превратился в равновеликую ему фигуру, по форме напоминающую развернутую книгу, движущуюся затем вверх.

Тот факт, что продолженная на рисунке 3 пунктиром высота прямоугольного треугольника попадает в точку пересечения продолжений сторон квадратов, построенных на катетах, требует обоснования — оно приведено на второй странице обложки.

На следующих рисунках «книжка» распадается на параллелограммы, а они превращаются в равновеликие им квадраты, построенные на катетах данного прямоугольного треугольника. Тем самым сумма площадей квадратов, построенных на катетах произвольного прямоугольного треугольника, оказывается равной площади квадрата, построенного на его гипотенузе.

Теорема Пифагора доказана.

НОМЕР
4

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

квант

4
АПРЕЛЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 День космонавтики
4 Расстановка кубиков — *Н. Б. Васильев*
10 Оптический телескоп — *В. Е. Белонучкин, С. М. Козел*
19 Косоугольные координаты и области Дирихле — *В. Л. Гутенмахер*
23 Почему Луна не из чугуна? — *М. А. Корец, З. Л. Понизовский*
25 Справедливый выбор — *А. Н. Виленкин, А. И. Шнирельман*
28 Конус максимального объема в природе — *С. М. Петров*
30 Карты и раскраски — *А. П. Савин*
34 Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки — *А. А. Пресман*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

36 Применение алгебраических тождеств к получению геометрических неравенств — *З. А. Скопец*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

40 Задачи **М136—М140; Ф148—Ф152**
42 Решение задач **М96—М100; Ф108—Ф115**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

54 Прямая и плоскость — *Л. Е. Евтушик*
60 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года
62 Решение задач по электростатике — *Г. Я. Мякишев*
67 Вступительные экзамены по физике на физическом факультете МГУ — *А. В. Устинова*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

69 Рассказ о замечательном физике — *И. М. Беккерман*
70 Новые книги — *М. Л. Смолянский, Г. Н. Дьяченко*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

72 Марки, посвященные Дню космонавтики — *В. А. Лешковцев*
74 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ *(3 стр. обл.)*
СМЕСЬ *(стр. 18, 27, 39, 41, 68)*

День космонавтики

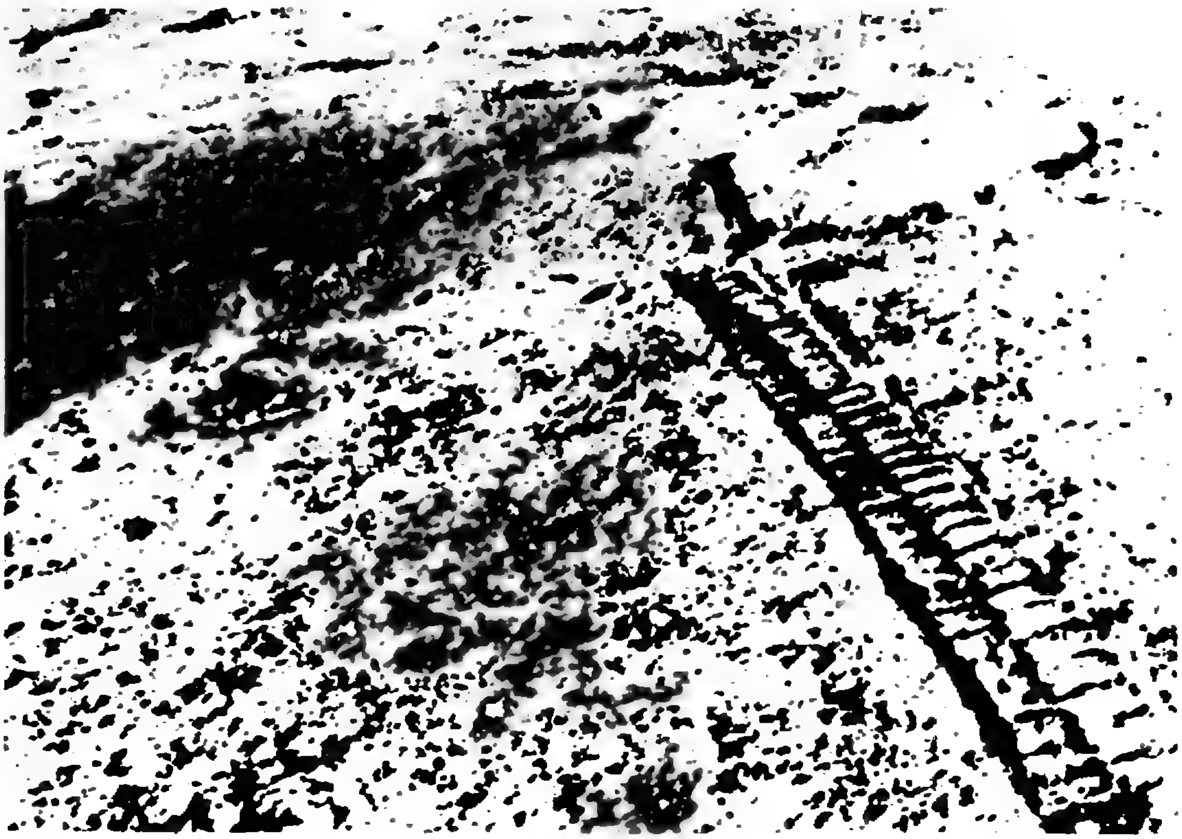
В 1972 году исполняется 15 лет с момента запуска первого искусственного спутника Земли и 11 лет с момента первого полета человека в Космос. Оба эти события произошли в нашей стране. Советский Союз навсегда останется в памяти людей как страна, первой проложившая дорогу в космические просторы.

Немногим более десяти лет отделяют нас от этих событий. За эти годы наука узнала о Луне, Венере, Марсе, Солнце и космических просторах больше, чем за все предыдущие столетия упорных наблюдений и исследований.

К настоящему моменту в Космос запущено более тысячи различных аппаратов, половина которых сделана руками советских ученых, инженеров, рабочих. Наша космическая программа поражает мир своей последовательностью. В ней отчетливо выделяются три основных направления: исследования околоземного космического пространства и самой Земли, имеющие не только научное, но и большое практическое значение; изучение Луны; исследования планет Солнечной системы.

Советские искусственные спутники серии «Метеор» позволили создать постоянную службу наблюдения за метеорологическими процессами в атмосфере, ледниковым покровом, поверхностью океанов и т. д. Спутники серии «Молния» необычайно расширили возможности передачи информации. Они являются надежной основой для создания международной системы космической связи «Интеркосмос».

Спутники оказывают неоценимую помощь в изучении водного режима и составлении карт труднодоступных районов, поисках полезных ископаемых и охране лесных богатств, облегчении условий навигации кораблей и самолетов и борьбе с вредителями в сельском хозяйстве.

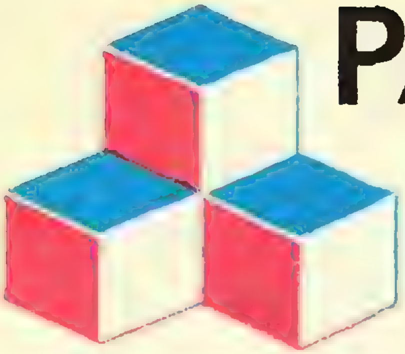


Длительный полет советских космонавтов А. Г. Николаева и В. И. Севастьянова на корабле «Союз-9» подтвердил возможность успешной продолжительной работы человека за пределами земной атмосферы. Космонавты не раз выходили в открытый космос; отлажены системы управления в групповых полетах; произведены стыковки космических кораблей; опробованы методы космической сварки. На повестку дня поставлен вопрос о создании орбитальных обсерваторий, где периодически сменяемые группы ученых будут проводить научные исследования по широкой программе. Первая пилотируемая орбитальная научная станция была создана в нашей стране 7 июня 1971 года после успешной стыковки орбитальной научной станции «Салют» и космического корабля «Союз-11».

Успешно развиваются также исследования Луны. Особенно большой вклад в них внесли полеты автоматических станций «Луна-16», «Луна-17» и «Луна-20». Первая и третья доставили на Землю образцы лунного грунта. Вторая опустила на поверхность Луны передвижную исследовательскую лабораторию «Луноход-1», в течение многих месяцев выполнявшую сложную научную программу. (Одна из снятых Луноходом панорам лунной поверхности помещена на приведенной здесь фотографии.)

Советский Союз далеко продвинулся по пути изучения планет Солнечной системы, прежде всего Венеры и Марса. Четыре наших спускаемых аппарата находятся на поверхности Венеры. Они сообщили детальные сведения о температуре, давлении и химическом составе атмосферы этой загадочной планеты. 2 декабря 1971 года впервые в истории спускаемый аппарат автоматической станции «Марс-3» произвел мягкую посадку на поверхность Марса. Станции «Марс-2» и «Марс-3» стали искусственными спутниками Марса.

Огромный путь пройден нашей космической наукой и техникой за полтора десятилетия. А впереди — неизведанная дорога к более далеким планетам, к звездам и населенным разумными существами мирам. И кто знает, какие удивительные открытия подарит нам она в недалеком будущем.



РАССТАНОВКА КУБИКОВ

Н. Б. Васильев

В этой статье мы расскажем решение одной из задач, предлагавшихся девятиклассникам и десятиклассникам на прошлогодней Всесоюзной математической олимпиаде в Риге (см. «Квант» № 11, 1971). Она формулировалась так.

Задача. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?

а) Укажите ответ для маленьких значений n: для $n = 2, 3, 4$.

б) Попробуйте найти ответ для $n = 10$.

в) Решите общую задачу. Если вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так. Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3), где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений 1, 2, …, n. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличался бы от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3)? Попробуйте найти оценки для числа наборов в более общей задаче, когда рассматриваются наборы не из трех, а из четырех и большего количества букв.

Формулировка с ладьями

Чтобы не путаться в словах «куб», «кубик» и «выбранный кубик», удобно переформулировать задачу в других терминах. Весь куб $n \times n \times n$ мы назовем «пространственной шахматной доской», каждый из кубиков $1 \times 1 \times 1$ — «клеткой», каждый выбранный кубик — «клеткой, занятой ладьей». Будем считать, что ладья, стоящая в какой-то клетке x, держит под ударом все клетки, расположен-

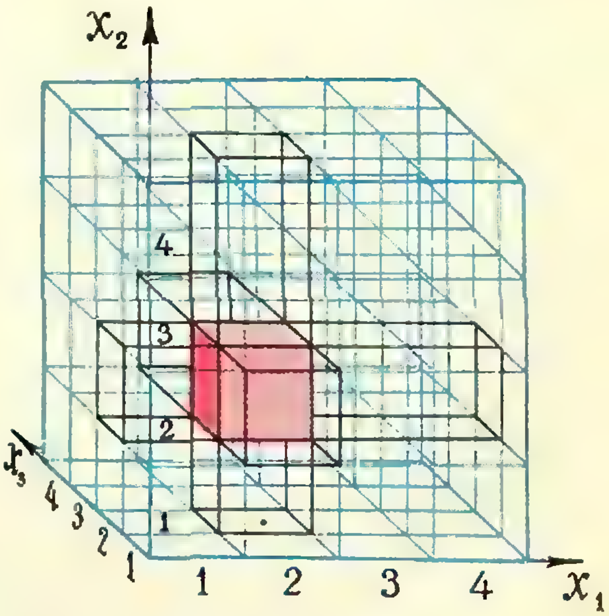


Рис. 1. Ладья, стоящая на поле 222 (розовый кубик), бьет десять полей: кроме самого поля 222, еще 122, 322, 422 (в направлении x_1 в «ширину»), 212, 232, 242 (в направлении x_2 в «высоту»), 221, 223 и 224 (в направлении x_3 в «глубину»).

ные вдоль трех прямых, параллельных ребрам куба и проходящих через центр клетки x (в том числе будем считать, что ладья бьет и саму эту клетку x (рис. 1)). Тогда вопрос, поставленный в условии, можно сформулировать так: какое наименьшее число ладей можно расставить на доске $n\times n\times n$, чтобы они били всю доску (то есть все клетки без исключения)?

Упражнение 1. Решите аналогичную задачу для «плоской» шахматной доски $n\times n$. (Ответ: n. Заметьте, что если на доске $n\times n$ стоит меньше чем n ладей, то найдутся горизонталь и вертикаль, свободные от ладей).

Первоначальные грубые оценки

Обозначим через A_n наименьшее количество ладей, которые могут побить всю доску $n\times n\times n$.

Поскольку на доске $n\times n\times n$ каждая ладья бьет $3n-2$ клетки, а всего клеток n^3, то, чтобы побить всю доску, нужно расставить по крайней мере $\frac{n^3}{3n-2}$ ладей. Другими словами,

$$A_n\geqslant\frac{n^3}{3n-2}. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что

$$A_2\geqslant 2,\ A_3\geqslant 4,\ A_4\geqslant 7,\ A_5\geqslant 10.$$

Легко придумать пример расстановки n^2 ладей, бьющих всю доску (их можно расставить в одном горизонтальном «слое»).

Это дает такую грубую оценку:

$$A_n\leqslant n^2. \qquad (2)$$

Упражнение 2. Докажите, что

$$A_n\leqslant\frac{3n^2}{4}, \qquad (3)$$

воспользовавшись следующим соображением: если расставить n_1 ладей вдоль ребра n_1 доски $n_1\times n_2\times n_3$, то после этого останется решить задачу для доски $n_1\times(n_2-1)\times(n_3-1)$.

Запись расстановок «в плане»

При $n=2$, очевидно, двух ладей достаточно, чтобы держать под ударом все восемь клеток (рис. 2), то есть $A_2=2$. Несколько труднее исследовать случай $n=3$. Пример нужной расстановки пяти ладей показан на рисунке 3.

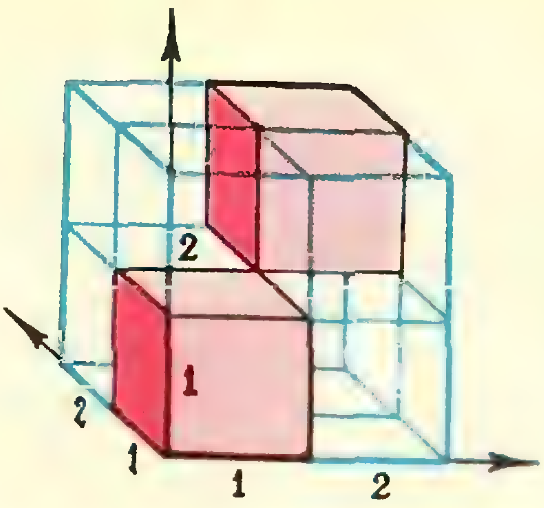


Рис. 2. Ладьи 111 и 222 бьют всю доску $2\times2\times2$.

В этом рисунке уже довольно трудно разобраться. С увеличением n дело еще ухудшится. Поэтому необходимо придумать более удобный способ описания расстановок ладей. Можно было бы, конечно, просто перечислять все «координаты» ладей, как это сделано в подписях под рисунками, но мы предложим более наглядный способ записи.

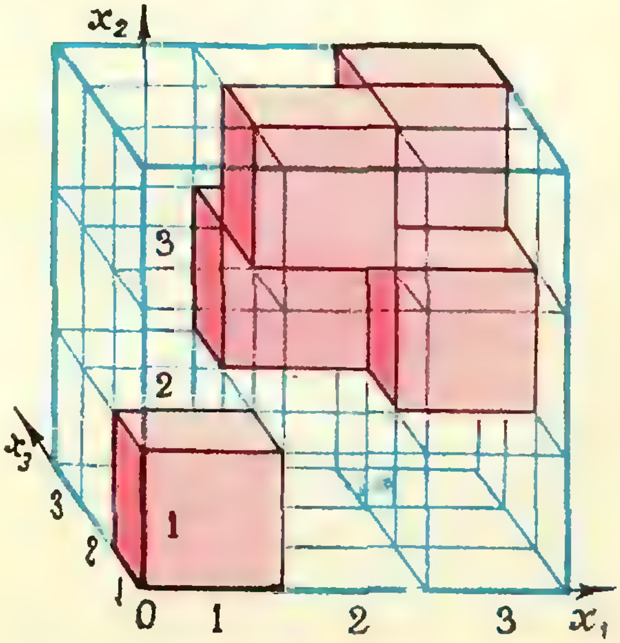


Рис. 3. Ладьи 111, 223, 232, 322 и 333.

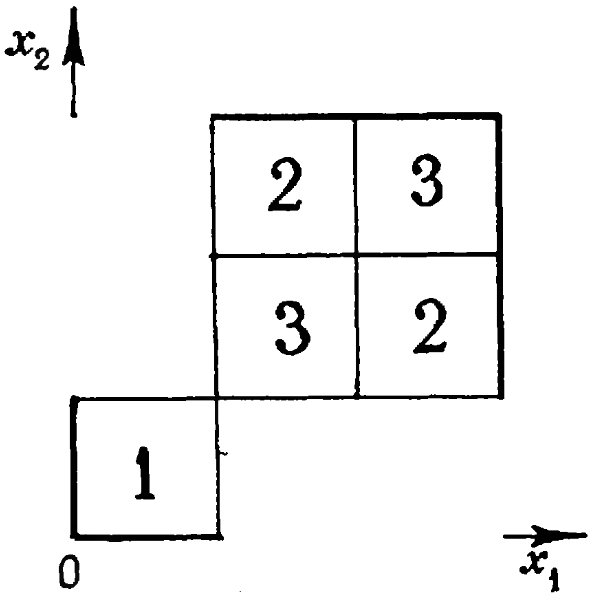


Рис. 4.

Будем называть *слоем* множество клеток, центры которых лежат в плоскости, параллельной одной из граней доски, и *линией* — множество клеток, центры которых лежат на одной прямой, параллельной ребру; слой состоит из n^2 клеток, линия — из n клеток. Нарисуем проекцию доски на одну из граней, скажем, на плоскость Ox_1x_2 (вид спереди) и на каждом поле полученной доски $n\times n$ напишем номер слоя, в котором встречается ладья, проектирующаяся на это поле. Тогда расстановка ладей, изображенная на рисунке 3, запишется так, как показано на рисунке 4 (ситуации, когда в одной линии стоит больше одной ладьи, у нас не будут встречаться, поэтому на каждом поле доски $n\times n$ будет записываться не более чем одно число). Заметьте, что на рисунке 4 для каждого пустого поля в строке и столбце, на пересечении которых оно стоит, встречаются все номера: 1, 2 и 3. Это и означает, что каждое поле доски 3×3×3, которое не бьется в направлении x_3, бьется или в направлении x_1, или в направлении x_2.

Итак, мы убедились, что $A_3\leqslant 5$. То, что $A_3\geqslant 4$, было уже доказано (см. (1)). Возникает вопрос: чему же равно A_3: 4 или 5? Мы предоставляем читателям возможность разобраться в случаях $n=3$, $n=4$ и т. д., а затем перейдем сразу к общему случаю.

Упражнение 3. а) Докажите, что 4 ладьи нельзя расставить так, чтобы они били всю доску 3×3×3; б) укажите пример расстановки 8 ладей, которые бьют всю доску 4×4×4; в) докажите, что $A_4=8$.

Общий случай. Формулировка результата

В нашей задаче едва ли не самое трудное — выдвинуть правильную гипотезу: чему равно A_n. Зная ответ, уже значительно легче и построить пример (то есть оценить A_n сверху), и доказать, что меньшим числом ладей обойтись нельзя. А ответ таков:

$$A_n=\begin{cases}\dfrac{n^2}{2}, & \text{если } n \text{ четно,}\\[2ex] \dfrac{n^2+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.}\end{cases}$$

В частности, $A_4=8$, $A_5=13,\ldots$, $A_{10}=50$.

Примеры «оптимальной» расстановки A_n ладей ясны из рисунков 5, *а* (n четно) и 5, *б* (n нечетно). Легко проверить, что все поля, которые не бьются в направлении x_3, бьются либо в направлении x_1, либо в направлении x_2: в каждом «кресте» — строке и столбце, на пересечении которых стоит пустое поле — встречаются все номера от 1 до n.

Осталось доказать, что в меньшем количестве ладьи не могут побить всю доску.

Первое доказательство

Пусть M ладей расставлены так, что они бьют все клетки доски. Выберем из всех слоев тот, в котором количество ладей минимально (если таких слоев несколько, возьмем любой из них). Можно считать, что он расположен параллельно плоскости Ox_1x_2. Обозначим этот слой через S, а количество ладей в нем — через m. Пусть эти m ладей бьют m_1 рядов в направлении x_1 и m_2 рядов в направлении x_2 (можно считать, что $m_1\geqslant m_2$; разумеется, $m\geqslant m_1$ и $m\geqslant m_2$). Тогда

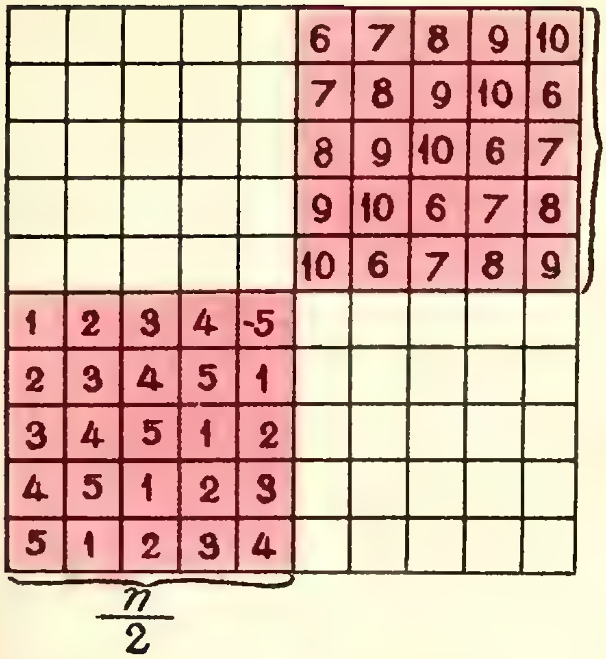

6 7 8 9 10
7 8 9 10 6
8 9 10 6 7
9 10 6 7 8
10 6 7 8 9
1 2 3 4 5
2 3 4 5 1
3 4 5 1 2
4 5 1 2 3
5 1 2 3 4
n/2
n/2

Рис. 5 а).

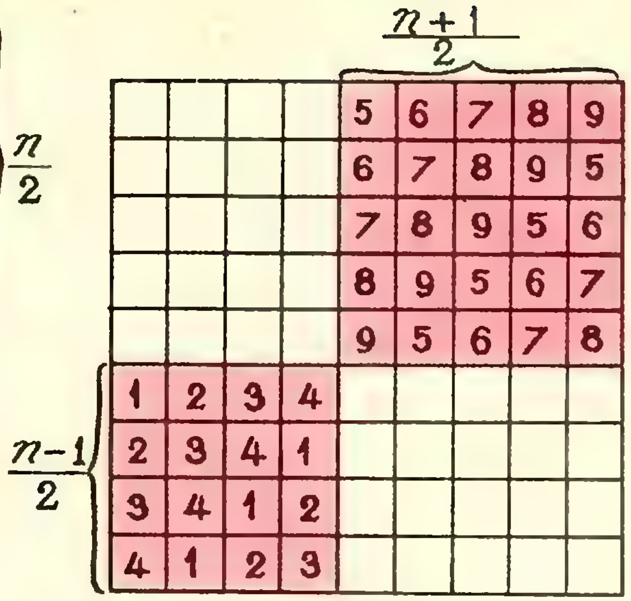

(n+1)/2
5 6 7 8 9
6 7 8 9 5
7 8 9 5 6
8 9 5 6 7
9 5 6 7 8
1 2 3 4
2 3 4 1
3 4 1 2
4 1 2 3
(n−1)/2

Рис. 5 б).

в слое S эти ладьи оставляют непобитыми $(n-m_1)(n-m_2)$ клеток, которые должны биться в направлении x_3. (На рисунке 6 слой S — передний, клетки, занятые ладьями,— красные, $n=9$, $m=m_1=4$, $m_2=3$).

Рассмотрим теперь все n «горизонтальных» слоев — слоев, параллельных плоскости Ox_1x_3. В тех $n-m_1$ из них, которые не содержат ладей слоя S, как мы убедились, должно быть не менее $(n-m_1)(n-m_2)$ ладей. В каждом из остальных m_1 слоев (зеленых на рисунке 6) — не менее m ладей (по выбору m). Поэтому

$$M \geqslant (n-m_1)(n-m_2)+mm_1 \geqslant$$
$$\geqslant (n-m_1)^2+m_1^2.$$

Но минимальное значение правой части при целом m_1, как легко доказать, как раз равно $\frac{n^2}{2}$ при нечетном n и $\frac{n^2+1}{2}$ при нечетном n (график функции $f(x)=(n-x)^2+x^2$ изображен на рисунке 7).

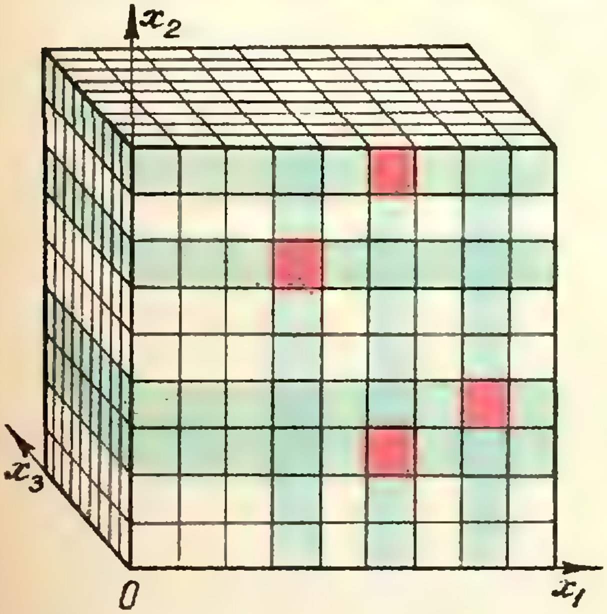


Рис. 6.

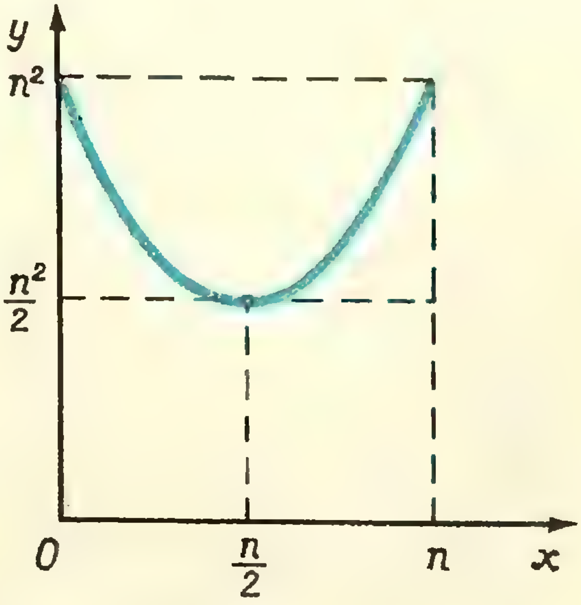


Рис. 7.

Второе доказательство

Лемма. Пусть в таблице $n\times n$ стоят целые неотрицательные числа так, что если в каком-то поле стоит 0, то сумма всех чисел строки и столбца, на пересечении которых стоит это поле, не меньше n. Тогда сумма всех чисел таблицы не меньше $\frac{n^2}{2}$ (и следовательно, если все числа в таблице целые, то при нечетном n эта сумма не меньше $\frac{n^2+1}{2}$).

Из леммы нужная оценка для A_n получается легко: достаточно спроектировать доску на одну из граней и написать в каждом поле полученной таблицы $n\times n$, сколько ладей в нее спроектировалось. Ясно, что условие леммы для полученной таблицы будет выполнено.

Осталось доказать лемму. Мы не будем этого делать, поскольку эта лемма уже встречалась недавно в «Кванте»: как это ни парадоксально, она предлагалась в том же прошлом году в качестве отдельной задачи на Международной олимпиаде (см. «Квант» № 12, 1971 г.). К сожалению, второе доказательство нашей задачи, а тем самым и лемма не рассказывались на разборе задач Всесоюзной олимпиады, так что этой леммы не знали ни руководители советской команды (иначе они, разумеется, добились бы, чтобы ее не предлагали школьникам, как слишком известную), ни участникам нашей команды (иначе бы они все решили ее безупречно).

Итак, основная задача, о которой идет речь в пунктах а), б) и в) условия, решена.

Замечания по поводу обобщений

Что же касается более общей задачи, сформулированной в пункте г),— аналогичной задачи не для «трехмерной», а для «k-мерной» доски ($k\geqslant 4$), то здесь окончательный результат не известен. Для минимального числа A_n^k ладей, бьющих всю доску $n\times n\times\ldots\times n$ (мы сохраняем шахматную терминологию, но напомним, что теперь клетка x — это набор из k чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, где каждое k принимает значение от 1 до n), легко получить оценки, аналогичные (1), (2):

$$A_n^k\leqslant n^{k-1},\quad A_n^k\geqslant\frac{n^k}{k(n-1)+1}.$$

Упражнение 4. Докажите эти неравенства. Постарайтесь улучшить оценку n^{k-1}, используя те же соображения, что и в упражнении 2.

Поскольку $A_n^2=n$ и A_n^3 равно $\frac{n^2}{2}$ или $\frac{n^2+1}{2}$, напрашивается гипотеза, что A_n^k близко к $\frac{n^{k-1}}{k-1}$. Эту гипотезу, наряду с другими, обсуждали участники олимпиады и члены жюри не только во время олимпиады, но и после нее. Один из наиболее интересных результатов нам сообщили выпускник физико-математической школы при Ленинградском университете *Д. Григорьев* и наш читатель *Б. Гинзбург*: им (независимо) удалось доказать, что если M ладей бьют всю доску и при этом *никакие две не бьют друг друга*, то $M\geqslant\frac{n^{k-1}}{k-1}$ (доказательство мы помещаем в конце статьи). По-видимому, этот результат верен и без дополнительного предположения, выделенного курсивом, то есть верно неравенство $A_n^k\geqslant\frac{n^{k-1}}{k-1}$, причем, как показывают примеры, при $n>k$ эта оценка довольно близка к точной (или даже в точности совпадает с ней).

Однако оценка $\frac{n^{k-1}}{k-1}$ заведомо не является «очень точной» при всех n и k.

Например, если $n=2$, то $\frac{n^{k-1}}{k-1}=\frac{2^{k-1}}{k-1}$, и «грубая» оценка $\frac{n^k}{k(n-1)+1}=\frac{2^k}{k+1}$ оказывается лучше (при $k>3$); при больших k число $\frac{2^k}{k+1}$ примерно в два раза больше, чем $\frac{2}{k-1}$.

Упражнение 5. Найдите A_2^4, A_3^4, A_2^5.

Несколько слов про задачи о кодах

Одна задача, очень близка к нашей по формулировке, является значительно более исследованной — прежде всего, потому, что она важна для приложений. В «шахматных терминах» она звучит так: какое наибольшее число ладей можно расставить на k-мерной доске $n\times n\times\ldots\times n$, чтобы они не били друг друга? (Другой вариант: чтобы никакое поле не билось двумя ладьями?) Иначе говоря: какое множество Y наборов $y=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ можно составить так, чтобы а) каждые два набора в Y отличались более чем в одной координате, или б) каков бы ни был набор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, в множестве Y найдется не больше одного набора y, отличающегося от x лишь в одной координате? Сформулированные задачи прямо относятся к теории информации, точнее, к ее разделу,— теории кодов, исправляющих ошибки. Эта теория занимается задачами такого типа: составить множество Y «слов» $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ такое, что если при передаче одного из этих слов (скажем, по телеграфу или по каналу связи в вычислительной машине) вкралась ошибка в какой-то «букве», то эту ошибку можно было бы обнаружить, а еще лучше, исправить, то есть восстановить переданное «слово». Поэтому множество Y, удовлетворяющее условию а), называется «кодом, обнаруживающим одиночные ошибки», а удовлетворяющее условию б) — «кодом, исправляющим одиночные ошибки». Вы видите, что в математике слово «код» используется не совсем так, как в книгах про шпионов.

Упражнение 6. Пусть B_n^k — наибольшее число ладей, которые можно расставить на k-мерной доске $n\times n\times\ldots\times n$ так, чтобы они не били друг друга. а) Какое число больше: B_n^k или A_n^k? б) Найдите B_n^2, B_n^3, B_2^4.

Теория кодов представляет собой, пожалуй, самый яркий пример применения современной алгебры в далекой от нее, на первый взгляд, области, прямо связанной с техническими приложениями. Ей посвящено много научных работ и несколько толстых книг *), она быстро развивается и заслуживает специального знакомства.

---

*) У. Питерсон. Коды, исправляющие ошибки, «Мир», 1964; Э. Берлекэмп Алгебраическая теория кодирования, «Мир», 1971.

Приложение

Теорема. Пусть X — множество всех наборов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$, где каждая из $k+1$ координат x принимает n значений: $1, 2, \ldots, n$; Y — подмножество X такое, что (1) любые два набора из Y отличаются хотя бы двумя координатами и (2) для каждого x из X существует набор y из Y, отличающийся от x не более чем в одной координате. Тогда в Y не более n^k/k элементов.

Доказательство. Пусть $\alpha(x) = 1$, если x принадлежит Y, и $\alpha(x) = 0$, если нет. Положим $\beta(x) = \beta(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$

$$= \sum_{1\leqslant x_{k+1}\leqslant n} \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1});$$

$$\gamma_i(x) = \gamma_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) =$$

$$= \sum_{1\leqslant x_i\leqslant n} \beta(x_1, \ldots, x_k), \text{ где } i=1, 2, \ldots, k.$$

(«Укороченные» наборы из k и $(k-1)$ координат мы будем обозначать той же буквой x, помня, что у аргументов β всегда выброшено x_{k+1}, а у γ_i — и x_{k+1}, и x_i.) По условию (1) $\beta(x)\leqslant 1$ для любого x. По условию (2), если $\beta(x)=0$ для некоторого x, то $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \gamma_i(x)\geqslant n$ для этого x. Поэтому для всех x без исключения

$$\sum_i \gamma_i(x)\,(1-\beta(x))\geqslant n\,(1-\beta(x)).$$

Просуммируем все такие неравенства, соответствующие n^k различным наборам $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Это суммирование обозначим буквой Σ', а суммирование по всем координатам, кроме x_i, — через Σ_i'. Пусть общее число элементов Y равно M. Тогда, поскольку $\Sigma'\beta(x) = M$ и $\Sigma_i'\gamma_i(x) = M$ для каждого i, получим

$$\sum_i (nM-\Sigma_i'\gamma_i^2(x))\geqslant n^{k+1}-nM.$$

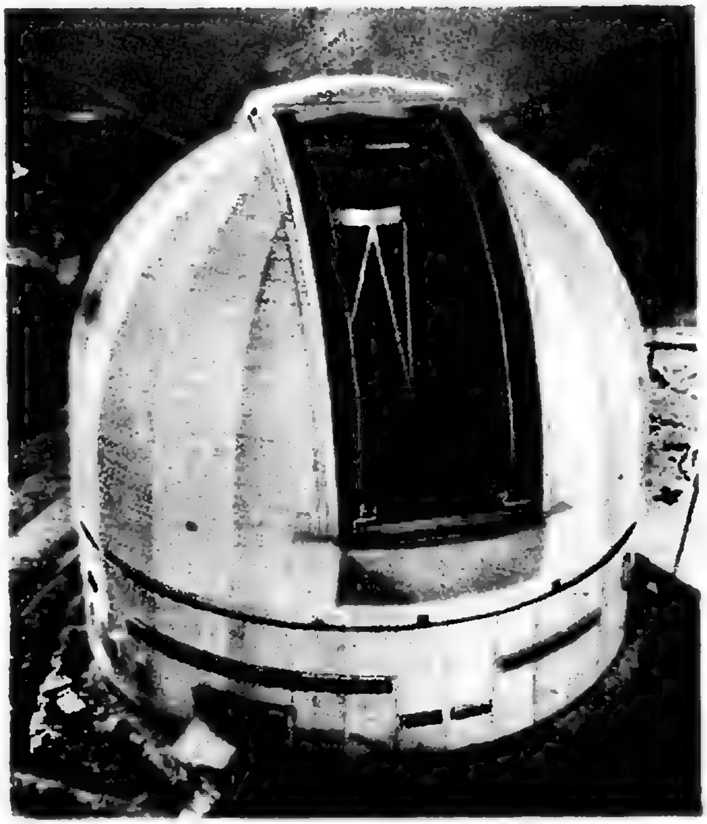
Поскольку сумма квадратов N вещественных чисел всегда не меньше квадрата их суммы, деленной на N, левая часть не больше

$$\sum_i \{nM-\sum\nolimits_i'\gamma_i^2(x)\}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_i\left(nM-\frac{(\Sigma_i'\gamma_i(x))^2}{n^{k-1}}\right) = knM-\frac{kM^2}{n^k-1}.$$

Таким образом, верно неравенство

$$knM-\frac{kM^2}{n^{k-1}}\geqslant n^{k+1}-nM,$$ откуда $M\leqslant n^k/k$.



ОПТИЧЕСКИЙ ТЕЛЕСКОП

В. Е. Белонучкин
С. М. Ко́зел

Визуальный телескоп выполняет две основные функции. Во-первых, он создает на сетчатке глаза отчетливое изображение далекого предмета, сильно увеличенное по сравнению с тем, которое создается в случае невооруженного глаза, и это позволяет различить подробности, недоступные невооруженному глазу. Во-вторых, телескоп собирает свет небесного тела и узким пучком передает его в наш глаз.

Между тем в книгах по оптике можно встретить такие утверждения: «Даже в самый мощный телескоп звезды представляются нам светящимися точками» и «Изображения объектов, наблюдаемых в телескоп, не могут быть более яркими, чем при наблюдении невооруженным глазом».

Для чего же служит телескоп, что можно и чего нельзя увидеть с помощью телескопа? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо разобраться в принципиальном устройстве телескопа.

Вместе с человеческим глазом телескоп составляет единую систему. Так как именно глаз есть тот «прибор», к которому телескоп должен быть приспособлен, следует несколько слов сказать о самом глазе, прежде чем обращаться к телескопу.

В данном случае речь будет идти о замечательной способности глаза перестраиваться (аккомодировать) при наблюдении предметов, находящихся на различных расстояниях. Известно, что глаз обладает значительной областью аккомодации. У нормального человеческого глаза эта область простирается на расстояния от 10 *см* до бесконечности. В тех случаях, когда глаз вооружен телескопом (или другим зрительным прибором), изображение предмета, создаваемое в приборе, должно, конечно, располагаться в области аккомодации. При рассмотрении хода лучей в оптических приборах полагают, что глаз аккомодирован на бесконечность. Это означает, что лучи от каждой точки изображения предмета должны попадать в глаз параллельным пучком. В этом случае ход лучей в оптических приборах оказывается наиболее простым (так называемый телескопический ход лучей).

Телескопы бывают разные. В зависимости от того, какие оптические системы используются в качестве объектива и окуляра, различают несколько типов телескопов. Объективом телескопа может служить линза (или система линз) (рис. 1, *а*, *б*). Такие телескопы называют рефракторами. Если в качестве объектива используется зеркальная система (например, такая, как на рис. 1, *в*), телескоп называют рефлектором.

Мы не будем здесь обсуждать достоинства и недостатки различных оптических систем. Для ответа на вопросы, которые мы перед собой поставили, достаточно рассмотреть одну из оптических схем, например, простейший телескоп — трубу Кеплера (рис. 1, *а*).

Объективом трубы Кеплера служит длиннофокусная собирающая линза (L_1). Эта линза дает в своей фокальной плоскости (F_1F_1) первое действительное изображение удаленного объекта, которое рассматривается глазом через окуляр (L_2, также собирающая линза). Окуляр, играющий роль лупы, дает второе изображение (мнимое), которое и рассматривается глазом. Легко понять, что при телескопическом ходе лучей передний фокус окуляра совпадает с задним фокусом объектива и, следовательно, длина трубы $l = f_1 + f_2$, где

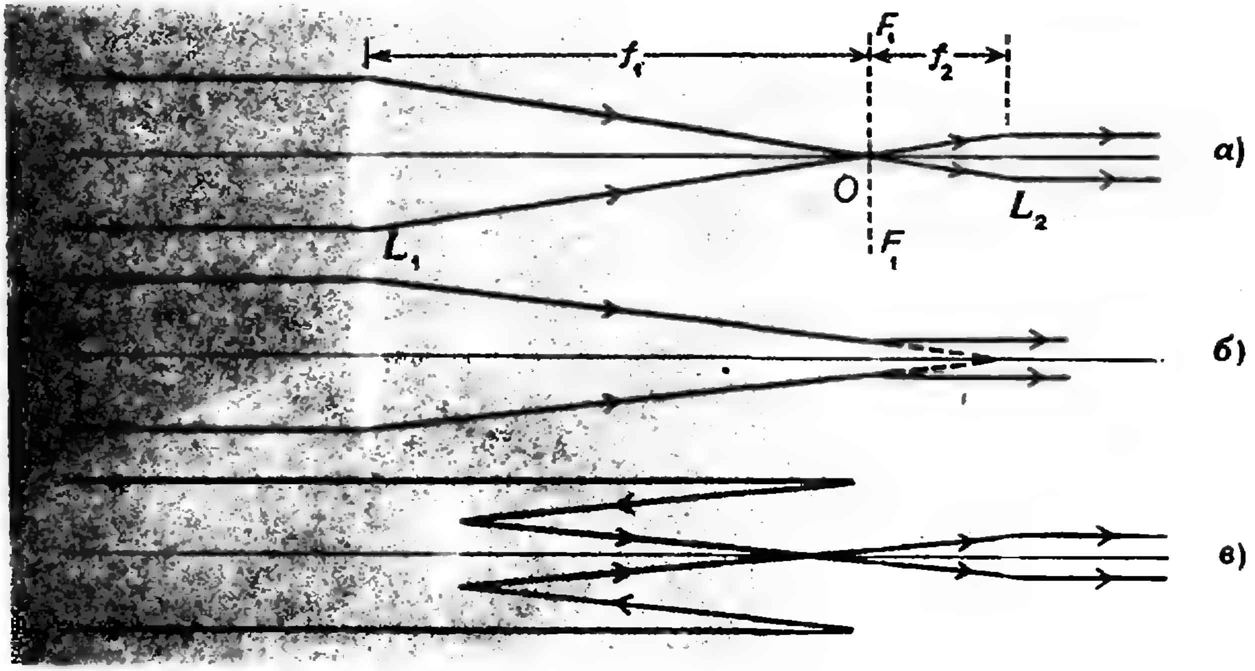


Рис. 1. а) Астрономическая труба Кеплера. б) Труба Галилея. в) Отражательный телескоп (рефлектор) системы Кассегрена, объективом телескопа служит система из вогнутого и выпуклого зеркал.

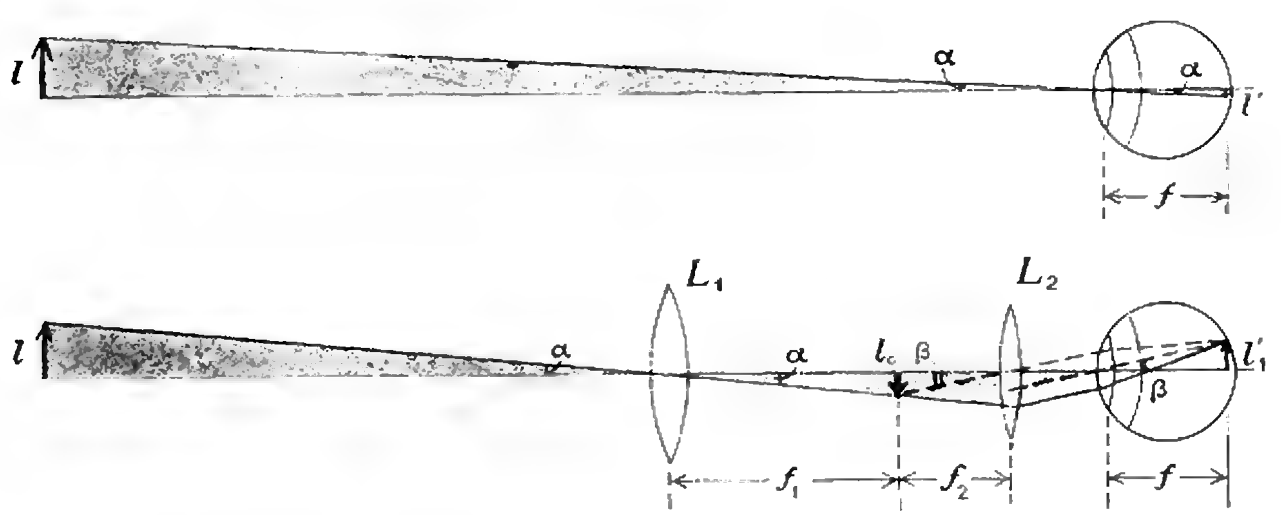


Рис. 2.

f_1, f_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра.

Допустим, что с помощью трубы Кеплера мы рассматриваем поверхность Луны. Чем отличается наблюдаемая нами картина от той, что мы видели невооруженным глазом? Прежде всего, конечно, размерами. Если какие-то две точки лунной поверхности видны невооруженным глазом под углом α, то при наблюдении в телескоп глаз видит их изображения под другим, бо́льшим углом β (рис. 2) *). Угловое увеличение, даваемое телескопом, характеризуется отношением $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$. Расстояние между изображениями рассматриваемых точек лунной поверхности на сетчатке глаза в первом случае равно $l' = \alpha f$, а во втором — $l'_1 = \beta f$ (f — фокусное расстояние хрусталика глаза); оно изменяется в $\gamma = \frac{l'_1}{l'} = \frac{\beta}{\alpha}$ раз. Следовательно, угловое увеличение телескопа является также и мерой увеличения линейных размеров изображения на сетчатке глаза. Если линейные размеры изображения на сетчатке увеличиваются в γ раз, то площадь изображения увеличивается в $\gamma^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ раз.

Определим теперь, чему равно угловое увеличение телескопа. Для этого рассмотрим рисунок 3. Параллельный пучок лучей попадает в объектив L_1 под углом α к оптической оси. Пучок лучей выходящих из окуляра L_2, отклонился на угол β (пунктиром показана побочная оптическая ось окуляра). Из треугольников ABO_1 и ABO_2 получаем:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AO_1} = \frac{AB}{f_1};$$

$$\beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{AB}{AO_2} = \frac{AB}{f_2}$$

(f_1 и f_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно). Следовательно,

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2},$$

то есть увеличение, даваемое телескопом, численно равно отношению длин фокусных расстояний объектива и окуляра.

Теперь мы знаем, как сделать телескоп с большим увеличением: для этого нужны длиннофокусные объективы и короткофокусные окуляры. Но не следует забывать, что телескоп и глаз наблюдателя составляют единую оптическую систему. Поэтому при подборе оптимальных параметров объектива и окуляра необходимо учитывать и параметры глаза как оптического прибора. Разберемся в этом подробнее. Рассмотрим, на-

---

*) Будем для простоты считать, что углы α и β достаточно малы, так что $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\sin\beta \approx \beta$.

пример, вопрос о яркости изображения лунной поверхности, наблюдаемой в телескоп.

Яркость оценивается наблюдателем по освещенности изображения на сетчатке. Рассмотрим параллельный пучок лучей от некоторого малого элемента лунной поверхности, лежащего на оптической оси телескопа. Диаметр пучка лучей, выходящих из окуляра, равен, очевидно, $d = \frac{D}{\gamma}$, где D — диаметр объектива (то есть диаметр пучка лучей, проходящих в объектив).

Рассмотрим случай $d < d_{зр}$. В этом случае весь световой поток, попадающий в объектив, доходит до сетчатки (мы не учитываем здесь неизбежных потерь света в оптической системе, составляющих обычно даже в хороших инструментах 20—30%). Освещенность изображения на сетчатке пропорциональна световому потоку, проникающему в зрачок (следовательно, пропорциональна D^2), и обратно пропорциональна площади изображения (то есть обратно пропорциональна квадрату увеличения телескопа $\gamma^2 = \frac{f_1^2}{f_2^2}$).

Таким образом, при $d < d_{зр}$ имеем

$$E \sim D^2 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2.$$

В случае $d > d_{зр}$ в зрачок будет проникать только часть светового потока, поступающего в объектив, так как лучи, идущие через периферические части объектива, в зрачок не попадут. Из рисунка 4 видно, что в этом случае диаметр D' работающей части объектива равен

$$D' = \frac{f_1}{f_2} d_{зр} = \gamma\, d_{зр}.$$

Следовательно,

$$E' \sim (D')^2 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 d^2_{зр} \times$$

$$\times \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = d^2_{зр},$$

то есть

$$E' \sim d^2_{зр}.$$

Освещенность изображения протяженного предмета на сетчатке в случае невооруженного глаза E_0 пропорциональна, очевидно, $d^2_{зр}$. Таким образом, при условии, что $d > d_{зр}$, освещенность изображения на сетчатке глаза такая же, как и в случае невооруженного глаза. При $d < d_{зр}$ освещенность изображения на сетчатке глаза, вооруженного телескопом, меньше E_0.

Какое же увеличение телескопа целесообразно устанавливать? Ответ на этот вопрос сводится к правильному подбору окуляра под данный объектив.

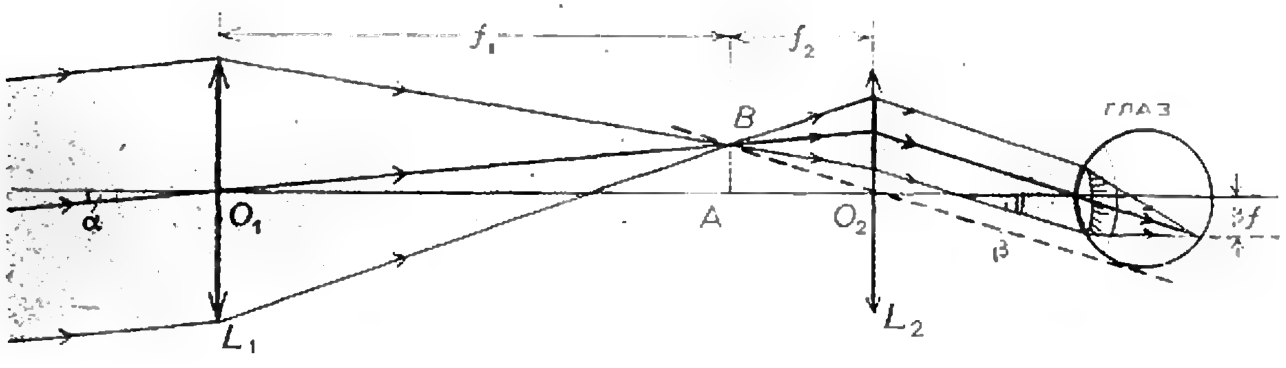


Рис. 3.

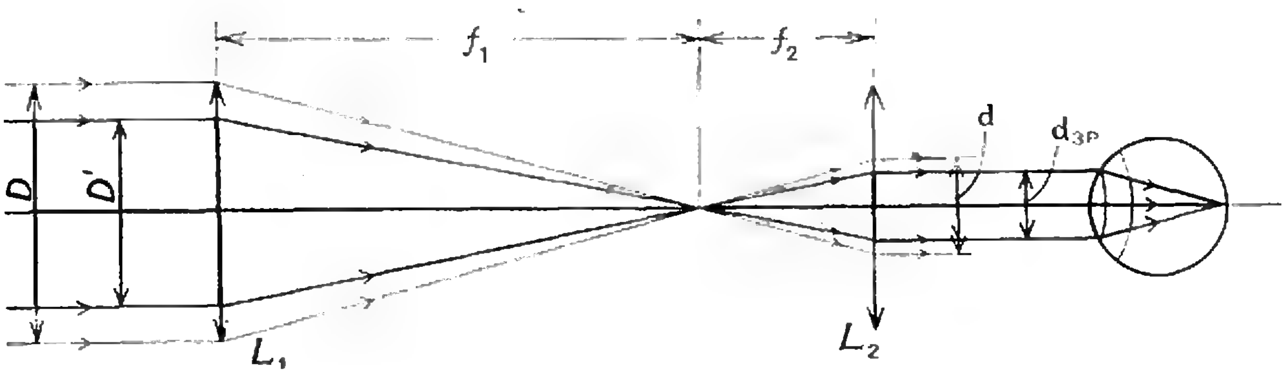


Рис. 4. Пучок лучей в телескопе. Изображен случай $d > d_{\text{зр}}$. Видно, что периферические части объектива не работают.

Заметим, что объектив является наиболее ответственной и дорогой частью любого инструмента; для изготовления большого объектива астрономического телескопа требуются многие годы кропотливого труда. Во всем мире в настоящее время насчитывается лишь два десятка телескопов-рефракторов с диаметром объектива от 25 дюймов и выше (1 дюйм $=$ 2,54 *см*) и примерно такое же число телескопов-рефлекторов с диаметром зеркала свыше 40 дюймов. Крупнейший в мире рефрактор Йеркской обсерватории в США имеет диаметр объектива, равный 40 дюймам; у крупнейшего из действующих рефлекторов диаметр зеркала равен 200 дюймам (Маунт Паломар, США). В Советском Союзе строится рефлектор с диаметром зеркала 6 метров (около 250 дюймов).

Итак, нужно подобрать окуляр. Ясно, что всякий окуляр, при котором диаметр d выходящего пучка окажется больше $d_{\text{зр}}$, должен быть немедленно забракован. Как видно из рисунка 4, при таком окуляре мы не используем возможностей большого объектива, и вполне можно было бы обойтись объективом меньшего размера. Из расчетов, проведенных выше, следует, что при $d < d_{\text{зр}}$ мы проигрываем в яркости изображения. Таким образом, существуют весьма веские основания выбирать окуляр таким, чтобы $d = d_{\text{зр}}$. Как видите, телескоп должен быть в высокой степени приспособлен к человеческому глазу.

Увеличение телескопа при $d = d_{\text{зр}}$ называется нормальным:

$$\gamma_{\text{норм}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{D}{d_{\text{зр}}}.$$

При выборе увеличения астрономы принимают во внимание, что диаметр зрачка зависит от условий наблюдения: при дневных наблюдениях в глаз попадает много света, и зрачок сужается ($d_{\text{зр}} \approx 3$ *мм*), при ночных наблюдениях зрачок расширяется ($d_{\text{зр}} \approx 6$ *мм*). В соответствии с этим должно выбираться значение $\gamma_{\text{норм}}$. Обычно астрономы устанавливают увеличение несколько больше $\gamma_{\text{норм}}$. В этом случае изображение на сетчатке глаза оказывается более качественным, так как в значительной степени удается устранить искажения

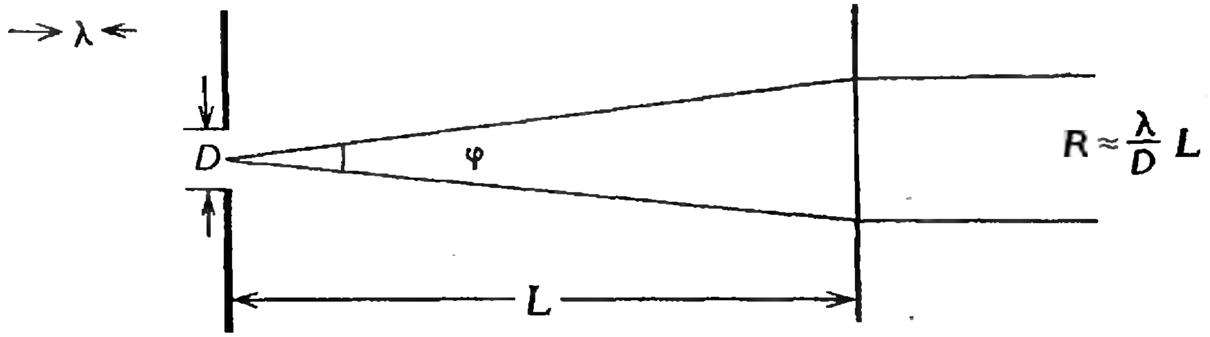


Рис. 5. Дифракция волн на малом отверстии. Угол расходимости дифрагированного пучка $\varphi \approx \frac{2\lambda}{D}$.

(аберрации), вносимые глазной оптикой (работает не весь зрачок, а лишь его центральная часть).

Теперь мы сформулируем последний и очень важный вопрос. Мы видели, что при $d<d_{зр}$ (при $\gamma>\gamma_{норм}$) получается проигрыш в яркости изображения. Но допустим, что мы рассматриваем с помощью телескопа объект, обладающий значительной яркостью, и проигрыш в яркости при $d<d_{зр}$ несуществен (например, при наблюдении поверхности Солнца все равно приходится ослаблять солнечный свет во много раз, чтобы не повредить глаза.) Выбрав увеличение $\gamma>\gamma_{норм}$, мы получим на сетчатке изображение большего размера. Увидим ли мы при этом какие-либо новые детали объекта?

По существу это вопрос о качестве изображения, и его можно сформулировать иначе: в точности ли изображение подобно самому объекту? Ясно, что если оптическая система вносит аберрации, то такое подобие не существует. Но допустим, что оптическая система идеальна и наблюдение ведется при идеально спокойной атмосфере. Оказывается, что даже в этом случае изображение не точно подобно наблюдаемому объекту. Существуют искажения, которые обусловлены принципиально неустранимой причиной — дифракцией световых волн.

Дифракционные явления возникают при прохождении волн около препятствий. Эти явления протекают одинаково для волн любой физической природы. Проще всего ставить дифракционные опыты с волнами на поверхности воды. Для этой цели можно использовать установку, описанную в статье «Волны в мелкой тарелке» («Квант» № 1, 1971). Мы будем говорить о дифракции световых волн. Если поместить на пути волн препятствие, в котором имеется небольшое отверстие, то можно наблюдать характерное дифракционное явление — расходимость волнового пучка. Рисунок 5 иллюстрирует явление. В теории дифракции показывается, что угол расходимости волнового пучка приблизительно равен $\varphi\approx\frac{\lambda}{D}$, где λ — длина падающей волны, D — размер отверстия. Если на достаточно большом расстоянии L за отверстием расположить экран, на нем можно увидеть характерную дифракционную картину, состоящую из ряда чередующихся светлых и темных областей (см. рис. 5). Радиус центрального светлого пятна, на долю которого приходится значительная часть энергии волнового пучка (около 85%), приблизительно равен $L\cdot\frac{\varphi}{2}=\frac{\lambda}{D}\cdot L$. Таким образом, из-за дифракции волны заходят в область геометрической тени. Можно сказать, что дифрагированный волновой пучок представляет собой совокупность волн, направления распространения которых заключены в интервале от $-\frac{\varphi}{2}$ до $+\frac{\varphi}{2}$. Если на пути такого пучка поставить линзу с фокусным расстоянием F, то в фокальной плоскости линзы образуется дифракционная картина подобно тому, как это изображено на рисунке 6. Радиус центрального светлого пятна равен $R\approx\frac{\varphi}{2}\cdot F\approx\frac{\lambda}{D}\cdot F$. Дифракция приводит к тому, что пучки не сходятся за линзой в одной точке (фокусе), как это получается по правилам геометрической оптики, а образуют освещенную область (см. рис. 6; масштаб дифракционной картины сильно увеличен). Осталось сделать последний шаг — убрать диафрагму с отверстием. Тогда роль такой диафрагмы будет играть просто оправа линзы, и в описанной выше формуле, определяющей размер центрального пятна, под D нужно понимать диаметр самой линзы.

Мы приходим к весьма важному выводу: изображение светящейся

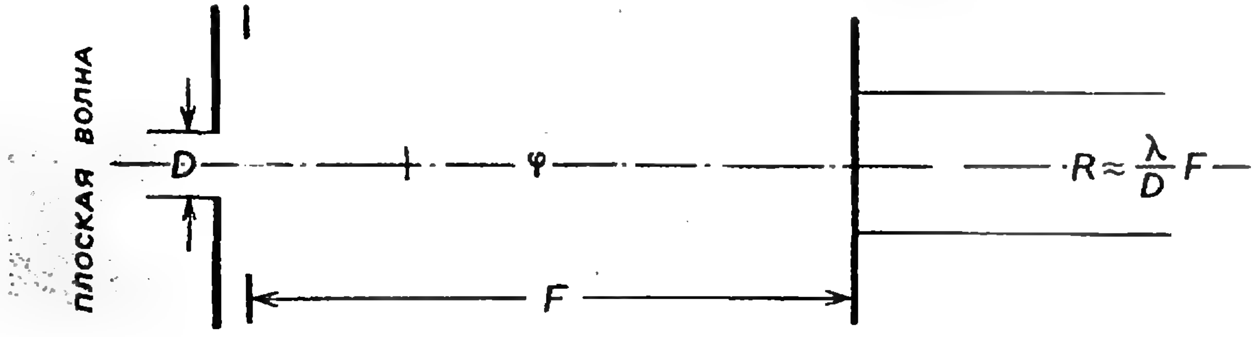


Рис. 6. Дифракция в фокусе линзы.

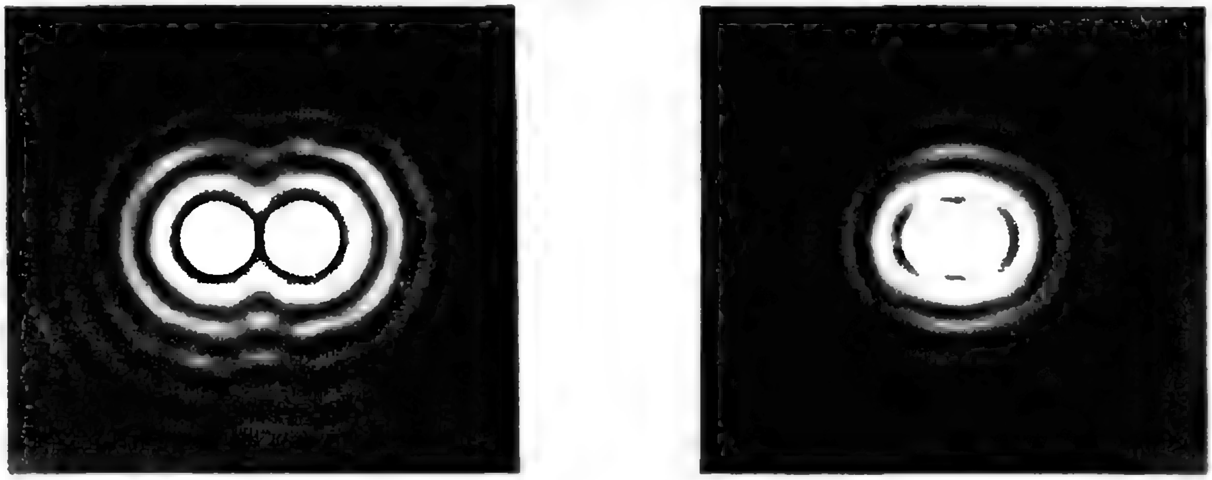


Рис. 7. Дифракционные картины в фокальной плоскости объектива при наблюдении двух близких звезд: а) звезды хорошо разрешаются, б) разрешение близко к предельному.

точки, даваемое объективом, представляет собой не точку, а дифракционное пятно. Именно наличие дифракции ставит предел возможности различать детали удаленных объектов с помощью телескопа.

Пусть, например, мы рассматриваем в телескоп две звезды, угловое расстояние между которыми мало. В фокальной плоскости объектива каждая звезда изображается в виде дифракционного пятна. При сравнительно большом угловом расстоянии между звездами эти изображения раздельны (рис. 7, *а*) Но при уменьшении углового расстояния дифракционные пятна будут сближаться, и в какой-то момент изображения коснутся друг друга. При дальнейшем уменьшении углового расстояния между звездами их изображения будут сливаться (рис. 7, *б*), и вместо двух отдельных звезд мы будем видеть одно продолговатое пятно. В этом случае говорят, что объекты (звезды) остались неразрешенными. Наблюдения и расчеты показывают, что минимальное угловое расстояние между двумя светящимися точками (например, звездами), при котором их можно различить раздельно (разрешить) с помощью данного объектива, примерно равно $\psi_{\min} \approx \frac{\lambda}{D}$.

Две звезды или две точки протяженного объекта (например, Луны), находящиеся на угловом расстоянии, меньшем $\psi_{\min}$, не разрешаются. Именно поэтому изображения звезд не отличимы от изображений точечных объектов.

Величину $R = \frac{1}{\psi_{\min}} \approx \frac{D}{\lambda}$ часто называют разрешающей способностью или разрешающей силой объектива.

Важно подчеркнуть, что большие объективы дают изображения более высокого качества, так как уменьшается влияние дифракции. Это одна из причин, побуждающих астрономов строить большие инструменты.

Теперь мы вплотную подошли к ответу на вопрос, сформулированный выше: можно ли увидеть новые детали объекта, если выбрать увеличение больше нормального? Изображение, полученное при помощи объектива, рассматривается глазом через окуляр телескопа. При $\gamma \leqslant \gamma_{\text{норм}}$ (или $d \leqslant d_{\text{зр}}$) световые пучки, выходящие из окуляра и попадающие в зрачок, не ограничиваются какими-либо дополнительными диафрагмами (включая сюда и зрачок). А это означает, что дифракционными явлениями на пути света от фокальной плоскости объектива до сетчатки можно пренебречь, и, следовательно, изображение на сетчатке подобно изображению в фокальной плоскости объектива. Мы ничего не выигрываем в качестве изображения и не улучшаем разрешения телескопа, переходя к более высокому увеличению. Можно показать, что в случае $\gamma<\gamma_{\text{норм}}$ (или $d>d_{\text{зр}}$) изображение на сетчатке имеет более низкое качество, чем изображение в фокальной плоскости объектива (так как пучок ограничивается зрачком и, следовательно, еще раз испытывает дифракцию). Но этот случай мы уже забраковали, исходя из других соображений.

Проведем небольшой расчет. Пусть телескоп, в котором установлено нормальное увеличение, наведен на две близкие друг к другу звезды (для простоты одну из них расположим на оптической оси). Пусть звезды находятся на пределе разрешения данного телескопа, то есть

$$\alpha=\psi_{\min}\approx\frac{\lambda}{D}.$$

В этом случае в фокальной плоскости (и на сетчатке глаза) образуется изображение такого типа, как на рисунке 7, *б*. Угловое расстояние между изображениями звезд равно

$$\beta=\alpha\cdot\gamma_{\text{норм}}=\frac{\lambda}{D}\cdot\frac{D}{d_{\text{зр}}}=\frac{\lambda}{d_{\text{зр}}}.$$

Но величина $\frac{\lambda}{d_{\text{зр}}}$ является дифракционным пределом разрешения самого глаза. Приняв для λ значение $6\cdot10^{-5}$ *см* и для $d_{\text{зр}}$ значение 0,3 *см*, получим $\frac{\lambda}{d_{\text{зр}}}=\frac{6\cdot10^{-5}}{0,3}=2\cdot10^{-4}$ *рад* $\approx$ $\approx 0{,}7'$. Эта цифра находится в хорошем согласии с известным значением предельного угла для глаза: обычно считают, что глаз разрешает две светящиеся точки, если угловое расстояние между ними не менее одной угловой минуты.

Теперь легко вычислить и радиусы дифракционных пятен на сетчатке. В рассматриваемом примере центр одной дифракционной картины расположен на оптической оси, центр другой смещен на расстояние, равное радиусу центрального пятна (рис. 7, *б*, случай предельного разрешения)

$$\rho=\beta f=\frac{\lambda}{d_{\text{зр}}}f.$$

Радиус дифракционного изображения каждой звезды (а, следовательно, и площадь) не зависит от свойств самого телескопа (при условии, что $\gamma=\gamma_{\text{норм}}$). Но ведь световая энергия, которую перехватывает объектив, пропорциональна квадрату его диаметра. Отсюда следует, что и освещенность дифракционного изображения звезды на сетчатке глаза будет изменяться пропорционально D^2. Вспомним, что освещенность изображения протяженного объекта при $\gamma=$ $=\gamma_{\text{норм}}$ не зависит от D. Это значит, что в телескоп звезды можно наблюдать и днем на фоне яркого неба.

Чем больше диаметр объектива телескопа, тем менее яркие звезды можно увидеть с помощью такого телескопа. Для характеристики яркости звезд астрономы используют определенную шкалу звездных величин. По этой шкале увеличение звездной величины на единицу соответствует уменьшению ее яркости в 2,5 раза. Полярная звезда, например, и пять звезд Большой Медведицы относятся к звездам второй величины. Невооруженным глазом человек видит звезды до 6-й величины (таких звезд в обоих полушариях около 6 тысяч). С помощью четырехдюймового телескопа можно видеть на пределе звезды около 12-й величины (2 миллиона звезд). Сорокадюймовый рефрактор Йеркской обсерватории позволяет увидеть звезды до 17-й величины (150 миллионов). Наконец, пятиметровый гигант обнаруживает звезды слабее 20-й величины (более 1 миллиарда).

Таким образом, проникающая сила телескопа, оцениваемая предельной наблюдаемой звездной величиной, закономерно растет с ростом диаметра объектива.

Основной характеристикой телескопа является диаметр объектива. Окуляр правильно сконструированного визуального телескопа должен быть подобран под данный объектив с учетом свойств человеческого глаза. Можно сказать, что окуляр служит для согласования пучка лучей, прошедших через объектив, с глазом.

Если мы сравним два телескопа с диаметрами объективов D_1 и D_2 ($D_1>D_2$), то бóльший телескоп дает выигрыш в световом потоке, равный отношению $\frac{D_1^2}{D_2^2}$; в то же время он дает выигрыш и в разрешающей способности в $\frac{D_1}{D_2}$ раз. Разумеется, такой выигрыш может быть реализован в случае объективов высокого качества и при достаточно хороших атмосферных условиях.

Мы часто думаем о телескопе как о комбинации высококачественных оптических элементов, забывая при этом, что астрономический телескоп является сложнейшим инженерно-техническим сооружением, в котором высокая оптическая точность сочетается с совершенством механической конструкции. И тем не менее, в основе устройства телескопа лежат простые физические принципы. Обсуждению этих принципов и была посвящена настоящая статья.

Упражнения

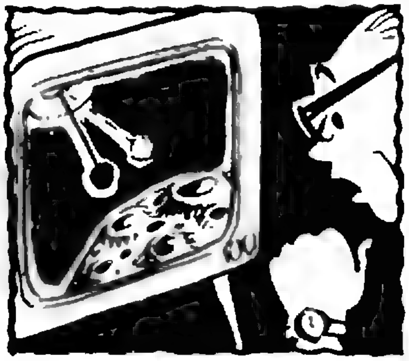
1. Можно ли с помощью самого большого в мире телескопа ($D=5$ *м*) увидеть на поверхности Луны Советский луноход ($H\approx 1$ *м*)? Каков размер деталей лунной поверхности, которые можно изучать с помощью такого телескопа?

2. В школьном физическом кружке построена зрительная труба Кеплера, объективом которой служит линза с фокусным расстоянием $F=50$ *см* и диаметром $D=75$ *мм*. Каково фокусное расстояние окуляра, если при наблюдении с помощью трубы Кеплера Луна кажется в 8 раз менее яркой по сравнению с наблюденьем невооруженным глазом? Потери света в трубе составляют 50%. Диаметр зрачка принять равным 3 *мм*. Какой окуляр следовало бы использовать в данном случае?

3. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью трубы Кеплера. В качестве объектива и окуляра трубы используются линзы с фокусными расстояниями $F_1=30$ *см* и $F_2=5$ *см*. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром не менее $L_1=33$ *см* и не более $L_2=34{,}5$ *см*. На каких расстояниях этот наблюдатель отчетливо видит предметы невооруженным глазом?

ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ЛУНЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕЛЕВИЗОРА

Преподаватель американского колледжа Хупер смотрел у себя дома по телевизору высадку космонавтов на Луну. Вдруг он заметил, что из одного из отсеков корабля свисал, качаясь на чем-то вроде каната, какой-то тяжелый предмет. Простая, но красивая идея пришла ему в голову. Посмотрев на свои часы, он определил, что период колебаний, за которыми он следил, составляет около 5 *сек*.



Длину подвеса можно было оценить, сравнивая его с ростом космонавта, стоявшего рядом; она оказалась равной примерно 1 *м*. Отсюда, пользуясь формулой маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

можно было оценить и ускорение силы тяжести на поверхности Луны

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 100}{5^2}\approx 160\left(\frac{см}{сек^2}\right).$$

Эта величина почти точно равна 1/6 ускорения силы тяжести на Земле. Так, не выходя из дому, Хупер произвел настоящий «космический» эксперимент.

Д. Бородин

В. Л. Гутенмахер

Косоугольные координаты и области Дирихле

В «Кванте» № 11 (1971) были помещены условия трех задач II тура 10 класса, предложенные на Всесоюзной математической олимпиаде 1971 г. В этой статье решается третья, последняя из этих задач.

Вот ее формулировка:

а) Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2+xy+y^2$.

Доказать, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n), что $f(x-m, y-n) = (x-m)^2 + (x-m)(y-n) + (y-n)^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

б) Обозначим через $\bar{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x-m, y-n)$ при всех целых m и n. Утверждение задачи а) состояло в том, что выполнено неравенство $\bar{f}(x, y) \leqslant \frac{1}{2}$ для всех (x, y). Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\bar{f}(x, y) \leqslant \frac{1}{3}$. Найдите все точки, для которых имеет место равенство $\bar{f}(x, y) = \frac{1}{3}$.

в) Рассмотрим функцию $f_a(x, y) = x^2+axy+y^2$ $(a \geqslant 0)$. Найдите какое-либо число C (зависящее от a) так, чтобы для всех (x, y) выполнялось неравенство

$$|\bar{f}_a(x, y)| \leqslant C.$$

Постарайтесь найти точную оценку.

Путь к решению этой задачи состоит в том, чтобы перевести ее условие на язык геометрии. С этой целью введем на плоскости косоугольную систему координат.

Это делается так (рис. 1).

Возьмем на плоскости какой-нибудь отрезок l и будем считать его единицей длины. Проведем две направленные прямые так, чтобы они пересекались под углом φ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой O. Будем считать, что эти прямые — числовые оси Ox, Oy, а точка O — начало отсчета на каждой из них.

Пусть на плоскости взята какая-нибудь точка M. Проведем через нее прямые, параллельные осям Ox и Oy. Отметим точки M_1 и M_2 пересечения этих прямых с осями Ox и Oy. Точка M_1 лежит на числовой оси Ox, поэтому ей соответствует определенное число x — ее координата на этой оси. Точке M_2 тоже соответствует определенное число y — ее координата на оси Oy.

Обратно, каждым двум числам x, y можно поставить в соответствие некоторую точку плоскости, у которой x и y будут координатами.

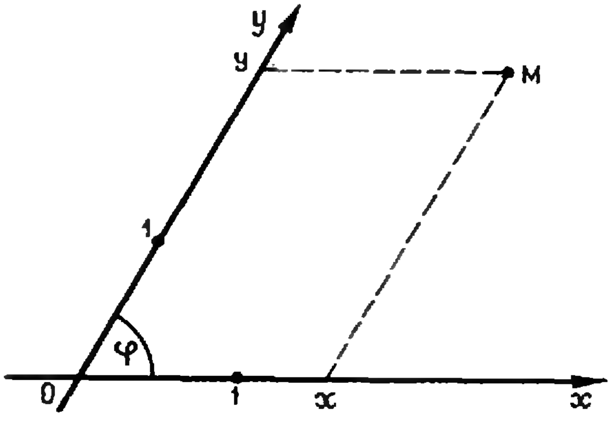


Рис. 1.

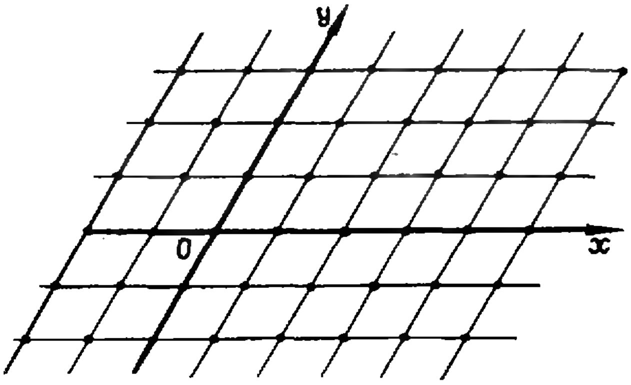


Рис. 2.

Таким образом мы установили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел.

Точки с целыми координатами $(m,\ n)$ — это узлы сетки, составленной из ромбов со стороной 1 и углом φ (см. рис. 2).

Выясним теперь, как будет выглядеть в этой системе координат формула для расстояния между двумя точками $A\ (x_1,\ y_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2)$. Для этого проведем через точки A и B прямые, параллельные осям координат (см. рис. 3). Отрезок AB является диагональю параллелограмма, образованного этими прямыми. Длины сторон параллелограмма равны $|x_1-x_2|$ и $|y_1-y_2|$. Можно проверить (воспользовавшись теоремой косинусов), что

$$AB^2=(x_1-x_2)^2+2\cos\varphi\ (x_1-x_2)\times$$
$$\times(y_1-y_2)+(y_1-y_2)^2.$$

Положим теперь $\cos\varphi=\frac{a}{2}$ (конечно, при условии, что $0<a<2$ *)) и вернемся к исходной задаче. Ее формулировка будет выглядеть вкратце так.

Пусть $\bar{f}_a\ (x,\ y)$ — квадрат расстояния от точки $(x,\ y)$ до ближайшего к ней узла сетки.

а) Доказать, что $\bar{f}_1(x,y)\leqslant\frac{1}{2}$.

б) Доказать, что $\bar{f}_1(x,y)\leqslant\frac{1}{3}$.

в) Найти максимум функции $\bar{f}_a\ (x,\ y)$.

Для того чтобы ответить на все эти вопросы, мы сначала решим такую чисто геометрическую задачу. Имеется сетка (см. рис. 2), состоящая из одинаковых ромбов. Для каждого узла сетки надо найти множество точек, расстояние от которых до этого узла не больше, чем расстояние до всех других узлов. Будем называть в дальнейшем это множество областью Дирихле **).

Для того чтобы найти области Дирихле, сделаем следующее построение.

Во всех ромбах сетки проведем меньшие диагонали. В результате мы

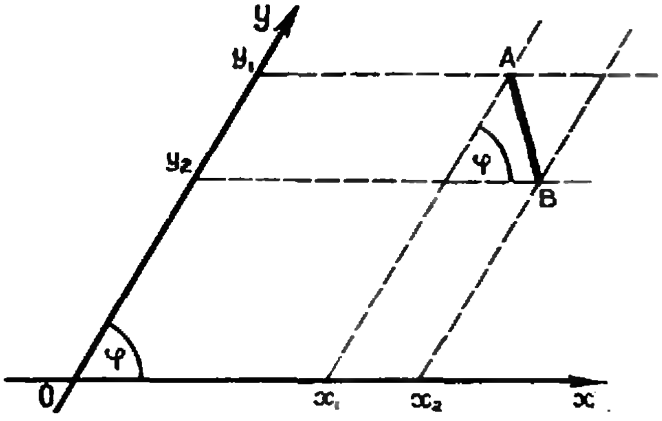


Рис. 3.

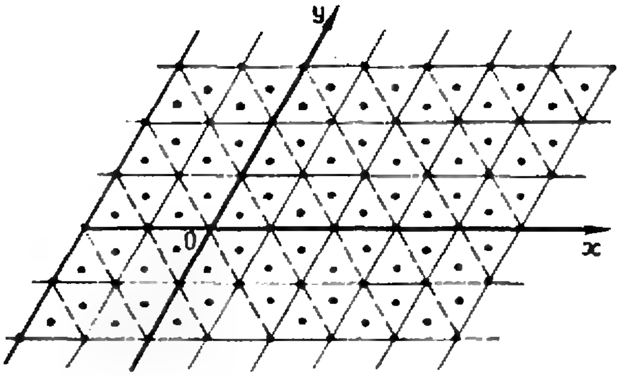


Рис. 4.

---

*) Эти ограничения на a наиболее естественны. В конце статьи мы рассмотрим случаи $a\geqslant2$.

**) Известный немецкий математик П. Г. Лежен Дирихле с большим успехом использовал это понятие в своих работах по теории чисел.

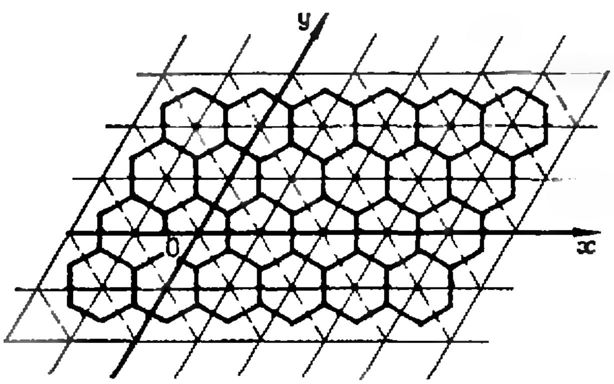


Рис. 5.

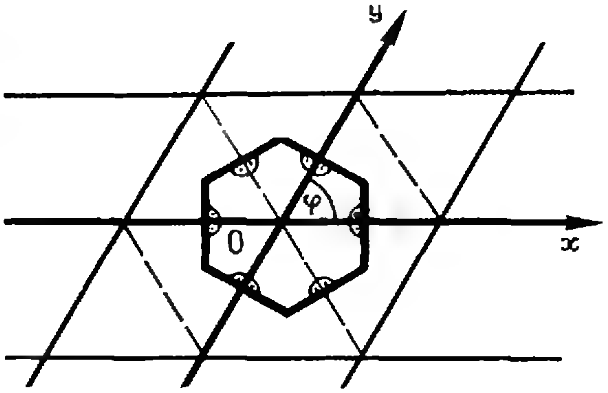


Рис. 6.

получим сетку с теми же узлами, состоящую из одинаковых остроугольных равнобедренных треугольников (см. рис. 4).

Внутри каждого треугольника отметим красным цветом центр его описанной окружности. Затем соединим красными отрезками центры треугольников, имеющих общую сторону (см. рис. 5).

Эта сетка разбивает плоскость на одинаковые шестиугольники. Внутри каждого из них лежит ровно один узел, который является его центром симметрии и центром его описанной окружности.

Мы утверждаем, что полученные шестиугольники и являются областями Дирихле. В самом деле, рассмотрим, например, шестиугольник с центром в узле O. Каждая его сторона является перпендикуляром к отрезку, соединяющему узел с одним из соседних к нему узлов. Причем этот перпендикуляр проходит через середину соответствующего отрезка (рис. 6). Следовательно, точки шестиугольника находятся от точки O на расстоянии не большем, чем от узлов сетки, окружающих точку O. (Здесь мы пользуемся известным фактом: если провести перпендикуляр через середину отрезка AB, то он разбивает плоскость на две части: одна из этих частей состоит из точек, которые ближе к A, чем к B, а другая — из точек, которые ближе к B, чем к A.)

Вообще говоря, нам надо доказать, что каждая точка шестиугольника находится не дальше от точки O, чем от всех других узлов сетки. Мы доказали это только для соседних с O узлов сетки, и мы можем пока утверждать, что область Дирихле является частью этого шестиугольника.

Приведем рассуждение, показывающее, что она с ним совпадает.

Заметим, что область Дирихле для всех узлов также лежит в соответствующих им шестиугольниках. Но по своему определению области Дирихле должны покрывать всю плоскость, так как всякая точка плоскости отстоит по меньшей мере от одного из узлов не дальше, чем от всех других. Следовательно, каждая область Дирихле заполняет весь свой шестиугольник.

Теперь уже легко ответить на все поставленные в задаче вопросы.

Ответим сразу на вопрос в). Наиболее удаленные от узлов решетки точки располагаются, очевидно, в вершинах шестиугольников (см. рис. 6). Расстояние от любой из этих точек до ближайшего узла — центра шестиугольника — равно радиусу описанной около шестиугольника окружности. Он равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника с углом φ при вершине и боковыми сторонами, равными 1. Следовательно, наибольшее расстояние равно $\dfrac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$.

Квадрат расстояния $(\bar{f}_a(x, y))$ для этих точек равен

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2(\cos\varphi + 1)} = \frac{1}{a+2};$$

$$(2\cos\varphi = a, 0 < a < 2).$$

Поэтому для всех точек (x, y) плоскости мы получаем

$$\bar f_a(x,\ y)\leqslant\frac{1}{a+2}. \qquad (*)$$

При $a=1$ (пункт б) задачи)

$$\bar f_1(x, y)\leqslant\frac{1}{3}.$$

В этом случае

$$\cos\varphi=\frac{1}{2} \text{ и } \varphi=60^\circ,$$

следовательно, красная сетка состоит из правильных шестиугольников со стороной $\frac{\sqrt{3}}{3}$, а равенство

$$\bar f_1(x, y)=\frac{1}{3}$$

достигается в вершинах этих шестиугольников, координаты которых задаются следующими двумя формулами:

$$\left(\frac{1}{3}+m,\ \frac{1}{3}+n\right),$$

$$\left(-\frac{1}{3}+m,\ -\frac{1}{3}+n\right),$$

где m и n — произвольные целые числа.

При $a=0$ и $a=2$ задача сильно упрощается.

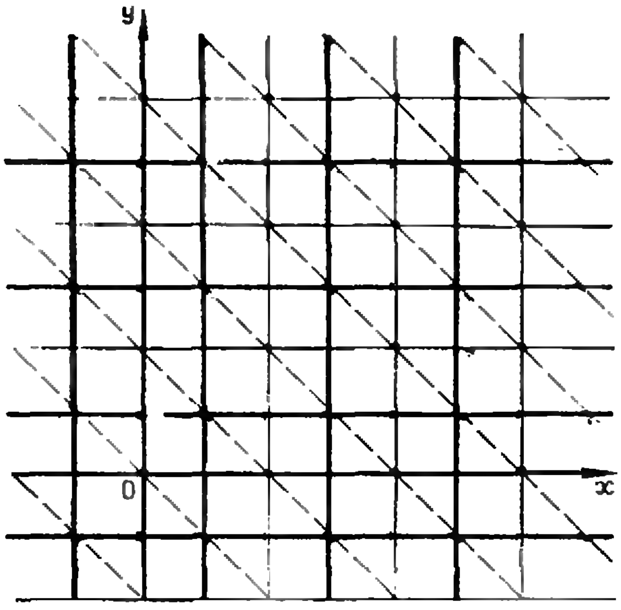


Рис. 7.

Действительно, $f_0\ (x,\ y)=x^2+y^2$. Все наши рассуждения сохраняются (можно считать $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и система координат Oxy получается прямоугольной (см. рис. 7)), только вместо шестиугольников получаются квадраты и оценка $\bar f_0\,(x, y)\leqslant\frac{1}{2}$. Случай $a=2$, когда $f_2\,(x,\ y)=(x+y)^2$, нужно разбирать отдельно, здесь $\bar f_2\ (x,\ y)$ равно квадрату разности между числом $x+y$ и ближайшим к нему целым числом, так что максимум $\bar f_2\ (x,\ y)$ равен $\frac{1}{4}$.

Итак, оценка $(*)$ $\bar f_a\,(x, y)\leqslant\frac{1}{a+2}$ верна и при $a=0$, $a=2$.

Остается рассмотреть случай $a>2$. Покажем, что для каждой точки $(x,\ y)$ наименьшего из чисел $f_a\ (x-m,\ y-n)$ не существует.

В самом деле, пусть $a=2+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Зафиксируем точку $(x,\ y)$ и рассмотрим $f_{2+\varepsilon}(x-k,\ y+k)$, где k — какое-то целое число:

$$f_{2+\varepsilon}(x-k,\quad y+k)=(x-k)^2+$$
$$+2\,(x-k)(y+k)+(y+k)^2+\varepsilon\ (x-$$
$$-k)(y+k)=-\varepsilon k^2+\varepsilon\ (x-y)\ k+$$
$$+(x+y)^2+\varepsilon xy.$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно k, первый коэффициент которого меньше нуля. Следовательно, при k, стремящемся к $+\infty$, эта величина будет стремиться к $-\infty$, то есть может быть сделана меньше любого отрицательного числа. Таким образом, $\bar f_a\ (x,\ y)$ не определено при $a>2$.

Более естественным ограничением на a в условии задачи было бы не $a\geqslant 0$, а $-2\leqslant a\leqslant 2$.

Для отрицательных $a\,(-2<a<0)$ решение переносится без всяких изменений: полагаем $a=2\cos\varphi$ и берем угол $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$. Поскольку решетка получается в этом случае такая же, как и при угле $\psi=\pi-\varphi$, мы получаем такую же оценку, что и при острых углах, то есть $\bar f_a\,(x,\ y)\leqslant\frac{1}{2+|a|}$.

Почему Луна не из чугуна?

Луна ведь обыкновенно делается в Гамбурге; и прескверно делается.

Н. В. Гоголь. «Записки сумасшедшего».

Как известно, лапутянские ученые поведали Гулливеру, что у Марса есть два спутника. Больше того, лапутяне сообщили, на каких расстояниях от Марса эти спутники движутся. Земные астрономы открыли их лет на сто позже, причем многие детали сообщения лапутян подтвердились. Откуда же Свифт знал о спутниках Марса?

Долго тут видели простое совпадение, пока не пришла мода сваливать подобные «чудеса» на пришельцев из космоса. По мнению некоторых лиц, пришельцы в закодированном виде сообщили людям ряд астрономических сведений. Сохранялись эти сведения разными способами — в сказках, песнях, мифах.

Очевидно, передаваемый детьми из поколения в поколение диалог: «Почему Луна не из чугуна? — Потому что на Луну не хватило б чугуну»,— тоже представляет собой отрывок из сведений о поверхности Луны, сообщенных пришельцами. Следовательно, рано или поздно, а наука должна была подтвердить заключенную в этом диалоге идею.

Действительно, исследование Луны показало, что Луна содержит 15% железа (а Земля 35%.) Кроме того, отсутствие магнитного поля у Луны объясняется либо отсутствием, либо гораздо меньшим объемом расплавленного, обогащенного железом ядра. А именно конвекционными движениями в этом ядре Земли сейчас и объясняют ее магнитное поле. И, наконец, удельный вес Земли 5,5, а Луны всего 3,34 *г/см*^{3}, что соответствует плотности вещества, состоящего в основном из силикатов земной коры. По мнению профессора С. Ранкорна (Англия), можно полагать, что и 4,5 миллиарда лет назад, при образовании Земли и ее спутника, Луна уже получила значительно меньше железа. Почему? На этот вопрос ответа нет. Возможно, пришельцы знали это, но продолжение диалога утеряно при бесконечных повторениях.

Из чего же все-таки сделана Луна, раз уж на нее не хватило чугуна? Для ответа на этот вопрос нам приходится искать другие источники. Как известно, барон Мюнхаузен открыл на Земле остров, состоящий из сыра. С его слов это замечательное и достоверное сообщение было опубликовано Г. А. Бергером еще в 1786 году. С тех пор неоднократно появлялись предположения, что и Луна состоит из того же материала. Впрочем, вопрос о том, из какого сорта сыра состоит Луна, вызывал жестокие дискуссии.

Известному американскому геофизику профессору О. Андерсону из Колумбийского университета было поручено измерить скорость распространения звука в лунных породах и найти аналоги среди земных пород. Результатов, естественно, ждали с нетерпением.

Под новый год О. Андерсон разослал своим знакомым открытку.

Вот вольный перевод стихотворения вверху открытки:

Снизошло к нам озаренье,
И исчезли все сомненья,
Сообщаем всему миру,
Что Луна — головка сыру.

Эта заметка заимствована из журнала «Природа», № 12, 1971. Перепечатывается с небольшими изменениями.

It brightens the spirits
In times like these,
To know the Moon
Is made of cheese.

Внизу профессор О. Андерсон приводит скорости распространения звука $v_{зв}$ (*км/сек*) в исследованных образцах:

Лунные породы и сыры	Скорость звука, $v_{зв}$ (*км/сек*)
Образец лунной породы 10 017	1,84
Норвежский сыр	1,83
Итальянский сыр	1,75
Итальянский сыр (римский)	1,75
Вермонтский сыр	1,72
Швейцарский сыр	1,65
Висконсинский сыр	1,57
Образец лунной породы 10 046	1,25

Как видно из таблицы, по данному физическому параметру показатели для сыров совпадают с показателями для образцов лунных пород. Таким образом, можно считать, что именно сыр — земной аналог лунного грунта. К сожалению, из приведенной таблицы по-прежнему неясно, какой именно сорт сыра играет эту роль. Однако удалось решить и эту загадку.

Сейсмические колебания лунной почвы после сбрасывания на Луну взлетных ступеней ракет затухали не за секунды, как полагалось по всем правилам, а за десятки минут. Высказывалось предположение, что это может быть вызвано существованием каких-то таинственных полостей, происхождение которых неизвестно. Но ведь в сыре-то (по крайней мере в некоторых сортах) обязательно должны быть дырки! Пересчитайте на соответствующие размеры, и непонятный эффект будет полностью объяснен. Более того. Так как самые крупные дыры встречаются в сыре швейцарском, то решается, наконец, и вопрос о сорте сыра.

Итак, Луна не из чугуна, а из швейцарского сыра. Отсюда совет ученым — внимательно пересмотреть весь фольклор и все детские считалки. Лучше всего поручить это ЭВМ.

М. А. Корец,
З. Л. Понизовский

СПРАВЕДЛИВЫЙ ВЫБОР

А. Н. Виленкин, А. И. Шнирельман

Однажды два школьника Алеша и Боря нашли монетку и стали думать, как ее разделить между собой, чтобы было по-честному. Решено было подбросить найденную монетку: если она упадет кверху решеткой (цифрой), то ее возьмет Алеша, а если сверху окажется герб, то монетка достанется Боре. Так они и сделали. Монетка досталась Алеше.

На другой день они опять нашли монетку, только на этот раз с ними был еще Витя. Теперь монетку надо было делить уже на троих. Для этого под рукой была лишь монетка.

Школьники начали рассуждать. «Если бы с нами был еще Гриша, то проблема была бы решена — мы бы подбросили монетку два раза и распределили ее в зависимости от выпаданий решетки и герба следующим образом: РР — Алеше, РГ — Боре, ГР — Вите, ГГ — Грише. Но Гриша не появлялся, и школьники начали думать.

Первым нарушил молчание Витя. Он сказал: «Гриши нет, но давайте считать, что он тут, подбросим монетку два раза и посмотрим, кому она должна достаться. Если Грише, то бросим ее заново, а если кому-нибудь из нас, то он ее и возьмет.

В этот момент Алеша придумал еще один способ. Алеша вспомнил, как им рассказывали про приближение действительных чисел десятичными дробями, и провел целое математическое исследование. Вот что он сказал.

«Ребята! Я вспомнил, как мы разделили монетку вчера, и думаю, что мы можем так же разделить ее и сегодня». Ребята, конечно, не поняли, и Алеша начал объяснять.

«Бросания монетки можно рассматривать как определение очередной цифры некоторого числа. Выпаданию решетки сопоставим цифру 0, а гербу — 1. Теперь возьмем отрезок числовой оси (0, 1); числа в нем имеют вид

$$A=0,\ a_1\ a_2\ a_3\ldots$$

Каждая из цифр a_i может быть равна 0 или 1 — я считаю, что число A записано в двоичной системе счисления *). При первом бросании мы определяем первую цифру a_1 числа A, при втором — вторую цифру и так далее.

---

*) Алеша читал статьи И. М. Яглома «Системы счисления» («Квант» № 6, 1970) и Р. С. Гутера «Вычислительные машины и системы счисления» («Квант» № 9, 1971).

Геометрически это можно изобразить так. При первом бросании мы определяем, в правой или в левой половине отрезка (0, 1) лежит число A. Если $a_1=0$, то в левой, а если $a_1=1$, то в правой. Затем мы эту половину делим пополам и, еще раз бросая монетку, определяем цифру a_2, то есть ту четверть отрезка (0, 1), в которой лежит A, и так далее.

Вчера мы сделали так: разбили отрезок (0, 1) пополам, одну половину — отрезок (0, $^1/_2$)— выделили мне, а другую — отрезок ($^1/_2$, 1)— Боре. Затем мы нашли, в чью часть отрезка попало число A. Для этого мы определили число A с нужной нам степенью точности (потребовалось ровно одно подбрасывание монетки, поскольку нас интересует только цифра a_1). Если $a_1=0$, то монетку брал я, если $a_1=1$, то Боря.

А сегодня мы можем разделить отрезок на три равные части: (0, $^1/_3$)— мне, ($^1/_3$, $^2/_3$)— Боре, ($^2/_3$, 1)— Вите,— и затем бросаниями монетки определить с достаточной точностью число A, а следовательно, и владельца монетки».

Боря начал спорить. Он сказал, что последовательности 0,0111... и 0,1000... равны в двоичной системе одному и тому же числу $^1/_2$. Если бы они были вдвоем, то было бы как раз удобно последовательность 0,0111... отнести в Алешину часть, а последовательность 0,1000...— в Борину. Но теперь число A может оказаться равным $^1/_3$ или $^2/_3$, поэтому, во-первых, надо оговорить, кому принадлежит эта точка; во-вторых, для определения числа A с достаточной степенью точности может потребоваться бесконечное число бросаний, а это им не под силу; в-третьих, если при первом бросании выпадет 1, то Витя потеряет спортивный интерес, а если выпадет 0, то в роли наблюдателя останется Алеша; в-четвертых...

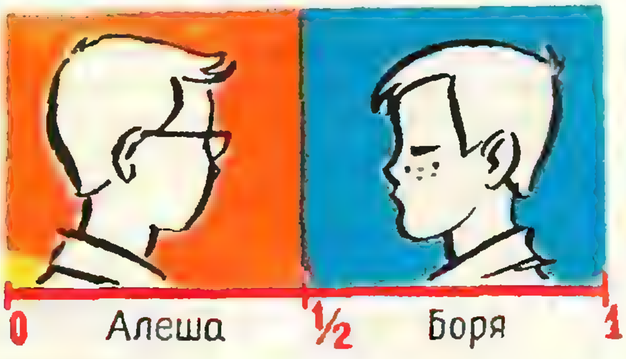


Рис. 1.

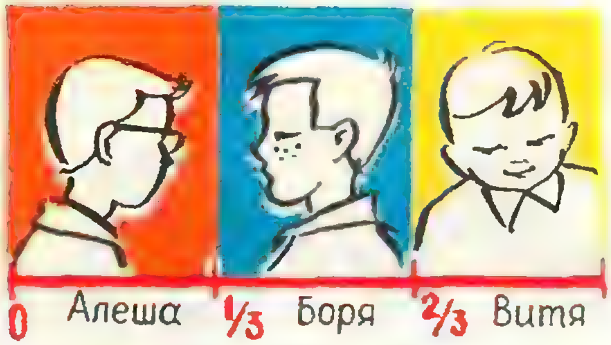


Рис. 2.

Споры продолжались, но тут заговорил и Витя. Он сказал вот что. «У нас есть два способа разделить монетку на троих и один способ разделить ее на двоих. Давайте этим способом определим, каким из двух способов делить ее на троих, и разделим, а то домой пора — сегодня «Динамо» играет».

Алеша и Боря сразу согласились. Боря подбросил монетку, выпал Витин способ, а еще после двух бросаний монетка и досталась Вите. Ребята пошли домой, обсуждая достоинства и недостатки предложенных ими способов, а также пытаясь оценить, сколько бросаний могло реально потребоваться по Алешиному способу.

Попробуйте и вы решить несколько задач, предположив, что ребята

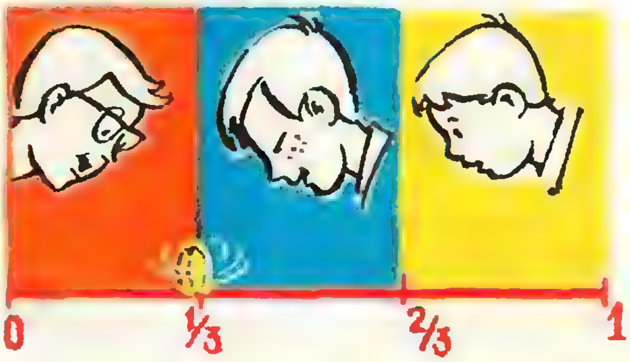


Рис. 3.

нашли хорошую монетку, при бросании которой в среднем в половине случаев выпадает герб, а в половине — решетка.

1. Проверьте, что после k бросаний определен лишь отрезок длины 2^{-k}, в котором лежит точка A.

2. По Алешиному способу хозяин монетки не выявлен, если часть, указанная монеткой, содержащая по определению точку A, содержит также одну из «критических» точек $1/3$ или $2/3$. Выпишите последовательности, соответствующие этим точкам. Найдите, в какой части случаев (после k бросаний) мы все еще рискуем оказаться в одной из указанных точек. (Доказав, что выпадание монетки по строго определенному закону маловероятно, мы избавимся от первого Бориного возражения.)

3. Проверьте, что Витин способ можно описать в Алешиной терминологии так. Мы определяем с помощью монетки число A, но отрезок $(0, 1)$ распределяем более хитро:

Алеша:

$$\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{12}{16}, \frac{13}{16}\right), \left(\frac{60}{64}, \frac{61}{64}\right), \ldots$$

Боря:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right), \left(\frac{13}{16}, \frac{14}{16}\right), \left(\frac{61}{64}, \frac{62}{64}\right), \ldots$$

Витя:

$$\left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{14}{16}, \frac{15}{16}\right), \left(\frac{62}{64}, \frac{63}{64}\right), \ldots$$

При таком разбиении отрезка $(0, 1)$ возникает много «критических» точек, как Витя предлагал их распределять?

4. Докажите, что доля случаев, в которых один из школьников после $2k$ бросаний монетки получает монетку (по Витиному способу), равна сумме длин тех «его» частей отрезка $(0,1)$, в которых может оказаться точка A после $2k$ бросаний.

5. Докажите, что Витин способ выбора владельца монетки справедлив.

6. Используя задачу 1, обобщите задачу 4 для Алешиного способа в предположении, что после $2k$ бросаний владелец монетки определен.

7. Докажите, что Алешин способ справедлив.

8. Используя задачу 4, найдите долю случаев, в которых после $2k$ бросаний владелец монетки не определен

а) по Алешиному способу;

б) по Витиному способу.

Какой из способов рациональнее? Ответив на этот вопрос, вы ответите и на второе Борино возражение.

ДВЕ ИГРЫ

Игра в пешки

Имеется прямоугольная клетчатая доска размером $m \times n$ и пешки: m белых и m черных. В начальной позиции пешки расположены на доске так, что в каждой вертикали имеется ровно одна белая и одна черная пешка, причем белая пешка должна быть расположена выше черной пешки (рис. 1).

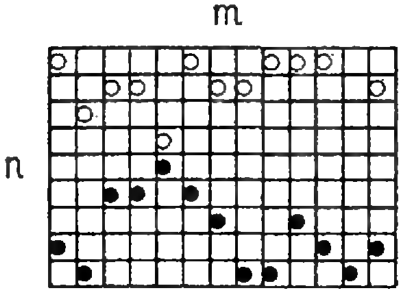


Рис. 1.

Играют двое. За ход разрешается одну любую (свою) пешку передвинуть по вертикали на любое (ненулевое) число клеток доски вперед или назад. Перескакивать через пешки противника или занимать клетки, в которых они расположены, не разрешается. Выигрывает тот, кто запер своего соперника, не оставив ему возможности произвести очередной ход. (На рисунке 2 изображен проигрыш черных.) И, наконец, последнее правило: белые начинают.

Определите, при каких начальных позициях выигрывают белые вне зависимости от стратегии черных, а при каких — черные.

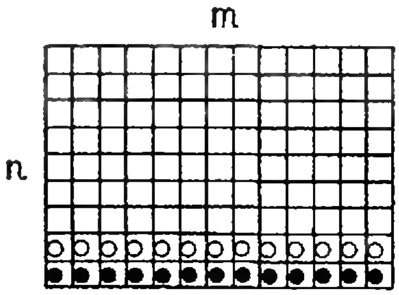


Рис. 2.

(Продолжение см. на стр. 41)

Конус максимального объема в природе

С. М. Петров

Рассмотрим известную задачу:

Задача 1. *Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α. Найти центральный угол β в развертке его боковой поверхности.*

Решение. Изобразим на рисунке 1 осевое сечение конуса и на рисунке 2 — его развертку. Замечаем*), что $2\pi R = \beta L$ или

$$\beta = 2\pi \frac{R}{L} = 2\pi \sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Задача 2. *Дан круг радиуса* L (рис. 2). *Вырезать из него развертку конуса наибольшего объема.*

Решение. Имеем (см. рис. 1)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(L\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \times$$
$$\times L\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\pi L^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Если зафиксировать образующую L и менять угол α, то объем V достигнет наибольшего значения одновременно с функцией

$$y = \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

где $0 < \alpha < \pi$.

Сделаем замену переменных: $\sin\frac{\alpha}{2} = u$. Тогда

$$y = u^2\sqrt{1-u^2} = \sqrt{u^4(1-u^2)} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}u^2u^2(2-2u^2)}.$$

Так как $u^2+u^2+(2-2u^2)=2=\text{const}$, то подкоренное выражение достигнет своего максимума*) при $u^2=u^2=2-2u^2$. Отсюда $u^2=\frac{2}{3}$, и

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad (4)$$

$$\alpha = 2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 2\arcsin\frac{2{,}44949}{3} \approx$$
$$\approx 2\arcsin 0{,}8165 = 2\cdot 54^\circ 44' = 109^\circ 28'. \qquad (5)$$

Учитывая (1) и (4), находим

$$\beta = 2\pi\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx$$
$$\approx 120^\circ\cdot 2{,}44949 \approx 293^\circ 56'. \qquad (6)$$

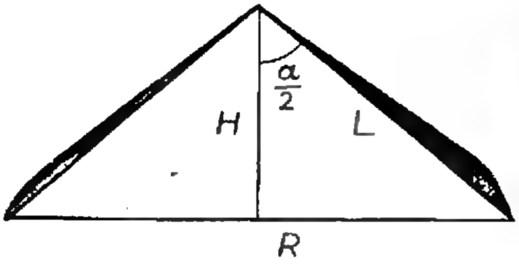


Рис. 1.

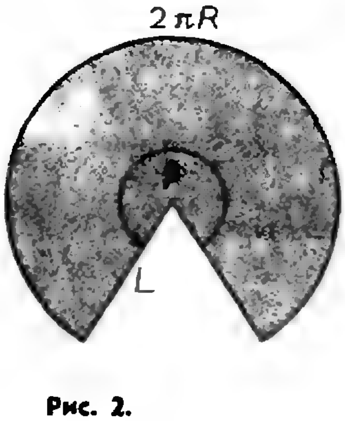


Рис. 2.

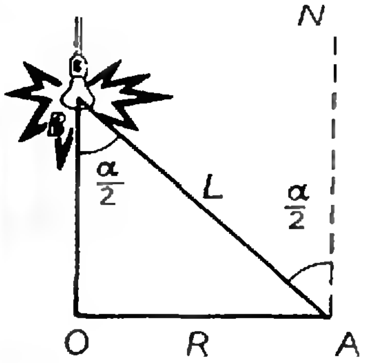


Рис. 3.

---

*) Разумеется, углы измеряются в радианах.

*) См. статью А. П. Савина «Максимум, минимум и теорема о средних», «Квант» № 11, 1970.

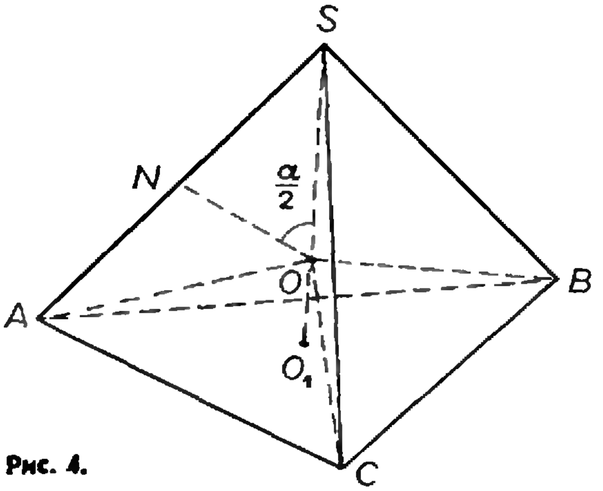


Рис. 4.

Вычислим максимальный объем конуса. Для этого найденное в (4) значение $\sin\frac{\alpha}{2}$ подставим в (2):

$$V_{\max}=\frac{1}{3}\pi L^3\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi L^3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi L^3\sqrt{3}}{27}=$$

$$=0{,}4030L^3 \qquad (7)$$

Интересно отметить, что такие конусы встречаются в природе, разумеется, с известным приближением. Вот один физический пример.

Задача 3. *Пусть электрическая лампочка может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB (рис. 3). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости OA ее следует поместить, чтобы в точке A получить наибольшую освещенность?*

Решение. Известно, что освещенность E пропорциональна косинусу угла падения лучей $\left(\angle BAN=\frac{\alpha}{2}\right)$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния ($AB=L$), то есть

$$E=C\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{L^2}, \qquad (8)$$

где C зависит от силы света лампочки.

Учитывая, что $L=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, приведем формулу (8) к виду

$$E=\frac{C}{R^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Подмечаем, что E пропорциональна функции (3), то есть данная задача свелась к задаче 2.

Таким образом, если лампочку поместить в вершине конуса максимального объема, то окружность его основания получит наибольшую освещенность (!).

Наконец, еще одно явление.

В учебнике по органической химии Л. А. Цветкова («Просвещение», М., 1969, стр. 16) находим:

> **«Все валентные связи атома углерода направлены к вершинам тетраэдра, одинаково удалены друг от друга, угол между ними составляет 109°28′».**

Проверим, что и здесь появляется осевое сечение конуса наибольшего объема.

Пусть в центре O правильного тетраэдра $SABC$ (рис. 4) находится атом углерода, а четыре валентности направлены к его вершинам. Докажем, что треугольники AOS, BOS являются осевыми сечениями конуса максимального объема, то есть, что например,

$$\sin\frac{\angle AOS}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Обозначим $\angle AOS$ через α. Проведем $ON\perp AS$, тогда $\angle NOS=\frac{\alpha}{2}$. Далее, $\triangle AO_1S\backsim\triangle ONS$ (очевидно). Отсюда $\angle SAO_1=\angle NOS=\frac{\alpha}{2}$.

Если обозначить ребро тетраэдра через a, то $AO_1=\frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$SO_1=\sqrt{AS^2-AO_1^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Следовательно,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\angle NOS=\sin\angle SAO_1=$$

$$=\frac{SO_1}{AS}=\frac{a\sqrt{6}}{3a}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

что соответствует формуле (4).

Интерес вызывает построение графика функции

$$y=\sin^2 x\cos x,$$

которое мы предоставляем читателям.

Карты и раскраски

А. П. Савин

На обложке журнала изображен причудливо раскрашенный квадрат. Если мы склеим из него цилиндр, а затем склеим еще и основания цилиндра (см. рис. 1), то получим поверхность, напоминающую бублик. В математике она называется тором. Раскраска квадрата станет раскраской некоторой карты, расположенной на торе, состоящей из семи окрашенных в разные цвета стран, причем любые две страны будут иметь общую границу. Можно ли увеличить число стран с выполнением этого условия (то есть чтобы любые две страны имели общую границу)? Оказывается нельзя.

Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, рассмотрим более подробно построение тора из квадрата.

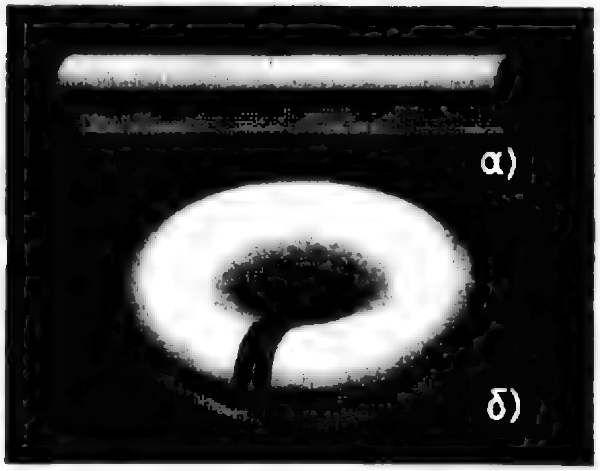


Рис. 1.

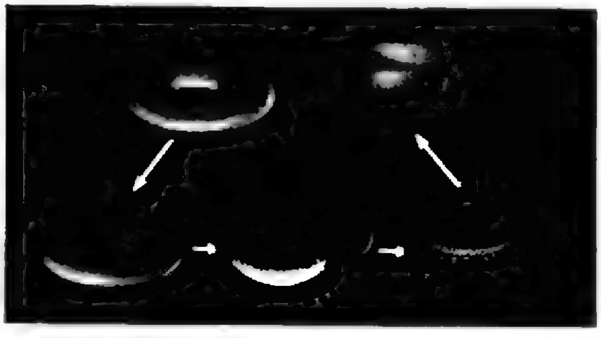


Рис. 2.

Первый шаг построения — склеивание цилиндра — не вызывает никаких вопросов, но следующий шаг — склеивание оснований цилиндра — уже не очевиден. Ведь если бы квадрат был, например, сделан из бумаги, то как из бумажного цилиндра сделать изображенный на рисунке изящный бублик? Ваши попытки склеить цилиндр приведут к угловатой фигуре со складками наподобие мехов гармонии или юбки-гофре. Вот если бы квадрат был резиновый, то после склеек мы могли бы получить неплохую камеру для автомобильного колеса. Накачав ее воздухом, мы получим тор.

Изменилось ли что-нибудь от того, что мы взяли другой материал? Да, конечно. Форма тора стала более приятной, но зато изменились углы между границами стран, длины границ, площади самих стран.

А что сохранилось? Число стран, число границ каждой страны, примыкание стран — то есть на новой карте каждая страна граничит с теми же странами, что и на старой. И эти свойства сохранятся и в том случае, если мы будем наш резиновый тор деформировать, не разрезая его и не производя никаких новых склеек.

Свойства фигур, которые не изменяются при таких деформациях, называются топологическими. Их изучением занимается одна из молодых математических наук — топология.

Известный популяризатор науки М. Гарднер *) сказал, что «топологами принято называть математиков, которые не могут отличить кофейную чашку от бублика».

---

*) Очень советуем прочесть недавно вышедшую великолепную книгу М. Гарднера. «Математические головоломки и развлечения», М., изд-во «Мир», 1971.

Не трудно убедиться, что бублик действительно можно непрерывной деформацией преобразовать в чашку. А если на бублике была нарисована карта, то она станет картой-узором на чашке, и при этом отмеченные нами свойства карты не изменятся (рис. 2).

Если одну фигуру можно непрерывно деформировать в другую, то они называются гомеоморфными.

Попробуйте самостоятельно доказать, что квадрат и треугольник гомеоморфны кругу, а кольцо нет (рис. 3).

В дальнейшем мы будем рассматривать карты, у которых каждая из стран гомеоморфна кругу.

Для карт такого вида имеется очень красивая общая теорема о числе В-вершин карты — точек, где сходятся три или более страны, Г-числе границ — отрезков, отделяющих одну сторону от другой и С-числе стран карты.

Теорема утверждает, что число χ*)

$$\chi = В - Г + С$$

— одно и то же для всех карт на данной поверхности, а, следовательно, и на всех поверхностях, гомеоморфных данной. Число χ называют «эйлеровой характеристикой» поверхности. Леонард Эйлер доказал, что на сфере

$$В - Г + С = 2.$$

Это утверждение называется теоремой Эйлера. Его можно сформулировать так: «Эйлерова характеристика сферы равна 2». Проверить это нетрудно: рассмотрим какой-нибудь многогранник, например, тетраэдр. Его поверхность гомеоморфна сфере (мы можем «раздуть» его в сферу), имеем $В=4$, $Г=6$, $С=4$; $В-Г+С=4-6+4=2$. Для куба $В=8$, $Г=12$, $С=6$, $В-Г+С=8-12+6=2$.

Докажем теорему Эйлера в общем случае.

Представим себе, что наша карта является схемой рисовых полей, причем границы стран — плотины, отделяющие одно поле от другого.

Предположим, что одно из полей залито водой, и мы хотим, последовательно снимая одну за другой плотины, оросить все остальные поля.

Чтобы не разрушить при этом лишних плотин, на каждом очередном шаге будем снимать плотину между двумя такими полями, из которых одно уже орошено, а другое еще нет.

Теперь докажите самостоятельно, что для системы оставшихся плотин справедливы следующие утверждения:

1) Число разрушенных плотин равно $С-1$.

2) Из любой вершины карты можно пройти по оставшимся плотинам в любую другую вершину, причем единственным образом.

3) Из утверждения 2) выведите, что число вершин карты ровно на 1 больше числа оставшихся плотин.

Из 1) и 3) следует, что $Г-(С-1)+1=В$, то есть $В-Г+С=2$.

Это и есть теорема Эйлера для сферы.

Аналогично можно доказать, что для тора $В-Г+С=0$. (То есть эйлерова характеристика тора равна нулю.)

Условие 1) останется таким же; условие 2), а, следовательно, и условие 3) изменятся, так как на торе

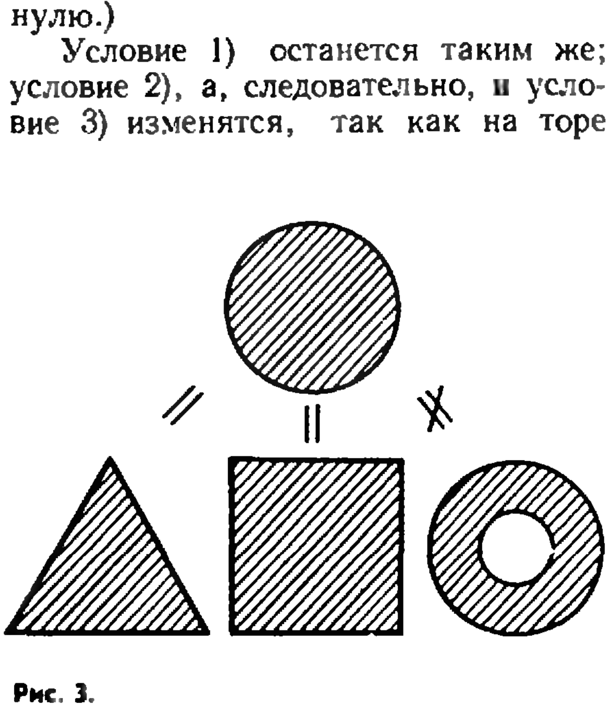


Рис. 3.

---

*) χ — греческая буква «хи».

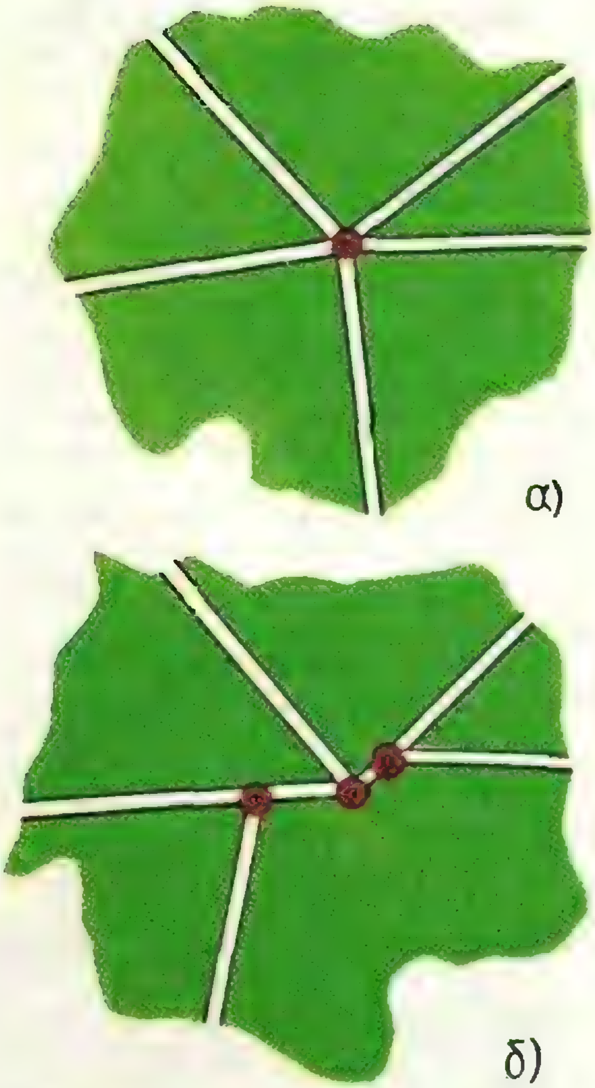


Рис. 4.

окажутся две замкнутые кривые, составленные из неразрушенных плотин, но не мешающих орошению всех полей. Одна из них охватывает тор по параллели, а другая — по меридиану аналогично кривым, являющимся линиями склейки квадрата при построении тора.

Вернемся, наконец, к задаче, сформулированной в начале статьи: «Существуют ли такие карты на торе с числом стран, большим семи, у которых каждые две страны имеют общую границу?».

Покажем, что достаточно рассмотреть лишь те карты, в каждой вершине которых сходятся ровно по три страны.

Действительно, пусть в какой-то вершине искомой карты сходится более трех стран (см. рис. 4). Несложно преобразовать карту так, чтобы во всех вершинах сходилось ровно по три страны, число стран останется при этом прежним, а число вершин увеличится. Метод такой перестройки хорошо виден из рисунка. При этом те страны, которые имели общую границу (но не вершину), также будут иметь общую границу.

Теперь приступим к счету. Пусть число стран на карте равно n (то есть $С=n$), тогда, поскольку каждая страна имеет с каждой из $n-1$ других не менее одной границы, то число границ у каждой страны не менее $n-1$.

Каждая граница принадлежит ровно двум странам, поэтому общее число границ не менее $\frac{n(n-1)}{2}$. Итак, мы получили, что $Г \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Подсчитаем число вершин. В каждой вершине сходится ровно три границы, а каждая граница соединяет ровно 2 вершины. Поэтому удвоенное число границ равно утроенному числу вершин, или $2Г=3В$ или $В=\frac{2}{3}Г$.

Подставим полученное выражение для $В$ в формулу Эйлера: $-\frac{Г}{3}+С=0$ или $Г=3С$.

Так как $С=n$, а $Г \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$, то $3n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$ или $7n \geqslant n^2$. Отсюда $n \leqslant 7$.

Доказательство окончено.

Покажите, что если не все страны гомеоморфны кругу (например, у карты есть страны в виде кольца), то число стран, удовлетворяющих условию задачи, также не превосходит семи.

Попробуйте самостоятельно доказать, что для поверхности шара наибольшее число стран, *попарно* граничащих друг с другом, равно четырем.

Примером карты с четырьмя странами на шаре может служить тетраэдр, у которого страны — его грани. Чтобы превратить тетраэдр в шар, нужно только его раздуть (так, как будто он резиновый). На рисунке 5 изображена развертка, окрашенная в четыре цвета.

Рисунок на обложке журнала можно считать разверткой тора.

А для более сложной поверхности —«кренделя» (см. рис. 6) развертка будет совсем не простой. Одна из таких разверток изображена на четвертой странице обложки. Чтобы склеить из нее «крендель», нужно склеивать отрезки, находящиеся на границе развертки, так, чтобы при этом вершины с одинаковыми номерами совпадали. Эта развертка разбита на 8 стран. По ее периферии указаны цвета тех стран, с которыми граничит каждая страна на соответствующих участках границы. Проверьте, что на этой карте каждая страна граничит с каждой. Докажите, что на «кренделе» нельзя построить карту с числом стран, большим восьми и обладающую указанным свойством. Формула Эйлера для «кренделя» выглядит так: В—Г+С=—2.

Рассмотрим теперь раскраски произвольных карт на поверхностях. Мы будем называть раскраску карты правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета.

Построенные нами примеры карт шара, тора и «кренделя» позволяют сделать следующие утверждения:

Существуют карты на шаре, для правильной раскраски которых необходимо иметь краски четырех различных цветов.

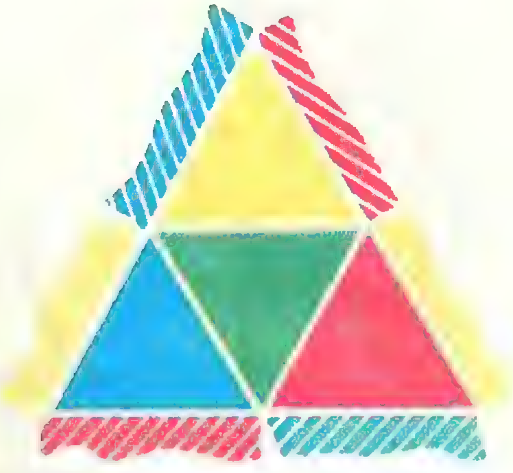


Рис. 5.

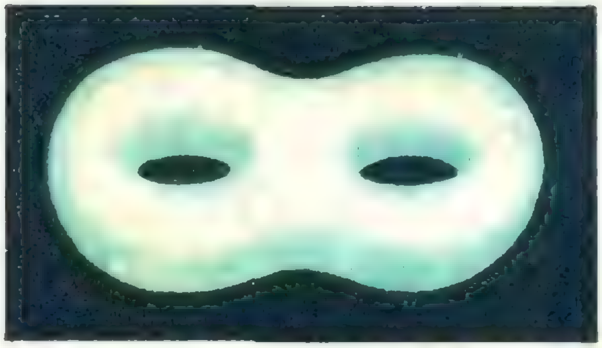


Рис. 6.

Существуют карты на торе, для правильной раскраски которых необходимо иметь краски семи различных цветов.

Существуют карты на «кренделе», для правильной раскраски которых необходимы краски восьми различных цветов.

Интересно, что для правильной раскраски любой карты на торе достаточно семи цветов. А на «кренделе» восьми цветов достаточно для правильной раскраски любой карты.

Что же касается поверхности шара — самой простой из рассмотренных поверхностей, то для нее этот вопрос до сих пор не решен.

Проблема четырех красок

Можно ли произвольную карту на поверхности шара (или на плоскости) правильно раскрасить четырьмя красками?

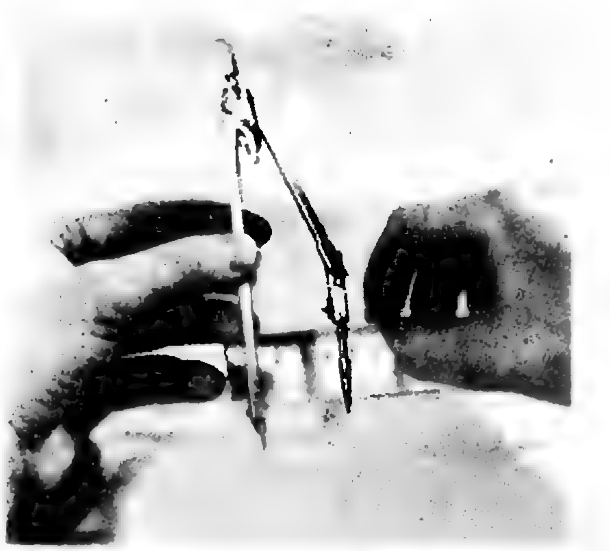
До сих пор не найдено ни одной карты, для правильной раскраски которой было бы недостаточно четырех красок, и в то же время никем не доказано, что четырех красок достаточно для правильной раскраски любой карты. Известно, однако, что пяти красок достаточно для правильной раскраски любой карты на поверхности шара (и на плоскости).

Литература

Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1962.

Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, М.—Л., ГТТИ, 1952.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ



А. А. Пресман

Графический способ решения квадратного уравнения с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

И однажды, вспомнив про геометрические построения, учащиеся задали мне такой вопрос: «А почему мы не решаем квадратные уравнения с помощью циркуля и линейки? Ведь окружность очень легко построить!».

Так возникла на уроке математическая проблема:

По данным действительным коэффициентам a, b и c уравнения $ax^2+bx+c=0$ *определить радиус и координаты центра окружности, пересекающей ось Ox в точках, абсциссы которых являются корнями данного уравнения (всюду далее мы считаем,* что $a\neq 0$).

Сразу ясно, что таких окружностей много, поэтому допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1, 0)$ и $C(x_2, 0)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, и проходит (для определенности) через точку A (0, 1) (рис. 1). Тогда по теореме о секущих

$$OC\cdot OB=OE\cdot OA,$$

откуда

$$OE=\frac{OB\cdot OC}{OA}=\frac{x_1\cdot x_2}{1}=\frac{c}{a}.$$

Центр S окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK, восставленных в серединах хорд AE и BC, поэтому

$$OK=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-\frac{b}{a}}{2}=-\frac{b}{2a},$$

$$OF=\frac{1+\frac{c}{a}}{2}=\frac{a+c}{2a}.$$

Отсюда вытекает следующий способ нахождения корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с помощью циркуля и линейки.

Построим точки $S\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{c+a}{2a}\right)$ *(центр окружности) и* A (0, 1). *Затем проведем окружность с радиусом* SA. *Абсциссы точек пересечения окружности с осью Ox являются корнями исходного квадратного уравнения.*

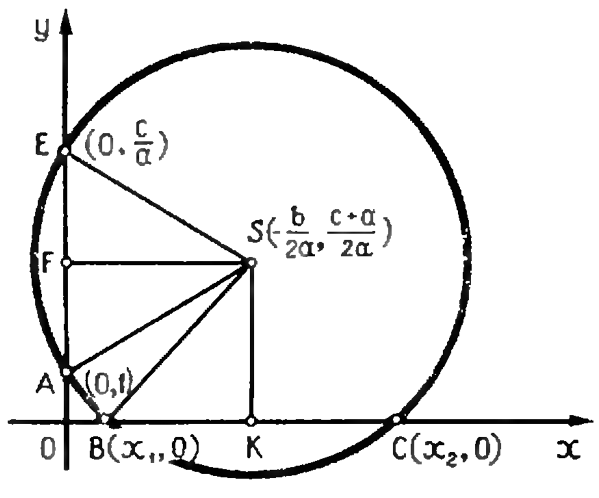


Рис. 1.

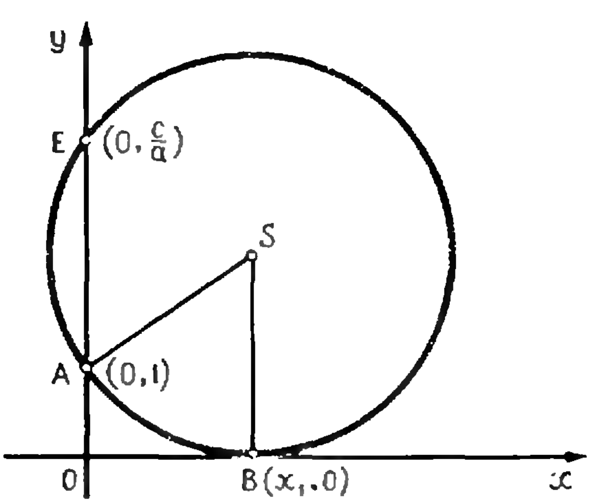


Рис. 2.

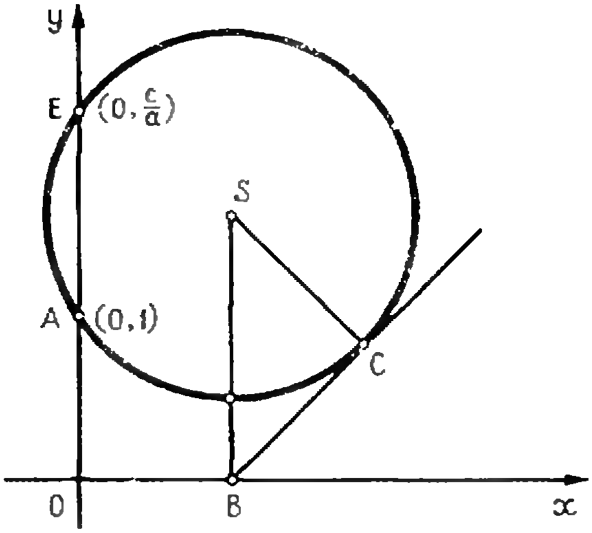


Рис. 3.

Подробное доказательство правильности приведенного способа предоставляется читателю. Отметим три случая, которые надо рассматривать, и способ графически найти комплексные (!) корни исходного уравнения.

Случай 1. *Радиус окружности больше ординаты центра.*

Окружность пересекает ось Ox в точках B $(x_1, 0)$ и C $(x_2, 0)$ (рис. 1).

Случай 2. *Радиус окружности равен ординате центра, окружность касается оси Ox в точке* B $(x_1, 0)$ (рис. 2).

В этом случае уравнение имеет равные действительные корни, абсцисса точки касания

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

Случай 3. *Радиус окружности меньше ординаты центра, окружность не имеет общих точек с осью Ox* (рис. 3).

В этом случае уравнение имеет комплексные и сопряженные корни:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i.$$

Вещественная часть комплексного корня выражается отрезком $OB = -\frac{b}{2a}$ — абсциссой центра. Абсолютная величина коэффициента мнимой части выражается отрезком касательной BC.

С помощью приведенного способа легко провести исследование корней квадратного уравнения на знак и геометрически доказать формулы Виета. Однако в этом случае нельзя использовать формул Виета при обосновании способа, поэтому в заключение укажем алгебраическую интерпретацию предложенного графического решения квадратного уравнения.

Вместо уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

рассмотрим эквивалентную ему систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c + ay^2 - (c + a)y = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Очевидно, если квадратное уравнение имеет корень x_1, то система имеет решение $x = x_1$, $y = 0$, и наоборот. Первое уравнение системы задает окружность (проверьте!), а второе — ось Ox. В пересечении получаем точки вида $(x_i, 0)$, где x_i — корни квадратного уравнения.

Применение алгебраических тождеств к получению геометрических неравенств

З. А. Скопец

Алгебраические тождества, справедливые за отдельными исключениями, для множества комплексных чисел, можно с успехом применить для получения интересных геометрических неравенств, связывающих линейные и угловые элементы плоских фигур. Ниже несколько геометрических неравенств получено именно таким образом. Заметим, что найти чисто геометрические доказательства этих неравенств довольно трудно. Комплексные числа мы будем обозначать малыми буквами латинского алфавита $a, b, c, \ldots$. Напомним, что комплексное число — это выражение $x+iy$, где x и y — действительные числа, а i — мнимая единица ($i^2=-1$). Если на плоскости задана прямоугольная (декартова) система координат Oxy, то каждому комплексному числу $a=x+iy$ можно сопоставить точку A плоскости с абсциссой x и ординатой y. Приведем некоторые определения, связанные с комплексными числами.

I. *Модулем* комплексного числа $a=x+iy$ называется неотрицательное число $\sqrt{x^2+y^2}$, равное расстоянию от начала координат O до соответствующей точки A (рис. 1). Для обозначения модуля комплексного числа a пользуются символом $|a|$. Итак,

$$|a|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}=OA. \qquad (1)$$

Суммой двух комплексных чисел $a_1=x_1+iy_1$ и $a_2=x_2+iy_2$ называется число $a=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$. (Построение точки A по точкам A_1, A_2 показано на рисунке 2.) Поскольку $OA \leqslant OA_1+OA_2$, то согласно (1)

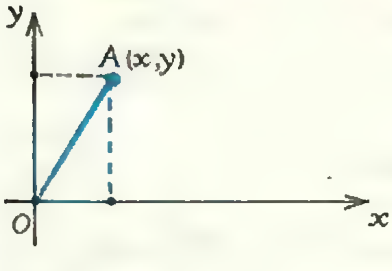
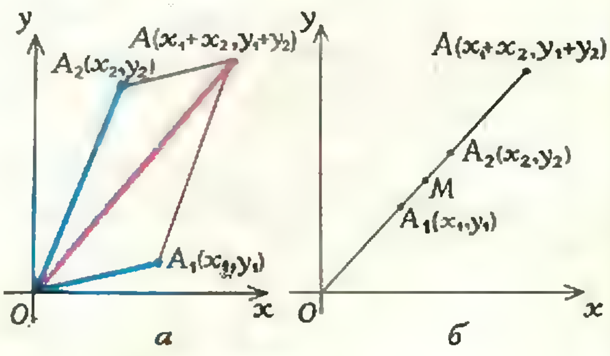
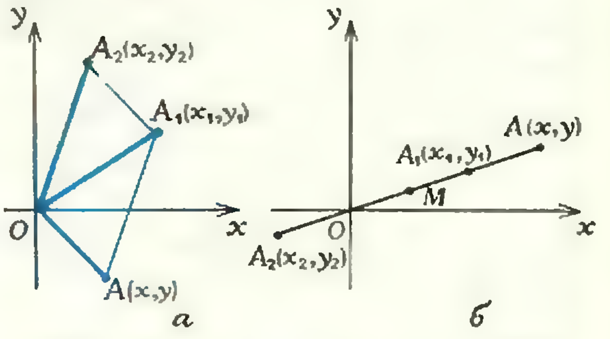


Рис. 1.



а б

Рис. 2. $OM=MA$; $A_1M=MA_2$



а б

Рис. 3. $OM=MA_1$; $A_2M=MA$

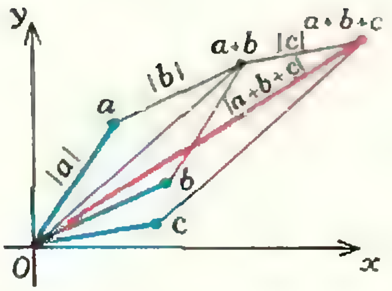


Рис. 4.

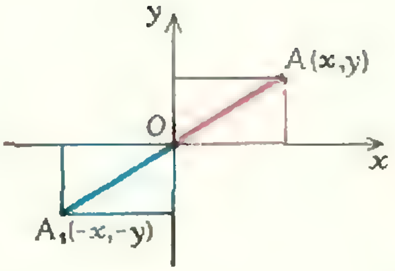


Рис. 5.

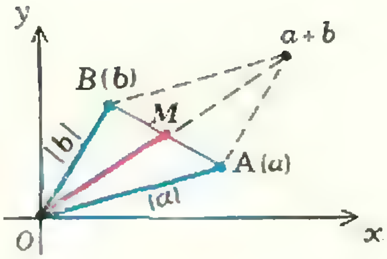


Рис. 6.

имеем

$$|a_1+a_2|\leqslant|a_1|+|a_2|. \tag{2}$$

Знак равенства в (2) означает, что точки O, A_1 и A_2 расположены на одной прямой, причем точка O не принадлежит отрезку A_1A_2.

Итак, *модуль суммы двух комплексных чисел не превосходит суммы модулей слагаемых.*

Разность $a_1—a_2$ двух комплексных чисел a_1 и a_2— это такое число a, что $a+a_2=a_1$ (геометрическое построение приведено на рисунке 3). Поскольку $OA=A_1A_2$, то

$$|a_1—a_2|=A_1A_2. \tag{3}$$

Следовательно, *модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между соответствующими им точками.*

Далее, $OA_1—OA_2\leqslant A_1A_2\leqslant OA_1+OA_2$. Поэтому

$$|a_1|—|a_2|\leqslant|a_1—a_2|\leqslant|a_1|+|a_2|. \tag{4}$$

Если точки O, A_1 и A_2 принадлежат одной прямой, то один из знаков неравенства в (4) превращается в равенство.

Таким образом, *модуль разности двух комплексных чисел не больше суммы их модулей и не меньше их разности.*

Легко проверить (рис. 4) справедливость, например, следующего неравенства:

$$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|. \tag{5}$$

Заметим, что если числу a соответствует точка A с координатами x, y, то числу $—a$ соответствует точка с координатами $—x$, $—y$. Эти две точки симметричны относительно начала координат O (рис. 5). Следовательно, $|—a|=|a|$. Поэтому

$$|a—b+c|=|a+(—b)+c|\leqslant$$
$$\leqslant|a|+|b|+|c|. \tag{6}$$

II. Произведением двух чисел x_1+iy_1 и x_2+iy_2 называется число $(x_1x_2—y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$ (оно получается так: $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=$ $=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+i^2y_1y_2$, а потом i^2 заменяется минус единицей и приводятся подобные члены). Нам нужны следующие легко проверяемые свойства умножения:

$$ab=ba,\quad a(b+c)=ab+ac,\quad |ab|=|a||b|.$$

Мы ограничимся этими сведениями о комплексных числах. Подробное изложение этих вопросов можно найти в учебнике алгебры для десятого класса средней школы.

Наша задача будет заключаться в применении комплексных чисел к некоторым задачам геометрии.

III. Ниже будет показано, как можно получать геометрические неравенства из простых алгебраических тождеств, связывающих комплексные числа.

1. Рассмотрим тождество:

$$a^2—b^2=(a+b)(a—b),$$

где a и b — комплексные числа. Отсюда имеем

$$|a+b||a—b|=|a^2—b^2|\leqslant|a|^2+|b|^2$$

или

$$2OM\cdot AB\leqslant OA^2+OB^2, \tag{7}$$

где M — середина отрезка AB, O — начало координат (рис. 6).

Итак, *сумма квадратов двух сторон треугольника не меньше произведения третьей стороны на удвоенную медиану, проведенную к этой стороне.*

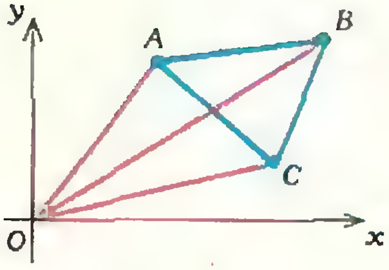


Рис. 7.

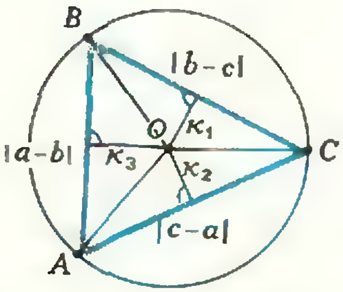


Рис. 8.

2. Легко проверить следующее тождество:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

Из этого тождества следует, что

$$|b-c||c-a||a-b|\leqslant |a^2||b-c|+|b^2||c-a|+|c^2||a-b|$$

или (рис. 7)

$$BC\cdot CA\cdot AB\leqslant OA^2\cdot BC+OB^2\cdot CA+OC^2\cdot AB. \quad (8)$$

Следствие 1. Если ABC — равносторонний треугольник, то

$$OA^2+OB^2+OC^2\geqslant d^2, \quad (8')$$

где d — длина стороны треугольника.

Итак, *сумма квадратов расстояний любой точки плоскости до вершин равностороннего треугольника не меньше квадрата его стороны.*

Следствие 2. Если O — центр окружности, описанной около произвольного треугольника, то из (8) следует

$$AB\cdot BC\cdot CA\leqslant R^2(AB+BC+CA)$$

или

$$\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{AB+BC+CA}\leqslant R^2. \quad (8'')$$

Таким образом, *отношение произведения трех сторон треугольника к их сумме не превосходит квадрата радиуса окружности, описанной около треугольника.*

3. Проверкой убеждаемся в истинности такого тождества:

$$(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2=(a-b)(a-c)(b-c).$$

Обозначим через k_1, k_2, k_3 соответственно расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC, CA, AB (рис. 8). Центр этой окружности примем за начало координат. Тогда

$$|b+c|=2k_1, |c+a|=2k_2, |a+b|=2k_3.$$

Из данного тождества следует

$$AB\cdot BC\cdot CA\leqslant 4(k_1^2\cdot BC+k_2^2\cdot CA+k_3^2\cdot AB).$$

Но $S_{OBC}=\frac{1}{2}k_1\cdot BC=\frac{1}{2}R^2\sin 2A$, если $\angle A\leqslant 90°$. Следовательно,

$$k_1\cdot BC=R^2\cdot\sin 2A.$$

Аналогично, если углы B и C не тупые, то

$$k_2CA=R^2\sin 2B,\quad k_3AB=R^2\sin 2C.$$

Поэтому

$$AB\cdot BC\cdot CA\leqslant 4R^2(k_1\sin 2A+k_2\sin 2B+k_3\sin 2C).$$

Учитывая, что $k_1=R\cos A$, $k_2=R\cos B$, $k_3=R\cos C$, $AB\cdot BC\cdot CA=4RS_{ABC}$, имеем

$$4RS_{ABC}\leqslant 4R^3(\cos A\sin 2A+\cos B\sin 2B+\cos C\sin 2C).$$

Отсюда

$$\frac{S_{ABC}}{R^2}\leqslant\cos A\sin 2A+\cos B\sin 2B+\cos C\sin 2C. \quad (9)$$

Итак, для всякого нетупоугольного треугольника имеет место неравенство (9).

IV. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Вывести из тождества $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ неравенство $2OM\cdot AB\geqslant OA^2-OB^2$, где M — середина AB, O — начало координат, a, b — числа, соответствующие точкам A, B. Выяснить, когда оно обращается в равенство.

Задача 2. Вывести из тождества $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ неравенство $OH \leqslant \frac{R^2}{2r}$, где O — центр окружности, описанной около треугольника, R — радиус этой окружности, H — ортоцентр треугольника, r — радиус вписанной окружности. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот или их продолжений.)

Задача 3. Доказать, что $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant CA \cdot BD$, где A, B, C, D — произвольные точки плоскости.

Задача 4. Доказать, что

$$AB \cdot AM \cdot BM + BC \cdot BM \cdot CM + CA \cdot CM \cdot MA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA.$$

Задача 5. Вывести из тождества

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0$$

неравенство

$$OA \cdot BC \cdot BD \cdot CD + OB \cdot CA \cdot CD \cdot AD + OC \cdot AB \cdot AD \cdot BD \geqslant OD \cdot AB \cdot BC \cdot CA,$$

где O, A, B, C, D — произвольные (различные) точки плоскости.

Указания

1) Равенство имеет место для точек O, A, B, расположенных на одной прямой.

2) Воспользоваться тем, что если H — ортоцентр треугольника ABC, а центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с началом координат, то $h = a + b + c$ (a, b, c, h — комплексные числа, соответствующие точкам A, B, C, H). Заметить, что $h - a = k_1(b + c)$, $h - b = k_2(c + a)$, $h - a = k_3(a + b)$, где k_1, k_2, k_3 — вещественные числа. Из этой системы следует, что $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

3) Рассмотреть тождество

$$(m-a)(b-c) + (m-b)(c-a) + (m-c)(a-b) = 0.$$

4) Рассмотреть тождество

$$(m-a)(m-b)(a-b) + (m-b)(m-c) \times (b-c) + (m-c)(m-a)(c-a) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

ИСТОРИЯ СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

В «Кванте» № 8 за 1971 год был опубликован рассказ об удивительной многовековой истории совершенных чисел. Напомним, что совершенным называется натуральное число, равное сумме всех своих делителей. Первым таким числом является 6, затем идет 28. Всего до последнего времени было найдено 23 совершенных числа.

И вот стало известно следующее, 24-е совершенное число. Согласно сообщению журнала «*Scientific American*» (июнь 1971 г.) американский математик Б. Такерман получил самое большое из известных сегодня простых чисел, а именно

$$2^{19\,937} - 1$$

(полная запись этого числа содержит 6002 цифр). Одновременно указано и новое совершенное число:

$$2^{19\,936}\,(2^{19\,937} - 1)$$

(это число записывается с помощью 12 003 цифр). Вычисления заняли 40 минут машинного времени одного из самых крупных современных вычислительных комплексов.

Однако и это открытие не проясняет никаких закономерностей в появлении совершенных чисел. В частности, полученное совершенное число, как и все предыдущие, — четное.

Н. Розов

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М136. Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, веса которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг (веса составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 кг), на семи трехтонках?

В. П. Федотов

М137. Пусть a, b, c, d — длины четырех последовательных сторон четырехугольника, S — его площадь.

а) Докажите, что $2S \leqslant ab+cd$.

б) Докажите, что $2S \leqslant ac+bd$.

в) Докажите, что если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство, то четырехугольник можно вписать в окружность.

М138. Докажите, что если m и n — целые числа и $1 \leqslant m < n$, то

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^m C_n^k = 0,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, то есть коэффициенты многочлена

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

(Например, если $n=4$, то $C_4^0=1$, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$ и верны равенства

$$-1\cdot4+2\cdot6-3\cdot4+4\cdot1=0,$$
$$-1^2\cdot4+2^2\cdot6-3^2\cdot4+4^2\cdot1=0,$$
$$-1^3\cdot4+2^3\cdot6-3^3\cdot4+4^3\cdot1=0.$$

М. И. Сидоров

М139. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известны отрезки $KH=a$ и $BD=b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

Ф. А. Бартенев

М140. С натуральным числом (записываемым в десятичной системе) разрешается проделывать следующие операции:

А) приписать в конце цифру 4;

Б) приписать в конце цифру 0;

В) разделить на 2 (если число четно).

Например, если с числом 4 проделать последовательно операции В, В, А и Б, то получится число 140.

а) Как из числа 4 получить число 1972?

б) * Докажите, что из числа 4 можно получить любое натуральное число.

А. К. Толпыго

Ф148. Ядро массы M, летящее со скоростью V, распадается на два одинаковых осколка. Внутренняя энергия ядра E_1, внутренняя энергия каждого из осколков E_2 $(E_1>2E_2)$. Определить максимально возможный угол между вектором скорости одного из осколков и вектором V.

Ф149*. Во сколько раз уменьшится сила притяжения двух маленьких шариков, один из которых заряжен, а другой нейтрален, если расстояние между шариками увеличить вдвое?

И. Ф. Гинзбург

Ф150. В некоторой галактике обнаружена звезда З с планетой П, делающей за время T_1 один оборот вокруг звезды и за время T_2 один оборот вокруг собственной оси. Спутник S планеты П делает один оборот вокруг планеты за время T_3. Через какое время повторяется в данном месте планеты затмение спутника S? Все тела вращаются в одной плоскости.

Г. Л. Коткин

Ф151. Два плоских зеркала образуют двугранный угол с раствором 90°. В угол вставлена линза с фокусным расстоянием F так, что главная оптическая ось линзы составляет угол 45° с каждым зеркалом. Радиус линзы равен ее фокусному расстоянию. Найти положение изображения источника, расположенного на главной оптической оси линзы на расстоянии 1,5 F от нее.

Ф152. Объем газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва, колеблется с периодом, пропорциональным $P^a \cdot \rho^b \cdot E^c$ (P — давление, ρ — плотность воды, E — полная энергия взрыва). Найти a, b и c.

ДВЕ ИГРЫ

(начало см. на стр. 27)

Новый ним

На столе лежат n кучек камней; кроме того, каждый из двух играющих имеет некоторое число камней (возможно, играющие и не знают, сколько камней имеет противник). За ход можно либо взять любое число камней из одной любой кучки, либо положить любое число камней в одну из кучек, либо положить любое число камней просто на стол, образовав тем самым еще одну кучку. Выигравшим считается тот, кто после своего хода соберет у себя все камни.

Определите, при каких начальных положениях (то есть количествах камней в каждой из кучек и у каждого из двух играющих) выигрывает первый играющий, а при каких — второй.

А. Ю. Сойфер

ЗАДАЧНИК кванта

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М96—М100

М96

Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — данные числа. Тогда $(a_1+a_2+a_5-a_3-a_4)(a_1+a_3+a_4-a_2-a_5)=a_1^2-(a_2+a_5-a_3-a_4)^2\leqslant a_1^2$.

Аналогично доказывается, что

$$(a_2+a_3+a_1-a_4-a_5)\times$$
$$\times(a_2+a_4+a_5-a_3-a_1)\leqslant a_2^3\ ,$$
$$(a_3+a_4+a_2-a_5-a_1)\times$$
$$\times(a_3+a_5+a_1-a_4-a_2)\leqslant a_3^2\ .$$
$$(a_4+a_5+a_3-a_1-a_2)\times$$
$$\times(a_4+a_1+a_2-a_5-a_3)\leqslant a_4^2\ .$$
$$(a_5+a_1+a_4-a_2-a_3)\times$$
$$\times(a_5+a_2+a_3-a_1-a_4)\leqslant a_5^2\ .$$

Остается перемножить эти неравенства, и задача решена.

Докажите более общее утверждение: если даны $2n+1$ положительных чисел таких, что разность между суммой любых $n+1$ чисел и суммой n остальных положительна, то произведение B всех C_{2n+1}^n таких разностей и произведение A всех $2n+1$ данных чисел связаны неравенством

$$B^n\leqslant A^{C_{2n}^{n-1}}\ .$$

М97

В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB=a$ и $CD=b$ проведен отрезок A_1B_1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции A_1B_1CD снова проведен отрезок A_2B_2, соединяющий середины диагоналей, и так далее (рис 1). Может ли в последовательности длин отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2, … какое-то число встретиться дважды? Будет ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей?) Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

Пусть A_1 и B_1 — середины диагоналей AC и BD трапеции, E и F — середины боко-

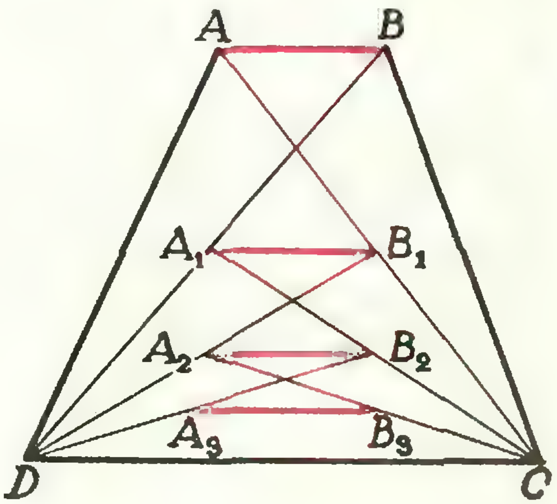


Рис. 1.

вых сторон AD и BC (рис. 2). Поскольку A_1F — средняя линия треугольника ACB, а B_1F — средняя линия треугольника DCB, то точки A_1 и B_1 лежат на отрезке EF и

$$a_1 = A_1B_1 = |A_1F - B_1F| = \left|\frac{a-b}{2}\right|.$$

(Эта формула верна независимо от того, какое из чисел a и b больше). Точно так же доказывается, что

$$a_{n+1} = \left|\frac{a_n - b}{2}\right|, \qquad (1)$$

где $a_n = A_nB_n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) — интересующая нас последовательность. Тем самым задача сведена к чисто алгебраической задаче о последовательности, определяемой соотношением (1) с начальным членом $a_0 = a > 0$.

Если $a_n > b$, то $a_{n+1} = \frac{a_n - b}{2} < a_n - b$.

Поэтому если $a > b$, то каждый член последовательности будет меньше предыдущего по крайней мере на b до тех пор, пока не встретится член a_m такой, что $a_m \leqslant b$ (если $a \leqslant b$, то положим $m=0$, $a_m = a_0 = a$; многие читатели рассматривали только этот случай; только он рассматривается и в книге «Математические задачи» *).

Итак, мы рассматриваем теперь только $n \geqslant m$.

Если $a_n \leqslant b$, то $a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2} \leqslant \frac{b}{2} < b$.

Таким образом, все следующие за a_m члены последовательности будут меньше b и поэтому при всех $n \geqslant m$

$$a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2}. \qquad (2)$$

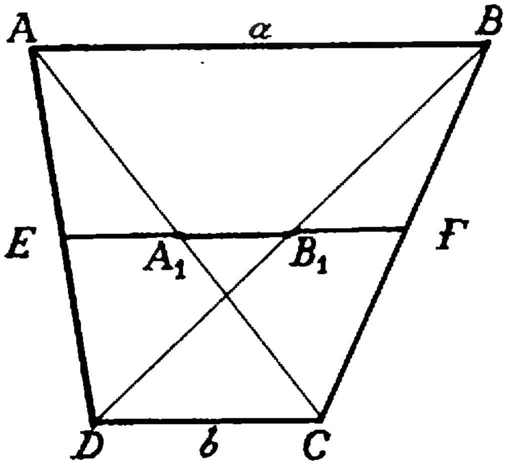


Рис. 2.

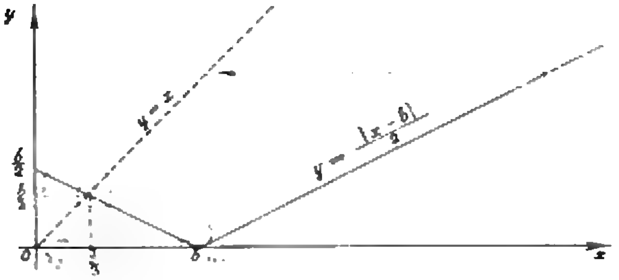


Рис. 3. Члены последовательности a_n, определяемой условиями $a_0 = a$, $a_{n+1} = \left|\frac{a_n - b}{2}\right|$ — абсциссы вершин ломаной, окрашенной в зеленый цвет. Звенья этой ломаной попеременно параллельны осям Ox, Oy, а ее вершины лежат попеременно на прямой с уравнением $y = x$ и на графике функции $y = \left|\frac{x-b}{2}\right|$.

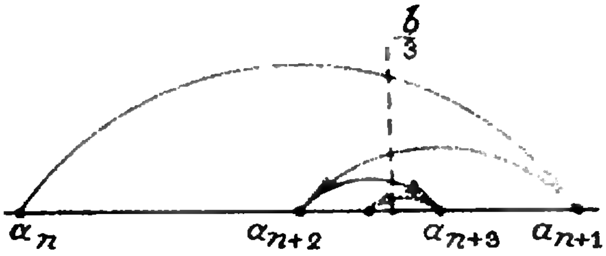


Рис. 4.

Уравнение $x = \frac{b-x}{2}$ имеет единственное решение $x = \frac{b}{3}$. Поэтому если у последовательности $\{a_n\}$ существует предел, то он равен $\frac{b}{3}$.

Пусть $a_m \neq \frac{b}{3}$. Положим $a_n = \frac{b}{3} + \delta_n$. Тогда из (2) следует, что $\frac{b}{3} + \delta_{n+1} = \frac{b}{3} - \frac{\delta_n}{2}$, то есть

$$\delta_{n+1} = -\frac{\delta_n}{2} \qquad (3)$$

— при переходе от n к $n+1$ разность $a_n - \frac{b}{3} = \delta_n$ меняет знак и по абсолютной величине уменьшается вдвое. Теперь все ясно: в последовательности a_n никакое число не может встретиться дважды, поскольку каждый член ближе к $\frac{b}{3}$, чем предыдущий. Эта последовательность не монотонна, но стремится к пределу $\frac{b}{3}$ (рис. 3, 4).

---

*) Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, «Математические задачи», изд. 3-е, «Наука», 1971, задача 147.

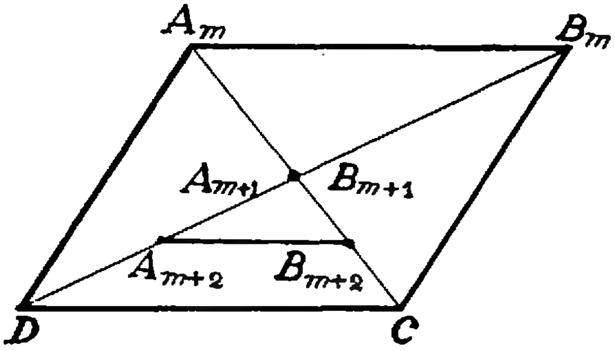


Рис. 5.

К сожалению, некоторые читатели пишут: «Поскольку последовательность не монотонная, она не стремится к пределу». Это рассуждение, конечно, неверно. Докажем строго, пользуясь определением предела, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{3}. \qquad (4)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда если $n > N$, где $N = N_{(\varepsilon)}$ — наименьшее целое число, для которого $2^N \varepsilon > 2^m |\delta_m|$, то $\left| a_n - \frac{b}{3} \right| =$

$$= |\delta_n| = \frac{|\delta_m|}{2^{n-m}} < \frac{|\delta_m|}{2^{N-m}} < \varepsilon.$$

Тем самым (4) доказано.

Разумеется, предел равен $\frac{b}{3}$ и в том случае, когда $a_m = \frac{b}{3}$ — в этом случае все последующие члены тоже равны $\frac{b}{3}$. Выясним, при каких значениях a возникает этот случай. Если $m = 0$, то $a = \frac{b}{3}$. Если $m = 1$ и $a_1 = \frac{a-b}{2} = \frac{b}{3}$, то $a = \frac{5b}{3}$.

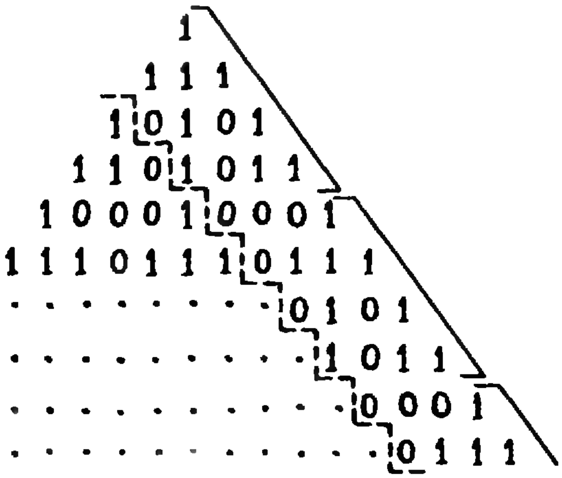


Рис. 6.

Вообще, если $a_m = \frac{b}{3}$, то $a = a_0$ получается из $a_m = \frac{b}{3}$ после m-кратного применения формулы $a_{n-1} = 2a_n + b$. Таким образом, как нетрудно проверить, значения a, при которых $a_m = \frac{b}{3}$, составляют последовательность $\frac{b}{3}, \frac{5b}{3}, \frac{13b}{3}, \ldots, \frac{(2^k-3)b}{3}, \ldots$ При этих (и только этих) значениях a последовательность получается монотонной (и с некоторого места — постоянной).

Мы не выделили отдельно случай, когда $a_m = b$ (при этом $a_{m+1} = 0$, $a_{m+2} = = \frac{b}{2}, \ldots$), — с алгебраической точки зрения он ничем не примечателен, но соответствующие $n = m$ и $n = m+1$ трапеции вырождаются в параллелограмм и в треугольник (точки B_{m+1} и C_{m+1} совпадают, рис. 5); начиная с $n = m+2$, получаются настоящие трапеции, и, как всегда, a_n стремится к пределу $\frac{b}{3}$.

M98

Докажите, что в таблице

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
. . . .

где каждое число равно сумме трех, стоящих над ним, в каждой строке (начиная с третьей) есть четное число. В каждой ли строке (кроме первых двух) встречается число, делящееся на три?

Исследуем сначала вопрос о делимости на два. Будем в нашей таблице вместо четных чисел писать 0, а вместо нечетных — 1. Тогда таблицу из 0 и 1 нужно будет составлять по тому же правилу (каждое число получается как сумма трех, стоящих над ним в предыдущей строке), только сложение нужно выполнять «по модулю два» — по правилам $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=0$.

Первое решение основано на таком соображении: последние четыре числа в каждой строке зависят только от того, каковы последние четыре числа в предыдущей строке, и поэтому нет ничего удивительного в том, что эта четверка периодически повторяется (с периодом 4, см. рис. 6) *).

---

*) Аналогичное решение приводится в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», изд. 4-е, «Наука», 1965, задача 10.

Другое решение, предложенное рядом читателей — доказательство от противного. Предположим, что какая-то строка целиком состоит из единиц:

111 111

Тогда предыдущая строка, как легко убедиться, может быть только такой:

100100 … … 001001,

а идущая перед ней — только такой:

110000110000 … … 000011000011.

Но это невозможно, поскольку в каждой строке нашей таблицы нечетное количество чисел.

Что касается делимости на 3, то, как легко убедиться, уже в следующей, четвертой строке таблицы (верхней строке из одной единицы удобно присвоить номер 0)

1 4 10 16 19 16 10 4 1

ни одно число не делится на 3 (причем все дают при делении на три остаток 1). Разобравшись в структуре нашей таблицы «по модулю 3» (на рис. 7 числа, дающие при делении на три остатков 0, 1 и 2, заменены соответственно желтыми, черными и красными кружочками), можно заметить, что тем же свойством будут обладать строки с номерами 1, $1+3=4$, $1+3+3^2=13$, $1+3+3^2+3^3=$ $=40$ и т. д.

Читатели в своих письмах сообщают и о других свойствах чисел этой таблицы. Много разных свойств можно вывести, пользуясь тем, что в n-й строке нашей таблицы стоят коэффициенты многочлена

$$(1+x+x^2)^n=\sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^k$$

(действуя примерно так же, как в статье «Арифметика биномиальных коэффициентов», «Квант» № 6, 1970). Например, сразу ясно, что $\sum_{k=0}^{2n} B_n^k=3^n$, $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k B_n^k=1$, и нетрудно доказать, что $\sum_{k=0}^{n}(B_n^k)=B_{2n}^{2n}$ (см. задачу 61 в книге А. М. и И. М. Ягломов «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», Гостехиздат, 1954). Проверьте, что если p — простое, $s<p$ и $r<p$, то

$$B_{mp+r}^{lp+s}\equiv B_m^l B_r^s+B_m^{l-1}B_r^{s+p} \pmod p$$

(если $k>2n$, то B_n^k считается равным 0).

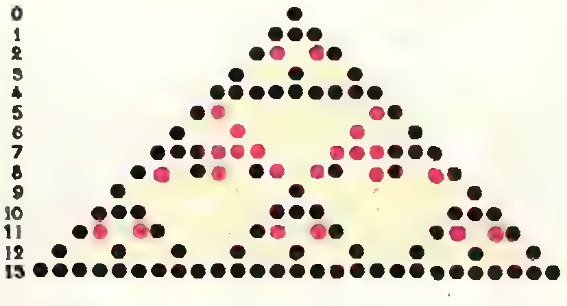


Рис. 7.

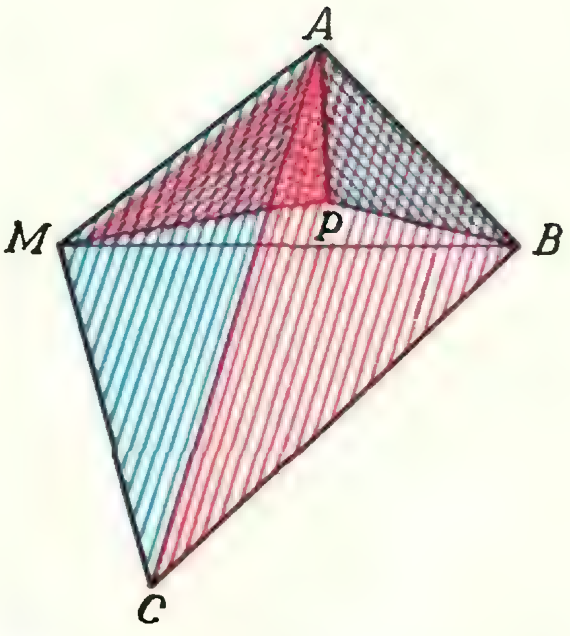


Рис. 8.

Решения задач **М96 — М98** прислали многие читатели. Не менее двух из этих задач решили *А. Григорян* (Баку), *С. Конягин* (Саратов), *А. Меркурьев* (Ленинград), *М. Розов* (Минск), *М. Прегер* (Томск), *А. Слинкин* (Москва), *А. Черняк* (Минск), *Э. Туркевич* (Черновцы), *С. Котанов* (п. Цалка Грузинской ССР), *Г. Тимофеев* (Саратов), *Ю. Кисин* (Старая Русса), *В. Надежко* (Ленинград), *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.), *Е. Гундурь* (Ворошиловград), *А. Макарычев* (Львов), *И. Шпарлинский* (Москва).

М99

В треугольнике ABC сторона AC — наибольшая. Докажите, что для любой точки M плоскости $AM+CM$ не меньше BM. В каких случаях возможно равенство?

Докажем сначала такую лемму.

Лемма. Для любых четырех точек A, B, C, M на плоскости

$$AC\cdot BM\leqslant AB\cdot CM+BC\cdot AM \qquad (1)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $ABCM$ — выпуклый вписанный четырехугольник (или когда одно из слагаемых в правой части равно нулю из-за того, что некоторые две точки совпадают).

Доказательство леммы. Выберем точку P так, что $\angle BAP=\angle CAM$ и $\angle MAP=\angle CAB$, а $PA=\dfrac{AB\cdot AM}{AC}$ (рис. 8). Тогда $\triangle BAP\sim\triangle CAM$ (первый получается из второго сжатием в отношении $AB:AC$ и поворотом на угол BAC), а $\triangle MAP\backsim\triangle CAB$ (первый получается из второго поворотом на угол CAM и сжатием в отношении $AM:AC$). Теперь воспользуемся неравенством треугольника

$$BM\leqslant BP+PM. \qquad (2)$$

Поскольку

$BP=\dfrac{AB}{AC}\cdot CM$ и $PM=BC\cdot\dfrac{AM}{AC}$, получаем (1). Равенство в (2) достигается, когда точка P лежит на отрезке BM. Легко убедиться, что это будет только в том случае, когда четыре точки A, B, C, M лежат на окружности (в указанном порядке, причем какие-то две соседние могут совпадать).

По поводу этого доказательства могут возникать такие сомнения: годится ли оно для любого расположения точек A, B, C, M на плоскости, не зависит ли оно от особенностей рисунка 8? Проще всего рассеять их, записав решение аналитически с помощью комплексных чисел (см. статью З. А. Скопеца на стр. 36 и задачу 3 к ней на стр. 39).

Из леммы утверждение задачи выводится мгновенно: если $AB\leqslant AC$ и $BC\leqslant AC$, то

$$AC\cdot BM\leqslant AB\cdot CM+BC\cdot AM\leqslant AC\cdot CM+ AC\cdot AM,$$

откуда

$$BM\leqslant AM+CM.$$

Одновременно получаем, что равенство достигается в следующих случаях:

если треугольник ABC равнобедренный (AC — боковая сторона) и точка M лежит в его вершине;

если треугольник ABC равносторонний и точка M лежит на дуге AC его описанной окружности, не содержащей точку B.

Решение с помощью леммы («неравенства Птолемея») прислали *А. Меркурьев*, *С. Котанов*, *А. Черняк*.

Уже перечисление случаев, когда достигается равенство, показывает, что прямое доказательство (без леммы) не может быть очень простым. Все же такое решение, требующее очень внимательного перебора различных случаев расположения точки M, сумели получить *М. Розов*, *М. Прегер*, *А. Черняк* (он прислал два решения).

M100

Докажите, что сумма 45 чисел $\operatorname{tg} 1°+\operatorname{tg} 5°+\operatorname{tg} 9°+\ldots+\operatorname{tg} 173°+\operatorname{tg} 177°$ равна 45.

Докажем, что

$$\operatorname{ctg} 1°+\operatorname{ctg} 5°+\operatorname{ctg} 9°+\ldots+\operatorname{ctg} 173°+\operatorname{ctg} 177°=45.$$

Это то же самое, поскольку

$$\operatorname{tg} 1°=\operatorname{ctg} 89°,\ \operatorname{tg} 5°=\operatorname{ctg} 85°,\ldots,\ \operatorname{tg} 89°=\operatorname{ctg} 1°;$$
$$\operatorname{tg} 93°=\operatorname{ctg} 177°,\ \operatorname{tg} 97°=\operatorname{ctg} 173°,\ldots,\ \operatorname{tg} 177°=\operatorname{ctg} 93°.$$

Нетрудно доказать по индукции, что

$$\operatorname{ctg} nx=\frac{p_n(\operatorname{ctg} x)}{q_n(\operatorname{ctg} x)},$$

где $p_n(y)=y^n-\dfrac{n(n-1)}{2}y^{n-2}+\cdots$ и

$q_n(y)=ny^{n-1}-\cdots$ — многочлены от y.

(Аналогичную формулу можно написать и для $\operatorname{tg} nx$, но ее вид будет несколько отличаться для четных и нечетных n, поэтому мы предпочли иметь дело с котангенсами. На самом деле коэффициентами многочленов $p_n(y)$ и $q_n(y)$ являются биномиальные коэффициенты:

$$p_n(y)=y^n-C_n^2y^{n-2}+C_n^4y^{n-4}-\ldots,$$
$$q_n(y)=C_n^1y^{n-1}-C_n^3y^{n-3}+C_n^5y^{n-5}-\ldots$$

Нам, впрочем, понадобится только первый коэффициент многочлена q_n.)

Поскольку для каждого из углов $1°+4°k$, где $k=0, 1, 2, \ldots, 44$,

$\operatorname{ctg} 45(1°+4°k)=\operatorname{ctg}(45°+180°k)=1$,

то

$$\frac{p_{45}(\operatorname{ctg} 1°+4°k))}{q_{45}(\operatorname{ctg}(1°+4°k))}=1,$$

то есть все числа $y=\operatorname{ctg}(1°+4°k)$ являются корнями уравнения

$$p_{45}(y)-q_{45}(y)=0. \qquad (*)$$

Нам важен коэффициент при y^{44}, поэтому запишем (*) так:

$$y^{45}-45y^{44}+\ldots=0. \qquad (**)$$

Теперь осталось заметить, что все 45 чисел $\operatorname{ctg}(1°+4°k)$ различны (поскольку $\operatorname{ctg} 1°>\operatorname{ctg} 5°>\ldots>\operatorname{ctg} 177°$). Тем самым это все 45 различных корней уравнения (*). Следовательно, по теореме Виета их сумма равна 45.

Это решение прислал *Э. Туркевич*. Такое же решение имел в виду и автор задачи *В. П. Бешкарев* (Горький).

Однако двое наших читателей — *С. Т. Берколайко* (Белгородская обл.) и *В. Я. Гомолич* (Одесса) — сумели доказать утверждение задачи прямым вычислением. Мы проведем промежуточные результаты их решений, чтобы показать, как много нужно было проявить искусства, если не пользоваться «наукой».

С. Т. Берколайко:

Применяя тождество

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+60°)+\operatorname{tg}(\alpha+120°)=3\operatorname{tg} 3\alpha \qquad (***)$$

15 раз к $\alpha=1°+4°k$ ($k=0, 1, 2, \ldots, 14$), складывая все 15 равенств и, применяя снова (***), приводим исходную сумму к такой: $9(\operatorname{tg} 9°+\operatorname{tg} 81°-\operatorname{tg} 63°-\operatorname{tg} 27°)+9$, после чего остается доказать, что круглая скобка равна 4.

В. Я. Гомолич:

$$\sum_{k=0}^{44} \operatorname{tg}(1^\circ+4^\circ k)=\sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg}(45^\circ+4^\circ k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{45}\frac{1+\operatorname{tg}4^\circ k}{1-\operatorname{tg}4^\circ k}=45+\sum_{k=1}^{45}\operatorname{tg}8^\circ k+$$

$$+\sum_{k=1}^{45}\operatorname{tg}4^\circ k\operatorname{tg}8^\circ k, \qquad (****)$$

после чего доказывается, что

$$\sum_{k=1}^{45}\operatorname{tg}4^\circ k=0, \quad \sum_{k=1}^{45}\operatorname{tg}8^\circ k=0,$$

$$\sum_{j,\,k=1,\,j\neq k}^{45}\operatorname{tg}4^\circ k\operatorname{tg}8^\circ j=0,$$

откуда следует, что обе суммы в (****) равны 0.

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф108—Ф115

Ф108

Десять муравьев решили утащить со стола лежащую на нем соломинку. Как им нужно поступить, если сила, с которой может тащить соломинку каждый из муравьев, несколько меньше 1/10 силы трения, действующей на соломинку, когда она перемещается по столу? Поднять соломинку муравьям не под силу.

Многие читатели предлагали муравьям катить соломинку или смазать стол какой-нибудь жидкостью, чтобы уменьшить коэффициент трения между соломинкой и столом. Мы не будем останавливаться на этих решениях и разберем случаи, когда у муравьев нет «под руками» жидкости и соломинку нельзя катить, например, потому, что она изогнута и повернуть ее муравьям не под силу.

Хотя соломинку нельзя просто тащить по столу, прикладывая силу горизонтально, это можно сделать, если силу приложить под углом к плоскости стола. При этом муравьи «проиграют» в горизонтальной силе, но выиграют за счет уменьшения давления соломинки на стол и, следовательно, за счет уменьшения силы трения, действующей на соломинку.

Пусть сила F приложена к соломинке под углом α к столу (рис. 9). Так как стол в вертикальном направлении не перемещается, то

$$F\sin\alpha+N-mg=0.$$

Здесь N — сила реакции стола, m — масса соломинки. Отсюда

$$N=-F\sin\alpha+mg.$$

Соломинка будет перемещаться по столу в том случае, когда горизонтальная составляющая силы F больше силы трения kN:

$$F\cos\alpha>(mg-F\sin\alpha)\,k.$$

Отсюда находим, что сила F должна быть больше $\dfrac{mg\,k}{\cos\alpha+k\sin\alpha}$.

Проведя тригонометрические преобразования, получим, что для того, чтобы соломинка двигалась по столу, муравьи должны тащить ее с силой

$$F\geqslant\frac{mgk}{\cos(\alpha-\beta)\sqrt{k^2+1}}, \text{ где } \beta=\operatorname{arctg}k.$$

Необходимая для преодоления трения сила F минимальна при $\alpha=\beta=\operatorname{arctg}k$. В этом случае $F\geqslant\dfrac{mgk}{\sqrt{k^2+1}}$.

Эта сила в $\sqrt{k^2+1}$ раз меньше силы трения, действующей на соломинку при ее скольжении по столу, если приложенная к соломинке сила горизонтальна.

Есть еще одно интересное решение этой задачи. Хотя муравьи не могут тащить соломинку, прикладывая силу горизонтально, но они могут перемещать ее, поворачивая.

Пусть сила F приложена к одному из концов соломинки (рис. 10). Соломинка начнет поворачиваться, причем точка, вокруг

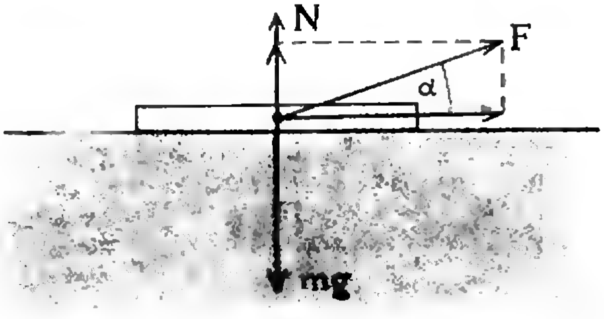


Рис. 9.

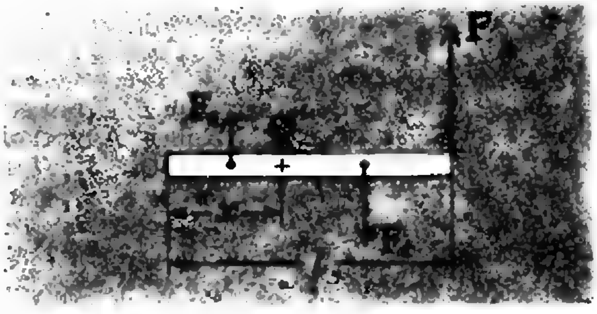


Рис. 10.

которой будет вращаться соломинка, не совпадет с ее серединой.

Сила трения каждого из кусков соломинки пропорциональна весу этих кусков

$$F_1 = m\frac{l-x}{l}gk, \qquad F_2 = m\frac{x}{l}gk.$$

Теперь можно записать условие равенства нулю моментов сил относительно точки 0:

$$F(l-x) - F_1\left(\frac{l-x}{2}\right) - F_2\frac{x}{2} = 0. \qquad (1)$$

Подставляя значения F_1, F_2 и $F \approx mgk$ (так как по условию F лишь *несколько* меньше mgk), найдем, что

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Это расстояние меньше половины длины соломинки. Таким образом, соломинка вращается не вокруг середины, а вокруг точки, находящейся ближе к одному из концов. Повернув соломинку на 180°, муравьи передвинут ее на некоторое расстояние. Теперь всю операцию можно повторить, толкая соломинку с другого конца. И так далее.

Исследуем еще формулу (1). Подставляя в нее $F_1 = m\frac{l-x}{2}gk$ и $F_2 = m\frac{x}{l}gk$ и обозначая $\alpha = \frac{F}{mgk}$, получим

$$\alpha = \frac{2x^2 + l^2 - 2lx}{2l(l-x)}.$$

Те, кто умеет находить минимум функции, приравняв ее производную нулю, могут найти, что α минимально при $x = l\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}3l$. Оно равно 0,43. Таким образом, для того, чтобы вращать соломинку, муравьям достаточно приложить к одному из концов силу, равную 0,43 mgk.

Правильное решение прислали: *В. Белов* (Вологда), *И. Братовская* (Усолье-Сибирское Иркутской обл.); *М. Вайнмахер* (Кривой Рог); *Ф. Галиев* (Ташкент); *Е. Голубев* (Мамонов Калининградской обл.); *Д. Грак* (Смолевичи Минской обл.); *Е. Громак* (Новокузнецк); *Г. Зайцев* (Гагра); *Л. Книжнерман* (Москва); *С. Кузьмич* (Житомир); *Е. Латышев* (Баку), *А. Левыкин* (Райгахинск Амурской обл.), *С. Легушин* (Днепропетровск), *М. Прегер* (Томск), *А. Редченко* (с. Новопетровка Сумской обл.), *А. Ренков* (с. Поломошное Кемеровской обл.); *Л. Салнина* (Благовещенск), *В. Сервах* (Фрунзе), *Н. Федин* (Омск), *М. Флеров* (Москва), *Г. Шепетько* (Давид-Городок Брестской обл.); *М. Юдсон* (Волгоград), *С. Чекмарев* (Москва).

Ф109

В опыте было установлено, что температура $m = 142$ *г* ледяной воды в легком сосуде, подвешенном посредине комнаты, поднялась на $\Delta t = 4°$ С за полчаса. Когда же в сосуде находилось такое же количество льда, то на его таяние потребовалось 10 часов. Какова, исходя из этого эксперимента, удельная теплота плавления льда? Удельная теплоемкость воды $c_в = 1$ *кал/г*.

Найдем количество тепла Q, которое подводится к сосуду за полчаса. Так как этого количества тепла оказалось достаточно для нагревания воды, то

$$Q = c_в m\Delta t.$$

За 10 часов к сосуду подводится в 20 раз большее количество тепла. Поэтому

$$\lambda m = 20\, c_в\, m\Delta t.$$

Отсюда

$$\lambda = 20\, c_в \Delta t = 80 \text{ кал/г}.$$

Правильное решение этой задачи прислали около 100 читателей.

Ф110

Если вольтметр подключить параллельно верхнему сопротивлению r_1 (рис. 11), то он покажет $u_1 = 6$ *в*, если параллельно нижнему сопротивлению r_2, то $u_2 = 4$ *в*, а если его подключить к точкам A и B, то он покажет $u = 12$ *в*. Каковы в действительности падения напряжения на сопротивлениях r_1 и r_2?

Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

При подключении вольтметра к точкам A и B его показание равно э. д. с. источника. Поэтому если вольтметр подключен к сопротивлению r_1, а внутреннее сопротивление вольтметра равно r, то по цепи идет ток

$$I = \frac{u}{r_2 + \frac{r_1 r}{r_1 + r}}.$$

Это означает, что

$$u_1 = \frac{u}{r_2 + \frac{r_1 r}{r_1 + r}} \cdot \frac{r_1 r}{r_1 + r}. \qquad (1)$$

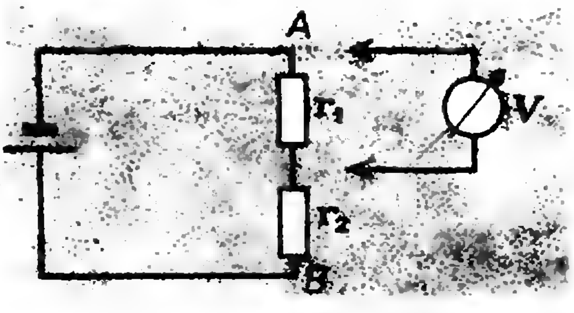


Рис. 11.

Точно так же

$$u_2 = \frac{u}{r_1 + \frac{r_2 r}{r_2 + r}} \frac{r_2 r}{r_2 + r}. \qquad (2)$$

Разделив конечное уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Таким образом, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

При отключенном вольтметре падение напряжения на сопротивлениях r_1 и r_2 равно $u=12$ *в*. Так как отношение сопротивлений известно, нетрудно найти и падение напряжения u_1' и u_2' на сопротивлениях:

$$u_1' + u_2' = u, \qquad \frac{u_1'}{u_2'} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

$$u_1' = \frac{u r_1}{r_1 + r_2} = \frac{u}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = 7{,}2\,в;$$

$$u_2' = u - u_1' = 4{,}8\,в.$$

Правильное решение прислали: *П. Анненко* (с. Тоцкое Оренбургской обл.), *Е. Долгов* (Москва), *А. Кацнельсон* (Новомосковск Тульской обл.), *С. Кузьмич* (Житомир), *Е. Латышев* (Баку), *А. Левыкин* (Райгахинск Амурской обл.), *А. Мамула* (с. Дыбинцы Киевской обл.), *В. Переседов* (Похвистнево), *М. Прегер* (Томск), *Л. Рудицер* (Харьков), *Л. Саянина* (Благовещенск), *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.), *П. Сергеев* (Грозный), *Ш. Слепой* (Черновцы), *Н. Ткаченко* (Днепропетровск), *И. Турищев* (Кропоткин Краснодарского края), *Н. Федин* (Омск), *Г. Цибенко* (Славянск Донецкой обл.), *Л. Циферблат* (Львов), *В. Шабунин* (Москва), *Е. Шахнович* (Калинин обл.), *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.), *И. Юрченко* (Киев).

Ф111

Имеется однородный шнур со взрывчатым веществом. Скорость горения шнура равна v, скорость распространения взрывной волны по воздуху c. Найти форму линии, по которой нужно расположить шнур, чтобы волны от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно.

Можно ли сделать то же самое с поверхностью со взрывчаткой и получить сходящуюся сферическую волну с большой плотностью энергии?

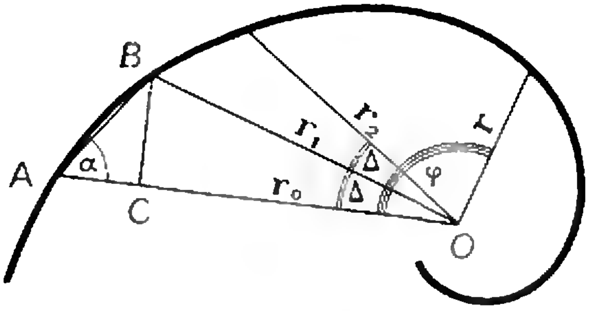


Рис. 12.

Если скорость распространения взрывной волны больше скорости горения шнура, то расположить шнур так, чтобы взрывные волны от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно, невозможно. Если $v=c$, то шнур, очевидно, нужно расположить по прямой, проходящей через заданную точку. В случае $v>c$ ответ не так очевиден. Разберем этот случай подробнее.

Пусть красная кривая на рисунке 12 — это линия, по которой нужно расположить шнур для того, чтобы взрывные волны пришли в точку O одновременно. Выберем на линии две близкие точки A и B такие, чтобы кривую AB можно было считать прямой (для этого отрезок AB должен быть много меньше расстояний r_0 и r_1 от точки O до точек A и B). Время, за которое сгорает участок шнура AB, обозначим τ. Тогда $AB=v\tau$. Малость AB означает, что τ мало. При $\tau\to0$ точка B «стремится» к точке A, а направление отрезка AB — к направлению касательной к красной кривой в точке A.

Найдем угол α, который образует отрезок AB с радиусом OA. Для этого отложим на радиусе OA отрезок OC, равный длине радиуса r_2, и проведем отрезок BC. Так как отрезок AB мал, то отрезок BC совпадает с дугой окружности радиуса r_1 с центром в точке O и угол ACB близок к прямому (а при $\tau\to0$ $\angle ACB\to\frac{\pi}{2}$). Это означает, что

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Но $AB=v\tau$, а $AC=r_0-r_1$. Так как время распространения взрывной волны из точки B должно быть на τ меньше времени распространения волны из точки A, то $r_1=r_0-c\tau$. Следовательно, $AC=r_0-r_0+c\tau=c\tau$ и

$$\cos\alpha = \frac{c\tau}{v\tau} = \frac{c}{v}.$$

Таким образом, угол, образуемый касательной к красной кривой и радиусом, проведенным к точке кривой из точки O, не зависит от расстояния кривой до точки O, и красная кривая пересекает все лучи, выходящие из точки O под одним и тем же углом $\alpha=\arccos\frac{c}{v}$. Таким свойством, как известно, обладает *логарифмическая спираль*. Значит, кривая, по которой нужно расположить шнур — это логарифмическая спираль. Ее уравнение в полярных координатах $r=r_0e^{-\varphi\operatorname{ctg}\alpha}$. Это уравнение можно получить и непосредственно.

Разделим угол φ на малые углы Δ. Тогда кривая разделится на k частей, где $k=\frac{\varphi}{\Delta}$. Найдем изменение радиуса r при его повороте на угол Δ:

$$r_1=r_0-AC=r_0-CB\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но $CB=r_1\cdot\Delta$, следовательно,

$$r_1=r_0-r_1\Delta\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отсюда

$$r_1=\frac{r_0}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Аналогично

$$r_2=\frac{r_1}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}=r_0\left(\frac{1}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2;$$

$$r_3=\frac{r_2}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}=r_0\left(\frac{1}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}\right)^3;$$

. . . .

$$r=r_0\left(\frac{1}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}\right)^k.$$

Но $k=\frac{\varphi}{\Delta}$, следовательно,

$$r=r_0\left(\frac{1}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}\right)^{\frac{\varphi}{\Delta}}=$$

$$=r_0l^{\frac{\varphi}{\Delta}\ln\left(\frac{1}{1+\Delta\operatorname{ctg}\alpha}\right)}.$$

Так как при малых x ($x\ll 1$) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$, а $\ln(1-x)\approx -x$, то

$$r=r_0e^{\frac{\varphi}{\Delta}(-\Delta\operatorname{ctg}\alpha)}=r_0e^{-\varphi\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Можно, конечно, и поверхность сделать *такой*, чтобы взрывные волны от всех ее точек пришли в заданную точку одновременно. Она должна быть поверхностью вращения логарифмической спирали вокруг оси, *проходящей* через заданную точку и лежащей в плоскости спирали.

Правильное решение прислали *В. Беликов* (Москва), *Л. Книжнерман* (Москва), *И. Турищев* (Кропоткин Краснодарского края), *Н. Федин* (Омск), *Г. Фильковский* (Баку), *М. Хасанов* (с. Бураево БАССР), *В. Шабунин* (Москва).

Ф112

Имеется стопка из k плоскопараллельных пластинок, показатели преломления которых равны n_1, n_2, ..., n_k. Толщина каждой пластинки d. На сколько сместится после прохождения стопки пластинок луч, падающий на пластинку с показателем преломления n_1 под углом α к поверхности пластинки.

Если угол падения луча на пластинку с показателем преломления n_1 равен β_1 ($\beta=90°-\alpha$), а угол преломления γ_1 (рис. 13), то

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_2}=n_1. \qquad (1)$$

Отношение синусов углов падения и преломления луча на второй границе пластинки равно $\frac{n_2}{n_1}$: $\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_2}=\frac{n_2}{n_1}$.

Но $\beta_2=\gamma_1$, поэтому

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{n_2}{n_1}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2}=n_2. \qquad (3)$$

То есть угол γ_2 такой же, каким он был, если бы свет падал непосредственно на вторую пластинку.

Аналогично

$$\frac{\sin\beta_3}{\sin\gamma_3}=\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_3}=\frac{n_3}{n_2}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_3}=\frac{n_3}{n_2}n_2=n_3.$$

Ясно, что, продолжая записывать последовательно соотношения между углами

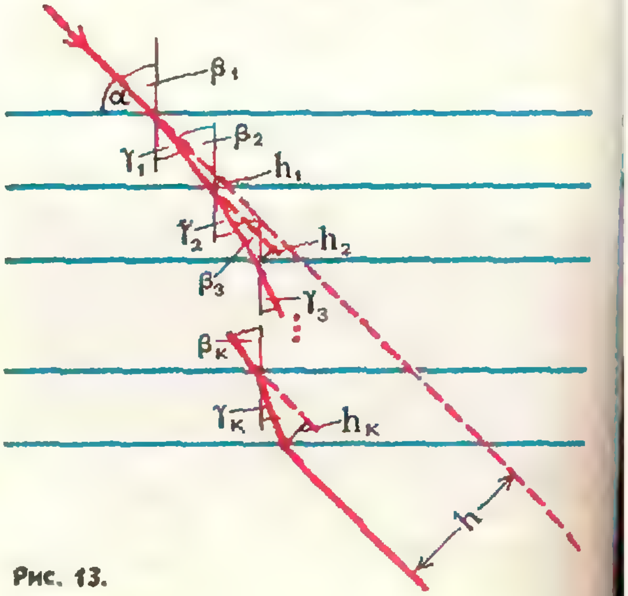


Рис. 13.

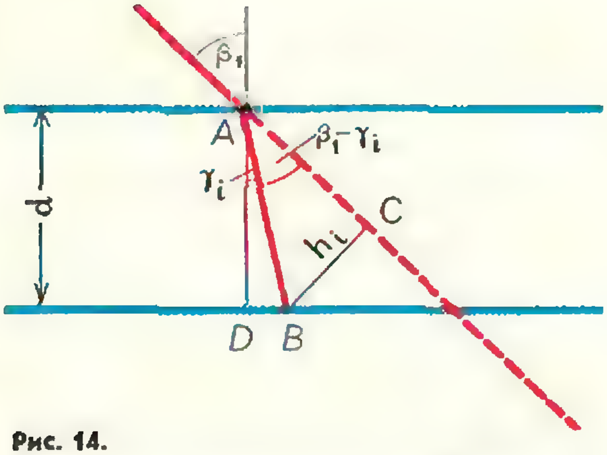


Рис. 14.

падения и преломления луча для каждой из пластинок, мы получим, что угол, под которым идет луч в каждой из пластинок, такой же, как если бы свет падал на нее из воздуха

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_i}=n_i.$$

Отсюда, в частности, следует, что после прохождения всей стопки пластинок луч выйдет параллельным своему первоначальному направлению:

$$n_{k+1}=1 \text{ и } \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_{k+1}}=1, \text{ то есть}$$

$$\beta_1=\gamma_{k+1}.$$

Смещение луча, очевидно, равно сумме его смещений в отдельных пластинках

$$h=h_1+h_2+\ldots+h_k.$$

Найдем смещение h_i (рис. 14). Для этого вначале из треугольника ADB находим AB:

$$AB=\frac{AD}{\cos\gamma_i}=\frac{d}{\cos\gamma_i}.$$

Теперь из треугольника ACB получаем

$$h_i=AB\cdot\sin(\beta_1-\gamma_i)=$$

$$=d\,\frac{\sin(\beta_1-\gamma_i)}{\cos\gamma_i}=$$

$$=d\,(\sin\beta_1-\cos\beta_1\,\mathrm{tg}\,\gamma_i).$$

Так как $\mathrm{tg}\,\gamma_i=\frac{\sin\gamma_i}{\sqrt{1-\sin^2\gamma_i}}=$

$$=\frac{\frac{\sin\beta_1}{n_i}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\beta_1}{n_i}\right)^2}}=\frac{\sin\beta_1}{\sqrt{n_i^2-\sin^2\beta_1}},$$

то $h_i=d\sin\beta_1\left(1-\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{n_i^2-\sin^2\beta_1}}\right)=$

$$=d\cos\alpha\left(1-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n_i^2-\cos^2\alpha}}\right).$$

Полное смещение луча равно

$$h=h_1+h_2+\cdots+h_k=$$

$$=d\cos\alpha\left(k-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n_1^2-\cos^2\alpha}}-\right.$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n_2^2-\cos^2\alpha}}-\cdots-$$

$$\left.-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n_k^2-\cos^2\alpha}}\right)=$$

$$=d\cos\alpha\left(k-\sin\alpha\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n_i^2-\cos^2\alpha}}\right).$$

Правильное решение прислали *В. Белов* (Вологда), *Е. Долгов* (Москва), *А. Мамула* (г. Дыбинцы Киевской обл.), *В. Муханов* (Канаш УАССР), *С. Поташев* (Ульяновск), *М. Прегер* (Томск), *Л. Рудицер* (Харьков), *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.), *П. Сергеев* (Грозный), *Ш. Слепой* (Черновцы), *Н. Ткаченко* (Днепропетровск), *А. Усальцов* (Калининград Московской обл.), *Н. Федин* (Омск), *С. Филенко* (Запорожье), *Г. Фильковский* (Баку), *М. Флеров* (Москва), *С. Чекмарев* (Москва), *Г. Шепетько* (Давид-Городок Брестской обл.).

Ф113

Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте h от дна сосуда (рис. 15). Как изменится эта высота, когда лед растает?

В том случае, когда кусок льда полностью покрыт керосином (как это показано на рисунке), задача решается очень просто.

Зафиксируем мысленно оболочку, охватывающую кусок льда, и растопим лед. Очевидно, объем образовавшейся воды будет меньше объема льда. Следовательно, общий уровень жидкости в сосуде уменьшится.

Предположим теперь, что керосин не покрывает лед.

Ясно, что если бы в сосуде были только вода и лед, то после таяния льда уровень воды не изменился бы. Действительно, так как сила давления на дно сосуда равна весу содержимого сосуда, *а он при таянии льда не меняется*, то не меняется и сила давления на дно сосуда. Это означает, что не меняется и давление на дно сосуда. Но лед не оказывает непосредственного давления на дно — он плавает. Поэтому давление на дно равно давлению воды

$$P=\rho_{\text{в}}gh_{\text{в}}.$$

После таяния льда давление тоже равно давлению воды

$$P=\rho_{\text{в}}gh'_{\text{в}}.$$

Это означает, что $h_{\text{в}}=h'_{\text{в}}$.

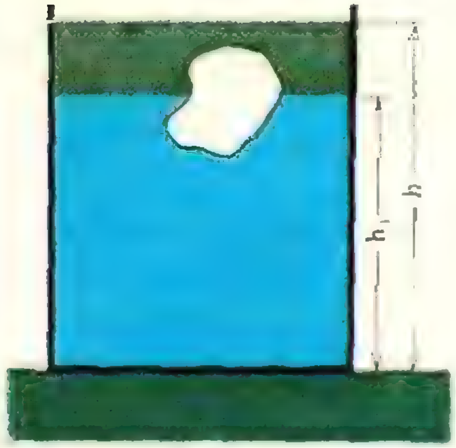


Рис. 15.

В нашем случае давление на дно тоже не меняется. Но теперь оно *равно* сумме давлений столбов воды и керосина

$$P=\rho_{\text{в}}gh_1+\rho_{\text{к}}g(h-h_1)=(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{к}})gh_1+\rho_{\text{к}}gh.$$

Если уровень воды в сосуде после таяния льда равен h'_1, а уровень керосина h', то

$$(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{к}})gh'_1+\rho_{\text{к}}gh'=(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{к}})gh_1+\rho_{\text{к}}gh.$$

Пусть объем льда, находящийся в воде, равен V_1, объем льда, находящийся в керосине, равен V_2, а масса льда равна m. Представим себе, что, убрав лед, мы оставили его невесомую оболочку и налили в нее воду и керосин так, что уровень их в оболочке совпадает с уровнем воды в сосуде. Ясно, что эта оболочка будет находится в равновесии. Но это означает, что на оболочку со стороны воды действует архимедова выталкивающая сила F, равная весу налитых в оболочку жидкостей

$$F=\rho_{\text{в}}gV_1+\rho_{\text{к}}gV_2.$$

Если в оболочку поместить сам лед, то сила F не изменится. Но лед плавает. Это означает, что $F=mg$ и

$$\rho_{\text{в}}gV_1+\rho_{\text{к}}gV_2=mg. \qquad (1)$$

Если бы в сосуде находились только лед и вода, то в воде находился бы такой объем льда V'_1, что

$$\rho_{\text{в}}gV'_1=mg. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что в нашем случае в воде находится объем V_1, который меньше V_1, *то есть* меньше объема льда, который был бы погружен в воду в отсутствие керосина *над ним*. Но в последнем случае, как мы показали, уровень воды в сосуде не *изменился бы*. Это означает, что вода, образовавшаяся при таянии льда, заполнила бы *как раз объем* V'_1 погруженной в воду части льда.

В *нашем* случае объем воды, образовавшийся при таянии льда, тот же, а объем погруженной в воду части льда V'_1 меньше. Поэтому при таянии льда уровень воды в сосуде повысится: $h'_1>h_1$. Но давление на дно сосуда должно остаться *прежним*. Поэтому

$$(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{к}})gh_1+\rho_{\text{к}}gh=(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{к}})gh'_1+\rho_{\text{к}}gh'$$

$$(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{к}})\ (h'_1-h_1)=\rho_{\text{к}}(h-h').$$

Так как $h'_1>h_1$, то $h>h'$: уровень керосина в сосуде при таянии льда уменьшится.

Правильное решение прислали *С. Арсланова* (п. Н-Ивкино Кировской обл.), *А. Баевский* (Гомель), *В. Беликов* (Москва), *М. Вайнмахер* (Кривой Рог), *Д. Габриэльян* (Белая Калитва), *А. Кудлай* (Москва), *Л. Малькензон* (Сафоново Мурманской обл.), *А. Панфилов* (Свердловск), *А. Рурукин* (Москва), *Н. Федин* (Омск).

Ф114

Два шарика с массами m_1 и m_2 могут колебаться на пружинках одинаковой жесткости вдоль стержня, прикрепленного к бруску с массой M (рис. 16). Брусок лежит на горизонтальной плоскости. В начальный момент шарики притянуты друг к другу с помощью ниточки, сила натяжения которой равна T. Ниточку пережигают. При каком минимальном коэффициенте трения между бруском и плоскостью брусок не сдвинется с места?

Будем считать, что брусок не перемещается по плоскости. В этом случае грузики совершают гармонические колебания

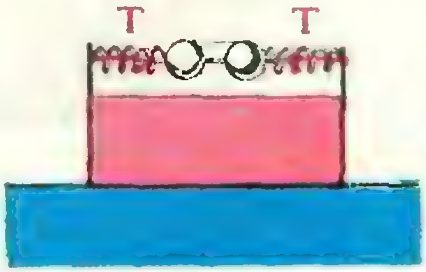


Рис. 16.

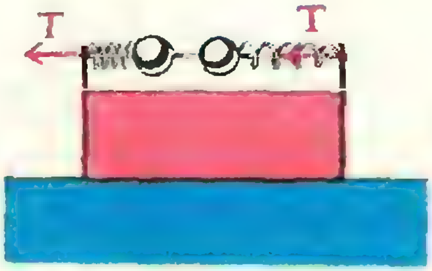


Рис. 17.

на пружинках с разными частотами $\left(\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\right.$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$, где k — жесткость пружины). Так как частоты различны, то непременно наступит момент, когда оба грузика отклонены в одну сторону и обе пружины максимально деформированы (рис. 17). Ясно, что при этом деформации пружинок такие же, какими они были до пережигания нити, только теперь одна из пружинок растянута, а другая сжата. Действительно, общая энергия каждого грузика с пружиной, к которой он прикреплен, после пережигания нити не меняется. Но в тот момент, когда деформация пружинки максимальна, грузик неподвижен. Поэтому общая энергия в этот момент равна просто энергии деформации пружинки. Из равенства потенциальных энергий деформации пружины следует равенство ее деформаций.

Поскольку деформации пружинок равны начальным, то равны начальным и величины сил натяжения пружинок, то есть силы, с которыми пружинки действуют на брусок. До пережигания нити эти силы были равны T и направлены в разные стороны. Теперь же они направлены в одну сторону. Это означает, что на брусок действует сила $2T$. Брусок не сдвинется с места, если $2T$ меньше силы трения бруска о плоскость:

$$2T < (M + m_1 + m_2)gf$$

(f — коэффициент трения).

Из этого неравенства следует, что коэффициент трения должен быть больше, чем

$$\frac{2T}{(M + m_1 + m_2)\,g}.$$

Правильное решение прислали *С. Алексеев* (с. Бобрышево Пристенского р-на Курской обл.), *А. Баевский* (Гомель), *В. Белов* (Вологда), *В. Беликов* (Москва), *М. Вайнмахер* (Кривой Рог), *В. Волин* (Москва), *С. Галахваридзе* (Тбилиси), *Ф. Галиев* (Ташкент), *Е. Громак* (Новокузнецк), *М. Дзик* с. Кратово Тюменской обл.), *А. Истомин* (Подольск Московской обл.), *А. Кацнельсон* (Новомосковск Тульской обл.), *В. Коротких* (Новокузнецк), *А. Кудлай* (Москва), *С. Легушин* (Днепропетровск), *И. Мартынович* (д. Каклетенье Брестской обл.), *М. Прегер* (Томск), *М. Розов* (Минск), *П. Сергеев* (Грозный), *А. Смирнов* (Горький), *Н. Федин* (Омск), *М. Флеров* (Москва), *Г. Фурман* (Черновцы). *Г. Шепетько* (Давид-Городок Брестской обл.).

Ф115

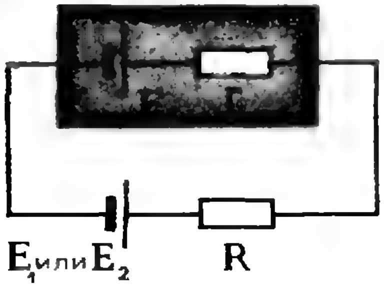


Рис. 18.

«Черный ящик» — коробка с неизвестной схемой внутри имеет два вывода. Последовательно с ящиком включают сопротивление $R = 4$ *ом* и затем эту цепь подключают к источнику с э. д. с. $E_1 = 5$ *в* (рис. 18). При этом по цепи идет ток $I_1 = 1$ *а*. Если цепь подключить к источнику с э. д. с. $E_2 = 20$ *в*, то по ней будет идти ток $I_2 = 2$ *а*. Какая схема находится внутри ящика?

Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

Мы получили много схем с реле и сложными цепями, включающими электронные лампы или полупроводники. Однако в ящике может находиться и совсем простая схема: сопротивление r и источник E $(E_1 < E < E_2)$ (рис. 18).

При подключении ящика к источнику с э. д. с. E_1 по цепи должен идти ток

$$I_1 = \frac{E - E_1}{R + r}. \qquad (1)$$

При подключении к ящику источника с э. д. с. E_2 по цепи пойдет ток

$$I_2 = \frac{E_2 - E}{R + r}. \qquad (2)$$

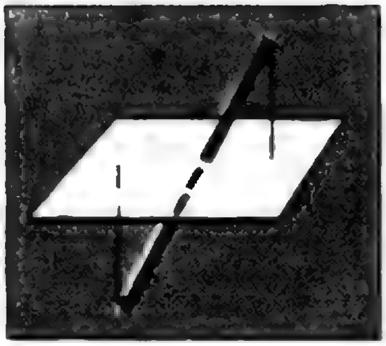
Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$E = \frac{I_1E_2 + I_2E_1}{I_1 + I_2} = 10 \text{ в},$$

$$r = 3{,}5 \text{ ом}.$$

Правильное решение прислали *А. Баевский* (Гомель), *В. Белов* (Вологда), *В. Борщев* (Уфа), *Л. Брагинский* (Фрунзе), *М. Вайнмахер* (Кривой Рог), *А. Кацнельсон* (Новомосковск Тульской обл.), *О. Ким* (Ульяновск), *О. Кокарева* (Брянск), *В. Кууск* (Ржев), *А. Левыкин* (Райгахинск Амурской обл.), *С. Легушин* (Днепропетровск), *Л. Малькензон* (Сафоново Мурманской обл.), *А. Мартиросян* (Кафан), *А. Панфилов* (Свердловск), *А. Редченко* (с. Новопетровка Сумской обл.), *П. Сергеев* (Грозный), *М. Флеров* (Москва), *Г. Фурман* (Черновцы), *С. Черников* (Семипалатинск).

И. Ш. Слободецкий



ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Л. Е. ЕВТУШИК

В 1962 году поступавшие на механико-математический факультет МГУ столкнулись с такой задачей.

Задача 1. *В треугольной пирамиде ABCD высота AK проходит через точку K пересечения высот основания BCD, а боковые ребра AB и AC взаимно перпендикулярны. Найти отношение площадей боковых граней ADB и ADC, если $AB=b$, $AC=c$.*

Это столкновение было не в пользу большинства школьников. Почему? Так ли уж трудна задача? Мы советуем вам подумать самостоятельно над этой и другими поучительными конкурсными задачами, которые здесь будут рассматриваться, а если у вас будут затруднения, мы попробуем вместе разобраться в причинах неудачи.

Многие, по-видимому, решили, что все зависит от хитроумных вычислений, потому что привыкли решать в школе в основном задачи на вычисление. А между тем изюминка задачи заключалась «только» в том, чтобы доказать, что $AD\perp AB$, $AD\perp AC$, и тогда все просто:

$$S_{\Delta ADB}=\frac{1}{2}AD\cdot AB=\frac{1}{2}AD\cdot b,$$

$$S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot AC=\frac{1}{2}AD\cdot c,$$

$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{b}{c}.$$

Таким образом, главное в задаче — это доказательство факта, который, как мы увидим, основан на важном разделе стереометрии «Прямые и плоскости». Мы еще вернемся к нашему примеру. А сейчас подчеркнем, что причина многих неудач в стереометрии — это недооценка раздела «Прямые и плоскости». Теоремы этого раздела часто усваиваются формально и не закрепляются на решении достаточного числа серьезных стереометрических задач. Между тем решение стереометрической задачи почти всегда опирается на теоремы, выражающие отношения между прямыми и плоскостями: параллельность и перпендикулярность, углы и расстояния, принадлежность и пересечение. Будет очень полезно, если, разбирая наши решения, вы подметите места, где применяется та или иная теорема, и сформулируете четко каждую из них.

Возьмем отношение перпендикулярности прямой и плоскости, которое играет решающую роль в первой задаче, да и во многих других задачах. Известна такая теорема.

Теорема 1. *Если прямая h перпендикулярна двум прямым m и n плоскости P, проходящим через точку K пересечения h с плоскостью P, то прямая h перпендикулярна любой прямой плоскости P, проходящей через K.*

В этом случае говорят, что прямая h перпендикулярна плоскости P. Из теоремы 1 легко вывести более общее утверждение.

Теорема 2. *Если прямая h перпендикулярна двум произвольным непараллельным прямым a и b плоскости P, то h перпендикулярна любой прямой плоскости P.*

В самом деле, возьмем произвольную прямую c в плоскости P и проведем через точку K три прямые: $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, $c' \parallel c$ (рис. 1). По условию $h \perp a$, а это значит, что, в соответствии с определением угла между скрещивающимися прямыми (в нашем случае h и a), $h \perp a'$. Аналогично $h \perp b'$. Так как a' и b' не совпадают (ибо по условию $a \nparallel b$), то из теоремы 1 следует, что $h \perp c'$. Но $c \parallel c'$, поэтому $h \perp c$.

Вспомните теперь условие задачи 1 и посмотрите на рисунок 2. Замечаем, что так как прямая AK перпендикулярна плоскости BCD, то $DC \perp AK$. Но $DC \perp MB$ (по условию MB — высота грани BCD). Следовательно, по теореме 2 DC перпендикулярна плоскости ABK. Прямая AB лежит в этой плоскости, значит $DC \perp AB$. А теперь вспомним, что по условию задачи $AB \perp AC$. Итак, $AB \perp DC$ и $AB \perp AC$, откуда по теореме 2 AB перпендикулярна плоскости ACD, и, значит, $AB \perp AD$. Аналогично доказывается, что $AC \perp AD$. Далее следуют те нехитрые вычисления, которые мы уже привели вначале. Как видите, все решение задачи состоит по существу в двукратном применении теоремы 2 с полным использованием тех свойств пирамиды, которые даны в условии задачи.

Одному из этих свойств (некоторая высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот противоположной грани) мы уделим внимание в связи с последующей задачей. Назовем такие треугольные пирамиды *ортоцентрическими*. Если внимательно просмотреть решение задачи 1, то можно заметить там доказательство такого утверждения:

У ортоцентрической пирамиды каждая пара противоположных ребер взаимно перпендикулярна.

Докажите сами обратное утверждение:

Если каждая пара противоположных ребер треугольной пирамиды взаимно перпендикулярна, то эта треугольная пирамида — ортоцентрическая.

После доказательства этого утверждения можно сделать такой вывод:

У ортоцентрической пирамиды любая высота проходит через точку пересечения высот противоположной грани (подумайте почему?).

Теперь мы докажем еще одно свойство ортоцентрической пирамиды.

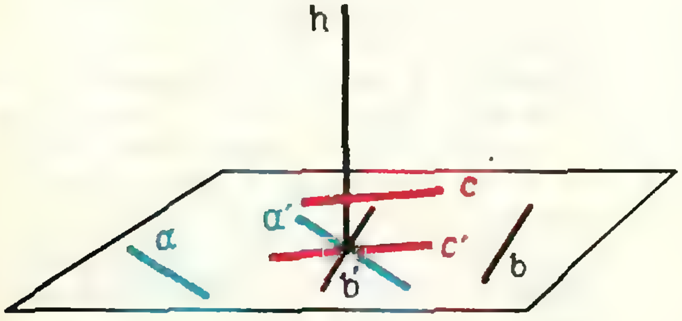


Рис. 1.

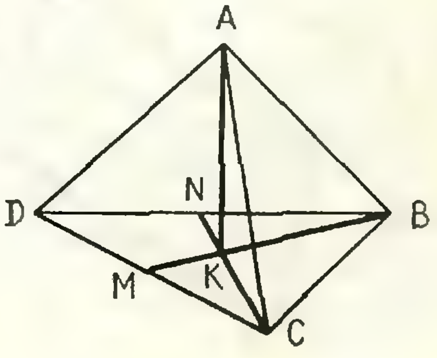


Рис. 2.

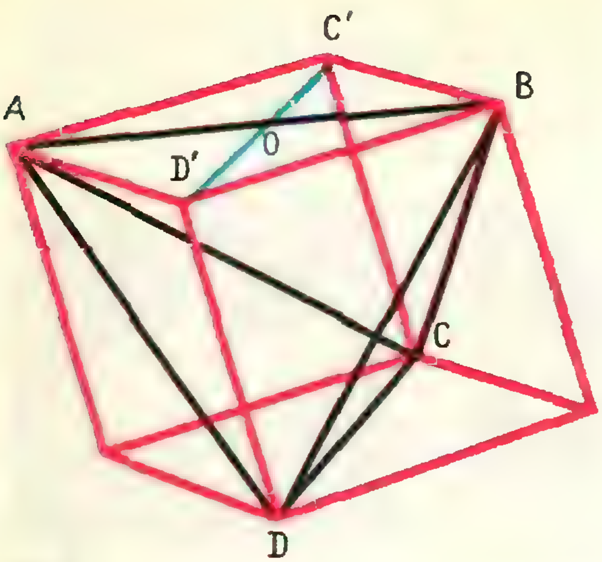


Рис. 3.

Задача 2. *Длины ребер ортоцентрической пирамиды $ABCD$ связаны соотношением*

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2.$$

Решение. В этой задаче существенную роль играет следующее построение. Через каждую пару скрещивающихся рёбер пирамиды (на рисунке 3 они окрашены в черный цвет) всегда можно провести пару параллельных плоскостей. Три такие пары плоскостей «вырезают» в пространстве параллелепипед (его ребра мы нарисовали красным цветом). Через каждую вершину пирамиды пройдет только три плоскости из шести, стало быть вершина пирамиды будет и вершиной параллелепипеда. Каждое ребро пирамиды $ABCD$ будет принадлежать по построению только одной из шести плоскостей и, следовательно, будет диагональю соответствующей грани построенного параллелепипеда. Теперь настало время вспомнить, что пирамида $ABCD$ ортоцентрическая, и потому у нее противоположные ребра взаимно перпендикулярны: $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, $AD\perp$ $\perp BC$. Отсюда следует, что диагонали каждой грани параллелепипеда взаимно перпендикулярны (например, $AB\perp D'C'$), то есть все грани параллелепипеда — ромбы, а значит, длины всех ребер параллелепипеда равны одному числу — обозначим его через a. Далее находим

$$AB^2+D'C'^2=(2AO)^2+(2D'O)^2=$$
$$=4AD'^2=4a^2.$$

Но $D'C'=DC$, поэтому находим $AB^2+DC^2=4a^2$, и аналогично AC^2+ $+BD^2=4a^2$, $AD^2+BC^2=4a^2$, что и доказывает утверждение задачи.

Задача 3 (МГУ, мехмат, 1969). *Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными a. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна* $\frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Решение этой задачи достаточно длинное, и потому мы выделим те этапы, на которое оно распадается.

Обозначения. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 4) и $AB=\frac{a}{2}\sqrt{5}$. Обозначим взаимно перпендикулярные плоскости буквами Q' и Q'', а линию их пересечения буквой l. Пусть B' — проекция точки B на Q', а B'' — проекция B на Q''. Аналогично D'— проекция D на Q' и D'' — проекция D на Q''. Предположим, что точка A лежит на прямой l. Это предположение, а также другие факты, облегчающие вычисление искомого периметра $ABCD$, мы должны обосновать.

Обоснования. 1. Проекция четырехугольника $ABCD$ на лю-

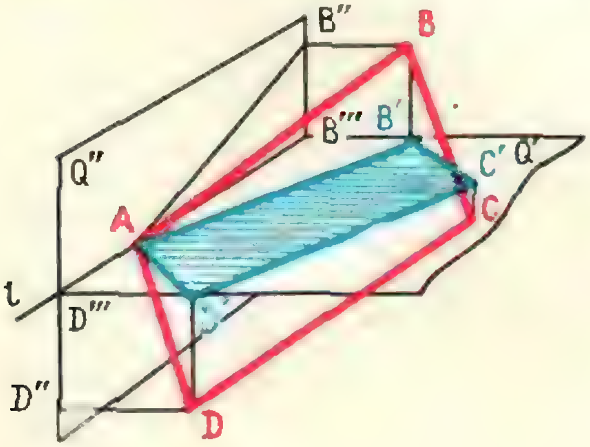


Рис. 4.

бую плоскость P не изменится, если плоскость P заменить плоскостью $P' \parallel P$ (рис. 5).

Действительно, фигура $A_1D_1C_1B_1A_2D_2C_2B_2$ — прямоугольная призма, а две проекции четырехугольника ($A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$)— ее равные основания. Поэтому проекции четырехугольника $ABCD$ останутся по-прежнему квадратами со стороной a, если мы будем считать, что плоскости Q' и Q'' каждая параллельно самой себе перенесены в точку A. Это упростит чертеж и вычисления.

2. Если проекция четырехугольника $ABCD$ — квадрат, то сам четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Это следует из того, что плоскость ADD_1A_1 (рис. 5) параллельна плоскости BCC_1B_1 ($A_1D_1 \parallel B_1C_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$), а в таком случае $AD \parallel BC$; аналогично $AB \parallel DC$.

3. По условию $AB' = AB'' = a$. Проведем через проектирующие перпендикуляры BB' и BB'' (рис. 4) плоскость $BB'B''B'''$. Эта плоскость перпендикулярна и плоскости Q', и плоскости Q'' (по какой теореме?).

Поэтому прямая l перпендикулярна плоскости $BB'B''B'''$ и $\angle B'B'''B'' = 90°$ (плоскости Q' и Q'' перпендикулярны). Таким образом, $BB'B''B'''$ — прямоугольник. Но прямоугольный треугольник ABB' равен треугольнику ABB'' (вспомним, что $AB' = AB'' = a$), поэтому $BB' = BB''$ и, значит,

$$BB' = B'B'''$$

Аналогично доказывается, что

$$DD' = D'D'''$$

(как бы ни располагалась точка D относительно плоскостей Q' и Q'').

На этой основе проводим, наконец, несложные подсчеты.

Вычисления. Так как по условию $AB = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ и $AB' = a$, то

$$B'B''' = BB' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = \frac{a}{2}.$$

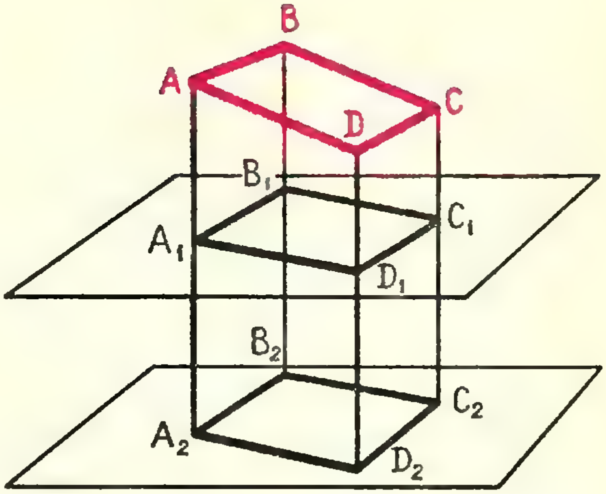


Рис. 5.

Следовательно, в прямоугольном треугольнике $AB'B'''$ выполняются соотношения: $B'B''' = \frac{1}{2}AB'$ и $\angle B'AB''' = 30°$. Но $\angle B'AD' = 90°$, значит, $\angle D'AD''' = 60°$. Зная теперь, что $AD' = a$, находим

$$DD' = D'D''' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

И, наконец, из прямоугольного треугольника ADD' находим

$$AD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{7}.$$

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то его периметр равен

$$2(AB + AD) = a\left(\sqrt{5} + \sqrt{7}\right).$$

Следующая задача предлагалась на письменном экзамене физического факультета МГУ в 1964 году.

Задача 4. *Из концов отрезка $AB = a$ исходят два луча $Ax \perp AB$ и $By \perp AB$, причем $Ax \perp By$. На луче Ax отложен отрезок $AP = u$, а на луче By — отрезок $BQ = v$ так, что $2uv = a^2$. Доказать, что расстояние от середины отрезка AB до прямой PQ равняется $\frac{a}{2}$.*

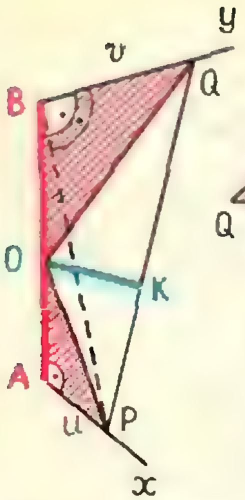


Рис. 6.

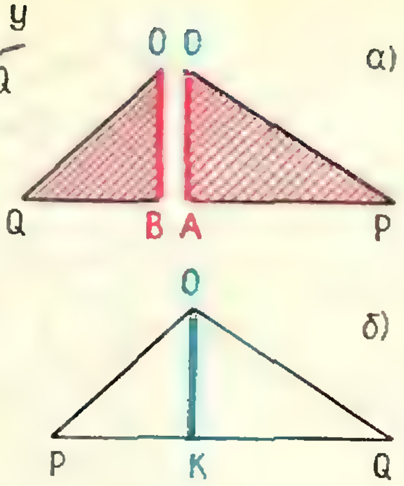


Рис. 7.

Если вдуматься в условие задачи, то можно заметить неожиданность факта, который нам предстоит доказать. В самом деле, отрезок PQ (рис. 6) не занимает фиксированного положения, так как отрезки $AP=u$ и $BQ=v$ могут меняться, лишь бы только $2uv=a^2$ оставалось постоянным. И тем не менее расстояние от середины AB до подвижного отрезка PQ должно оставаться неизменным, а именно $\frac{a}{2}$.

Решение. Так как $AB\perp AP$, то $BP^2=u^2+a^2$. Но $BQ\perp AB$ и $BQ\perp AP$ (по условию), следовательно, по теореме 2 прямая BQ перпендикулярна плоскости ABP и, значит $BQ\perp BP$, то есть $\triangle BQP$ — прямоугольный, и $PQ^2=BP^2+BQ^2=u^2+a^2+v^2$. А так как $2uv=a^2$, то $PQ^2=u^2+2uv+v^2=(u+v)^2$, то есть $PQ=u+v$.

Итак, мы обнаружили, что всегда $PQ=BQ+AP$. Этот факт, как мы увидим, и является причиной того, что $OK=\frac{AB}{2}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно внимательно присмотреться к рисунку 6, увидеть его пространственно. Если мысленно оторвать прямоугольные треугольники OBQ и OAP от фигуры, поместить их в одну плоскость с треугольником OPQ, то можно заметить, что треугольник, сложенный из OBQ и OAP (рис. 7, а), оказывается равным треугольнику OPQ (рис. 7, б) именно потому, что $PQ=PA+BQ$. Это и доказывает, что $OK=\frac{a}{2}$.

Задача 5. (МГУ, мехмат, 1971). *Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данная пирамида (рис. 8), где, согласно условию, $AB=AC=BD=CD$ и $AD=BC$ (нетрудно показать, что в точности два противоположных ребра пирамиды должны равняться основанию равнобедренного треугольника). Обозначим длину высоту DK пирамиды через h (мы пока не знаем, где лежит точка K). Нам предстоит прежде всего выяснить, какие ребра пирамиды будут наибольшими и в какой грани лежит высота пирамиды.

Высота пирамиды не может лежать ни в грани ADC, ни в равной ей грани ABD, так как аналогичная высота другой грани была бы больше h (длина наклонной больше длины перпендикуляра). Поэтому высота пирамиды DK должна лежать в грани BDC, и, значит, $DK\perp AK$.

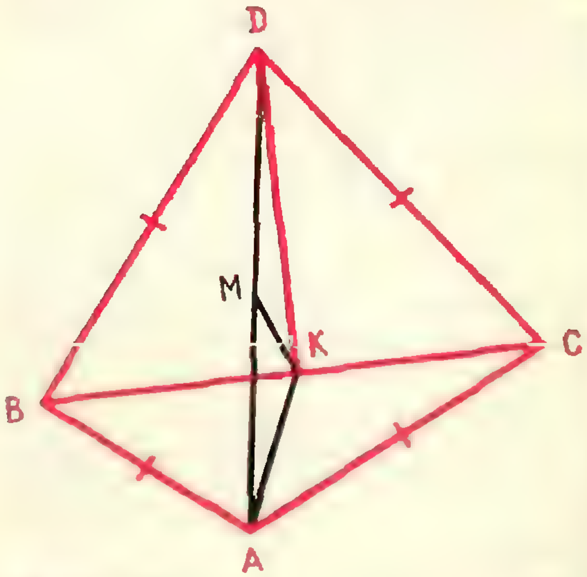


Рис. 8.

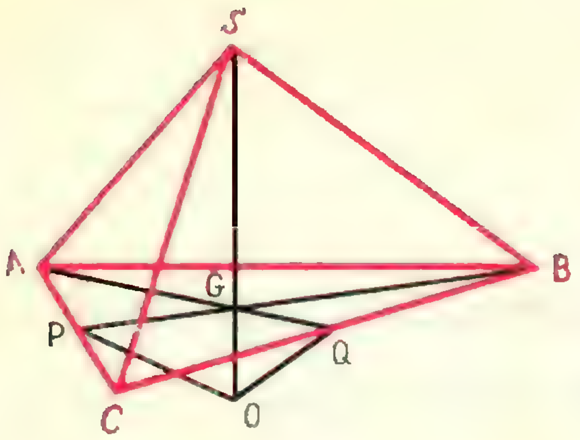


Рис. 9.

Но по условию $DK=AK=h$, поэтому $AD=BC=h\sqrt{2}$, $KC=\frac{h}{2}\sqrt{2}$ и

$$DC=\sqrt{h^2+\left(\frac{h}{2}\sqrt{2}\right)^2}=h\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Итак, ребра AD и BC больше ребер AB, AC, BD, CD. Опустим из точки K перпендикуляр на ребро AD: $KM\perp AD$. Раз $BC\perp DK$ и $BC\perp AK$, то $BC\perp KM$. Следовательно, KM есть общий перпендикуляр ребер AD и BC, и по условию он равен 1; но в равнобедренном прямоугольном треугольнике ADK выполняются равенства $KM=\frac{1}{2}AD=\frac{h}{2}\sqrt{2}$, откуда $\frac{1}{2}h\sqrt{2}=1$, $h=\sqrt{2}$.

Задача 6. (МГУ, мехмат, 1965). *В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S — прямые. Доказать, что вершина S, точка G пересечения медиан основания ABC и центр O описанного около пирамиды шара принадлежат одной прямой.*

Решение. Точка P (рис. 9) является центром окружности, описанной около треугольника ABC, так как $AP=PC$, $\angle ASC=90^\circ$. Прямая, соединяющая центр шара с центром окружности сечения, перпендикулярна плоскости сечения, то есть $PO\perp ACS$. Аналогично $QO\perp BCS$. Но $SB\perp ACS$ и $AS\perp BCS$, потому что все плоские углы при вершине S — прямые. Значит, $PO\parallel SB$, и точки P, O, S и B лежат в одной плоскости, а также $OQ\parallel AS$, и точки O, Q, A и S лежат в одной плоскости. У этих плоскостей есть две (несовпадающие) общие точки S и O, поэтому прямая SO — линия пересечения этих плоскостей. В первой плоскости лежит медиана BP, а во второй — медиана AQ, следовательно, точка G пересечения медиан лежит в обеих плоскостях, то есть на прямой SO пересечения плоскостей, а это и требовалось доказать.

Упражнения

1. Доказать теорему о трех перпендикулярах, опираясь на теорему 2.

2. Доказать, что ортоцентрическими пирамидами являются все правильные треугольные пирамиды и все треугольные пирамиды с прямыми плоскими углами при вершине.

3. (МГУ, мехмат, 1969). Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найти периметр треугольника ABC, если известно, что $AB=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

4. (МГУ, мехмат, 1970). Отрезок AB единичной длины, являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом $\pi/3$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды равно $\sqrt{2}$. Определить величину отрезка BD.

5. (МГУ, мехмат, 1971). Основание четырехугольной пирамиды — квадрат, а все боковые грани — прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найти объем пирамиды, если ее высота равна единице, а один из двугранных углов при вершине равен 120°.

6. (физфак. МГУ, 1970). В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны друг другу. На ребре SA взята точка M такая, что $SM=MA$, на ребре SB — точка N такая, что $SN=SB/3$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды $SABC$.

7. Три зеркала образуют трехгранный угол, все двугранные углы которого прямые. Показать, что луч света, пришедший в этот трехгранный угол по прямой l, после отражения от зеркальных поверхностей уйдет по прямой, параллельной l.

8. Построить отрезок, имеющий заданную длину, параллельный данной плоскости, причем концы отрезка должны лежать на двух данных скрещивающихся прямых.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

1. Решить уравнение:

$$x^2 \log_3 (x^2) - (2x^2 + 3) \log_9 (2x + 3) = 3 \log_3 \left(\frac{x}{2x+3}\right).$$

2. Найти все x из отрезка $0 \leqslant x \leqslant \pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x + \sin x - \sqrt{2} \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Боковые грани четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а в основании пирамиды лежит ромб, одна диагональ которого в два раза длиннее другой. Найти объем V пирамиды, если известно, что площадь боковой поверхности равна 6, а среди боковых ребер есть два ребра, составляющих тупой угол.

4. Найти все значения α, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leqslant \alpha, \\ x^2 - 2x \leqslant 3 - 6\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагональ AC делит площадь четырехугольника пополам. Найти длину диагонали BD, если радиус вписанной окружности равен r, а периметр четырехугольника равен p.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Четверо лингвистов (каждый по отдельности) занимаются математической обработкой текста. Каждый из них работает с постоянной производительностью. Если первые трое будут работать по одному часу, а четвертый — два часа, то вместе они успеют обработать 26 страниц текста. Если третий будет работать два часа, а остальные — по часу, то будет обработано 32 страницы текста. Если второй будет работать два часа, а остальные — по часу, то будет обработано 40 страниц текста. Сколько страниц текста будет обработано, если первый будет работать три часа, второй — пять часов, а третий — семь часов?

2. Большая сторона прямоугольника равна d. Проводится окружность с центром в одной из вершин прямоугольника и радиусом, равным его меньшей стороне. Из прямоугольника удаляется общая часть с полученным кругом.

При каком значении длины меньшей стороны площадь оставшейся части будет максимальной?

3. Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2 - 2)(n^2 - 22)(n^2 - 52)(n^2 - 152) < 0.$$

4. Определить, при каких a неравенство $\log_{a(a+1)} (|x| + 4) > 1$ выполняется при любом действительном x.

5. Среди комплексных чисел z найти все те, для которых

$$\log_2 (1 + |z^2 - i|) + \log_{16} \frac{1}{(1 + |z^2 + i|)^4} = 0.$$

6. Исследовать и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^7 y^{31} = a, \\ x^2 y^9 = b. \end{cases}$$

7. Доказать, что если p и q — целые числа, причем $p^2 - 7q^2 = 2pq$, то $p = q = 0$.

Московский энергетический институт

Факультет электронной техники

1. Упростить выражение:

$$\frac{(a+x)^{-\frac{1}{2}}+(a-x)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}}-(a-x)^{-\frac{1}{2}}},$$

если $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ и $a>0$, $b>1$.

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\lg x}+\frac{2}{\lg 10x}+\frac{3}{\lg 100x}=0.$$

3. Вычислить:

$$(\operatorname{tg} 30^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 50^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ)\sec 200^\circ \operatorname{ctg} 330^\circ.$$

4. Решить уравнение:

$$4\sin^2 x+3\operatorname{tg}^2 x=1.$$

5. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

Электромеханический факультет

1. Упростить выражение:

$$\left[\frac{x+\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{x}}+\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{3x^2+3y\sqrt{xy}}\right]^{-2}\times(x^2+xy-2y^2)^{-1}.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg(x+y),\\ \lg(\sqrt{8}-y)+\lg(\sqrt{8}+y)=2\lg x.\end{cases}$$

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\operatorname{tg}\alpha-1+\sin\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha.$$

4. Решить уравнение:

$$4\sin x\sin 2x\sin 3x=\sin 4x.$$

5. В прямоугольном параллелепипеде точка пересечения диагоналей нижнего основания соединена с серединой бокового ребра отрезком длины m. Этот отрезок образует с основанием параллелепипеда угол α и с боковой гранью угол 2α. Найти объем параллелепипеда.

Куйбышевский государственный педагогический институт

Математическое отделение физико-математического факультета

1. Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α служит основанием пирамиды. Ее боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна основанию, а две другие боковые грани наклонены к нему под углом β. Найти объем пирамиды.

2. Тракторист вспахал три участка. Площадь первого равна 2/5 площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как $1^1/_2:1^1/_3$. Сколько гектаров в каждом из участков, если в третьем на 16 *га* меньше, чем в первом?

3. Решить неравенство:

$$(x-3)^{2x^2-7x}>1.$$

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=4\sqrt{2}\cos 2x.$$

Физическое отделение физико-математического факультета

1. В основание прямого кругового конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α. Определить объем конуса.

2. Поезд был задержан у семафора на 16 минут и нагнал опоздание на перегоне в 80 *км*, идя со скоростью на 10 *км/час* большей, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} x=8\cos^2 x.$$

4. Решить неравенство:

$$\log_{1/2}\frac{3-2x}{1-x}>1.$$

Решение задач по электростатике

(Закон Кулона. Напряженность электрического поля)

Г. Я. Мякишев

Задачи по электростатике часто предлагаются на вступительных экзаменах. Причем они весьма различны по методам решения.

Задачи по электростатике (в отличие, например, от задач по механике и молекулярной физике) могут вызвать дополнительные затруднения, связанные с использованием различных систем единиц. Наряду с системой СИ в электростатике продолжают пользоваться абсолютной системой единиц. Различие обеих систем состоит в том, что основные формулы, используемые для решения задач, имеют коэффициенты, отличающиеся величиной и размерностью. Причем именно в абсолютной электростатической системе СГСЭ коэффициенты формул электростатики имеют самый простой вид. Поэтому электростатические задачи удобнее решать в этой системе.

Закон Кулона

Первая группа задач связана с непосредственным применением закона Кулона.

В однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε два точечных тела с зарядами q_1 и q_2 на расстоянии R взаимодействуют с силой

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2}. \qquad (1)$$

В системе СГСЭ $k=1$, а в системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9} = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}$ электрическая постоянная. Единица заряда в СИ — кулон содержит $3\cdot 10^9$ единиц заряда СГСЭ.

Кулоновские силы направлены вдоль линий, соединяющих заряженные тела (такие силы называются центральными).

Особых затруднений при решении задач на применение закона Кулона к взаимодействию точечных зарядов обычно не возникает. Это типичные статические задачи, только наряду с механическими силами в них появляется еще электрическая сила. Вот пример подобного рода задачи.

Задача 1. Три одинаковых маленьких шарика с массами $m = 0{,}1$ *г* подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной $l = 20$ *см*. Какие одинаковые заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $\alpha = 30°$?

Шарики располагаются по углам равностороннего треугольника ABC (рис. 1). Катет AD треугольника AOD (OD — вертикаль) равен $\frac{l}{2}$,

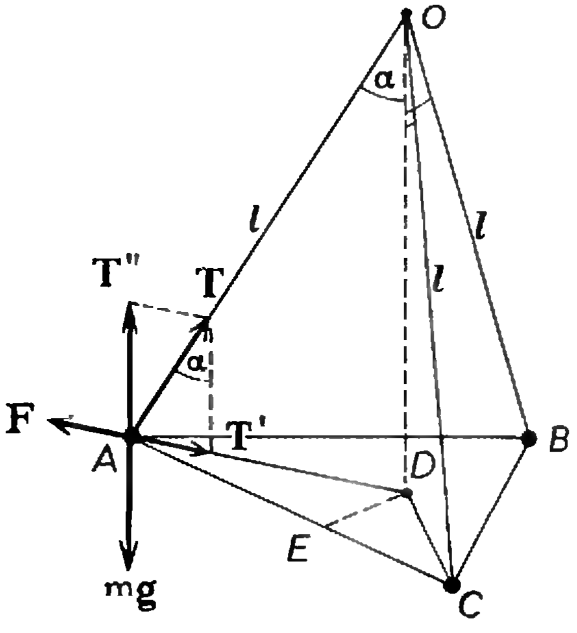


Рис. 1

так как он лежит против угла в 30°. Катет DE треугольника ADE равен $\frac{l}{4}$. Сторона $AC = 2AE = 2\sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

На каждый шарик со стороны соседнего действует сила $F_1 = \frac{4q^2}{3l^2}$ (рис. 2). Сила, действующая со стороны любых двух шариков на третий,

$$F = 2F_1 \cos\alpha = \frac{4q^2}{l^2\sqrt{3}}.$$

Шарик находится в равновесии, когда горизонтальная составляющая натяжения нити $T' = T\sin\alpha = F$, а вертикальная составляющая $T'' = T\cos\alpha = mg$ (рис. 1). Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg}$ и $q = \frac{l}{2}\sqrt{mg} \approx 100$ ед. СГСЭ.

При решении задач на закон Кулона надо иметь в виду, что этот закон относится к взаимодействию точечных заряженных тел и неприменим к телам произвольной формы. Точечными же можно считать тела в том случае, когда их геометрические размеры значительно меньше расстояния между ними. Поэтому при вычислении сил взаимодействия двух тел, одно из которых или оба не являются точечными, нужно мысленно разделить большое тело на малые элементы так, чтобы каждый элемент можно было рассматривать как точечный заряд.

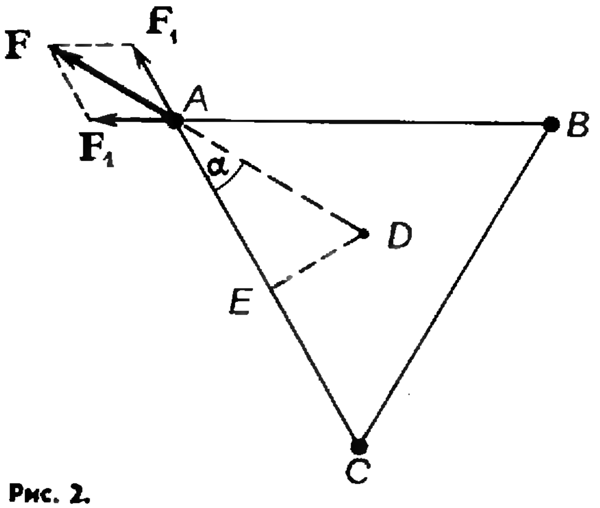


Рис. 2.

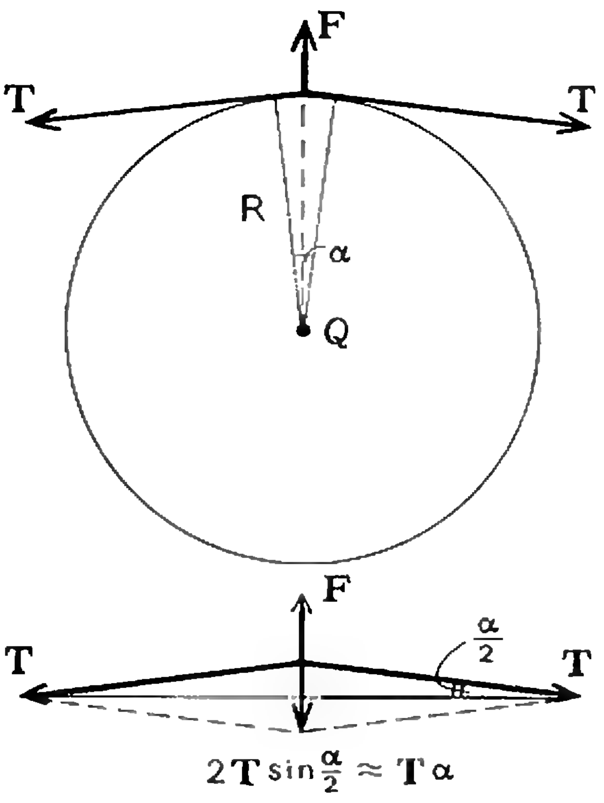


Рис. 3.

Задача 2. Тонкое проволочное кольцо радиуса R несет электрический заряд q. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q, причем $Q \gg q$. Определить силу, растягивающую кольцо.

Так как $Q \gg q$, то взаимодействием между отдельными элементами кольца можно пренебречь. Выделим малый элемент кольца длины $R\alpha$ (рис. 3). Со стороны заряда Q на него действует сила $F = \frac{Q\Delta q}{R^2}$,

где $\Delta q = \frac{q\alpha}{2\pi}$.

Силы натяжения кольца T уравновешивают F. Из условия равновесия, учитывая, что α мало, имеем

$$F = 2T\sin\frac{\alpha}{2} = T\alpha.$$

Искомая сила натяжения $T = \frac{Qq}{2\pi R^2}$.

Задача решалась в системе СГСЭ. В системе СИ

$$T = \frac{Qq}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

Напряженность электрического поля

Взаимодействие между неподвижными заряженными телами осуществляется посредством электрического поля. Количественной характеристикой его является вектор напряженности $\mathbf{E}(x, y, z)$, представляющий собой отношение силы, действующей на точечный заряд, к величине этого заряда. Сила, действующая на заряд q, равна *)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \qquad (2)$$

При решении задач на вычисление напряженности электрического поля прежде всего необходимо определить напряженность поля точечного заряда. Она равна

$$E = \frac{q}{\varepsilon R^2} \text{ в системе СГСЭ}, \qquad (3)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R^2} \text{ в системе СИ}.$$

Если имеется совокупность точечных зарядов, то напряженность поля равна геометрической сумме напряженностей, создаваемых отдельными зарядами.

Для вычисления напряженности поля заряженного тела конечных размеров его нужно мысленно разбить на отдельные элементы и вычислять искомую напряженность как геометрическую сумму напряженностей, созданных всеми элементами. Но лишь в случае простой симметрии в распределении зарядов на теле задача определения напряженности решается достаточно просто. Например, если заряд распределен по сфере симметрично, то вне шара напряженность поля определяется формулой (3). Причем под R надо понимать расстояние от центра сферы, а не от ее поверхности. Элементарное и соответственно не очень строгое доказательство этого приведено в новом учебном пособии «Физика. 9» Б. Б. Буховцева, Ю. Л. Климонтовича, Г. Я. Мякишева. Там же можно посмотреть, как выводится формула для напряженности поля бесконечной заряженной плоскости с плотностью поверхностного заряда σ: $E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}\left(\text{СГСЭ}\right)$ или

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}(\text{СИ}). \qquad (4)$$

Задача 3. Выведите формулу (4), исходя из того, что однородное поле в плоском конденсаторе представляет собой сумму полей, созданных зарядами обеих пластин, а его емкость $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$, где S — площадь обкладок, d — расстояние между ними.

У положительно и отрицательно заряженных пластин конденсатора поля отличаются, очевидно, лишь знаком; причем внутри конденсатора они складываются, а вне его компенсируют друг друга. Таким образом, $E = 2E_1 = \frac{U}{d}$, здесь E_1 — поле одной пластины, U — разность потенциалов между ними. В свою очередь

$$U = \frac{q}{C} = \frac{4\pi q d}{\varepsilon S} = \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon}\left(\text{так как } \sigma = \frac{q}{S}\right),$$

откуда

$$E_1 = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

Однородное электрическое поле между заряженными пластинами сообщает частицам постоянное по величине и направлению ускорение. Поэтому заряженные частицы в таком поле движутся так же, как обычные тела под действием силы тяготения вблизи Земли. Разница состоит лишь в том, что Земля сообщает всем телам одно и то же ускорение $g \approx 980$ *см/сек*^{2}, а ускорение частицы в электрическом поле зависит от отношения заряда к массе:

---

*) Формула (2) весьма проста, но физическое понимание силы F содержит моменты, на которых следует остановиться. Электрическое поле действует на заряженные тела, сообщая им ускорение или компенсируя другие силы, если тела неподвижны. Но сами *заряды не действуют на поле с какой-либо силой*; они его только создают. Электрическое поле не является объектом, подчиняющимся механике Ньютона, и соответственно сила (2) не является обычной силой в смысле механики Ньютона. В уравнении движения (втором законе Ньютона) она играет ту же роль, что и обычные механические силы: тяготение, упругость, трение. Но третий закон Ньютона к ней неприменим вообще.

$$a = \frac{q}{m} E. \qquad (5)$$

З а д а ч а 4. Математический маятник представляет собой шарик массы $m = 1$ *г*, подвешенный на шелковой нити длиной $l = 36$ *см*. Как изменится период колебаний маятника, если, сообщив шарику положительный или отрицательный заряд $q = \pm 20$ ед. заряда СГСЭ, поместить маятник в однородное электрическое поле с напряженностью $E = 10$ ед. напряженности СГСЭ, силовые линии которого направлены вертикально вниз.

Без электрического поля период колебаний маятника равен $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 1{,}2$ *сек*. В электрическом поле ускорение маятника будет равно $g + \frac{q}{m} E$. Следовательно,

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{q}{m} E}} = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{gm + qE}}.$$

Если $q = +20$ ед. заряда СГСЭ, то $T_1 \approx 1{,}1$ *сек* и $T_1 - T_0 \approx -0{,}1$ *сек*.

В случае $q < 0$ $T_2 \approx 1{,}35$ *сек* и $T_2 - T_0 \approx 0{,}15$ *сек*.

З а д а ч а 5. В сильном однородном электрическом поле напряженностью E на одной силовой линии в точках 1 и 2, расположенных на расстоянии l_0 друг от друга, находятся протон и электрон (рис. 4). Начальная скорость обеих частиц равна нулю. Чему будет равно расстояние между частицами спустя время τ после начала движения?

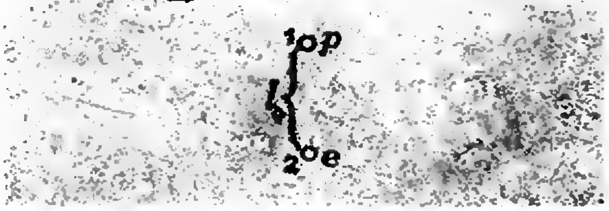


Рис. 4.

Выберем начало отсчета в точке 2, где находится электрон, и за положительное направление примем направление напряженности электрического поля. Пренебрегая взаимодействием частиц друг с другом (сильное поле), можно считать движения электрона и протона равноускоренными. Тогда, согласно известной кинематической формуле, координата протона в момент времени τ будет равна

$$x_1 = l_0 + \frac{e}{m_п} E \frac{\tau^2}{2},$$

где e — заряд, $m_п$ — масса протона.

Координата электрона

$$x_2 = -\frac{e}{m_э} E \frac{\tau^2}{2},$$

где $m_э$ — масса электрона. Искомое расстояние

$$l = x_1 - x_2 = l_0 + \frac{eE\tau^2}{2} \frac{m_п + m_э}{m_п m_э} \approx$$

$$\approx l_0 + \frac{eE\tau^2}{2m_э}, \text{ так как } m_п \gg m_э.$$

Проводники в электростатическом поле

При решении большого числа задач нужно знать, как ведут себя в электростатическом поле проводники. Можно показать, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, а на его поверхности направлена перпендикулярно проводнику. Заряд внутри проводника также равен нулю; весь он сосредоточен на поверхности проводника.

Поверхностный заряд имеет наибольшую плотность на острие, где кривизна поверхности максимальна. Наглядное подтверждение этому можно получить, решив следующую задачу.

З а д а ч а 6. Два проводящих шарика радиусов r и R соединены длинным проводником. Найти отношение поверхностных плотностей зарядов шариков, если системе сообщен некоторый заряд.

Потенциалы обоих шариков одинаковы. Если заряды шариков обозначить через Q_1 и Q_2, а их емкости — через C_1 и C_2, то можно записать следующее равенство:

$$\varphi = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}.$$

Так как $Q_1 = 4\pi r^2 \sigma_1$ и $Q_2 = 4\pi R^2 \sigma_2$ (σ_1 и σ_2 — поверхностные плотности зарядов), $C_1 = r$ и $C_2 = R$, то $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1 R^2}{Q_2 r^2} = \frac{C_1 R^2}{C_2 r^2} = \frac{R}{r}$.

Поверхностная плотность (как видно из ответа) тем больше, чем меньше радиус кривизны поверхности, причем плотность заряда обратно пропорциональна кривизне поверхности.

Равенство нулю напряженности поля внутри проводящего тела позволяет решить большое количество различных по сложности задач.

Задача 7. Найти напряженность электрического поля вблизи участка поверхности проводника с известной плотностью поверхностного заряда σ.

Очень близко к заряженной поверхности электрическое поле определяется поверхностной плотностью заряда по формуле $E_1 = 2\pi\sigma$. Ведь очень малый участок поверхности можно считать плоским, и вблизи этого участка будет справедлива формула (4) для напряженности поля равномерно заряженной бесконечной плоскости. Это поле создается по обе стороны заряженной поверхности (рис. 5). Но, кроме того, поле напряженностью E_2 создается вблизи данного элемента поверхности зарядами, расположенными на всей остальной поверхности проводника. Так как внутри проводника напряженность поля равна нулю, то напряженности E_1 и E_2 в проводнике обязательно равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, вне проводника они также равны по величине, но по направлению совпадают. Результирующая напряженность

$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 = 4\pi\sigma.$$

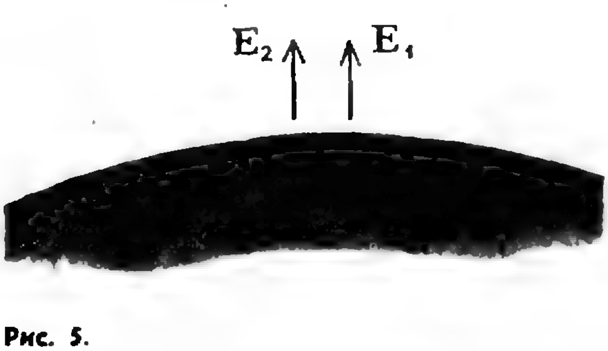


Рис. 5.

Упражнения

1. Почему в парикмахерских используются металлические (алюминиевые) расчески, а не обычные пластмассовые?

2. Определить расстояние r_1 между двумя одинаковыми электрическими зарядами, находящимися в масле с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$, если сила взаимодействия между ними такая же, как и в пустоте на расстоянии $r_2 = 30$ *см*.

3. Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены в воздухе на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После того, как каждому шарику был сообщен заряд $q = 4 \cdot 10^{-7}$, шарики разошлись на угол $2\alpha = 60°$. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика $l = 0{,}2$ *м*.

4. Три одинаковых положительных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника равна a. Найти напряженность поля в вершине правильного тетраэдра, для которого этот треугольник служит основанием.

5. Прямоугольной металлической пластинке со сторонами a и b сообщен заряд q. Толщина пластинки c много меньше a и b. Определить напряженность поля, создаваемого этой заряженной пластинкой в точках пространства, близких к центру пластинки.

При решении следует воспользоваться формулой (4).

6. Пучок катодных лучей, направленный параллельно обкладкам плоского конденсатора, на пути $l = 4$ *см* отклоняется на расстояние $h = 2$ *мм* от первоначального направления. Какую скорость v и кинетическую энергию T имеют электроны катодного луча? Напряженность электрического поля внутри конденсатора $E = 22\,500$ *в/м*. Отношение заряда электрона к его массе $\frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ ед. СИ, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

7. Мыльному пузырю радиуса R сообщен заряд Q. Найти силу, действующую на единицу поверхности пузыря. Мыльную пленку считать проводящей.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО ФИЗИКЕ НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГУ В 1971 ГОДУ

А. В. Устинова

Экзаменационный билет по физике для поступающих на физический факультет МГУ содержит два вопроса и одну задачу. Вопросы и задачи, предлагаемые в билетах, подобраны так, чтобы дать возможность абитуриенту показать знание курса физики в пределах школьной программы, понимание физических явлений и умение правильно применить законы физики для решения поставленной задачи. В процессе экзамена, который принимают два экзаменатора, абитуриенту задаются дополнительные вопросы и примеры. Полный ответ на все предложенные вопросы и правильное решение задачи и примеров заслуживают отличной оценки. Нерешенная задача снижает общую оценку на один балл.

Ниже мы приводим несколько задач по физике, предлагавшихся на вступительных экзаменах на физическом факультете МГУ.

1. Малый тяжелый шарик на нити вращается в вертикальной плоскости. Показать, что шарик не сможет вращаться, если нить не в состоянии выдержать натяжение T, превышающее вес шарика в 6 раз.

2. Однородный стержень массы m и длины l вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Определить натяжение T в стержне в сечении, находящемся на расстоянии a от оси вращения.

3. Шарик массы m_1, движущийся со скоростью v, налетает на покоящийся шарик массы m_2. Происходит абсолютно упругий центральный удар. Найти, при каком соотношении масс m_1 и m_2 шарики после удара разлетятся в противоположные стороны с равными по абсолютной величине скоростями.

4. Спутник, масса которого $m=1$ *т*, летит на высоте $h_1=200$ *км* от поверхности Земли по круговой орбите. Постепенно, в силу торможения о верхние слои атмосферы, радиус орбиты спутника уменьшается (при этом можно считать, что орбита остается круговой). Какую энергию теряет спутник на торможение при переходе на орбиту с $h_2=180$ *км*? Точность расчета 5%.

5. Тело, масса которого $m=20$ *кг*, тянут по горизонтальной поверхности с силой $F=120$ *н*. Если эта сила приложена к телу под углом $\alpha_1=60°$ к горизонту, то тело движется равномерно. С каким ускорением a будет двигаться это тело, если ту же силу приложить под углом $\alpha_2=30°$ к горизонту? Принять $g=10$ *м/сек²*; точность расчета 10%.

6. Один моль азота (ид. газ, $\mu=28$) является рабочим веществом в замкнутом цикле 1—2—3—4 (см. рис. 1). Известны: $P_1=2$ *ат*, $V_1=10$ *л*, $T_1=244$ °К; $P_2=4$ *ат*, $V_2=20$ *л* и удельные теплоемкости $c_V=0{,}179\,\frac{кал}{г\cdot град}$ и $c_P=0{,}25\,\frac{кал}{г\cdot град}$. Какое количество тепла и на каких участках цикла поступает в систему?

7. Два одинаковых баллона соединены короткой трубкой, в которой имеется клапан

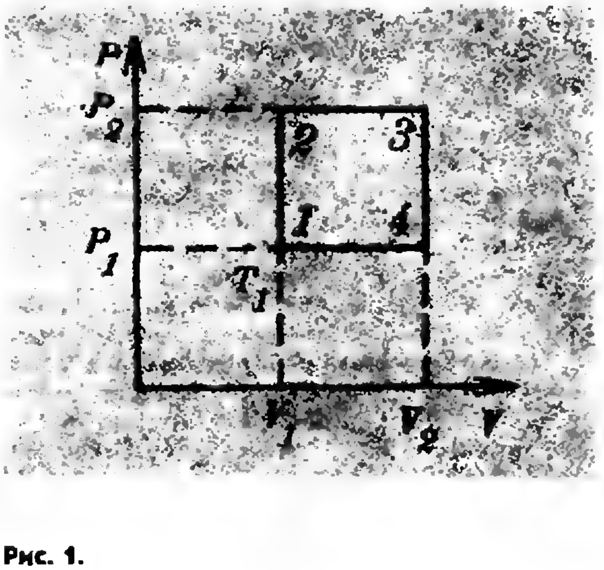


Рис. 1.

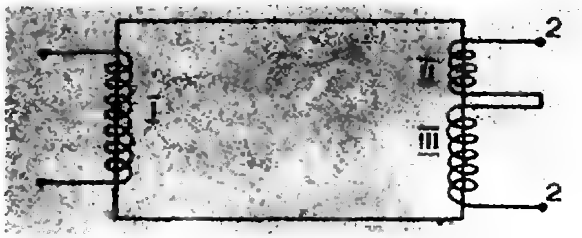


Рис. 2.

давления, пропускающий газ из одного баллона в другой при разности давлений $\Delta p \geqslant 80$ *см рт. ст.* Один баллон наполнен газом, имеющим при температуре $t_1 = 17°$ C давление $P = 760$ *мм рт. ст.*, в другом баллоне — вакуум. Какое давление установится в баллонах, если их нагреть до температуры $t_2 = 109°$ C?

8. Через диод с плоскими электродами проходит ток I. Напряжение на лампе U. С какой силой F действуют на анод лампы ударяющиеся в него электроны, если считать, что их скорость у катода равна нулю? Отношение заряда электрона к его массе $\frac{e}{m} = \lambda$.

9. На железный сердечник намотаны две катушки (I и II—III), причем вторая (II—III) имеет три вывода (см. рис. 2). При включении катушки I в сеть переменного тока напряжение на участке II второй катушки равно $U_2 = 20$ *в*, а на участке III — $U_3 = 100$ *в*. Если в ту же сеть включить клеммы 2—2 то на катушке I будет напряжение $U_1 = 13{,}3$ *в*. Катушка I имеет $N_1 = 300$ витков. Найти число витков N_2 и N_3 участков II и III второй катушки. Рассеянием потока пренебречь.

10. Электрическая печка имеет две обмотки с сопротивлениями $R_1 = 10$ *ом* и $R_2 = 20$ *ом*. При параллельном соединении обмоток при включении в сеть печка нагревается на $\Delta T_1 = 300$. Дальнейшее нагревание прекращается, так как теплоотдача становится равной количеству выделяющегося на обмотках тепла. На сколько градусов (ΔT_2) нагреется печка, если ее включить в ту же сеть при последовательном соединении обмоток? Теплоотдача $Q = k \cdot \Delta T$, где $k = \text{const}$, а ΔT — разность между комнатной температурой и температурой печки.

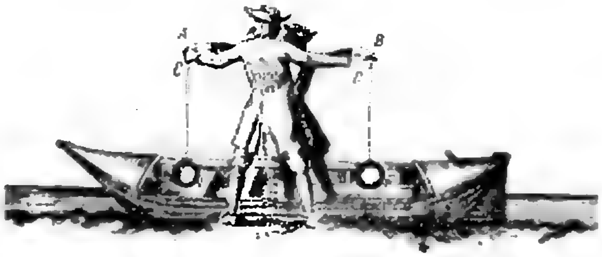
11. Определить радиус R вогнутого сферического зеркала, если оно дает действительное изображение в $m = 2$ раза меньше предмета, а расстояние между предметом и изображением $d = 0{,}75$ *м*.

12. На расстоянии $d = 10$ *см* от экрана находится точечный источник света. В какое число раз k изменится освещенность в центре экрана, если источник отодвинуть от экрана на расстояние $2d$, а за источником на расстоянии d от него поместить вогнутое зеркало, радиус кривизны которого равен $R = 20$ *см*? Коэффициент отражения зеркала равен 1. Источник, центр экрана и центр зеркала находятся на одной прямой.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Когда Гюйгенс размышлял о законах соударения шаров, он совсем близко подошел к одному важному принципу современной механики — к принципу относительности движения, то есть независимости законов удара от равномерного движения системы (речь идет о принципе Галилея, но Галилей не использовал его для решения задач).

Предположим, что опыт со столкновением одинаковых шаров производится человеком, стоящим на лодке, которая плывет по течению мимо другого человека, стоящего на берегу (рисунок взят из книги У. И. Франкфурта и А. М. Френка «Христиан Гюйгенс», М., изд-во АН СССР, 1962). Человек в лодке сводит руки так, что шары начинают двигаться равномерно со скоростями, равными, скажем, $\pm v$, где v — скорость лодки.



Шар в руке A до соударения покоится относительно наблюдателя на берегу, а шар в руке B движется относительно берегового наблюдателя со скоростью $2v$. После соударения роли шаров переменятся: шар B остановится, а шар A будет двигаться по движению лодки с двойной скоростью $2v$. Таким образом, из задачи об ударе одинаковых шаров, движущихся навстречу друг другу, выводится решение задачи об ударе движущегося тела о тело, вначале покоящееся.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

РАССКАЗ О ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ФИЗИКЕ

Второй такой комнаты нет нигде в мире. На стене ее оставили свои автографы, пожалуй, все корифеи эры квантовой физики. Альберт Эйнштейн и Нильс Бор, Макс Планк и Макс Борн, Эрвин Шредингер и Вернер Гейзенберг, Вольфганг Паули и Энрико Ферми, советские ученые А. Ф. Иоффе, И. Е. Тамм, П. Л. Капица, А. И. Шальников... Удивительнее всего, что комната эта — не университетская аудитория и не лабораторный кабинет, а «гостевая» в частном доме, который своей истинно русской архитектурой выделяется среди готических зданий, обрамляющих улицу с поэтическим названием — улица Белых Роз в небольшом голландском городе Лейдене. Хозяином дома в течение двух десятков лет — с 1914 по 1933 год — был Пауль Эренфест.

Имя Эренфеста сейчас не столь популярно, как имена его знаменитых гостей, но тот факт, что все они бывали в его доме, говорит сам за себя. Очевидно, их привлекало не только радушие и хлебосольство Эренфеста и его жены Татьяны Алексеевны Афанасьевой-Эренфест — ученые приезжали сюда из разных стран, чтобы обсудить с Эренфестом «проклятые» вопросы, трудноразрешимые проблемы, которые преподносила им стремительно развивавшаяся квантовая механика. Еще во времена Лоренца Лейден стал центром теоретической физики; когда же Лоренц передал свою кафедру в Лейденском университете Эренфесту, этот голландский город стал подлинной Меккой для физиков Европы, Америки, Азии.

Эренфест был талантливым ученым, замечательным педагогом, воспитавшим целую плеяду известных физиков (его учеником был, в частности, Энрико Ферми), человеком исключительных душевных качеств. Все это в полной мере почувствует каждый, кто прочтет небольшую книгу В. Я. Френкеля *). В издательской аннотации сказано, что книга — научная биография Эренфеста; правильнее было бы назвать ее биографическими заметками. Здесь нет систематического, год за годом жизнеописания ученого, его научной деятельности. Автор рассказывает об отдельных этапах нелегкого жизненного пути Эренфеста, о его учителях — Больцмане, Лоренце, Клейне, о теплой дружбе, связывавшей Эренфеста с Эйнштейном и Бором, о тесных контактах с советскими физиками.

Эренфест провел пять лет в дореволюционной России (здесь он из Пауля превратился в Павла Сигизмундовича) и сыграл огромную роль в становлении русской теоретической физики. После Октябрьской революции Эренфест неоднократно бывал в нашей стране, искренне любил ее и всеми средствами способствовал развитию и процветанию советской науки.

Чтобы нарисовать живой, обаятельный образ ученого, В. Я. Френкель привлек богатейший фактический материал — устные воспоминания современников, мемуары и статьи, опубликованную и неопубликованную переписку, архивные документы, умело распорядился им, не перегрузив изложения.

Пауль Эренфест

Нельзя без волнения читать страницы, повествующие о душевном разладе Эренфеста — гипертрофированная скромность и болезненная неуверенность мешали ему объективно оценить свое место в науке, о разладе, который в конце концов привел к трагическому исходу.

Книга в целом читается очень легко. Трудными для неподготовленного читателя могут оказаться лишь отдельные места, повествующие о научной деятельности Эренфеста, и, конечно, два приложения, посвященные его фундаментальным исследованиям в области статистической физики и квантовой механики (знаменитые «адиабатические инварианты Эренфеста»), но и здесь автор стремится к максимальной доступности.

Книге предпослано теплое предисловие недавно скончавшегося академика И. Е. Тамма, который, будучи совсем еще юным физиком, обратил на себя внимание Эренфеста и долгие годы ощущал его дружескую поддержку.

Книгу В. Я. Френкеля с увлечением прочтут все, кто интересуется историей современной физики — и молодой ученый, и студент, и школьник.

И. М. Беккерман

---

*) В. Я. Френкель. Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1971, 144 стр., цена 25 коп.

НОВЫЕ КНИГИ

Начиная с этого номера, редакция будет систематически давать аннотации на книги, выходящие в данном году и представляющие интерес для наших читателей. В I и II кварталах 1972 года выйдут в свет следующие книги. (Заказы можно направлять по адресу: *Москва, К-50, ул. Медведева, 1, магазин № 8 Москниги, отдел „Книга-почтой“.* Книги будут высланы наложенным платежом.)

МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука»

1. С. Г. Гиндикин. *Алгебра логики в задачах.* (объем 18 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 77 коп.)

В книге подробно излагается ряд вопросов математической логики, в том числе: алгебра высказываний, элементы логики предикатов, математические вопросы теории релейно-контактных схем, вероятностная логика.

Весь излагаемый материал разбит на циклы задач, снабженных необходимыми пояснениями, указаниями, ответами, а в ряде случаев подробымы решениями.

Большинство вопросов излагается на уровне, доступном для учащихся 9—10 классов физико-математических школ.

2. В. А. Кречмар. *Задачник по алгебре.* (Объем 21 печ. лист, тираж 100 000 экз., цена 69 коп.)

В книге приведены задачи повышенной трудности по алгебре и тригонометрии.

Задачи снабжены указаниями, ответами, а в большинстве случаев подробными решениями. Все задачи систематизированы по разделам. В начале каждого раздела приведены необходимые теоретические сведения.

Книга рассчитана, в первую очередь, для лиц, готовящихся к конкурсным экзаменам в вузы.

3. И. Г. Башмакова. *Диофант и диофантовы уравнения.* (Объем 3 печ. листа, тираж 25 000 экз., цена 10 коп.)

В брошюре подробно рассказывается о работах одного из крупнейших греческих математиков — Диофанте. На конкретных примерах автор показывает методы Диофанта в решении ряда задач.

В ней также излагаются некоторые современные понятия и методы Диофантова анализа.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

4. М. Гарднер. *Математические досуги, парадоксы, головоломки, фокусы.* (Объем 25 печ. лист., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 47 коп.)

Эта книга написана известным американским популяризатором науки. Вы наверное читали его предыдущую книгу — «Математические головоломки и развлечения».

В живой и занимательной форме автор рассказывает много удивительного из самых разных разделов математики.

Любители головоломок смогут использовать свои силы в решении парадоксов и задач, а также в постановке математических фокусов.

Книга доступна самому широкому кругу читателей.

5. Л. Кэррол. *История с узелками.* (Объем 23 печ. листа, тираж 150 000 экз., цена 1 руб. 15 коп.)

Имя автора этой книги широко известно нашим читателям. В Советском Союзе многократно издавались его книги «Алиса в стране чудес» и «Алиса в «зазеркалье»». В новой книге впервые в нашей стране публикуются все наиболее интересные головоломки и задачи, вышедшие из-под пера этого замечательного писателя.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Высшая школа»

6. *Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во ВТУЗы.*

Под ред. М. М. Сканави. (Объем 25 печ. лист., тираж 300 000 экз., цена 68 коп.)

Настоящий сборник является пособием для поступающих в высшие учебные заведения.

Сборник состоит из двух частей: «Задачи для письменных экзаменов (часть I) и задачи для устных экзаменов и дополнительные задачи (часть II). Всего в сборнике содержится около 5 000 задач.

Все задачи части первой разбиты на три группы по уровню их сложности.

Все задачи приведены с подробными указаниями или с решениями.

Издательство «Просвещение»

7. У. Сойер. *Прелюдия к математике.* (Объем 17 печ. лист., тираж 40 000 экз., цена 70 коп.)

Книга известного американского математика и популяризатора науки У. Сойера знакомит читателей с основными идеями современной математики. В живой и увлекательной форме автор рассказывает о воспитании у учеников математического мышления, о красоте и силе математических методов, об истоках основных направлений в математике.

Подробно об этой книге вы можете прочитать в журнале «Квант» № 1 за 1972 год.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

М. Л. Смолянский

ФИЗИКА

Издательство «Наука»

1. К. В. Любимов, С. М. Новиков. *Знакомимся с электрическими цепями.* (Объем 5 печ. лист., тираж 100 000 экз., цена 14 коп.)

Данная книга в первую очередь рассчитана на учителей и школьников 6—8 классов. В ней приведены около 70 задач, решение которых поможет школьникам широко и глубоко познакомиться с конструированием и составлением электрических цепей.

2. Ф. С. Завельский. *Время и его измерение.* (Объем 12 печ. лист., тираж 40 000 экз., цена 40 коп.)

В книге описаны различные методы измерения времени и соответствующие типы часов: солнечные, огненные, водяные, маятниковые, молекулярные.

Показано, как в разные эпохи и в связи с развитием науки измерялось и расширялось само понятие о времени. Описание методов и приборов для измерения времени ведется наряду с рассмотрением различных научных и технических задач.

Они так тесно переплетены между собой, что такое описание в некоторой мере соответствует жизни самой науки. Этот рассказ о идеях, методах и приборах — древних и современных — написан популярно и занимательно. Книга рассчитана на широкий круг читателей, начиная со школьников 7—8 классов.

3. В. Г. Горбацкий. *Космические взрывы.* (Объем 12 печ. лист., тираж 25 000 экз., цена 40 коп).

Книга посвящена самым грандиозным явлениям природы — взрывным процессам в космосе. Вначале автор рассказывает о том, что такое взрыв, как он возникает. Затем ведет читателя от более простых примеров— взрывов в двигателе внутреннего сгорания и др. — к взрывам на Солнце, вспышкам звезд и взрывам в ядрах галактик и к квазарам.

Автор прослеживает роль взрывов в эволюции звезд и галактик. Попутно в книге рассказывается о методах исследований.

Книга доступна широкому кругу лиц, а также школьникам старших классов.

4. М. М. Дагаев. *Наблюдения звездного неба.* (Объем 8 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 27 коп.)

В книге рассказывается об ориентировании по звездному небу и об основных причинах изменения условий видимости созвездий на протяжении года. Описываются наиболее яркие объекты, доступные наблюдениям в малые телескопы. Приводятся методы простейших наблюдений планет, Луны, переменных звезд, метеоров и искусственных спутников Земли, вполне доступные начинающим любителям астрономии. Заключительная глава книги содержит список небесных объектов, рекомендуемых для начальных наблюдений, а также список литературы, полезной для последующих более сложных наблюдений и обработки наблюдаемого материала.

В книге приводятся описание метода изготовления простейшего самодельного телескопа, а также новейшие результаты астрономии. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

5. В. Л. Левшин, Л. В. Левшин. *Люминесценция и ее применение.* (Объем 9 печ. лист., тираж 25 000 экз., цена 60 коп.)

В книге рассмотрены характерные свойства люминесценции, получение и строение люминесцентных веществ, процессы преобразования и передачи энергии в люминесцентных веществах, приводящие к возникновению люминесценции, связь люминесценции с другими видами излучения. Приводятся многочисленные примеры использования люминесценции в научных исследованиях, для целей освещения, в электроннолучевых приборах, приборах, предназначенных для обнаружения невидимым глазом радиаций, для исследования протекания различных химических реакций и т. д.

Рассматриваются также методы люминесцентного анализа в химии, биологии, медицине и во многих других областях.

Книга рассчитана на лиц, имеющих знания по физике в объеме средней школы.

Издательство «Мир»

6. Х. Рачлис. *Физика в ванне.* (Объем 5 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 25 коп.)

Молодежь, выбирающая свой жизненный путь, все чаще обращается к науке. Но что такое наука? Как стать исследователем? В чем состоит труд ученого? На эти и множество других вопросов отвечает небольшая по объему книга Х. Рачлиса «Физика в ванне». На примере физических законов известный американский популяризатор науки вводит молодого читателя в мир научных явлений и понятий, приучает его наблюдать и делать выводы.

Эта книга найдет многочисленных читателей и среди тех, кто пишет о науке, и среди тех, кто ее преподает, и прежде всего среди той молодежи, которая ее изучает.

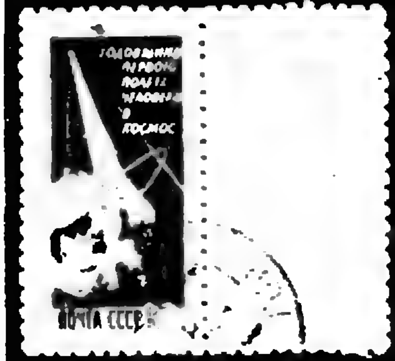
7. Б. М. Понтекорво, В. Н. Понкровский. *Энрико Ферми в воспоминании учеников и друзей.* (Объем 10 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 65 коп.)

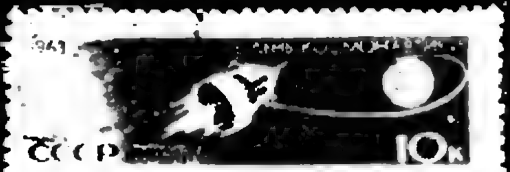
В книге академика Понтекорво, ученика Ферми, и В. Н. Понкровского рассказывается о жизни и деятельности одного из великих ученых современности — Энрико Ферми. В книге прослеживается становление личности Ферми, рассказывается о том, при каких обстоятельствах он пришел к важнейшим своим открытиям, приводится ряд малоизвестных случаев из его жизни.

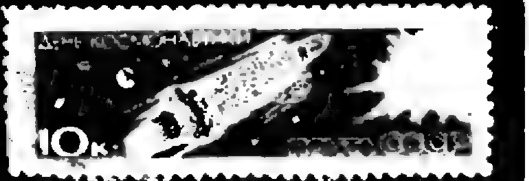
Органической частью книги являются воспоминания учеников и друзей Ферми.

Г. Н. Дьяченко

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА




1963
ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ
СССР
10к


ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ
10к
ПОЧТА СССР

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ДНЮ КОСМОНАВТИКИ

12 апреля 1961 года в истории науки и техники произошло выдающееся событие — человек впервые поднялся в космическое пространство. Первым космонавтом стал советский человек коммунист Юрий Алексеевич Гагарин.

С тех пор день 12 апреля отмечается как всенародный праздник — День космонавтики. К этому дню выпускаются специальные почтовые марки, рассказывающие о выдающихся достижениях в области исследования и освоения космического пространства.

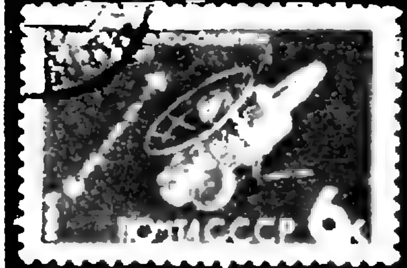
Первая такая марка с автографом Ю. А. Гагарина была выпущена в 1962 году. Она изображена в верхнем углу слева. Рядом приведены первые марки с надписью «День космонавтики». Они вышли в свет в 1963 году. На верхней изображен космический корабль «Восток-1», на нижней — ракета-носитель.

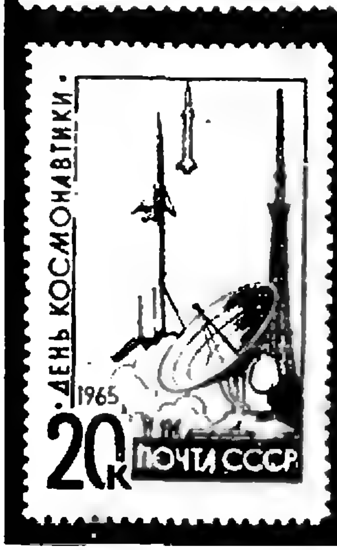
В 1964 году ко Дню космонавтики была выпущена серия из трех марок. На одной из них изображен Ю. А. Гагарин, на другой — первые советские искусственные спутники Земли, на третьей — космический аппарат «Марс-1».

На одной из двух марок, выпущенных в 1965 году, изображен космодром (см. внизу слева). Две марки 1966 года посвящены нашим успехам в исследовании Луны. На первой показана траектория полета автоматической станции «Луна-9», которая 3 февраля 1966 года плавно опустилась на поверхность Луны в районе Океана Бурь. На второй — траектория

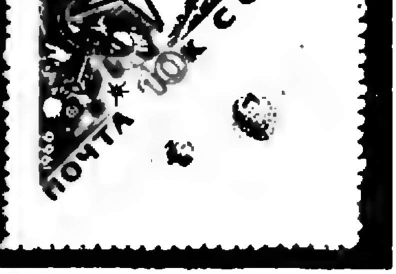
ПОЧТА СССР 12к

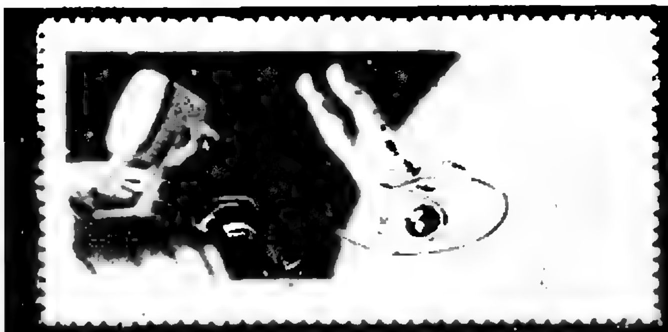
ПОЧТА СССР 4

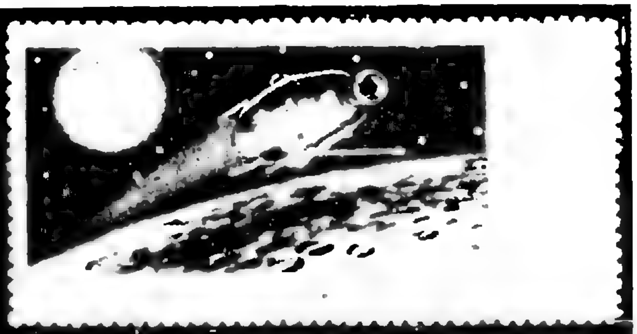

ПОЧТА СССР 6к


ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ
1965
20к
ПОЧТА СССР

1966
ПОЧТА
12к
СССР


1966
ПОЧТА
10к
СССР





полета станции «Луна-10», превратившейся в первый искусственный спутник Луны.

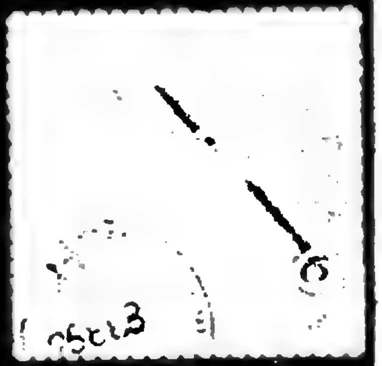
Справа вверху приведены две марки, выпущенные ко Дню космонавтики в 1967 году. На марке слева изображен космонавт А. А. Леонов в момент выхода в космическое пространство. На следующей — один из советских «лунников» вблизи Луны.

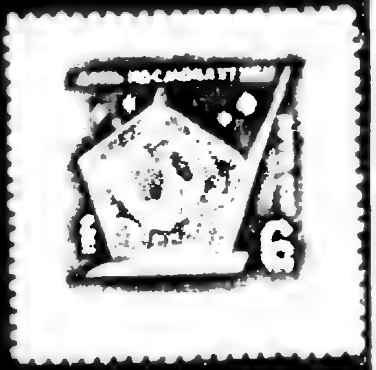
Ниже помещена одна из марок 1968 года. На ней показан момент стыковки искусственных спутников «Космос-186» и «Космос-188».

Слева внизу помещен блок с маркой, посвященной Дню космонавтики 1969 года. На ней изображен космический корабль «Союз-3», который пилотировал космонавт Г. Т. Береговой. Справа над блоком приведена марка 1970 года. Ее центральную часть занимает изображение значка «Летчик-космонавт СССР».

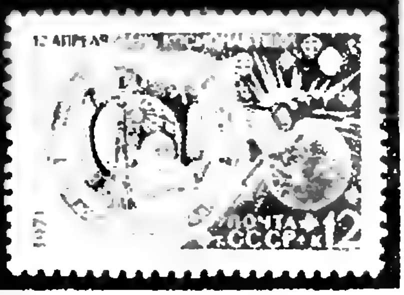
Справа внизу показаны две марки, выпущенные ко Дню космонавтики в 1971 году. На верхней изображена медаль Международной федерации аэронавтики с портретом Ю. А. Гагарина. Нижняя марка символически изображает некоторые из многочисленных возможностей использования космических исследований в интересах народного хозяйства.

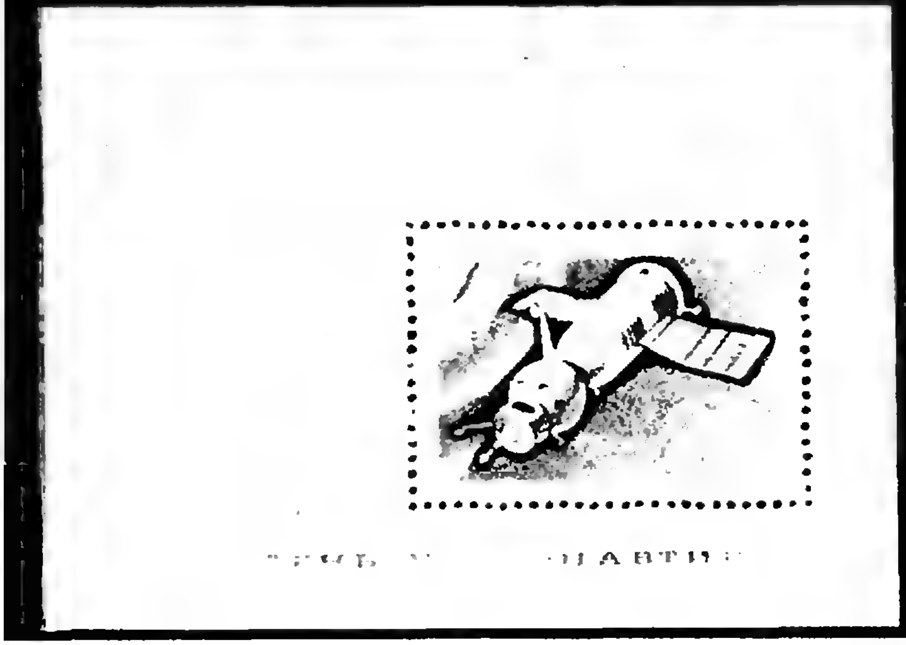
В. А. Лешковцев





ПОЧТА
СССР
10





ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Оптический телескоп»

1. Увидеть луноход нельзя. Такой телескоп разрешает при идеальных условиях наблюдения детали лунной поверхности, размеры которых порядка 50 метров.

2. $F_2=10$ *мм*; $F_{2\text{норм}}=20$ *мм*.

3. Наблюдатель, очевидно, человек близорукий, так как область аккомодации его глаза простирается от 7,5 *см* до 45 *см*.

К статье «Справедливый выбор»

2. $1/3=0{,}010101\ldots$, $2/3=0{,}101010\ldots$ После $2k$ бросаний отрезок $(0,1)$ разбивается на 2^{2k} равных частей, в двух из них находится по критической точке. Значит, в $2/2^{2k}=1/2^{2k-1}$ части случаев мы рискуем оказаться в одной из точек 1/3 или 2/3.

3, 4. Часть (0, 3/4) делится как обычно, а выпадание ГГ, соответствующее части (3/4,1) вчетверо меньшей длины, влечет за собой новые бросания, то есть раздел этой части (и так далее). Но происходит оно лишь при условии, что ГГ уже выпало, то есть в одной четверти случаев.

«Критическими» являются все концы отрезков, фигурирующих в условии задачи 3. Витя предлагал левый конец присоединять к отрезку, а правый — нет. Обычно это записывают так: $[0,1/4)$ — точка 0 лежит в отрезке, а 1/4 — нет.

5. Длины отрезков каждого из школьников равны между собой.

6. Любому из 2^{2k} вариантов выпадания монетки соответствует часть отрезка $[0,1]$ длины $1/2^{2k}$. Способы, в которых один из школьников получает монетку, соответствуют «его» частям отрезка.

7. После $2k+1$ бросания 2 отрезка не определяют владельца монетки, а

$$2^{2k+1}-2=2(2^{2k}-1),$$

что делится на 3. После нечетного числа бросаний у школьников оказывается равное число отрезков, а потому Алешин способ справедлив. Для четного числа бросаний надо (формально) сделать еще одно бросание, оно не изменит исхода выбора. Разница лишь в том, что Боре тяжелее «оформить» получение монетки (рядом с ним обе критические точки!).

8. а) После $2k$ бросаний получаются две «неопределенные» части (содержащие точки 1/3 и 2/3), каждая длиной $1/2^{2k}$.

б) В этом случае получается лишь один отрезок $(2^{2k-1}/2^{2k},1)$ длины $1/2^{2k}$.

Витин способ немного рациональнее.

К статье «Прямая и плоскость»

3. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **4.** 1. **5.** $V=\dfrac{1}{3}$.

6. 1:6.

К статье «Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

1. $x_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $x_2=3$. Указание. ОДЗ уравнения: $x>0$. Данное уравнение привести к виду

$$(2x^2-3)[\log_3 x^2-\log_3(2x+3)]=0.$$

2. $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{2\pi}{3}<x<\dfrac{3\pi}{4}$.

Указание. Данное неравенство привести к виду

$$\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)<0.$$

3. $V=\dfrac{4}{3}$. Решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида (см. рис. 1), причем $AC=2BD$. Тогда угол BAD — острый (почему?), а потому ромб $ABCD$ не является квадратом. Докажем прежде всего, что в равнобедренном треугольнике ABS равны стороны AB и AS.

Предположим противное; тогда либо $AS=BS$, либо $BS=AB$.

Пусть $AS=BS$. Тогда из равенства треугольников, являющихся боковыми гранями пирамиды, следует, что все боковые ребра пирамиды равны между собой (как это доказывается?). Но в таком случае высота пирамиды должна проходить через центр окружности, описанной около ромба $ABCD$ (почему?). Однако около этого ромба окружность описать нельзя, и мы пришли к противоречию.

Пусть $BS=AB$. Тогда из равенства треугольников ABS и ADS следует $DS=BS$, а из равенства треугольников ABS и CBS следует $AS=CS$ (как?). Так как плоские

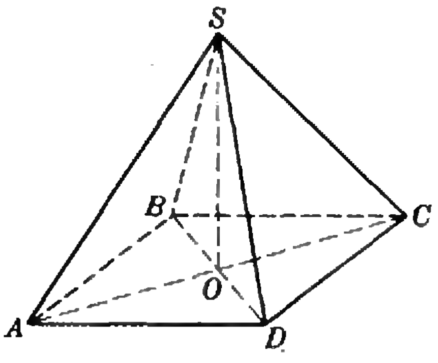


Рис. 1.

углы при вершине S являются углами при основании равнобедренных треугольников, то все эти углы острые. Далее $\triangle BSD=\triangle BAD$ (откуда это следует?), а потому угол BSD — острый. Кроме того, в этих же треугольниках равны медианы SO и AO. Поскольку медиана SO равнобедренного треугольника ASC перпендикулярна основанию AC, то треугольник AOS — прямоугольный. Отсюда следует, что $\angle ASC=90^\circ$ (как это получается?). Таким образом, в рассматриваемом случае никакие два боковых ребра пирамиды не могут составлять тупой угол, что противоречит условию задачи.

Итак, $AB=AS$. Тогда $AS=CS$ и $BS=DS$ (докажите!). (Заметим, что в этом случае $\triangle ASC=\triangle ABC$, так что угол, составляемый боковыми ребрами AS и CS, тупой.) Отрезок SO, являющийся медианой, а, значит, и высотой равнобедренных треугольников ASC и BSD, является высотой пирамиды $SABCD$ (почему?). Если сторону ромба $ABCD$ обозначить через a, то, используя соотношение $AC=2BD$, находим $AO=\frac{2a}{\sqrt{5}}$; далее получаем, что $BS=a\sqrt{\frac{2}{5}}$ (проведите выкладки подробно).

Следовательно, в треугольнике ASB известны три стороны:

$$AB=a,\quad AS=a,\quad BS=a\sqrt{\frac{2}{5}},$$

а из условия задачи следует, что площадь этого треугольника равна 3/2. Отсюда находим $a=\sqrt{5}$ (как?). Теперь получаем, что $SO=1$, $AC=4$, $BD=2$, после этого вычисляем объем пирамиды $SABCD$ (проведите необходимые выкладки).

4. $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=0$. Решение. Перепишем систему неравенств в виде

$$\begin{cases} x^2+4x+3-\alpha\leqslant 0,\\ x^2-2x-3+6\alpha\leqslant 0.\end{cases}\qquad(1)$$

Если при некотором α дискриминант хотя бы одного из стоящих в левых частях трехчленов отрицателен, то эта система не имеет решений (почему?). Следовательно, система (1) может иметь решения только при таких α, для которых одновременно выполнены неравенства

$$1+\alpha\geqslant 0,\ 4-6\alpha\geqslant 0,$$

то есть лишь при $-1\leqslant\alpha\leqslant\frac{2}{3}$ (проведите необходимые выкладки).

При $\alpha=-1$ система (1) действительно имеет единственное решение (убедитесь в этом). При $\alpha=\frac{2}{3}$ система (1) решений не имеет (докажите это).

Пусть теперь α — некоторое число из промежутка $-1<\alpha<\frac{2}{3}$. В этом случае решением первого неравенства системы (1) является отрезок

$$-2-\sqrt{1+\alpha}\leqslant x\leqslant -2+\sqrt{1+\alpha},\quad(2)$$

а решением второго неравенства этой системы — отрезок

$$1-\sqrt{4-6\alpha}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{4-6\alpha}.\quad(3)$$

Система (1) имеет единственое решение если отрезки (2) и (3) имеют лишь одну общую точку.

Так как $-2-\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{4-6\alpha}$ (почему?), то левый конец отрезка (2) лежит левее правого конца отрезка (3), и отрезки имеют единственную общую точку только в одном случае — когда правый конец отрезка (2) совпадает с левым концом отрезка (3), то есть когда

$$-2+\sqrt{1+\alpha}=1-\sqrt{4-6\alpha}.$$

Решая это иррациональное уравнение, находим корень $\alpha=0$ (проведите решение подробно).

5. $BD=2rp(p^2-4rp)^{-\frac{1}{2}}$. Решение. Введем обозначения для длин сторон четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 2). Так как $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$ (почему?), то из равенства площадей треугольников ABC и ADC:

$$\frac{1}{2}xy\sin\angle ABC=\frac{1}{2}zu\sin\angle ADC$$

вытекает, что

$$xy=zu.\qquad(4)$$

Поскольку $x+z=y+u$ (откуда это следует?), то, подставляя выражение $x=y+u-z$ в равенство (4), получим $y=z$, а тогда и $x=u$ (проведите необходимые выкладки).

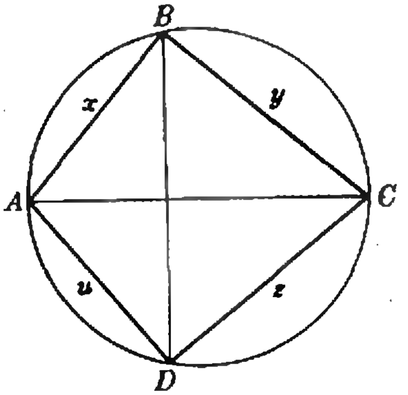


Рис. 2.

Отсюда следует, что $\triangle ABC=\triangle ADC$ (как?), а тогда $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$ (докажите это). Далее, AC — биссектриса равнобедренного треугольника BAD (почему?), то есть $AC\perp BD$.

Напишем следующие выражения для площади S четырехугольника $ABCD$:

$$S=xy,\quad S=\frac{1}{2}AC\cdot BD,\quad S=\frac{1}{2}rp\quad(5)$$

(откуда берутся эти равенства?). Из второго и третьего равенств (5) следует, что

$$BD = \frac{rp}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (6)$$

а из первого и третьего равенств (5) — что $2xy=rp$. Кроме того, $x+y=p/2$ (проведите все необходимые выкладки). Остается это

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\frac{p^2}{4}-rp;$$

выражение подставить в формулу (6).

Отделение структурной и прикладной лингвистики

1. 130 страниц. Указание. Если x_1, x_2, x_3, x_4 — число страниц, которое обрабатывает каждый лингвист в час, то по условию задачи можно составить три уравнения с четырьмя неизвестными и с помощью этих уравнений вычислить сумму $3x_1+5x_2+7x_3$.

2. $2d/\pi$.

3. 16 целочисленных решений. Указание. Применить метод интервалов.

4. $-\frac{1+\sqrt{17}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Указание. Пусть для некоторого значения a исходное неравенство выполнено при всех x. Тогда оно верно, в частности, при $x=0$, и потому число a должно удовлетворять неравенству $\log_{a(a+1)}4>1$, откуда

$$1<a(a+1)<4. \qquad (1)$$

Обратно, если число a удовлетворяет двойному неравенству (1), то

$$\log_{a(a+1)}(|x|+4)\geqslant\log_{a(a+1)}4>1,$$

то есть исходное неравенство выполнено при всех x. Таким образом, условию задачи удовлетворяют решения двойного неравенства (1) и только они.

5. Все действительные и все чисто мнимые числа. Указание. Данное равенство преобразовать к виду $|z^2-i|=|z^2+i|$, откуда, полагая $z=x+iy$, получить $xy=0$.

6. Если $a=b=0$, то имеются следующие решения: $x=0$; y — любое число; x — любое число $y=0$.

Если $a=0$, а $b\neq0$ (или, если $a\neq0$, но $b=0$), то система решений не имеет.

Если $a\neq0$ и $b\neq0$, то система имеет единственное решение: $x=a^{3}/b^{3}$, $y=b^7/a^2$.

7. Указание. Пусть данному равенству удовлетворяет пара целых чисел p, q, причем $q\neq0$. Тогда, разделив данное равенство на q^2, получим

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-2\frac{p}{q}-7=0.$$

Таким образом, рациональное число p/q является корнем трехчлена x^2-2x-7. Однако оба его корня иррациональны.

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Факультет электронной техники

1. $-b$. 2. $x=10^{(-5\pm\sqrt{13})/6}$. 3. 8.

4. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)+k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

5. $$\frac{S\sqrt{2\sqrt{2}\,S\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}}{12\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Электромеханический факультет

1. $\frac{x-y}{4x(x+2y)}$. 2. $x=2$, $y=2$.

3. $4\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

4. $x_1=\frac{k\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$, где k и n — любые целые числа.

5. $8m^3\sin2\alpha\sin\alpha\sqrt{\cos3\alpha\cos\alpha}$.

КУЙБЫШЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математическое отделение

1. $\frac{c^3\sqrt{2}\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{48\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$. 2. 54,4 *га*, 43,2 *га*, 38,4 *га*. 3. $3<x<7/2$, $x>4$. 4. $x=(-1)^n\frac{\pi}{16}+\frac{n\pi}{4}$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

Физическое отделение

1. $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$. 2. 50 *км/час*. 3. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}$, где k и n — любые целые числа. 4. $3/2<x<5/3$.

К статье «Решение задач по электростатике»

1. Пластмасса — диэлектрик и при трении ее о сухие волосы происходит электризация. Волосы отталкиваются друг от друга и не ложатся гладко.

2. Сила взаимодействия одинаковых зарядов в диэлектрике $F_1=\frac{q^2}{\varepsilon r_1^2}$, а в вакууме

$F_2 = \frac{q^2}{r_2^2}$. По условию $F_1 = F_2$. Отсюда

$$r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{\varepsilon}} = 17,3 \text{ см}.$$

3. На каждый шарик действуют сила натяжения нити T, сила тяжести P и сила кулоновского отталкивания $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2l \sin\alpha)^2}$. Суммы проекций этих сил на вертикальное и горизонтальное направления равны нулю: $T\cos\alpha - P = 0$, $F - T\sin\alpha = 0$. Отсюда

$$P = \frac{q^2 \cos\alpha}{16\pi\varepsilon_0 l \sin^2\alpha} \sim 6,2 \cdot 10^{-2} \text{ н}.$$

4. Каждый заряд создает в точке D напряженность поля $E_1 = \frac{q}{a^2}$ (см. рис. 1). Полная напряженность равна сумме трех векторов.

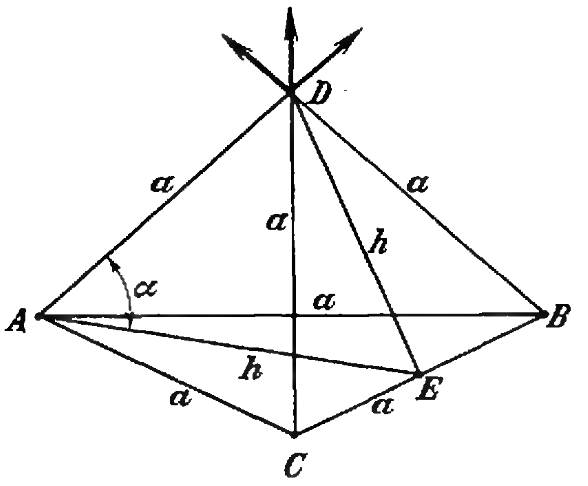


Рис. 1.

Векторы образуют с вертикалью углы 90°—α, где α — угол между ребром тетраэдра и высотой h треугольника ABC. Горизонтальные составляющие этих векторов в сумме дадут нуль. Вертикальные составляющие одинаковы и равны $\frac{q}{a^2}\sin\alpha$. Так как

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ то } E = \sqrt{6}\,\frac{q}{a^2}.$$

5. Поверхностная плотность заряда $\sigma = \frac{q}{2ab}$. Внутри металла напряженность равна нулю, а вне его

$$E = 2 \cdot 2\pi \frac{q}{2ab} = \frac{2\pi q}{ab}.$$

6. Составляющая скорости электрона v_x вдоль пластин конденсатора не меняется. Поэтому электрон пролетает конденсатор за время $t = \frac{l}{v_x}$. В направлении, перпендикулярном пластинам, электрон движется с постоянным ускорением $a = \frac{eE}{m}$. За время t он смещается в этом направлении на расстояние $h = \frac{at^2}{2} = \frac{e}{m}\frac{El^2}{2v_x}$. Отсюда начальная скорость электрона $v_x = l\sqrt{\frac{e}{m}\frac{E}{2h}} = 3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ Кинетическая энергия

$$T = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{eEl^2}{4h} = 7,2 \cdot 10^{-16} \text{ дин}.$$

7. Напряженность поля на малом участке поверхности пузыря, созданная всеми зарядами пузыря, за исключением зарядов на самом участке $E_2 = 2\pi\sigma$ (см. решение задачи 7 в статье). Сила, приходящаяся на единицу поверхности

$$f = E_2\sigma = 2\pi\sigma^2.$$

К статье «Вступительные экзамены по физике на физическом факультете МГУ»

1. Наибольшее натяжение нити в точке A (рис. 1). Напишем уравнение движения шарика для этой точки:

$$T_A - mg = \frac{mV_A^2}{R}.$$

Наименьшее натяжение нити в точке B. Нить еще не «сминается», если

$$T_B = \frac{mV_B^2}{R} - mg \geqslant 0.$$

Из закона сохранения механической энергии

$$mg \cdot 2R + \frac{mV_B^2}{2} = \frac{mV_A^2}{2}$$

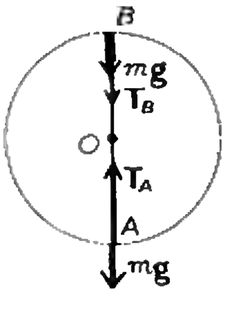


Рис. 1.

можно получить скорость в точке A.

Из этих уравнений находят

$$T_A \geqslant 6mg.$$

2. Сила натяжения T в сечении BB сообщает массе m_{BC} части стержня центростремительное ускорение $a=\omega^2 x$, где x — расстояние от оси AA до центра тяжести участка BC (рис. 2). Поэтому

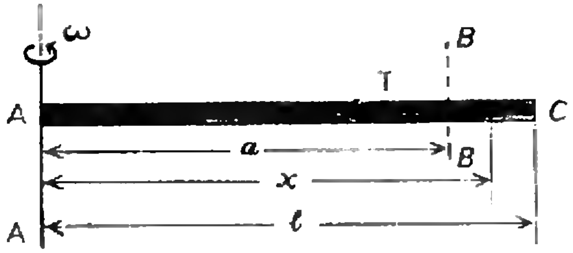


Рис. 2.

$$T=m_{BC}\omega^2 x,$$

$$m_{BC}=\frac{m}{l}(l-a), \quad x=a+\frac{l-a}{2}.$$

Следовательно,

$$T=\frac{m\omega^2}{2l}(l^2-a^2).$$

Примечание. При $a\to 0$ максимальное натяжение $T_A=\frac{m\omega^2 l}{2}$. Если $a\to l$, то $T_C\to 0$, $m_C\to 0$.

3. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии:

$$m_1 v=-m_1 v_1+m_2 v_2,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2}=\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — скорости после удара масс m_1 и m_2. Преобразуем эти уравнения:

$$m_1(v+v_1)(v-v_1)=m_2 v_2^2, \qquad (1)$$

$$m_1(v+v_1)=m_2 v_2. \qquad (2)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$v-v_1=v_2.$$

По условию

$$|v_1|=|v_2|=v'.$$

Таким образом,

$$v'=\frac{v}{2}.$$

Подставив в уравнение (2), получим

$$\frac{m_2}{m_1}=3.$$

4. Изменение энергии происходит вследствие работы сил трения:

$$\Delta W=W_{\text{кин}}+\Delta W_{\text{пот}},$$

$$\Delta W_{\text{кин}}=\frac{1}{2}m\left(v_1^2-v_2^2\right),$$

$$\Delta W_{\text{пот}}=m(g_1 h_1-g_2 h_2),$$

$$\frac{m v_1^2}{R_0+h_1}=m g_1, \quad \frac{m v_2^2}{R_0+h_2}=m g_2,$$

где R_0 — радиус Земли, $g_1\approx g_2\approx g$.

$$\Delta W=\frac{mg}{2}(h_1-h_2)+mg(h_1-h_2)=$$

$$=\frac{3}{2}\,mg\,(h_1-h_2),$$

$$\Delta W=\frac{3}{2}\cdot 1000\cdot 9{,}8\cdot 20\,000\approx 2{,}9\cdot 10^8\,(\partial\text{ж}).$$

5. См. рисунок 3:

$$ma=F\cos\alpha-F_{\text{тр}},$$

$$N=mg-F\sin\alpha,$$

$$F_{\text{тр}}=kN.$$

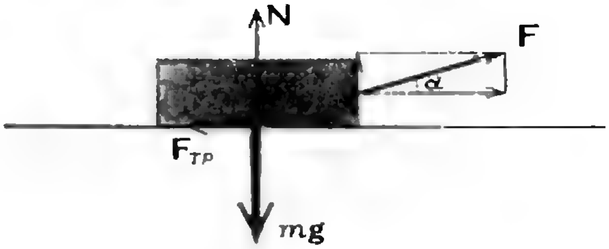


Рис. 3.

1) $\alpha_1=60°$, $a=0$,

$$k=\frac{F\cos\alpha_1}{mg-F\sin\alpha_1}=0{,}6.$$

2) $\alpha_2=30°$,

$$a=\frac{F\cos\alpha_2-k(mg-F\sin\alpha_2)}{m}=$$

$$=0{,}9\left(\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}\right).$$

6. Проведем изотермы $PV=\text{const}$ через точки 1, 2, 3 и 4 (рис. 4). Из рисунка 4 видно, что $T_1<T_2<T_3$, $T_3>T_4>T_1$. Следовательно, тепло поступает в систему на участках 1—2 и 2—3.

$$Q_{1-2}=\mu c_V(T_2-T_1),$$

$$Q_{2-3}=\mu c_P(T_3-T_2).$$

По изохоре 1—2 определим T_2:

$$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}, \quad T_2=2T_1.$$

По изобаре 2—3 определим T_3:

$$\frac{V_1}{T_2}=\frac{V_2}{T_3}, \quad T_3=4T_1.$$

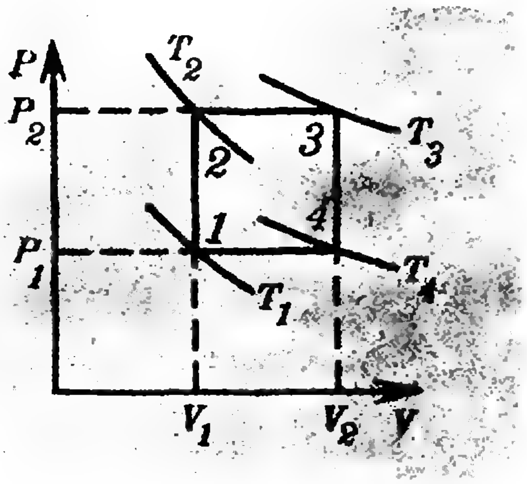


Рис. 4.

Количество тепла, поступившего в систему,

$$Q=Q_{1-2}+Q_{2-3}=5\cdot 244+7\cdot 488=4636 (\textit{кал}).$$

7. Уравнение состояния для газа при температуре t_1 связывает неизвестные постоянные (V — объем баллона, m — массу газа в нем и $A=\mathrm{const}$) с известными величинами P и T_1:

$$\frac{PV}{T_1}=Am.$$

При температуре t_2 масса перераспределится:

$$\frac{P_1V}{T_2}=Am_1, \quad \frac{P_2V}{T_2}=Am_2,$$

$$m_1+m_2=m, \quad P_1-P_2=\Delta P.$$

Отсюда

$$P_1=P_2+\Delta P=\frac{Am_1}{V}T_2,$$

$$P_2=\frac{A(m-m_1)}{V}T_2.$$

Находим P_2:

$$2P_2+\Delta P=P\frac{T_2}{T_1}.$$

Таким образом,

$$P_2=\frac{1}{2}\left(P\frac{T_2}{T_1}-\Delta P\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(760\frac{382}{290}-800\right)\approx 100 \ (\textit{мм рт. ст.}),$$

$$P_1=\frac{1}{2}\left(P\frac{T_2}{T_1}+\Delta P\right)\approx 900 \ (\textit{мм рт. ст.})$$

8. Кинетическая энергия электрона

$$\frac{mv^2}{2}=eU.$$

Импульс силы F равен

$$F\cdot\Delta t=nmv,$$

где n — число электронов, попадающих на анод за время Δt. Проходящий через анод ток

$$I=\frac{ne}{\Delta t}.$$

Отсюда

$$F=\frac{nmv}{\Delta t}=I\sqrt{\frac{2U}{\lambda}}.$$

9. В сеть включена первая катушка. Напряжение на клеммах 2—2

$$U_{2-2}=U_2+U_3=120 (\textit{в}),$$

число витков на второй катушке

$$N_{2-2}=N_2+N_3.$$

Тогда

$$\frac{U_{2-2}}{U}=\frac{N_{2-2}}{N_1}, \qquad (1)$$

где U — напряжение в сети.
В сеть включена вторая катушка; тогда

$$\frac{U_1}{U}=\frac{N_1}{N_{2-2}}. \qquad (2)$$

Поделив уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{U_{2-2}}{U}\cdot\frac{U}{U_1}=\left(\frac{N_{2-2}}{N_1}\right)^2.$$

Отсюда

$$N_{2-2}=N_1\sqrt{\frac{U_{2-2}}{U_1}}=3N_1=900,$$

$$\frac{N_3}{N_2}=\frac{U_3}{U_2}=5, \quad N_3=5N_2,$$

$$N_2=150, \quad N_3=750.$$

10. В первом случае (при параллельном соединении обмоток)

$$\frac{1}{R_I}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Тепловой баланс печки при установившейся температуре в первом случае

$$0{,}24\frac{U^2}{R_I}=k\,\Delta T_1,$$

где U — напряжение в сети.

Во втором случае (последовательное соединение обмоток)

$$0,24\frac{U^2}{R_{II}} = k\,\Delta T_2,$$

$$R_{II} = R_1 + R_2,$$

$$\Delta T_2 = \frac{\Delta T_1 \cdot R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} =$$

$$= \frac{300 \cdot 10 \cdot 20}{900} \approx 66,6 \text{ (\textit{град})}.$$

11. Так как изображение действительное уменьшенное, то предмет AB находится дальше центра зеркала C (рис. 5). Строим ход лучей и обозначаем $A'C = x$. $\Delta ABO \backsim \Delta A'B'O$ и $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C$, следовательно,

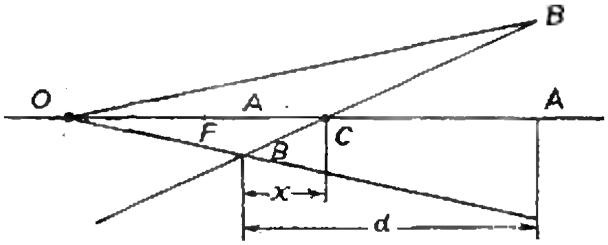


Рис. 5.

$$\frac{AB}{d-x} = \frac{A'B'}{x},$$

$$\frac{AB}{d-x+R} = \frac{A'B'}{R-x}$$

($R = OC$ — радиус зеркала).

По условию $\frac{AB}{A'B'} = m$. Из записанных уравнений найдем

$$R = \frac{2dm}{m^2-1} = \frac{2 \cdot 0,75 \cdot 2}{4-1} = 1 \text{ (\textit{м})}.$$

12. Освещенность в центре экрана в первом случае (рис. 6, *а*)

$$E_1 = \frac{\Phi}{d^2},$$

где Φ — поток лучей, попадающих в центр экрана от точечного источника S. Поток отраженных лучей равен потоку падающих, поэтому во втором случае (рис. 6, *б*) освещенность в центре экрана

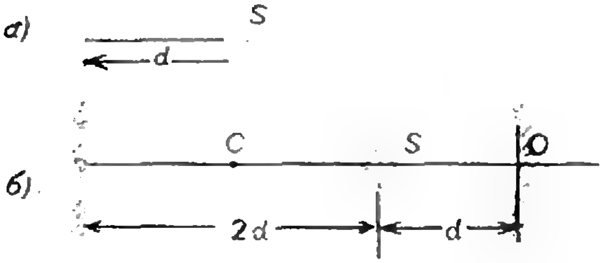


Рис. 6.

$$E_2 = \frac{\Phi}{4d^2} + \frac{\Phi}{d^2} = \frac{5}{4}\frac{\Phi}{d^2}.$$

Следовательно,

$$k = \frac{E_2}{E_1} = \frac{5}{4}.$$

К заметке «Две игры»

Игра в пешки

Пусть в начальной позиции между белыми и черными пешками одной вертикали k_1; k_2; …; k_m клеток. Если логическая сумма цифр в любом разряде двоичной записи чисел k_1; k_2; …; k_m равна нулю, то выиграют черные. В противном случае победят белые.

Новый ним

Пусть k_1; k_2; …; k_n — количества камней в кучках в начальной позиции. Если логическая сумма цифр в любом разряде двоичной записи чисел k_1; k_2; …; k_n равна нулю, то выиграет второй. В противном случае победит первый. Ответ не зависит от количества камней, имеющихся у играющих.

К заметке ««Квант» для младших школьников»

(См. «Квант» № 3, 1972)

1. Аня в белом, Валя в зеленом, Наташа в синем платьях.

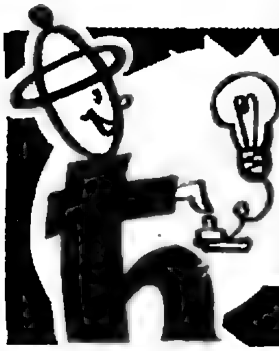
2. Растянем центральную петлю настолько, чтобы через нее можно было протащить кольцо. Продев кольцо через центральную петлю, прижмем его к лицевой стороне картона, а затем, ухватив выходящую из центрального отверстия двойную веревочку, потянем ее на себя. Из отверстия покажется двойная петля. Проденем в нее кольцо и, потянув с обратной стороны за веревочку, снова упрячем двойную петлю за картон. После этого проденем кольцо в центральную петлю, оно перейдет на правую петлю.

3. Медные монеты бывают в 1, 2, 3 и 5 копеек, то есть всего 4 типов. Если монет каждого типа не более шести, то всего монет не более 24, а их было 25.

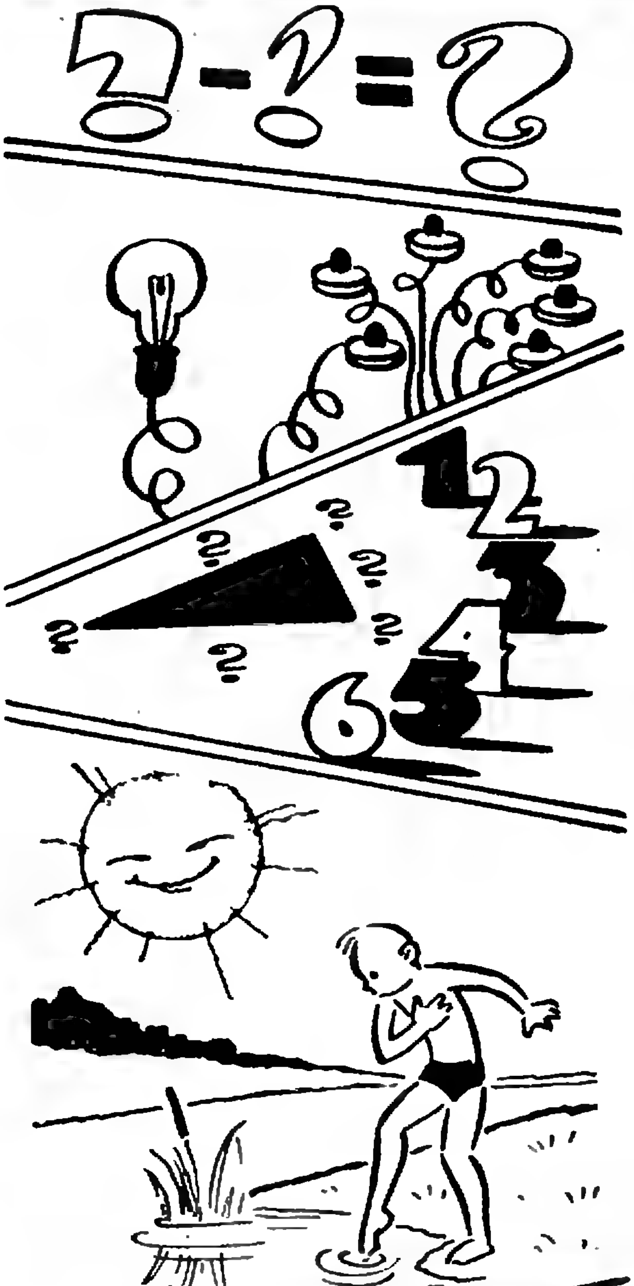
4. Разделите шар на слои одинаковой толщины перпендикулярно диаметру, в концах которого подключены провода. Через все слои идет один и тот же ток, а сопротивление слоя обратно пропорционально его площади. Поэтому больше тепла выделится в слоях с меньшей площадью, то есть у полюсов.

5. Указание. Посмотрите, что произойдет, если бутылка будет заполнена стеклом. Затем «уберите» стекло из бутылки.

6. Указание. Соединить внизу два провода и найти эту пару наверху. Затем соединить два провода из разных пар и внизу определить, какие концы соединены. Этих данных достаточно для решения задачи.



КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ



1. Разгадайте числовой ребус, если каждая буква — это цифра.

$$\begin{array}{ccccc} \text{ааф} & - & \text{де} & = & \text{кс} \\ : & & - & & - \\ \text{ас} & \times & \text{д} & = & \text{га} \\ \hline \text{с} & + & \text{еф} & = & \text{дм} \end{array}$$

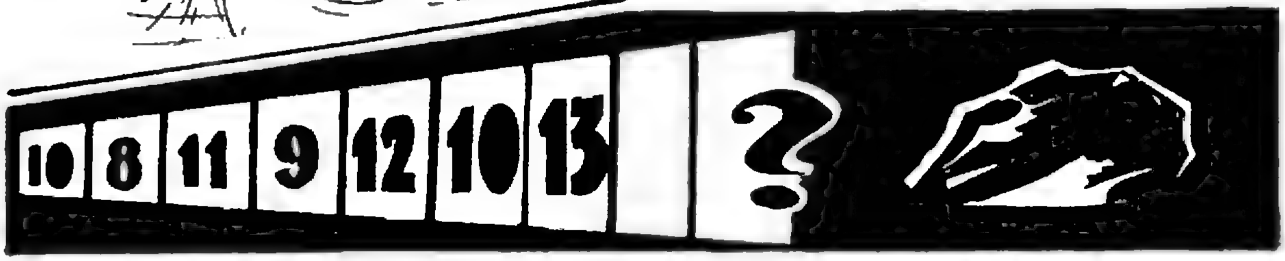
2. Имеется шесть кнопок. Пока ни одна из них не нажата, лампочка не горит. При одновременном нажатии первой, второй и пятой кнопок лампочка загорается. Никакая другая комбинация нажатых кнопок лампочку не включает. Нарисуйте схему простейшей электрической цепи, обладающей такими свойствами.

3. Разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному около вершин треугольника и около середин его сторон так, чтобы сумма трех чисел, расположенных около любой стороны, была одна и та же.

4. Когда в жаркий день вы входите в реку, вода кажется холоднее окружающего воздуха, а когда выходите — наоборот. Почему?

5. Вписать недостающие числа в таблицу на рисунке.

6. Как можно определить плотность камня, если его объем измерить непосредственно невозможно?

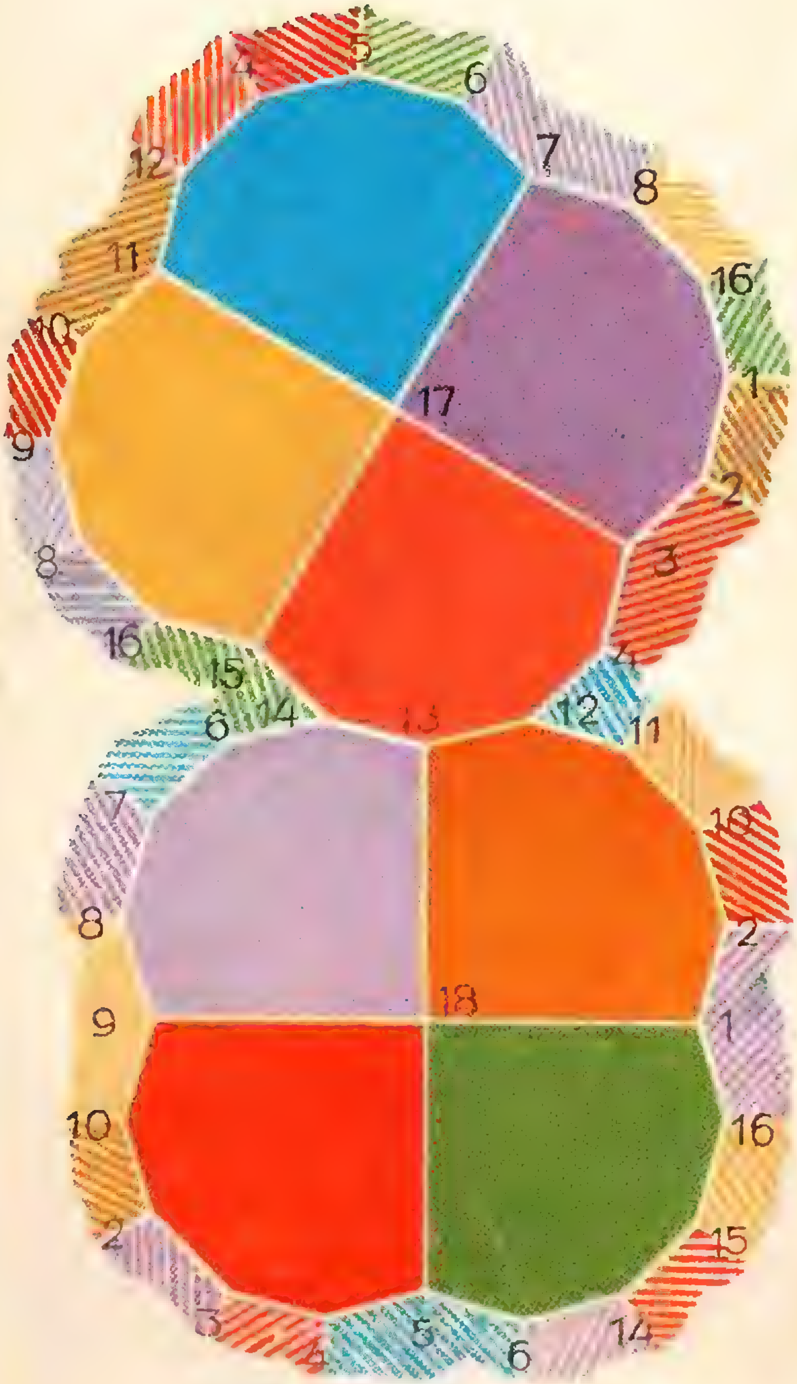


ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

121-42

квант 4



РАЗВЕРТКА «КРЕНДЕЛЯ»

На рисунке слева — развертка поверхности «кренделя» (см. также рис. 6, стр. 33). Развертка представляет карту из восьми стран, каждая из которых граничит со всеми остальными.

Чтобы получить из развертки поверхность «кренделя», склеивают участки границ так, чтобы точки, обозначенные одинаковыми цифрами, совпали.

Для наглядности по периферии развертки указаны цвета стран, примыкающих к соответствующему отрезку границы.

Напоминаем, что развертка изготовлена из растяжного материала (например, представляет собой резиновую пленку). Практически проще, разумеется, не склеивать развертку, а нанести с ее помощью карту на «крендель».

Покажите, что подобной карты с бóльшим числом стран не существует.

НОМЕР
5

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

5
МАЙ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 Искусственные ядра — *В. И. Кузнецов*
8 Машина Поста — *Н. Кудрявская, И. Ломакина, С. Приз*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

14 О числе e и $n!$ — *Л. Г. Лиманов*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

20 Исследование волн на поверхности воды — *К. Стонг*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

25 Задачи **М141-М145; Ф153-Ф157**
27 Решения задач **М101-М105; Ф116-Ф122**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

36 Тригонометрические функции — *Ж. М. Раббот*
43 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года
45 Законы идеальных газов — *Б. Б. Буховцев*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

51 Математические головоломки и развлечения — *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский*

ИНФОРМАЦИЯ

55 Слет учащихся физико-математических школ — *А. Н. Виленкин, Т. С. Петрова*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

59 Марки, посвященные Леонардо да Винчи — *А. В. Алтыкис*
60 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ *(3-я стр. обложки)*
СМЕСЬ *(стр. 26, 35)*

ИСКУССТВЕННЫЕ ЯДРА

Cm
96
КЮРИЙ
Bk
97
БЕРКЛИЙ
Cf
Es
Fm
ФЕРМИЙ

В. И. Кузнецов

Все материальные тела состоят из атомов 88 элементов, встречающихся на Земле. Большинство из этих элементов представляет собой смесь атомов нескольких типов, отличающихся друг от друга по массе. Такие атомы одного и того же элемента, отличающиеся только массой, называются изотопами. Всего у 88-ми природных элементов имеется около 400 природных изотопов, в среднем около 4,5 изотопа на каждый элемент.

Значительно большее число изотопов получено в лаборатории искусственным путем. Таких изотопов в наши дни известно более 1200. Они созданы в ядерных реакциях, осуществленных человеком. Среди них не только изотопы элементов, которые существуют в природе, но и изотопы синтетических элементов, полученных в нейтронных потоках ядерных реакторов и в пучках ускоренных частиц современных ускорителей.

Искусственные элементы уже давно нашли важные практические применения. Так, элемент № 94, плутоний, одна из основ современной ядерной энергетики, и его производят тоннами. Для разведки нефтяных скважин и лечения некоторых болезней применяют изотоп калифорния (98-го элемента) с массовым числом 252. Сейчас производство многих искусственных изотопов налажено в промышленных масштабах. Однако самое интересное в производстве изотопов — это синтез и изучение новых атомных ядер, лежащих за нижним краем таблицы Менделеева.

Чаще всего новые элементы получают путем синтеза (слияния) двух стабильных атомных ядер.

Для того чтобы два ядра образовали единое ядерное вещество, они должны коснуться друг друга своими поверхностями. Добиться этого непросто. Все атомные ядра несут положительный заряд, и когда они сближаются, то отталкивают друг друга с большой силой. Эта сила определяется законом Кулона и равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где q_1 и q_2 — заряды атомных ядер, а r — расстояние между их центрами. Ядра можно считать равномерно заряженными шарами (рис. 1), радиус которых определяется формулой

$$r = 1{,}5 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{A}\ (см). \qquad (2)$$

Такая формула получается, если предположить, что плотность ядерного вещества в атомах всех элементов неизменна. Тогда объем ядра V будет пропорционален числу A входящих в него нуклонов (нуклонами называют протоны и нейтроны, составляющие атомные ядра), так же как объем плотной кирпичной стены пропорционален числу содержащихся в ней кирпичей: $V = kA$ или

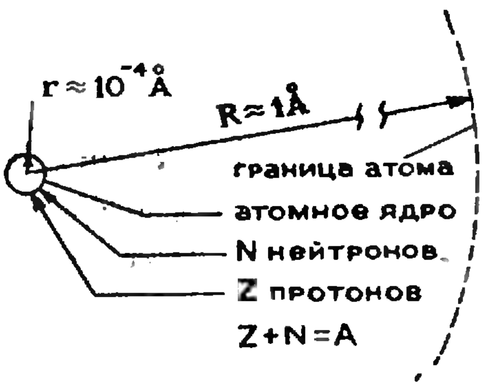


Рис. 1.

$V=\frac{4}{3}\pi r^3=kA$, где k — некоторая постоянная величина. Отсюда $r=\sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}A}$. Величина $\sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}}$ определяется опытным путем и равна $\approx 1{,}5\cdot 10^{-13}$ *см* для всех ядер. Таким образом, опыт подтверждает, что плотность ядерного вещества у атомов всех элементов примерно одинакова. Она равна громадной величине — 10^{14} *г/см*^{3}. Иными словами, масса 1 *см*^{3} ядерного вещества равна ста миллионам тонн.

Для того чтобы преодолеть силы отталкивания, ядра должны обладать большой кинетической энергией относительного движения, то есть ядра должны сближаться с большой относительной скоростью.

Какова же должна быть эта скорость? Пусть вещество, состоящее из тяжелых атомов (мишень), бомбардируется потоком быстрых атомных ядер (эти ядра называют ядрами-снарядами). Вплоть до самого соприкосновения заряженные сферы — ядра — взаимодействуют между собой как точечные заряды. Рассмотрим две частицы (ядро-снаряд и ядро-мишень) как единую систему, не взаимодействующую с другими атомами. Обозначим массу ядра-снаряда m, массу ядра-мишени M, а их массовые числа соответственно A_1 и A_2. Будем считать, что ядро-снаряд налетает на ядро-мишень из бесконечности с начальной скоростью v_0 вдоль линии, соединяющей их центры. Приближаясь к мишени, ускоренное ядро совершает работу против сил отталкивания, равную величине P, зависящей от расстояния r. Кроме того, под действием сил отталкивания со стороны ускоренного ядра A_1 тяжелое ядро A_2 начинает двигаться со скоростью v_2 (рис. 2). Таким образом, энергия ядра-снаряда тратится на работу в электрическом поле и на передачу кинетической энергии ядру-мишени. При этом скорость ядра-снаряда уменьшается. По закону сохранения энергии сумма кинетической и потенциальной энергий этих двух частиц в течение всего времени их взаимодействия должна оставаться постоянной. Потенциальная энергия системы равна работе P, а кинетическая —

$$\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}$$

(v_1 — скорость ядра-снаряда).

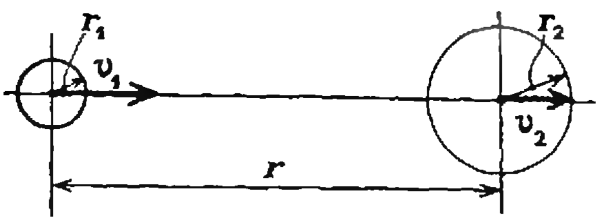


Рис. 2.

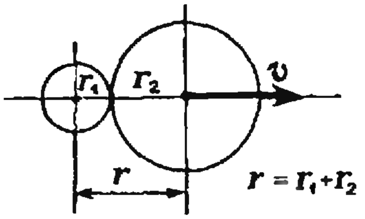


Рис. 3.

В начальный момент времени, когда ядро A_1 находилось «на бесконечности», энергия системы равнялась кинетической энергии ядра A_1, то есть $\frac{mv_0^2}{2}$. Следовательно, при сближении ядер

$$P+\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}=\text{const}. \quad (3)$$

Так как система ядро-снаряд — ядро-мишень замкнута, то для нее справедлив закон сохранения импульса. В начальный момент времени импульс системы был равен mv_0. Поэтому при сближении ядер

$$mv_1+Mv_2=mv_0=\text{const}. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим момент соприкосновения ядер при условии, что скорость v_0 достаточна лишь для того, чтобы ядра коснулись поверхностями друг друга. Иными словами, скорость v_0 такова, что в момент касания относительная скорость ядра-снаряда и ядра-мишени равна нулю ($v_1-v_2=0$). Следовательно, в интересующий нас момент $v_2=v_1=v$. Расстояние между ядрами в этот момент равно сумме их радиусов, то есть r_1+r_2 (рис. 3). Совершенную к этому моменту работу P обозначим буквой B. Тогда уравнения (3) и (4) примут вид:

$$\begin{cases} B+(m+M)\dfrac{v^2}{2}=\dfrac{mv_0^2}{2}, \\ (m+M)v=mv_0. \end{cases} \quad (5)$$

Исключив из этой системы уравнений v, найдем величину минимальной кинетической энергии, которой должно обладать ядро-снаряд, чтобы расстояние между ядрами стало равным r_1+r_2:

$$E=\frac{mv_0^2}{2}=B\left(1+\frac{m}{M}\right). \quad (6)$$

Следовательно, для того чтобы произошла реакция синтеза, приводящая к образованию нового ядра, энергия ускоренных частиц (ядер-снарядов) должна быть больше $B\left(1+\frac{m}{M}\right)$.

Более точный расчет по законам квантовой механики приводит, однако, к неожиданному результату. Оказывается, даже если $E<B\left(1+\frac{m}{M}\right)$, то ядра иногда могут слиться в единую каплю. Но вероятность такого, как его называют, «подбарьерного» слияния очень мала.

Теперь нам осталось определить работу B, и тогда искомая величина энергии E будет известна.

В электростатическом поле работа при перемещении единичного заряда из точки *1* в точку *2* равна разности потенциалов электрического поля в этих точках $\varphi_2-\varphi_1$. Потенциал поля равномерно заряженного шара вне него определяется формулой $\varphi=\frac{q}{R}$, где q — заряд шара, а R — расстояние до центра шара.

Таким образом, работа P при перемещении заряда q_2 из точки *1* в точку *2* равна $q_2\left(\frac{q_1}{R_2}-\frac{q_1}{R_1}\right)$. В нашем случае $R_1=\infty$ и $\frac{1}{R_1}=0$, $R_2=r_1+r_2$. Следовательно, воспользовавшись формулой (2), мы можем записать

$$B=\frac{q_1q_2}{r_1+r_2}=\frac{Z_1Z_2e^2}{1{,}5\cdot10^{-13}\left(\sqrt[3]{A_1}+\sqrt[3]{A_2}\right)}. \quad (7)$$

Энергию B называют потенциальным барьером или просто барьером. Для легких ядер «высота» барьера составляет несколько миллионов электронвольт (*Мэв*), а при слиянии тяжелых ядер барьер достигает сотен миллионов электронвольт. Если в формулу (7) подставить численное значение заряда электрона и выразить энергию B в миллионах электронвольт, то получится простое соотношение для высоты потенциального барьера:

$$B=\frac{0{,}96Z_1Z_2}{A_1^{1/3}+A_2^{1/3}}. \quad (8)$$

Если масса ядра-мишени значительно больше массы ядра-снаряда, так что можно считать $1+\frac{m}{M}\approx1$, то кинетическая энергия легкой ускоренной частицы, необходимая для осуществления ядерной реакции, будет равна потенциальному барьеру B [см. формулу (6)]. В этом и заключен физический смысл этой величины.

изик-экспериментатор начинает планировать опыт по синтезу нового атомного ядра с расчета величин B и E. Для этого он пользуется формулами (8) и (6). Когда известна энергия E, можно судить о том, на какой установке, ускоряющей атомные ядра, осуществим тот или иной опыт. Так, для слияния ядер неона ($A=22$, $Z=10$) и урана ($A=238$, $Z=92$) необходимо, чтобы кинетическая энергия ядра неона была бы больше 106 *Мэв*. Сейчас до такой энергии ядра неона можно ускорить только на двух ускорителях в мире: на циклотроне, установленном в Лаборатории ядерных реакций Объеди-

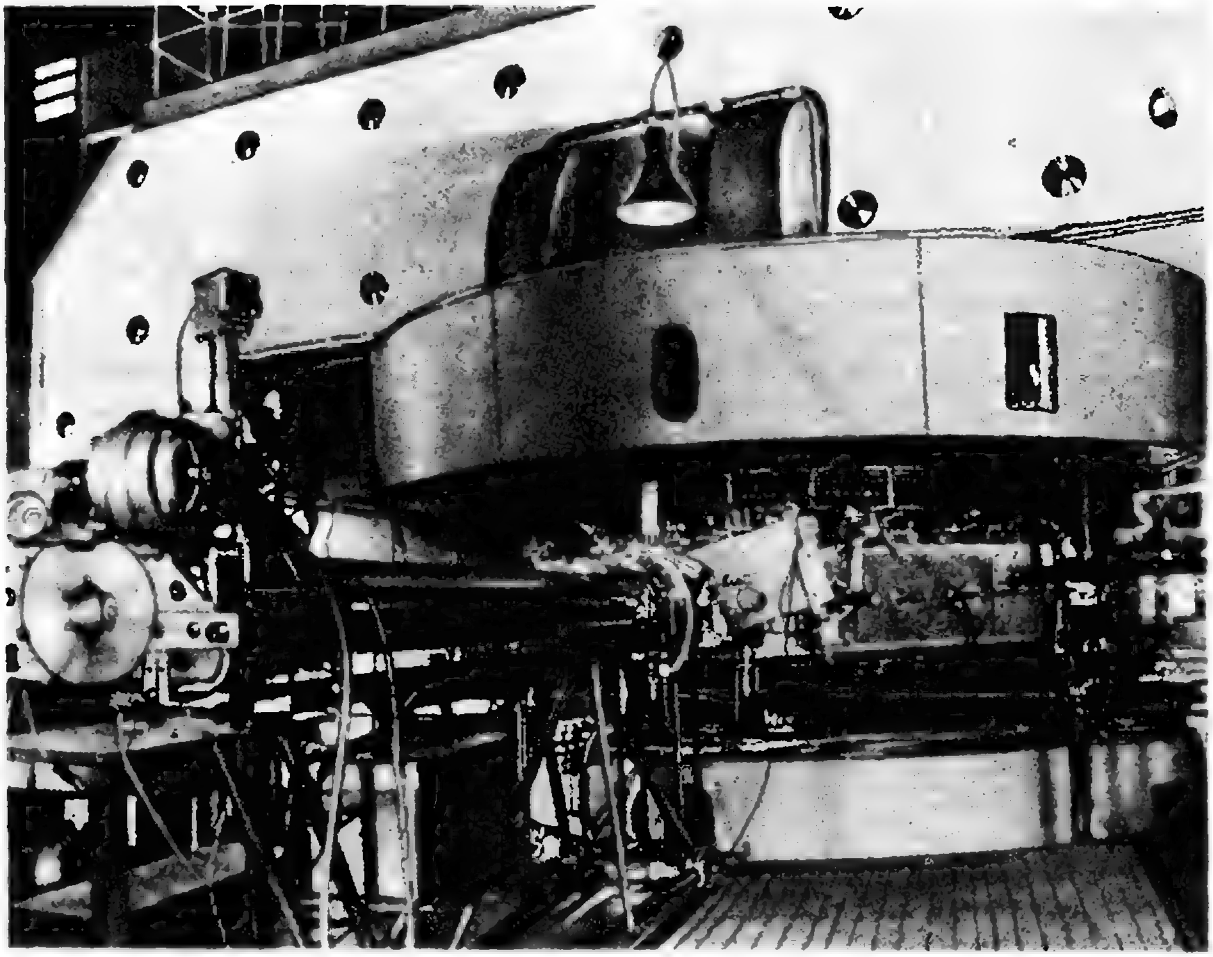


Рис. 4.

ненного института ядерных исследований в подмосковном городе Дубна (рис. 4), и на линейном ускорителе атомных ядер в городе Беркли в США.

Итак, физик определил характеристики нужных ему ускоряемых ядер, выбрал подходящий для этой цели ускоритель и установил на пути ускоренных ядер «тяжелую» мишень. Что произойдет, когда на мишень начнут падать «снаряды»?

Прежде чем ответить на этот вопрос, условимся обозначать ядра разных изотопов и элементов таким образом: около химического символа элемента вверху слева будем писать массовое число A, а внизу — атомный номер. Например, ядро изотопа урана с массовым числом 238 в этих обозначениях запишется так: $^{238}_{92}\mathrm{U}$. Иногда атомный номер не пишут, поскольку химический символ элемента уже определяет число протонов в его ядре ($^{238}\mathrm{U}$).

После того как ядро-снаряд достигнет ядра-мишени, начинают сказываться особые ядерные силы притяжения, природа которых еще не изучена достаточно полно. Эти силы действуют на очень малых расстояниях. Когда ядра коснутся поверхностями, ядерные силы с избытком компенсируют электростатическое отталкивание, и атомные ядра сливаются в единую ядерную «каплю» — составное ядро:

$$^{22}_{10}\mathrm{Ne} + ^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{260}_{102}\mathrm{X}. \qquad (9)$$

Образование составного ядра — первая стадия процесса синтеза нового атомного ядра. Составное ядро еще нельзя назвать атомным. Оно неустойчиво и время его жизни слишком мало для образования атома: электроны попросту не успеют занять свои места на орбитах.

В реакции (9) мы приписали составному ядру массовое число, равное сумме массовых чисел образовавших его ядер. Однако в ядерных реакциях синтеза новых элементов масса составного ядра, как правило, больше суммы масс ядер, участвующих в реакции. За счет чего возникает этот избыток?

По соотношению Эйнштейна энергия E связана с массой: $E=mc^2$, где c — скорость света. Следовательно, для увеличения массы на величину $\Delta M=M_{\text{сост}}-(M+m)$ требуется энергия $E^*=\Delta Mc^2$. Некоторая доля кинетической энергии ускоренной частицы переходит в кинетическую энергию составного ядра $M_{\text{сост}}\frac{V^2}{2}\approx(M+m)\frac{V^2}{2}$. Таким образом, на поступательное движение составного ядра и энергию, поглощаемую при слиянии, приходится

$$\varepsilon=\frac{(M+m)V^2}{2}+\Delta Mc^2.$$

При образовании составных ядер в результате слияния таких ускоренных частиц, как углерод ${}^{12}_{6}C$, кислород ${}^{16}_{8}O$, неон ${}^{22}_{10}Ne$, аргон ${}^{40}_{18}Ar$ с тяжелыми ядрами величина ε значительно меньше кинетической энергии $\frac{mv_0^2}{2}$, необходимой для преодоления кулоновского барьера B. Таким образом,

$$\frac{mv_0^2}{2}-\varepsilon=E-\frac{(M+m)V^2}{2}-\Delta Mc^2=$$
$$=B-\Delta Mc^2=B+Q=E^*.$$

Величину $Q=-\Delta Mc^2$, равную энергии, затрачиваемой на образование составного ядра, называют энергией образования этого ядра. Избыток же кинетической энергии E^*, остающийся в составном ядре, называется энергией возбуждения составного ядра. Энергия E^* при слиянии сложных ядер с тяжелыми ядрами-мишенями достигает значительных величин. Так, величина B реакции слияния ${}^{22}_{10}Ne$ с ${}^{238}_{92}U$ [см. формулу (9)] равна 98,1 *Мэв*. При этом $Q=-56{,}1$ *Мэв* и, следовательно, $E^*=B+Q=42$ *Мэв*. Такая энергия сильно нагревает составное ядро, оно становится неустойчивым, начинает совершать колебания и, как правило, делится за очень короткое время на ядра-осколки с атомными номерами, близкими к 50.

Время жизни составного ядра (точнее, среднее время жизни) лежит в интервале 10^{-14} — 10^{-18} *сек*, в зависимости от энергии возбуждения составного ядра. По житейским представлениям—очень малая величина. Но она достаточно велика по сравнению с «ядерной» единицей времени. За такую единицу принимают промежуток времени, протекающий между двумя последовательными столкновениями нуклона с другими ядерными нуклонами. Это время можно оценить из следующих соображений. Чтобы оставаться внутри ядра, нуклон должен взаимодействовать со своими соседями на расстояниях порядка 10^{-13} *см*. Скорость нуклона в ядре примерно равна 10^9 *см/сек*. Таким образом, для ядерной единицы времени получим 10^{-22} *сек*. Поэтому за время жизни составного ядра, скажем, 10^{-18} *сек*, каждый нуклон испытает около 10^4 столкновений. При этом составное ядро «забывает» о способе своего образования, и вероятность его распада тем или иным путем определяется только его энергией возбуждения.

В некоторых очень редких случаях сильно нагретое составное ядро «испаряет» последовательно один за другим несколько нейтронов. Ядерную каплю покидают наиболее энергичные нейтроны, и поэтому она сильно охлаждается, становится устойчивым атомным ядром нового элемента. Испарение нейтронов напоминает испарение с поверхности нагретой капли обычного вещества, когда вылетают наиболее энергичные атомы, на долю которых пришлась кинетическая энергия бо́льшая, чем средняя кинетическая энергия атомов при данной температуре. Вылетающие с поверхности капли атомы и охлаждают каплю. Нагретое ядро, так же как и обычную каплю, можно характеризовать температурой. При этом $kT = \frac{\overline{mv^2}}{2}$. Здесь k— постоянная Больцмана, T — температура ядра, $\frac{\overline{mv^2}}{2}$ — средняя кинетическая энергия нуклона.

Обычно нуклон уносит из составного ядра энергию порядка 10 *Мэв*. Поэтому в случае слияния урана с неоном, когда энергия ускоренных ядер неона незначительно превосходит высоту барьера B и $E^*=42$ *Мэв*, из составного ядра вылетают четыре нейтрона. Такая реакция записывается следующим образом:

$$\underset{\text{Взаимодействующие ядра}}{\overbrace{{}^{238}_{92}\mathrm{U}+{}^{22}_{10}\mathrm{Ne}}^{\mathrm{I}}} \rightarrow \underset{\text{Возбужденное составное ядро}}{{}^{260}_{102}\mathrm{X}'} \rightarrow \overbrace{\underset{\text{Ядро-продукт}}{{}^{256}_{102}\mathrm{X}} \quad + \quad \underset{\text{Испарившиеся нейтроны}}{4{}^{1}_{0}n}}^{\mathrm{II}}.$$

Здесь ${}^{1}_{0}n$ — символ нейтрона (как и у любого изотопа вверху слева стоит массовое число, внизу — величина заряда, равная нулю). Число нуклонов в ядерных реакциях не меняется. Поэтому сумма верхних индексов в правой части (II) уравнения реакции равна сумме верхних индексов левой части (I) с учетом коэффициента 4, стоящего перед символом нейтроиа. Сохраняется и заряд, поэтому сохраняется сумма нижних индексов.

В реакции слияния урана с неоном учеными Дубны были получены первые атомы элемента № 102. Готовясь к опытам, они выполнили точно такие же расчеты, какие сделаны в этой статье.

Уже говорилось, что реакция образования сто второго элемента протекает лишь в редких случаях. Опытным путем удалось установить, что на 100 миллионов составных ядер рождается только одно ядро изотопа ${}^{256}_{102}\mathrm{X}$. В остальных случаях ядра делятся на осколки:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow {}^{260}_{102}\mathrm{X}' \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{ядра-осколки} + \text{нейтроны.}$$

В редких случаях, когда ядро неона отдает урану только часть своих нуклонов, образуются другие изотопы 102-го элемента.

На фоне всех этих побочных продуктов взаимодействия ускоренных ядер с ядрами-мишенями и регистрируется распад ядер нового элемента. Отделить излучения этого элемента от излучений посторонних продуктов — в этом и состоит самая трудная часть опытов по обнаружению изотопов элементов с атомным номером большим ста. Трудности возрастают с увеличением атомного номера. Так, если в реакции слияния неона с плутонием получать ядра элемента № 104, названного «курчатовием» в память о выдающемся советском физике И. В. Курчатове, то одно ядро образуется на 10 миллиардов составных ядер:

$${}^{242}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow$$
$$\rightarrow {}^{264}_{104}\mathrm{Ku} - \left[\begin{array}{l} \rightarrow {}^{260}_{104}\mathrm{Ku} + 4{}^{1}_{0}n \\ \rightarrow 10 \text{ миллиардов делений.} \end{array}\right.$$

Даже в самых мощных пучках ускоренных ионов за несколько часов рождается только одно ядро курчатовия. Приходится изучать его свойства по распаду отдельных атомных ядер. И все же, несмотря на такой малый к. п. д. реакций слияния тяжелых заряженных частиц, сейчас не существует более эффективных способов получения ядер далеких заурановых элементов.

В реакциях слияния впервые были получены изотопы технеция Tc, кюрия Cm, берклия Bk, калифорния Cf, менделевия Md, курчатовия Ku, элементы №№ 102, 103, 105.

Машина Поста

Н. Кудрявская, И. Ломакина, С. Приз

Каждое лето в Крыму в поселке Фрунзенском (это недалеко от всем известного Артека) работает «Малая академия наук» школьников Крыма. В числе прочих отделений и секций этой «академии» (у нее есть еще и более короткое название: «Искатель») имеется школа юных кибернетиков. Работая под руководством сотрудников Симферопольского педагогического института и его Вычислительного центра *), ребята не только усваивают необходимый минимум теоретических сведений по математической логике и теории релейно-контактных схем, составляющий «Азбуку кибернетики», но и учатся конструировать простейшие автоматы и на практике осваивают первые шаги программирования. Правда, они не программируют на электронных вычислительных машинах, да их и нет в «Искателе». Но не беда — у юных кибернетиков есть

Машина Поста

Вообще-то, надо сказать, это вовсе никакая не машина. Это, если угодно, чертеж машины. А еще правильнее сказать — рассказ о машине. Но уж если рассказывать, то рассказывать сначала **).

Тридцать пять лет назад в двух математических журналах (в издаваемом в США международном «Журнале символической логики» и в «Трудах Лондонского математического общества») почти одновременно появились статьи двух выдающихся ученых: американца *Эмиля Л. Поста* и англичанина *Алана М. Тьюринга*, посвященные уточнению издавна употребляемого в математике (да и не только в математике) понятия *алгорифма* (или алгоритма) *). *Алгорифм — это единый общий метод, пригодный для решения целой серии однотипных задач.* Единый — в том смысле, что, зная соответствующий алгорифм, мы можем каждую задачу из данной серии решить без всяких дополнительных раздумий, как говорят, «чисто механически», «формально».

«Формально», «бездумно», «механически» — в эти слова часто вкладывается довольно обидный смысл. И почти всегда напрасно! Посудите сами: додуматься до способа сложения любых многозначных чисел «столбиком» в первый раз было, конечно, громадным достижением. Но хороши бы мы были, если бы каждый раз заново «изобретали велосипед», придумывая способ сложения для каждой пары конкретных чисел! К счастью, нам не приходится тратить время на столь нелепое занятие: ведь мы владеем алгорифмом сложения «столбиком». И для умножения многозначных чисел (любых!) мы знаем алгорифм. И для вычитания. И даже для деления. А среди наших читателей, безусловно, найдутся и такие, кто не забыл алгорифма извлечения квадратного корня из произвольной десятичной дроби... Совсем нетрудно овладеть алгорифмом дифференцирования функций. За дальнейшими примерами незачем ходить в «высшую» математику: алгорифм решения квадратного уравнения (описываемый обычной формулой $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$), алгорифм нахождения наибольшего общего делителя (точнее, не один алгорифм, а два, очень похожих — для чисел и для многочленов), различные алгорифмы решения систем линейных уравнений, всевозможные алгорифмы «упрощения формул» в алгебре и тригонометрии, основанные на применении «раз навсегда вызубренных» тождеств вроде $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $\sin^2x+\cos^2x=1$ и т. п. Да, можно сказать, вся математика — даром, что пользуется репутацией науки «творческой» — буквально кишит алгорифмами! Ну, а если вдуматься посерьезней, то это ведь и понятно: не имей математики в распоряжении весь этот алгорифмический арсенал, где бы им взять время на решение «нестандартных» задач? (Тем более, что придумывание нового алгорифма, пока он, так сказать, не приобрел этого звания, есть самая что ни на есть нестандартная и творческая задача.) А разве вообще в жизни не так: попытайтесь только представить Моцарта, каждый раз выясняющего, как записать на нотной бумаге или «подобрать» на фортепиано пришедшую ему в голову музыкальную фразу, или Пушкина, мучительно вспоминающего, как пишется слово «любовь» или, скажем, «свобода»... Потому-то и возможно творчество этих художников,— да и любое творчество вообще! — что процесс писания (и многие другие не менее полезные процессы, вроде еды и питья) уже давным-давно *автоматизированы* нашей нервной системой (или алгорифмизированы,— это, как сами понимаете, просто синонимы).

---

*) Школой руководит Валентин Николаевич Касаткин, автор популярных книг «Азбука кибернетики» и «Секрет кибернетики». В конце статьи мы приводим несколько присланных им задач.

**) Данное здесь описание «машины Поста» принадлежит Ю. А. Гастеву.

*) Способ написания определяется лишь традициями и привычкой. Сохранись в русском языке буква Ѳ («фита» — то же, что греческая «тэта»), то и продолжали бы все писать «алгориѲм»!

Развитие математики в значительной мере состоит в открытии алгорифмов для новых классов задач и в открытии более совершенных (более быстро приводящих к цели, более общих или более удобных в каком-либо другом отношении) алгорифмов. Первый «род деятельности» можно сравнить с изобретением станков и механизмов для обслуживания новых технологических процессов (примеры: ткацкий станок, паровая машина, передача радиоволн), второй — с модернизацией уже известных изобретений с учетом новых достижений науки и техники (замена металлорежущих станков на электроискровую обработку металлов, переход от ковшовых экскаваторов к роторным или от ламповых радиоприемников, телевизоров и вычислительных машин к транзисторным и т. п.). Ответ же на общий вопрос «Что такое алгорифм?» так же мало нужен математикам, как инженерам и конструкторам ответ на вопрос «Что такое машина?» (не конкретная машина, а *любая*).

«Мало нужен», — сказали мы. Но это лишь до известных пор. От того, что вы назовете паровую машину, двигатель Дизеля, электромотор и домашний холодильник «преобразователями энергии», для тех, кто пользуется этими устройствами или их совершенствует, мало что изменится. Но человеку, пытающемуся создать *вечный двигатель*, владение таким общим понятием сэкономило бы немало времени! Ни Евклиду, ни безвестным «изобретателям» сложения, ни даже Гауссу не было нужды в общем понятии алгорифма. Но понять — и, тем более, доказать, — что бывают *неразрешимые* массовые проблемы (то есть классы задач, не допускающие *никакого* алгорифмического решения, единого для всего класса*)), без такого общего определения уже, конечно, не удастся.

Не менее существенна и чисто «положительная» ценность общего понятия алгорифма: понимание общих закономерностей, которым подчиняются самые различные алгорифмы, играет первостепенную роль для «машинной» математики. Как известно, универсальная электронная вычислительная машина «способна воспринять» программы самых разнообразных математических (да и далеко не только математических) задач**). Машинная же программа это и есть алгорифм, только вдобавок приспособленный к особенностям данной конкретной машины (или записанный на специальном «языке программирования», допускающем «трансляцию», то есть попросту перевод, на языки команд разных машин).

Уже первые работы Тьюринга и Поста, посвященные уточнению понятия алгорифма, давали возможность существенного продвижения в обоих указанных направлениях. Непосредственным побудительным мотивом к такому уточнению в обоих случаях послужило желание установить алгорифмическую неразрешимость некоторых математических массовых проблем (и именно Посту принадлежат первые результаты в этом направлении). Любопытно, что оба ученых пошли, по существу, по одному и тому же пути (вскоре выяснилось, что этот путь—не единственно возможный): вместо интуитивно понятных, но абсолютно непригодных для извлечения точных математических следствий, разговоров о «едином общем методе, пригодном для решения целой серии однотипных задач» (см. начало этой заметки), Тьюринг и Пост выдвинули представление об алгорифме как о некоей абстрактной (мысленной) «машине», описанной в точных математических терминах и в то же время соответствующей нашим представлениям о вычислительном процессе, протекающем по правилам-командам определенного стандартного вида.

Какое именно определение алгорифма принимать — Тьюринга, Поста или принадлежащее кому-либо еще (наиболее известны определения К. Гёделя, А. Чёрча, С. К. Клини, А. А. Маркова, А. Н. Колмогорова)— несущественно: вскоре выяснилось, что все эти определения в определенном смысле эквивалентны. Поэтому выбор какого-либо одного из этих уточнений в качестве исходного определяется не математической стороной дела, а удобством изложения.

«Машина Тьюринга» описана и в серьезных, и в популярных книгах *).

«Машине Поста» в этом отношении повезло меньше, быть может, потому, что «машина» эта, будучи проще «машины Тьюринга», именно по этой причине требует, вообще говоря, более громоздкой системы команд для выполнения конкретной задачи. Кроме единственной статьи самого Поста, это уточнение понятия алгорифма описано, по сути дела, лишь в одном месте: в серии из четырех статей В. А. Успенского в журнале «Математика в школе» за 1967 год. Отсылая читателей к этим очень интересным (и ясно написанным) статьям, расскажем теперь о «машине Поста» лишь самые первоначальные сведения, необходимые для понимания дальнейшего.

---

*) Об алгорифмически неразрешимых проблемах см., например, статью Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова «О решении десятой проблемы Гильберта» («Квант», № 7, 1970).

**) См., например, статьи Р. С. Гутера «Что умеют машины» («Квант», № 5, 1970) и «Язык человека и язык машины» («Квант», № 10, 1971).

*) Из их числа в первую очередь рекомендуем читателю книгу Б. А. Трахтенброта «Алгоритмы и машинное решение задач», Физматгиз, 1960, 2-е изд.

Итак, идея Поста *) состоит в том, что любой алгорифм может быть представлен в виде следующей абстрактной «машины» **). Машина состоит из *ленты*, разделенной на *секции* (ячейки); в «абстрактной» машине Поста эта лента предполагается бесконечной, желая же иметь «действующую модель» машины Поста, вы можете взять обычную бумажную ленту для заклеивания окон, расчертить ее карандашом на прямоугольные ячейки произвольного размера и, в случае надобности, подклеивать к ней новые куски ленты. В секции может стоять *метка* (в этой роли в вашей «модели» с успехом могут выступать обычные спички, пуговицы или кнопки) или не стоять ничего; в первом случае секция называется *отмеченной*, во втором — *пустой*. В машине есть еще одна (причем последняя) «деталь», называемая *кареткой*, или *считывающей и записывающей головкой*; каретка движется вдоль ленты, «обозревает» ячейку, против которой она находится и, в случае надобности (в соответствии с очередной командой, совокупность которых образует программу), записывает с нее метку или, наоборот, стирает метку. В вашей модели функции головки будут разделены: «считывать» вы, разумеется, будете просто глазами, в роли записывающего устройства будет выступать рука, кладущая и снимающая спички из ячеек, а чтобы не забыть, где в данный момент находится ваша «каретка», кладите что-нибудь против «обозреваемой» ячейки,— ну, хотя бы спичечный коробок.

Программа машины Поста (инструкция, алгорифм, в соответствии с которым она «работает») состоит, как уже говорилось, из *команд*. Команды бывают следующих шести видов.

I. Команды движения вправо

$$a.\Rightarrow b$$

(a — это номер данной команды в программе, то же и в дальнейших командах; b — номер команды, к выполнению которой следует перейти; каретку при этом надо сдвинуть на одну секцию вправо).

II. Команды движения влево

$$a.\Leftarrow b$$

(сдвинуть каретку на одну секцию влево и перейти к выполнению команды № b).

III. Команды печатания метки

$$a.\ \vee\ b$$

(напечатать метку в обозреваемой секции и перейти к команде № b).

IV. Команды стирания метки

$$a.\ \xi\ b$$

(стереть метку из обозреваемой секции и перейти к команде № b).

V. Команды передачи управления

$$a.?\begin{matrix}\nearrow b\\ \searrow c\end{matrix}$$

(если обозреваемая секция пуста — перейти к команде № b, если же обозреваемая секция отмечена — перейти к команде № c).

VI. Команда остановки

$$a.\ \text{стоп}$$

(прекратить выполнение программы).

Если задать некоторую программу (то есть список из n, $n\geqslant 1$, команд, расположенных в порядке возрастания номеров от 1 до n, в правые части которых не входят никакие натуральные числа, кроме, быть может, чисел $1,2,\ldots,n$) и определенное состояние машины (то есть указание, какие секции отмечены и против какой секции находится обозревающая ее каретка), машина начнет выполнять программу (докажите, что по меньшей мере один шаг она сделает в любом случае!), после чего возможны три исхода:

---

*) Именно идея: слова «машина» в изложении самого Поста нет.

**) Поскольку на условность термина мы уже внимание обратили, в дальнейшем изложении при слове «машина» мы больше не будем ставить кавычек.

1) машина дойдет до невыполнимой команды (печатание метки в отмеченной секции или стирание метки из пустой секции) — так называемая *безрезультатная остановка*;

2) машина дойдет до команды остановки — *результативная остановка*;

3) ни один из первых двух случаев не осуществится — машина будет работать *бесконечно*.

Пример 1. В программе

1. ⇒2
2. ξ 3
3. стоп,

примененной к пустой ленте, безрезультатная остановка наступит уже на втором шагу (так что до предписываемой третьей командой результативной остановки дело так и не дойдет).

Пример 2. Программа

1. ⇒2
2. ⇒3
3. стоп,

примененная к пустой ленте, будет выполняться следующим образом: каретка передвинется на две секции вправо от обозреваемой, после чего машина остановится.

Пример 3. Если программу

1. V 2
2. ⇒3
3. ⇒1

применить к пустой ленте, то машина будет печатать, начиная с обозреваемой секции, метки через одну и никогда не остановится.

Дальнейшие примеры читатель найдет в уже упомянутых статьях В. А. Успенского.

Мы же сейчас предоставим слово участникам школы юных кибернетиков «Малой академии наук», ученицам 9-го класса Бахчисарайской школы № 2 *Наташе Кудрявской*, *Ире Ломакиной* и *Светлане Приз*, которые расскажут вам о своем опыте обучения программированию с помощью машины Поста (работа которой в сильно упрощенном виде воспроизводит работу любой современной универсальной вычислительной машины). Девочки испытывали свои программы на изготовленной сотрудниками Вычислительного центра Симферопольского педагогического института металлической модели, снабженной клавишами, тумблерами, штеккерами и прочими непременными атрибутами «кибернетических машин». «Лента» в этой «действующей модели» состоит из электрических лампочек (40 штук; выход за пределы ленты квалифицируется как безрезультатная остановка машины), причем отмечаемые секции загораются, а стираемые — гаснут *).

...Очень интересно программировать и видеть, как, подчиняясь твоей программе, машина решает задачи. Счетчик команд позволяет видеть, какая команда выполняется в данный момент. Программа сначала записывается на бумаге, а затем с помощью штеккеров заносится на наборное поле машины (каждой команде соответствует свой двоичный код). Машина работает (в автоматическом режиме) не очень быстро, поэтому все ее действия хорошо наблюдаются; выполнение программы можно приостановить.

Интересно наблюдать, как машина выступает соперником человека в различных играх. Мы решаем задачи и по составлению программ, пользуясь которыми машина никогда не проигрывает **). Вот пример такой программы. Условия игры: на ленте стоит подряд 26 меток, самая левая из которых обозревается кареткой. Человек и машина ходят по очереди (начинает игру всегда человек), стирая за свой ход не более четырех меток. Тот, кто стирает последнюю метку, проигрывает. Если условиться,

---

*) Мы специально не останавливались выше на всех этих впечатляющих деталях, дабы не отвлекать читателя от сути дела; различие между «электронной моделью машины Поста» и описанной выше «спичечно-бумажной» примерно того же рода, что различие между магазиными чеками, отпечатанными на электрическом или ручном кассовом аппарате и выписанными от руки.

**) То есть всегда выигрывает: все эти игры таковы, что не допускают ничейного исхода.

что стираемые человеком метки (одна, две, три или четыре) — всегда самые крайние слева, то искомая программа будет иметь следующий вид:

```
1.? < 2
      1
2.  ⇒3
3.  ⇒4
4.  ⇒5
5.  ⇒6
6.? < 7
      8
7.  стоп
8.  ξ 9
9.  ⇐10
10.? < 11
       8
11. ⇒12
12.? < 11
       1
```

Вот краткие пояснения к программе. 1-я команда — передача управления: машина перейдет ко 2-й команде только после того как человек сделает ход. По 2-й, 3-й, 4-й и 5-й командам каретка сдвигается вправо, а по 8-й команде *) стирает в обозреваемой секции метку и переходит к 9-й команде, по которой она сдвигается влево и переходит к команде № 10. По этой команде, если обозреваемая секция пуста, машина выполняет 11-ю команду, а если отмечена — 8-ю. По 11-й команде каретка сдвигается вправо и переходит к 12-й команде. Если теперь секция, под которой находится каретка, пуста, то машина возвращается к 11-й команде, а если отмечена, начинает все сначала, то есть переходит к 1-й команде.

Задачи

1. а) Докажите, что описанная здесь «машинная стратегия» действительно всегда обеспечивает выигрыш.

б) Докажите, что та же программа обеспечивает беспроигрышную игру машины для случаев, когда на ленте отмечено 11 или 16 меток; для какого еще числа меток на ленте годится та же программа (дайте ответ по возможности в общем виде)?

2. Дан массив из n меток (то есть n идущих подряд отмеченных секций). Составьте программу, расставляющую эти метки на ленте так, чтобы между каждой парой было по одной пустой секции (каретка обозревает крайнюю правую из отмеченных секций).

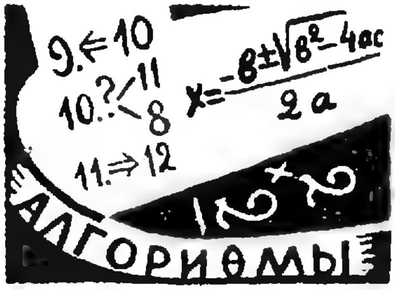
3. (Эта и следующие две задачи предложены В. Н. Касаткиным.) На ленте имеется массив из n отмеченных секций (обозревается крайняя левая из них), а справа от него, на расстоянии в m секций — еще одна отмеченная секция. Составьте программу, придвигающую данный массив к данной секции.

4. На ленте расположены два массива разной длины (обозревается крайняя секция одного из них). Составьте программу, сравнивающую длину массивов и стирающую больший из них. (Отдельно продумайте случай, когда длины массивов равны.)

5. На ленте дан массив, крайняя слева секция которого обозревается кареткой. Составьте программу, наносящую на ленту еще один массив той же длины, находящийся через две пустых секции вправо от данного.

6. На ленте даны два массива на расстоянии одной пустой секции друг от друга, причем каретка находится под крайней слева отмеченной секцией левого массива. Составьте программу, придвигающую эти массивы друг к другу.

7. Составьте выигрывающую программу для следующей игры. На ленте машины Поста отмечена 21 секция, крайняя слева обозревается. Человек и машина ходят по очереди (первым ходит человек!), стирая за ход не более 6 меток. Побеждает (в отличие от приведенной выше игры) тот, кто стирает последнюю метку.



---

*) Назначение 6-й и 7-й команд — остановка после того, как человек сотрет последнюю метку.

О числе e и $n!$

Л. Г. ЛИМАНОВ

В этой заметке мы разберем задачи из статьи М. И. Башмакова «О постулате Бертрана» (см. «Квант» № 5, 1971).

Напомним, что постулатом Бертрана называется следующее утверждение: *если* $x>1$, *то существует простое число, заключенное между* x *и* $2x$.

Это утверждение сформулировал французский математик Бертран, но отыскать доказательства для него не сумел. Это удалось сделать Чебышеву, причем сделать совершенно элементарно. Правда, он воспользовался одной не элементарной формулой — формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n/12n}, \qquad \text{где } 0<\theta_n<1.$$

В эту формулу входят два едва ли не самых замечательных числа. Первое — это всем вам известное число π — отношение длины окружности к ее диаметру. Второе число — это число e — предел последовательности $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ при n, стремящемся к бесконечности. Формула эта понадобилась Чебышеву для того, чтобы оценить величину $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

На самом же деле, чтобы доказать постулат Бертрана, можно использовать существенно менее точные оценки величины $n!$

Именно такие оценки и предлагалось доказать читателю в статье Башмакова (задача 3). С разбора этой задачи мы и начнем.

Вот ее формулировка:

Докажите, что существует такое действительное число e, *что при всех натуральных* n, *больших некоторого* n_0,

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Неравенства $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ можно использовать вместо формулы Стирлинга. Они, конечно, менее точны, но зато и доказать их намного проще.

Остальные задачи из статьи — это, по сути дела, леммы из чебышевского доказательства постулата Бертрана. Решить их намного проще, чем задачу 3. Заслуга Чебышева не в том, что он их решил — сделать это нетрудно, — а в том, что он их сформулировал и нашел, как с помощью этих утверждений получить оценки для произведения (и, тем самым, для количества) простых чисел, не превосходящих x, и доказать постулат Бертрана.

Решение задачи 3. Примем пока без доказательства, что такое число e, что при всех натуральных n

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

действительно существует. (Доказательство существования будет приведено чуть ниже.)

Мы хотим доказать, что $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ или (что то же самое) $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{n^n}{(n-1)!}$ при n, больших некоторого n_0.

Пусть для некоторого k доказано, что $\frac{(k+1)^k}{k!} < e^k$. Но $\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!} \Big/ \frac{(k+1)^k}{k!} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} < e$. Поэтому $\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!} < e^{k+1}$.

Таким образом, наше утверждение верно и для $k+1$, а значит, и для $k+2$, $k+3$ и т. д. Точно так же из предположения

$$e^k < \frac{k^k}{(k-1)!}$$

выводится, что

$$e^{k+1} < \frac{(k+1)^{k+1}}{(k)!}.$$

Действительно,

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \Big/ \frac{k^k}{(k-1)!} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} > e.$$

Остается доказать, что e существует, и найти начальные значения для n в каждом из неравенств

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n!, \; n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Доказательство существования e

Условимся называть совокупность действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, отрезком с концами a и b (отрезок с концами a и b обозначается через $[a, b]$).

При доказательстве существования числа e мы будем пользоваться следующим свойством действительных чисел: если есть последовательность отрезков $[a_i, b_i]$, где $a_i \leqslant a_{i+1} < b_{i+1} \leqslant b_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ (о такой последовательности говорят, что она является последовательностью вложенных отрезков), то существует точка α, общая для всех этих отрезков.

Это свойство мы не будем доказывать. Дело в том, что при четком определении того, что мы понимаем под множеством действительных чисел, это (или какое-нибудь эквивалентное ему) свойство принимается как аксиома.

Упражнения

1. Проверьте, что следующие свойства действительных чисел эквивалентны; если принять любое из них без доказательства, то остальные из него выводятся.

а) У всякой последовательности вложенных отрезков есть хотя бы одна общая точка.

б) Всякая ограниченная монотонно возрастающая последовательность имеет предел.

в) Всякая последовательность $\{a_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$, в которой для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N (зависящее, разумеется, от ε), что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $m, n > N$ имеет предел. (Такие последовательности называются последовательностями Коши.)

г) Всякое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань, то есть можно указать такое число α, что все принадлежащие этому множеству числа не больше α, но для всякого числа β, меньшего α, найдутся числа из этого множества, бо́льшие β.

д) Из всякого семейства отрезков, покрывающих отрезок $[a,b]$, можно выделить конечное семейство отрезков, покрывающих отрезок $[a, b]$. (Мы говорим, что система M отрезков покрывает отрезок $[a, b]$, если для всякого x, принадлежащего отрезку $[a, b]$, найдется отрезок из системы M, содержащий x.)

Покажем теперь, что последовательность $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ — монотонно возрастающая. Для этого нужно, чтобы при любом n $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ было меньше $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

С помощью несложных преобразований это неравенство можно привести к такому виду:

$$[(n^2+2n+1)^n-(n^2+2n)^n](n+1)<(n^2+2n)^n. \tag{1}$$

[Вот промежуточные неравенства: $(n+1)^{2n+1}<(n+2)^{n+1}n^n$ и $(n^2+2n+1)^n(n+1)<(n^2+2n)^n(n+2)$.] Воспользовавшись формулой $a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1})$, получаем: $(n^2+2n+1)^n-(n^2+2n)^n<n(n^2+2n+1)^{n-1}$. Поэтому неравенство (1) будет доказано, если мы докажем такое неравенство:

$$(n^2+2n+1)^{n-1}(n+1)<(n^2+2n)^{n-1}(n+2).$$

Оно в свою очередь (это оказывается точно так же) следует из неравенства

$$(n^2+2n+1)^{n-2}(n+1)<(n^2+2n)^{n-2}(n+2).$$

Повторяя эти рассуждения, мы убеждаемся, что неравенство (1) следует из очевидного неравенства

$$n+1<n+2.$$

Еще проще показать, что при любом натуральном n

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}. \tag{2}$$

В самом деле, неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$(n+1)^{2n+3}>(n+2)^{n+2}n^{n+1}.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$[(n^2+2n+1)^{n+1}-(n^2+2n)^{n+1}](n+1)>(n^2+2n)^{n+1}. \tag{3}$$

Но

$$(n^2+2n+1)^{n+1}-(n^2+2n)^{n+1}>(n^2+2n)^n(n+1),$$

откуда

$$[(n^2+2n+1)^{n+1}-(n^2+2n)^{n+1}](n+1)>(n^2+2n)^n(n+1)^2>$$
$$>(n^2+2n)^n(n^2+2n)=(n^2+2n)^{n+1},$$

то есть неравенство (3), а значит, и неравенство (2), — доказано.

Итак, мы доказали, что последовательность $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, а последовательность $b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает. Кроме того, $a_n<b_n$, поскольку $\frac{n+1}{n}>1$. Таким образом последовательность отрезков с концами a_i, b_i является последовательностью вложенных отрезков и длина k-го отрезка равна $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\cdot\frac{1}{k}$, то есть при росте k она стремится к нулю. Поэтому у всех этих отрезков есть ровно одна общая точка. Соответствующее ей число и называется числом e.

Можно вычислить сколько угодно десятичных знаков числа e. Вот первые несколько: $e=2{,}71828\ldots$

Поскольку $e > 2$, неравенство $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n!$ выполняется уже при $n=1$. Неравенство $n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n=1, 2, \ldots 6$ не выполняется, однако при $n=7$, а следовательно, и при бóльших n, — оно верно. (Мы не будем этого проверять, однако заметим, что это несложно сделать с помощью таблицы натуральных логарифмов — логарифмов по основанию e.)

Мы доказали, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ стремится к e. На самом деле можно доказать, что $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ стремится к e^x. Именно это и предлагается сделать в следующих упражнениях.

Упражнения

2. Докажите, что последовательность $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$, где x — положительное число, монотонно возрастает.

3. Докажите, что последовательность $\left(\frac{n+x}{n}\right)^{n+l}$, где l — натуральное число, большее x, монотонно убывает.

4. Выведите из утверждений 2 и 3, что последовательность $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ при любом положительном x имеет конечный предел.

5. Докажите, что у последовательностей $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ и $\left(\frac{n+x}{n}+\frac{y}{n^2}\right)^n$ пределы совпадают.

6. Предел последовательности $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ мы обозначим через $e^{x'}$ [здесь x' — некоторое число, зависящее от x: $x' = f(x)$]. Выведите из 5, что

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

7. Докажите, что $f(0) = 0$ и что при натуральных x $f(x) = x$.

8. Докажите, что у последовательности $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ при отрицательном x также существует предел $e^{f(x)}$, причем $f(-x) = -f(x)$.

9. Докажите, что если m и n — целые числа $(n \neq 0)$, то $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$.

10. Докажите, что функция $f(x)$ монотонно возрастает.

11. Докажите, что, $f(x) = x$.

Разберем теперь остальные задачи из статьи М. И. Башмакова.

Формулировки задач

Напомним обозначения:

$\pi(x)$ — это число простых чисел, не превосходящих x;

$\theta(x)$ — логарифм произведения всех простых чисел, не превосходящих x:

$$\theta(x) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \ldots = \sum_{p \leqslant x} \log p \qquad (\theta(x) = 0 \text{ при } x < 2);$$

$T(x)$ — логарифм произведения всех натуральных чисел, не превосходящих x: $T(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} \log n$;

$\psi(x)$ — логарифм наименьшего общего кратного всех натуральных чисел, не превосходящих x: $\psi(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} a_p \log p$, где $p^{a_p} \leqslant x$, $p^{a_p+1} > x$.

$$S(x) = T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right).$$

Задача 1. *Доказать, что*

$$T(x)=\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\cdots$$

Задача 2. *Доказать, что*

$$\psi(x)=\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\theta(\sqrt[3]{x})+\theta(\sqrt[4]{x})+\cdots$$

Воспользовавшись результатом задачи 1, $S(x)$ можно записать так:

$$S(x)=A_1\psi(x)+A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right)+A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\cdots$$

Задача 4. *Проверьте, что коэффициенты* $A_1, A_2, A_3\ldots$ *меняются с периодом 30 и что для первых тридцати значений* n *коэффициенты* A_n *составляют следующую последовательность*: 1, 0, 0, 0, 0, —1, 1, 0, 0, —1, 1, —1, 1, 0, —1, 0, 1, —1, 1, —1, 0, 0, 1, —1, 0, 0, 0, 0, 1, —1.

Задача 5. *Докажите, что*

$$\psi(x)-2\psi(\sqrt{x})\leqslant\theta(y)\leqslant\psi(x)-\psi(\sqrt{x}).$$

Задача 6. *Докажите, что*

$$\frac{\psi(x)}{\log x}<\pi(x)<\frac{\psi(x)+\theta(x)}{\log x}.$$

Решение задачи 1. Заметим, что $a_p=[\log_p x]$. Вычисляем, с каким коэффициентом входит $\log p$ в сумму $\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\cdots$ В $\psi\left(\frac{x}{i}\right)$ логарифм p входит с коэффициентом $\left[\log_p\frac{x}{i}\right]$, значит, общий коэффициент при $\log p$ равен $\sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\left[\log_p\frac{x}{i}\right]$. Вычтем из каждого слагаемого единицу и преобразуем его: $\left[\log_p\frac{x}{i}\right]-1=\left[\log_p\frac{x}{i}-1\right]=\left[\log_p\frac{x_1}{i}\right]$, где $x_1=\frac{x}{p}$. Поэтому $\sum\left[\log_p\frac{x}{i}\right]=\left[\frac{x}{p}\right]+\sum\left[\log_p\frac{x_1}{i}\right]$. Повторяя наше преобразование, мы получим такое равенство:

$$\sum\left[\log_p\frac{x}{i}\right]=\sum_{l=1}^{[\log_p x]}\left[\frac{x}{p^l}\right].$$

Итак, коэффициент при $\log p$ в сумме $\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\cdots$ равен $\sum\limits_{l=1}^{[\log_p x]}\left[\frac{x}{p^l}\right]$.

Заметим теперь, что $T(x)=\sum\limits_{i\leqslant x}\log i$ тоже можно представить в таком виде: $T(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}c_p\log p$, где p — простые числа.

Упражнения

12. Докажите, что если k — натуральное число, то $\left[\frac{x}{k}\right]=\left[\frac{[x]}{k}\right]$ и при $x>1$ $[\log_k[x]]=[\log_k x]$.

13. Убедитесь, что коэффициент c_p равен

$$\sum_{i=1}^{[\log_p [x]]} \left[\frac{[x]}{p^i}\right].$$

Указание. Представьте $T(x)$ в виде $\log([x]!)$.

Решив упражнения 12 и 13, вы полностью решите задачу 1.

Решение задачи 2. Решение этой задачи похоже на решение задачи 1: нужно убедиться, что коэффициент при p в сумме $\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\cdots$ равен $[\log_p x]$. Сделать это совсем просто. $\log p$ входит слагаемым в $\theta(\sqrt[i]{x})$, если $\sqrt[i]{x} \geqslant p$, то есть $\log_p x \geqslant i$. Поэтому в $\sum \theta(\sqrt[i]{x})$ логарифм p входит слагаемым k раз, где k определяется из неравенства $k+1 > \log_p x \geqslant k$, то есть $[\log_p x]$ раз.

Решение задачи 4. Эта задача очень похожа на задачу **М92** (см. «Квант» № 7, 1971).

Действительно, ее можно сформулировать следующим образом:

В первую же поездку в магазин Петя купил себе много маленьких шоколадок. Он решил, что в скучные дни ему следует съедать три шоколадки, в те дни, когда он занят только одним делом — две, а в остальные — по одной. Тогда A_i+2 равно числу шоколадок, которые Петя съел в $i+1$ день. (Напомним, что Петя каждый второй день ездил купаться, каждый третий — в магазин и каждый пятый решал математические задачи).

Приведем формулу для A_i:

$$A_i = 1-[2^{[i/2]-i/2}]-[2^{[i/3]-i/3}]-[2^{[i/5]-i/5}]+[2^{[i/30]-i/30}]. \qquad (4)$$

Упражнения

14. Докажите формулу (4).
15. Выведите формулу для числа дел, которые будет делать Петя в k-й день.

Из формулы (4) сразу видно, что $A_{i+30}=A_i$. Вычислить значения первых тридцати коэффициентов вы, конечно, сумеете сами.

Решение задачи 5. Эта задача следует из задачи 2. Действительно,

$$\psi(x)-\psi(\sqrt{x}) = \theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\cdots \geqslant \theta(x),$$

а

$$\psi(x)-2\psi(\sqrt{x}) = \theta(x)-\theta(\sqrt{x})+\cdots \leqslant \theta(x).$$

Решение задачи 6. Поскольку $a_p=[\log_p x]$,

$$a_p \log p \leqslant \log_p x \log p = \log x, \quad (a_p+1)\log p > \log x.$$

Поэтому

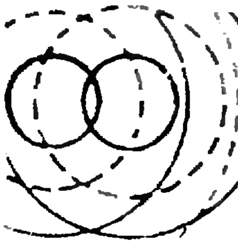
$$\psi(x) = \sum_{p\leqslant x} a_p \log p \leqslant \sum_{p\leqslant x} \log x = \pi(x)\log x,$$

$$\psi(x)+\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} (a_p+1)\log x > \sum_{p\leqslant x} \log x = \pi(x)\log x,$$

откуда

$$\frac{\psi(x)}{\log x} < \pi(x) < \frac{\psi(x)+\theta(x)}{\log x}.$$

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»



Исследование волн на поверхности воды

К. Стонг

Ниже мы публикуем переработанный вариант статьи, помещенной в октябрьском номере журнала «Scientific American» за 1962 год.

Публикацию статьи подготовил А. С. Варпаховский.

С различными волнами мы встречаемся повсюду, начиная от гамма-лучей с очень маленькой длиной волны до огромных волновых перемещений в облаках рассеянной между звездами мелкой пыли. Но так как все волны переносят энергию, то не удивительно, что их поведение во многом одинаково.

В однородной среде волны распространяются по прямым линиям с постоянной скоростью, изменяя направление и скорость в тех местах, где изменяются физические свойства среды. Если звуковая волна в атмосфере попадает на твердый объект, например, кирпичную стену, то часть ее возвращается, подобно эху, к источнику.

Изучение волн одного типа позволяет исследователю узнать, что можно ожидать от волн других типов. Так, например, о некоторых акустических свойствах аудитории можно судить, наблюдая за поведением волн в плоской ванне с водой.

Волновую ванну можно сделать в домашних условиях (рис. 1). Основная ее часть состоит из деревянной рамки *6* со стеклянным дном. Толщина рамки около 5 *см*, площадь стеклянного дна $\approx 0{,}2$ *м*^{2}. Чтобы вода не протекала, дно следует прикрепить к раме мастикой или пластилином. Ванна устанавливается на четырех ножках на высоте около 0,5 *м* от пола. В качестве источника света для отбрасывания теней от ряби на экран *9*, расположенный под стеклом, используется матовая лампа *5* мощностью 100 *вт*. Лампу помещают в коробку из огнеупорного картона *2* и устанавливают на высоте около полуметра над ванной на деревянной раме. В коробке нужно проделать отверстие *3*, чтобы получить точечный источник света.

На двух кронштейнах *10* закрепляется деревянная перекладина *11*. К этой перекладине на резинках подвешивается брусок, который и служит для возбуждения волн. Расстояние между бруском и водой можно регулировать изменением положения металлических кронштейнов и укорачиванием или удлинением резиновых подвесов.

В середине бруска (рис. 2) бельевой прищепкой *4* закрепляется полуторавольтовая батарея для игрушечного мотора. Жестким проводом, согнутым под прямым углом, к бруску прикреплены несколько бусинок *5* из стекла или пластика; расстояние между ними можно менять, если сделать в бруске отверстия через каждые 5 *см*. К валу мотора прикреплен винт длиной 2—3 *см*, выполняющий роль эксцентрического груза. Вал *1* проходит через отверстие, просверленное около головки винта, который жестко крепится гайкой; вторая гайка *3* находится в начале винта. Скорость мотора можно регулировать обычным реостатом, состоящим из тонкой стальной пружины и зажима типа «крокодил». Один конец пружины соединен с батареей, а зажим соединен с одним из выводов мотора. Необходимая скорость подбирается подключением вывода мотора к различным точкам пружины.

По внутреннему краю ванны (рис.3) проложена мягкая алюминиевая сетка *8*, загнутая под прямым углом по всей длине и покрытая одним слоем марли *9*. Такое сочетание марли и сетки поглощает энергию набегающих волн. Таким образом предотвращается отражение от краев ванны, что могло бы служить помехой.

Прибор выравнивают, заполняют ванну водой на глубину 2 *см*, включают лампу, подключают вывод мотора к стальной пружине и устанавливают высоту деревянного бруска так, чтобы один из стеклянных шариков касался воды. Вращение эксцентрического груза заставляет вибрировать прямоугольный кронштейн, а шарик — подниматься и опускаться в воде. Амплитуда волн регулируется изменением положения свободной гайки на крепежном винте. Длина волны, определяемая расстоянием между гребнями соседних волн, изменяется в зависимости от скорости мотора. Контрастность между светом и тенью волновой картинки, проектируемой на экран, регулируется поворотом лампы. Прибор должен иметь по крайней мере два шарика, то есть два точечных источника волн. Для получения волн с прямыми фронтами (аналога плоских волн, распространяющихся в трехмерных средах) держатель шарика поворачивают вверх, а сам брусок опускают в воду.

Установите прибор так, чтобы он возбуждал плоские волны с расстоянием между гребнями около 5 *см*. Волны будут расходиться от источ-

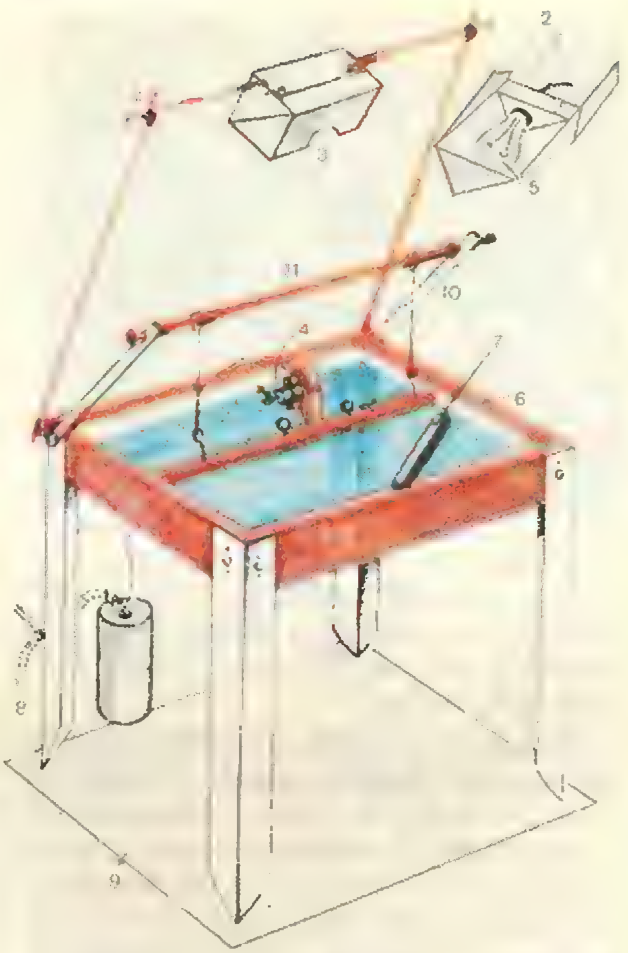


Рис. 1. Волновая ванна для моделирования волн.

1 — держатель источника света; *2* — защитная коробка; *3* — отверстие для света; *4* — мотор-вибратор (1,5 *в*); *5* — матовая лампа; *6* — рамка со стеклянным дном; *7* — парафиновый отражатель; *8* — зажим и стальная пружина для регулировки скорости мотора; *9* — экран; *10* — кронштейны; *11* — перекладина.

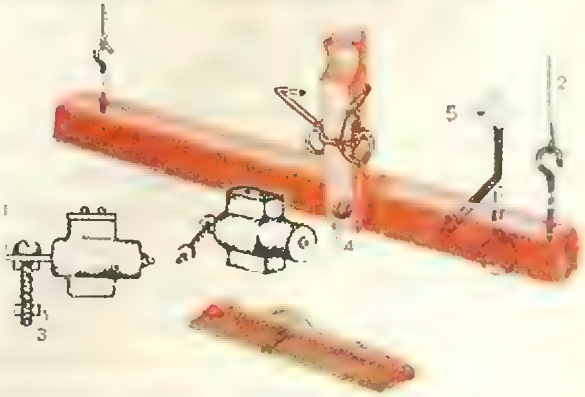


Рис. 2. Детали волнового генератора.

1 — вал, проходящий через отверстие в винте; *2* — держатели из резиновых полос; *3* — груз для регулирования амплитуды колебаний; *4* — мотор-вибратор, фиксируемый бельевой прищепкой; *5* — шарик на проволоке (его можно повернуть вниз для получения точечного источника волн).

ника к переднему краю ванны и там поглощаться. Установите лампу так, чтобы контрастность была максимальной. В ванне под углом 45° поставьте парафиновый барьер и посмотрите, как отражаются волны (рис. 4). В частности, можно убедиться, что угол Θ_i между направлением распространения волн и линией, перпендикулярной к барьеру, равен углу Θ_r между направлением распространения отраженных волн и тем же перпендикуляром.

Установите барьер под другим углом, меньшим, чем 45° и измените длину волн и амплитуду. Легко убедиться, что при любом расположении барьера угол падения равен углу отражения. Это — закон отражения для волн любого типа.

Замените парафиновый барьер стеклянной пластинкой шириной 15 *см* и длиной 30 *см*. Установите ее так, чтобы верхняя поверхность была на расстоянии 1 *см* от дна ванны. Наполните ванну водой так, чтобы расстояние от стекла до поверхности воды составляло 2—3 *мм*, и создайте ряд плоских волн. Посмотрите, как замедляются волны при пересечении края стекла и столкновении с мелкой водой. Из-за изменения скорости волны распространяются в новом направлении над стеклом так же, как шеренга солдат, которая сходит с сухопутного моста на грязную дорогу (рис. 5). В этом опыте волны отклоняются от первоначального направления за счет преломления — явления, наблюдаемого у волн всех типов, когда они попадают под углом из одной среды в другую, в которой распространяются с иной скоростью. Волны на воде отличаются тем, что меняют скорость распространения при изменении глубины среды. Приблизительно можно считать, что отношение скоростей распространения волн в мелкой и глубокой воде пропорционально отношению глубин воды. Это отношение в действительности не что иное, как показатель преломления на границе двух сред. Скорость распространения световых и звуковых волн изменяется в зависимости от плотности среды.

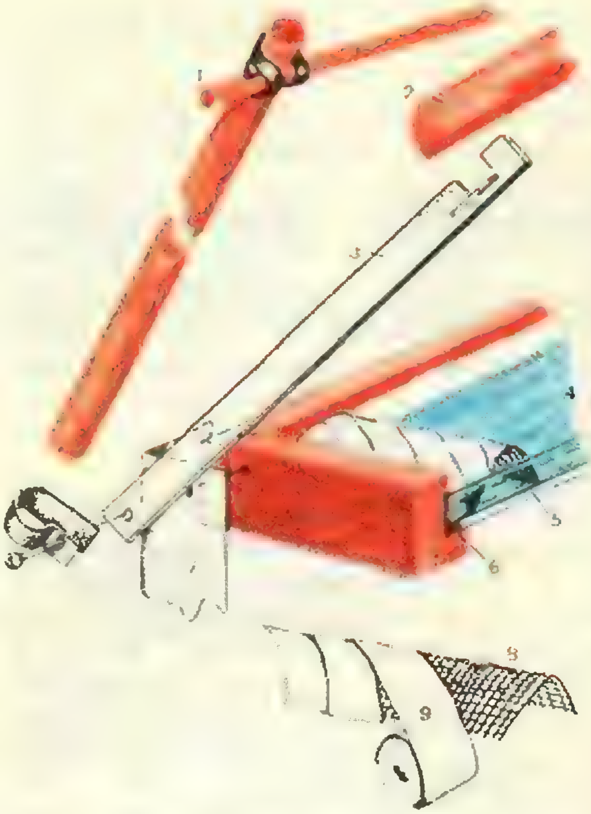


Рис. 3. Детали держателей ванны и волнового поглотителя.

1 — держатель источника света; *2* — держатель бруска с моторчиком; *3* — металлический кронштейн; *4* — вода; *5* — стекло; *6* — мастика; *7* — алюминиевые стойки; *8* — поглотитель волн; *9* — бинт, намотанный на сетку.

Отражение в месте перехода с глубокой воды на мелкую можно умень-

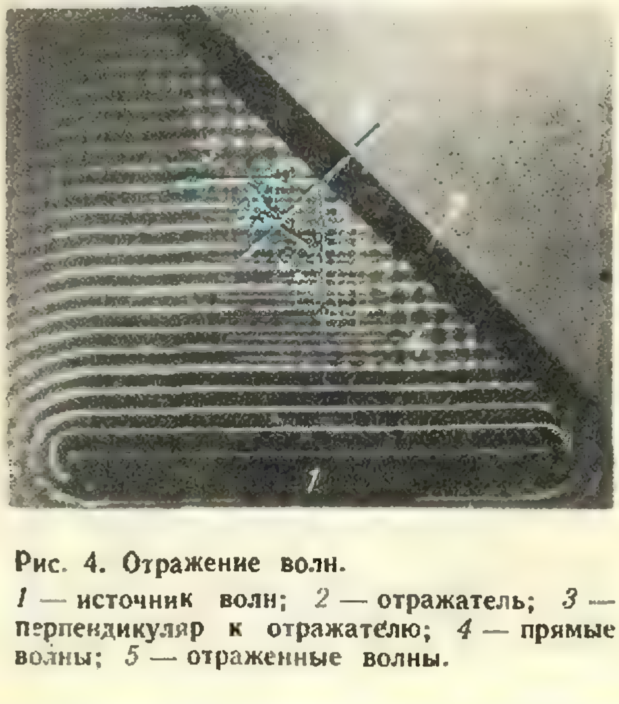


Рис. 4. Отражение волн.

1 — источник волн; *2* — отражатель; *3* — перпендикуляр к отражателю; *4* — прямые волны; *5* — отраженные волны.

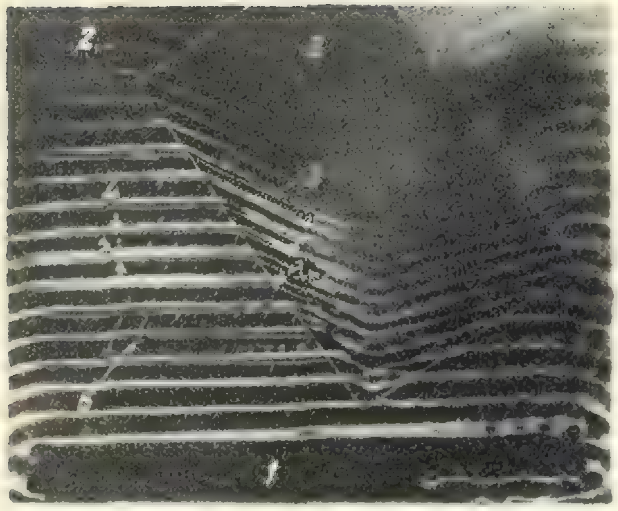


Рис. 5. Преломление волн.

1 — источник волн; *2* — глубокая вода; *3* — мелкая вода; *4* — прямые волны; *5* — преломленные волны; *6* — отраженные волны.

шить, заточив край стекла (рис. 6), но нельзя устранить совсем.

Энергию волн можно сфокусировать, рассеять или как-то распределить барьерами различной формы. Это делается параболическими рефлекторами в телескопах, прожекторах, радарах и даже раковинах оркестра. Фокусировку волн можно воспроизвести в волновой ванне. Сделайте барьер из парафина или резиновой трубки в форме параболы и направьте на него плоские волны. От любой точки барьера отраженные волны пойдут к одной и той же точке — фокусу параболы. Наоборот, круговая волна, возникающая в фокусе, отражаясь от параболического барьера, становится плоской (рис. 7). (В этом опыте волна создается каплей воды из пипетки, контуры которой видны на фотографии.)

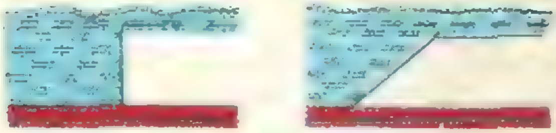


Рис. 6.

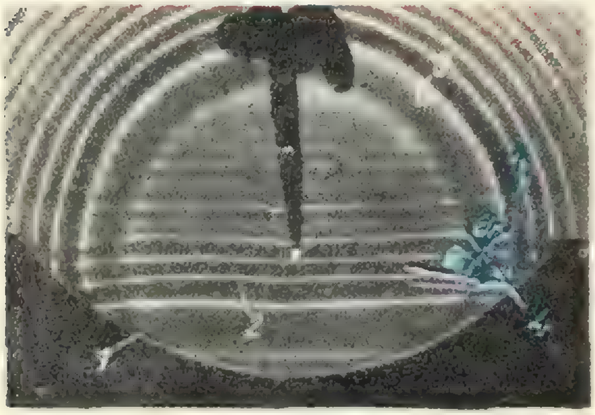


Рис. 7. Отражение от параболического барьера.

1 — параболический отражатель; *2* — прямые волны; 3 — отраженные волны; *4* — нормаль к параболическому отражателю.

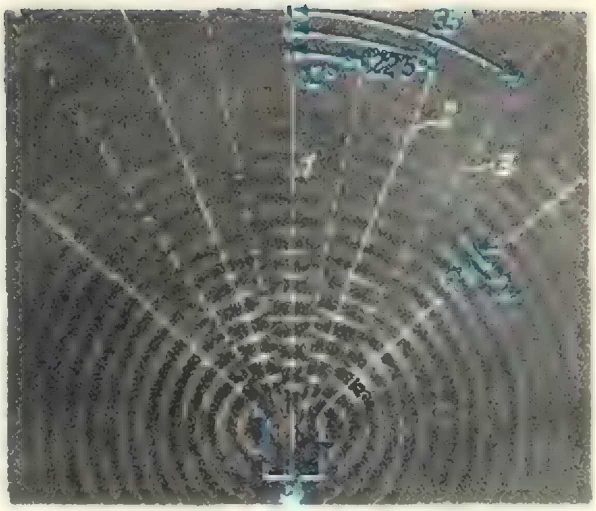


Рис. 8. Интерференция волн.

1 — центральный максимум; *2* — радиальный максимум; *3* — узел.

Волны от двух и более источников распространяются в однородной среде независимо друг от друга, хотя волновая энергия в любой точке среды в каждый момент равна сумме энергий всех волн, пришедших в эту точку. Если совпадают гребни волн от двух источников, амплитуды волн складываются; если же гребень одной волны совпадает с впадиной другой волны той же амплитуды, то волны взаимно уничтожаются. Это явление называется интерференцией волн.

Интерференцию можно воспроизвести в волновой ванне, установив два шарика так, чтобы они касались воды на расстоянии 5 *см* друг от друга. На рисунке 8 приведена типичная картина интерференции волн, создаваемых двумя шариками. Максимум амплитуды возникает там, где совпадают гребни волн, а узлы — там, где гребни совпадают с впадинами. Легко вычислить углы, при которых возникают максимумы и узлы. Синус угла для максимума равен $n\lambda/d$, где n — номер максимума (центральный максимум, перпендикулярный линии, соединяющей источники, имеет «нулевой» номер, а радиальные максимумы, расположенные по обе стороны от центрального максимума, имеют последовательно номера «первый», «второй», «третий» и т. д.), λ — длина волны и d — расстояние между источниками. Аналогично, узлы лежат на луче, определяемом уравнением $\sin\theta = (m - 1/2)\lambda/d$. Здесь m — номер узла.

Барьеры не обязательно должны быть сплошными. Решетка из равномерно расположенных штифтов также отражает волны (рис. 9). Когда плоские волны последовательно наталкиваются на решетку, от каждого штифта расходятся круговые волны, которые интерферируют и снова образуют плоские волны. Направление, соответствующее наибольшей амплитуде этих волн, составляет с рядами, образующими решетку, угол θ, для которого $\sin\theta = n\lambda/2d$. $\sin\theta_{max}$ даст направление наибольшей амплитуды волн, n — целое число, λ — длина волны, d — расстояние между соседними рядами решетки (период решетки) (рис. 10). Это соотношение называют формулой Брэгга — Вульфа.

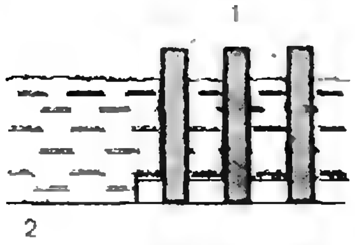


Рис. 9. Поперечное сечение решетки из штифтов.

1 — **штифты;** *2* — **основание решетки из пластика.**

С помощью волновой ванны можно исследовать эффект Доплера *). Доплер обнаружил, что повышение тона свистка у быстро приближающегося поезда и смещение цвета движущейся к земле звезды в сторону синей части спектра — явления одной природы. Оба явления обусловлены тем, что движущиеся источники волн могут догонять, а иногда и перегонять испускаемые ими волны. Чтобы продемонстрировать эффект Доплера в ванне, возьмите небольшую трубочку, которая с помощью мембраны, приводимой в действие соленоидом, направляет в ванну через равные промежутки времени порции воздуха, одновременно двигаясь по ванне с заданной скоростью. (Можно смонтировать у края ванны несколько участков игрушечной железной дороги и установить трубочку в игрушечном вагончике). Когда трубочка перемещается со скоростью, меньшей скорости волн, гребни перед ней располагаются более часто, а позади — более редко.

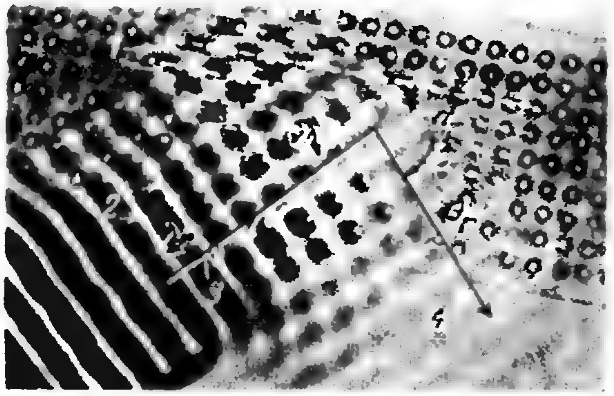


Рис. 10. Отражение от решетки.

1 — **ряды штифтов;** *2* — **фронт прямых волн;** *3* — **направление распространения прямых волн;** *4* — **направление распространения отраженных волн;** *5* — **фронт отраженных волн.**

Эффект Доплера наблюдается в различного рода волнах, в том числе радиоволнах. Пользуясь сравнительно несложной аппаратурой, можно по радиосигналам искусственного спутника, учитывая эффект Доплера, определить величину и направление скорости спутника.

Все эти эксперименты — лишь немногое из того, что можно проделать с помощью несложных приспособлений в волновой ванне. Каждый, кто построит и оборудует такую ванну, убедится, что интересных опытов хватит не на один непогожий день.

---

*) Более подробно об эффекте Доплера рассказывается в статье Л. Г. Асламазова «Эффект Доплера», «Квант» № 4, 1971.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения задач можно посылать не позднее чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете; например, «Задачник «Кванта», М137, Ф139. В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь).

Звездочкой отмечены более трудные задачи.

ЗАДАЧИ

М141. Выберем на высоте BH треугольника ABC произвольную точку P. Пусть K — точка пересечения прямых AP и BC, L — точка пересечения прямых CP и AB. Докажите, что отрезки KH и LH составляют равные углы с высотой BH.

Е. В. Саллинен

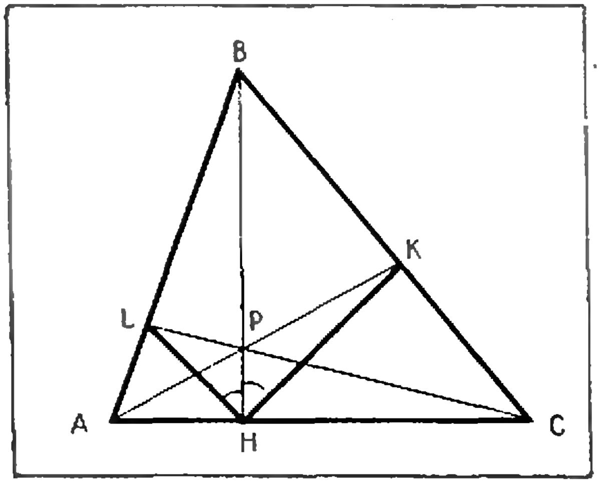


Рис. 1.

М142. а) Докажите, что нельзя занумеровать ребра куба числами 1,2,...,12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трех выходящих из нее ребер была одной и той же.

б)* Можно ли вычеркнуть одно из чисел 1,2,...,12, 13 и оставшимися занумеровать ребра куба так, чтобы выполнялось то же условие?

Н. Н. Константинов,
Н. Б. Васильев

М143. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого выполняется следующее условие: если n делится на $p-1$ и p простое, то n делится на p.

М144. Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, α, β, чтобы прямоугольник $a\times b$ можно было разрезать на несколько прямоугольников $\alpha\times\beta$.

Например, можно ли прямоугольник 50×60 разрезать на прямоугольники размерами:

а) 20×15; б) 5×8; в) $6{,}25\times 15$;
г) $(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})$.

А. Т. Колотов

М145. A обещает платить B в среднем $\sqrt{2}$ руб. в день. Они условились, что в n-й день A будет получать целое число a_n рублей (a_n равно 1 или 2) с таким расчетом, чтобы сумма, полученная за первые n дней ($a_1+a_2+\ldots+a_n$), была как можно ближе к числу $n\sqrt{2}$.

Например, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1$, $a_4=2$, $a_5=1$. Докажите, что последовательность a_1, a_2, a_3, ... непериодическая.

А. К. Толпыго

Ф153. Почему реки, текущие даже по совершенно плоской однородной почве, изгибаются?

Для простоты рассмотрите реку, текущую вдоль экватора.

Ф154. Оцените, сколько капелек воды имеется в 1 $м^3$ тумана, если видимость составляет 10 $м$ и туман оседает через 2 часа? Высота слоя тумана 200 $м$.

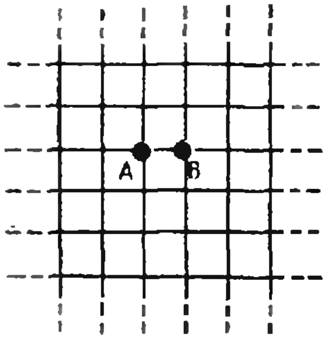


Рис. 2.

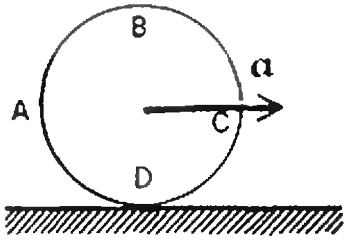


Рис. 3.

Сила сопротивления воздуха, действующая на каплю воды радиуса R (*м*), движущуюся со скоростью v (*м/сек*), равна $4{,}3Rv$ (*н*).

П. Л. Капица

Ф155. Один моль газа сжимают так, что его объем во время процесса сжатия пропорционален давлению $V=\alpha P$. Давление газа увеличивается от P_1 до P_2. Найти коэффициент α, если теплоемкость этого газа при постоянном объеме равна c_V и во время процесса газу сообщается количество тепла Q.

И. Ш. Слободецкий

Ф156*. Имеется бесконечная проволочная сетка с прямоугольной ячейкой. Сопротивление каждой из проволок, составляющих ячейку сетки, равно r. Найти сопротивление сетки между точками A и B (рис. 2).

Ф157. По плоскости катится обруч. Ускорение центра обруча равно a. Найти ускорение точек A, B, C и D обруча (рис. 3) через время t после начала его движения, если начальная скорость центра обруча равна v_0 и обруч не проскальзывает.

О ЧИСЛЕ «пи»

Читатель нашего журнала Л. Вейдеман (из г. Риги) обратился в «Квант» с вопросом: «В книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения...» на стр. 418 написано: «Отношение длины окружности к ее диаметру, которое древние греки обозначили буквой π («пи»)...».

В книге «Алгебра и элементарные функции» (учебное пособие для средней школы)... член редколлегии «Кванта» профессор А. И. Маркушевич на стр. 278—279 пишет, что «Впервые это обозначение встречается в книге английского математика В. Джонса (1706)». Кому же верить?»

Нам кажется, что ответ на этот вопрос будет интересен многим нашим читателям. Ниже мы помещаем текст ответа профессора А. И. Маркушевича.

Уважаемый тов. Вейдеман!

К сожалению, авторы (да и редакторы) научно-популярных книг далеко не всегда являются знатоками истории науки, и поэтому в этих книгах можно встретить устаревшие, а иногда и просто ошибочные утверждения исторического характера. Именно так обстоит дело с книгой Гарднера. Древние греки, не знавшие современных цифр, обозначали числа (целые положительные) буквами своего алфавита. В частности, буква π (с добавочной черточкой наверху) обозначала число 80 и только это число, что, очевидно, не имеет ничего общего с отношением длины окружности к диаметру. Но π является также и первой буквой греческого слова περίφερία, означающего окружность (отсюда наше: периферия). Неудивительно, что ряд английских математиков XVII века (но не раньше!) использовали букву π для обозначения длины самой окружности (произвольного радиуса). Впервые в истории математики эта буква была употреблена для обозначения отвлеченного числа 3,1415... в сочинении *Synopsis Palmariorum Matheseos* английского преподавателя математики Вильяма Джонса в 1706 году. Всеобщее распространение это обозначение получило только благодаря трудам Эйлера (начиная с 1737 г.), пришедшего к этому, скорее всего, независимо от Джонса.

Прочесть *обо* всем этом можно в классическом сочинении Д. Е. Смита (*History of mathematics by D. Smith, vol.* II, *New York*, 1958, *p*. 312), или — в виде краткой ссылки — в советском коллективном труде: «История математики», том второй, М., изд-во «Наука», 1970, стр. 61.

А. И. Маркушевич

ЗАДАЧНИК
кванта

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М101—М105.

М101

В колонию, состоящую из n бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся, и так далее.

Будет ли эта колония жить бесконечно долго или в конце концов погибнет?

Легко проверить, что количество бактерий и вирусов будет меняться со временем по следующему закону:

Время (минуты)	Кол-во вирусов	Кол-во бактерий
0	1	n
1	2	$2(n-1)$
2	2^2	$2^2(n-2)$
3	2^3	$2^3(n-3)$
...	...	...
t	2^t	$2^t(n-t)$
$t+1$	2^{t+1}	$2^{t+1}(n-t-1)$
...	...	...

Отсюда ясно, что при $t=n$ количество бактерий обратится в нуль — колония погибнет.

Мы получили около 80 писем с решением этой задачи и одно письмо, где был дан неверный ответ.

М102

Множество на плоскости, состоящее из конечного числа точек, обладает следующим свойством: для любых двух точек A и B множества найдется точка C множества такая, что треугольник ABC равносторонний.

Сколько точек может содержать такое множество?

Докажем, что такое множество может содержать только три точки (разумеется, предполагая, что оно содержит более одной).

Обозначим это множество буквой $Г$.

Пусть A и B — две точки множества $Г$, расстояние между которыми наибольшее. По условию, $Г$ содержит такую точку C, что треугольник ABC равносторонний: $AB=BC=AC=d$.

Пусть P — еще одна точка, принадлежащая множеству $Г$. Поскольку расстояние между точками P и A не превосходит d, точка P должна лежать внутри круга радиуса d с центром A. Точно так же она должна лежать и внутри кругов радиуса d с центрами B и C. Таким образом, множество $Г$ не выходит за пределы общей части этих трех кругов — криволинейного «треугольника» T (рис. 1).

Далее, вместе с точками P и A множеству $Г$ должна принадлежать одна из двух точек Q и R — вершин равносторонних треугольников APQ и APR, то есть точек, получающихся из P поворотом на 60° (в ту или другую сторону) вокруг A (рис. 2). Для того чтобы точка Q лежала внутри T, нужно, чтобы точка P лежала в пределах голубого «лепестка» AB; действительно, если повернуть треугольник T вокруг точки A на 60° против часовой стрелки, то точки лепестка AB и только они не выйдут за пределы

T. Точно так же, для того чтобы точка R лежала внутри T, нужно, чтобы точка P лежала в пределах голубого «лепестка» AC. Итак, мы доказали, что любая точка P множества Γ должна лежать в пределах множества T_A, состоящего из двух голубых лепестков AB и AC с общей вершиной A. Но точно так же доказывается, что Γ заключено в пределах множества T_B (рис. 3) и T_C (рис. 4), а общая часть трех множеств T_A, T_B и T_C состоит только из трех точек A, B и C. Следовательно, никакая другая точка P не может принадлежать множеству Γ.

Правильное решение задачи прислали *А. Блохин* (Климовск Кемеровской обл.), *Н. Чернов* (Кривой Рог), *Ш. Слепой* и *Э. Туркевич* (Черновцы), *А. Меркурьев* (Ленинград), *М. Розов* (Минск), *А. Глушко* и *В. Корниенко* (Воронеж) и другие.

В нашем решении мы пользовались только тем, что в множестве Γ можно указать две точки, расстояние между которыми максимально. Для множества Γ, состоящего из конечного числа точек, это, разумеется, так. Однако утверждение задачи остается верным, если наложить на множество Γ более слабое условие — условие ограниченности. Для решения задачи в этом случае необходимы дополнительные рассуждения: их без труда смогут провести те, кто владеет первоначальными понятиями топологии точечных множеств на плоскости, например, в объеме книги: Н. Стинрод и У. Чинн «Первые понятия топологии» («Мир», популярная серия «Современная математика»). Заметим, что от условия ограниченности отказаться уже нельзя.

М103

Исследуйте, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=a, \\ x^2-y^2=b, \end{cases}$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Перейдем к новым переменным по формулам

$$\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2}, \\ y=\dfrac{u-v}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Тогда данная в условии система запишется так:

$$\begin{cases} 3u^2+v^2=4a, \\ uv=b. \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что каждой паре (x, y) соответствует по формулам (1) одна пара (u, v), а каждой паре (u, v) — пара (x, y), так что нам нужно выяснить, сколько решений (u, v) при различных значениях параметров a и b имеет система (2). (Сразу ясно, что при $a<0$ решений нет, при $a=0$ и $b\neq 0$ — тоже, а при $a=b=0$ — единственное решение $u=v=0$, но это можно было бы и не отмечать, поскольку наше дальнейшее рассуждение годится и для этих случаев.)

Вычтем и прибавим к первому уравнению системы (2) второе уравнение, умноженное на $2\sqrt{3}$.

Получим такую систему:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}u-v)^2=4a-2\sqrt{3}b, \\ (\sqrt{3}u+v)^2=4a+2\sqrt{3}b \end{cases} \qquad (3)$$

равносильную системе (2). [Подумайте, как из (3) вывести (2).] Ясно, что каждому набору значений $\sqrt{3}u-v$ и $\sqrt{3}u+v$, который получается из (3), соответствует одно решение (u, v) системы. Остается учесть, что (в области действительных чисел) уравнение $z^2=c$ имеет два решения: $z_1=\sqrt{c}$, $z_2=-\sqrt{c}$, если $c>0$, одно $z=0$, если $c=0$, и не имеет решений, если $c<0$.

Ответ. Решения есть тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$-2a\leqslant b\sqrt{3}\leqslant 2a.$$

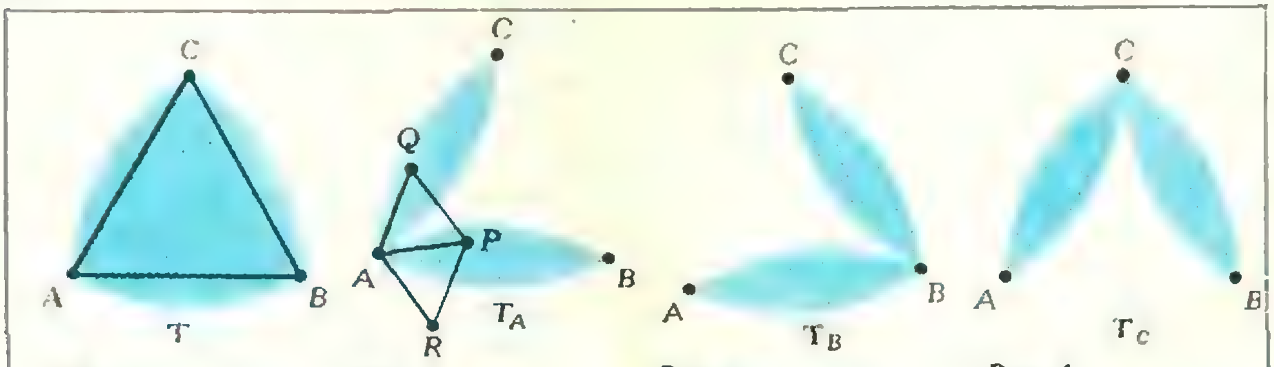


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

На рисунках 1—4 области, окрашенные в голубой цвет, ограничены дугами окружностей радиуса $d=AB$ с центрами в точках A, B или C. Проверьте, что эти области пересекаются лишь в точках A, B и C.

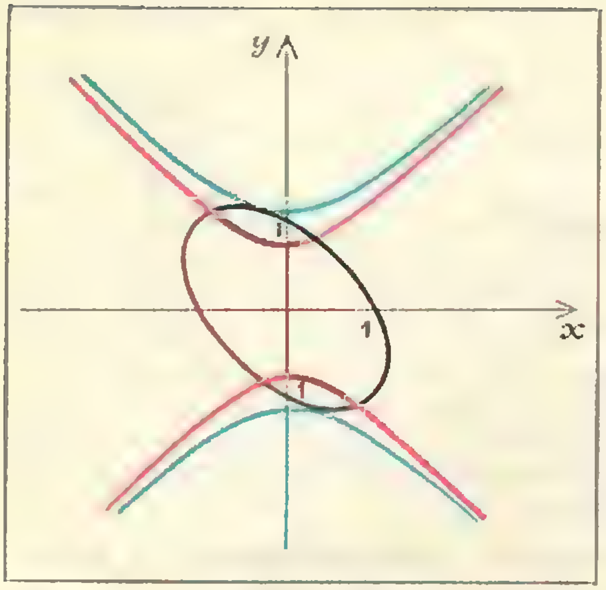


Рис. 5. Поворотом на 45° по часовой стрелке из этого рисунка получается рисунок 6 (но в другом масштабе).

причем, если оба неравенства строгие («меньше»), то решений четыре; если одно из них обращается в равенство — то два, если оба (это возможно лишь при $a=b=0$), то одно.

Многие читатели, приславшие решения этой задачи, приводят (как правило, в несколько иной форме) этот результат, а также явные формулы для решений системы. Их нетрудно получить из наших выкладок, но они довольно громоздки, и мы не будем их приводить, тем более, что это и не требуется в условии. Вместо этого укажем на геометрическую интерпретацию уравнений системы: первое задает эллипс, второе — гиперболу. Красная гипербола на рисунках 5 и 6 соответствует таким значениям параметров a и b, когда кривые пересекаются (четыре решения), голубые — когда гипербола касается эллипса (два решения).

Некоторые читатели провели исследование и для того случая, когда система решается в области всех комплексных чисел. И здесь наше рассуждение позволяет сразу дать ответ: в комплексных числах (x, y) система имеет четыре, два или одно решение, если из двух равенств $2a=b\sqrt{3}$, $2a=-b\sqrt{3}$ соответственно нуль, одно или два верных.

M104

Внутри треугольника ABC лежат такие две точки P и Q, что отрезки AP и AQ составляют равные углы с биссектрисой угла A треугольника, а отрезки BP и BQ составляют равные углы с биссектрисой угла B.

Докажите, что отрезки CP и CQ составляют равные углы с биссектрисой угла C (рис. 7).

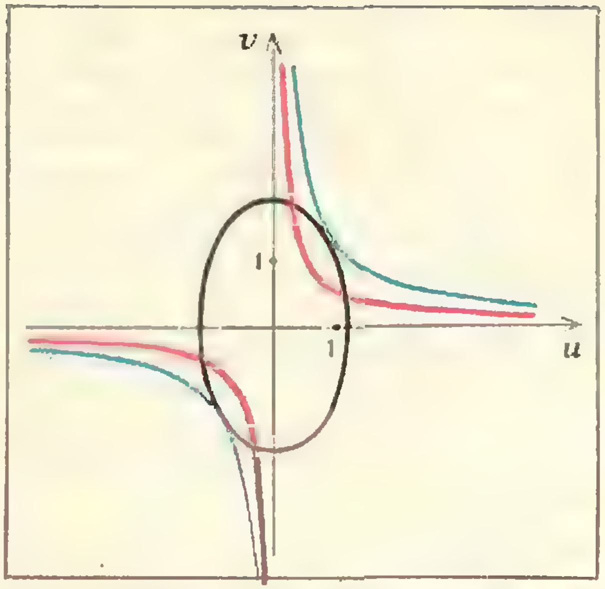


Рис. 6. График гиперболы, заданной уравнением $uv=1/2$ окрашен в красный цвет, гиперболы с уравнением $uv=2/\sqrt{3}$ — в синий. Черным цветом отмечен эллипс, уравнение которого $3u^2+v^2=4$.

Пусть A, B и C — углы при соответствующих вершинах треугольника ABC. По условию $\angle PAC=\angle QAB=\alpha$, $\angle PBA=\angle QBC=\beta$. Мы должны доказать равенство углов $\angle PCA=\gamma_1$ и $\angle QCB=\gamma_2$.

Приведем решение *Э. Туркевича*, использующее теорему синусов; близкое к этому решение прислали *С. Лягушин* (Днепропетровск), *Ю. Кисин* (Старая Русса), *С. Цанава* (Кутаиси), *М. Илларионов*, *А. Глушко* и *В. Корниенко* (Воронеж), *М. Розов* и *А. Черняк* (Минск).

Перемножив равенства

$$\frac{AP}{BP}=\frac{\sin\beta}{\sin(A-\alpha)};\quad \frac{CP}{AP}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1};$$

$$\frac{BP}{CP}=\frac{\sin(C-\gamma_1)}{\sin(B-\beta)};\quad \frac{AQ}{BQ}=\frac{\sin(B-\beta)}{\sin\alpha};$$

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(C-\gamma_2)};\quad \frac{BQ}{CQ}=\frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta},$$

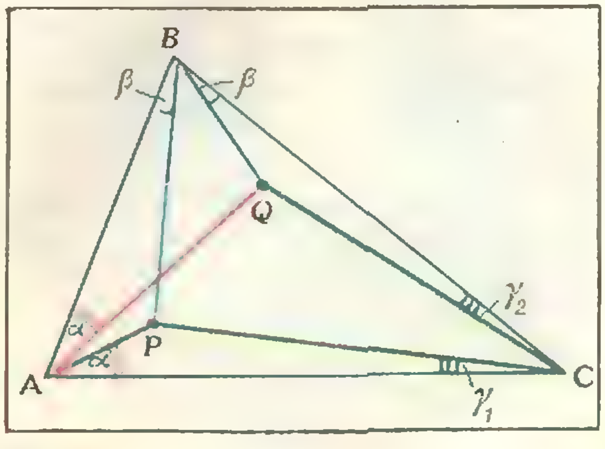


Рис. 7.

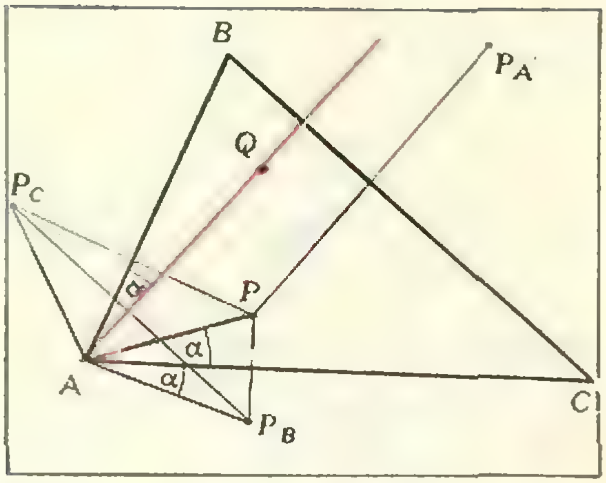


Рис. 8.

получим

$$\sin(C-\gamma_1)\sin\gamma_2=\sin(C-\gamma_2)\sin\gamma_1 \text{ или}$$

$$\sin C\ \sin(\gamma_1-\gamma_2)=0.$$

Поскольку $0<C<\pi$ и $-\pi<\gamma_1-\gamma_2<\pi$, отсюда следует, что $\gamma_1=\gamma_2$.

В. Н. Березин (Москва) сообщил другое, чисто геометрическое решение.

Пусть P_A, P_B и P_C — точки, симметричные точке P относительно сторон BC, AC AB треугольника ABC. Заметим, что для того, чтобы отрезок AQ составлял с отрезками AB и AC углы, равные $\angle PAC=\alpha$ и $\angle PAB=A-\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы он шел по биссектрисе угла P_BAP_C (рис. 8). Поскольку $AP_B=AP_C$, это условие можно сформулировать еще так: точка Q должна лежать на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка P_BP_C. Теперь осталось доказать, что если Q лежит на перпендикулярах, проведенных через середину отрезков P_BP_C и P_CP_A, то Q лежит также на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка P_BP_C. Это очевидно: точки P_A, P_B, P_C не лежат на одной прямой, и Q является центром круга, описанного около треугольника $P_AP_BP_C$ (рис. 9).

Разумеется, точно так же можно доказать, что P — центр круга, описанного около треугольника $Q_AQ_BQ_C$, где Q_A, Q_B, Q_C — точки, симметричные Q относительно сторон треугольника BC, CA, AB. Отображение $P\to Q$ совпадает с обратным к нему. При этом отображении центр вписанного круга переходит в себя, а центр описанного круга и точка пересечения высот — друг в друга (проверьте это!).

М105

Сумма цифр числа после его умножения на 8 может уменьшиться $75\cdot 8=600$ — сумма цифр была $7+5=12$, а стала 6. Однако она не может уменьшиться более, чем в 8 раз. Докажите это.

Другими словами, докажите, что для любого натурального числа N

$$\frac{S(8N)}{S(N)}\geqslant\frac{1}{8},$$

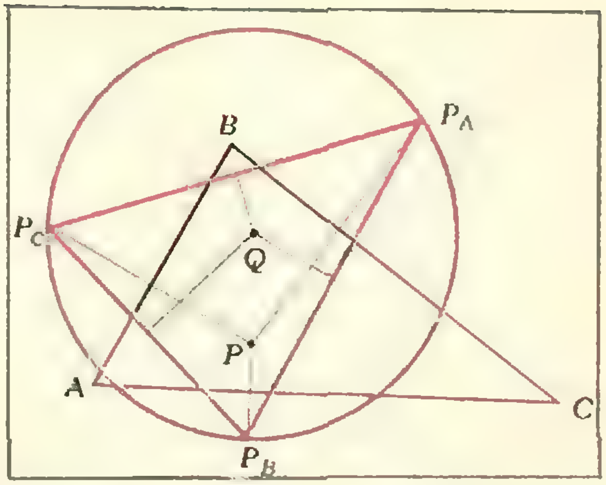


Рис. 9.

где $S(A)$ — сумма цифр числа A (в десятичной записи)

Для каких еще натуральных k существует такое положительное число c_k, что для всех натуральных N

$$\frac{S(kN)}{S(N)}\geqslant c_k?$$

Найдите наибольшее подходящее значение c_k

Сначала заметим, что $S(8\cdot 125)=S(1000)=1$.

Нам будут нужны следующие свойства функции $S(N)$:

1°. $S(A+B)\leqslant S(A)+S(B)$;

2°. $S(A_1+A_2+\ldots+A_n)\leqslant S(A_1)+S(A_2)+\ldots+S(A_n)$;

3°. $S(nA)\leqslant nS(A)$;

4°. $S(AB)\leqslant S(A)S(B)$.

Чтобы убедиться в справедливости свойства 1°, достаточно представить себе, что числа A и B складываются «столбиком». Свойство 2° получается из 1° простой индукцией. 3° — частный случай 2°.

Если представить себе, что A множится на B «столбиком» и к каждой цифре числа B применить 3°, то получится 4°.

Теперь легко доказать требуемое неравенство: $S(N)=S(1000N)=S(125\cdot 8N)\leqslant S(125)S(8N)=8S(8N)$, то есть

$$\frac{S(8N)}{S(N)}\geqslant\frac{1}{8}.$$

То же рассуждение годится для любого числа $k=2^q5^q$. Обозначим через c_k число $\frac{1}{S(2^q5^r)}$. Докажем, что для любого N $\frac{S(kN)}{S(N)}\geqslant c_k$ (при $N=2^q5^r$ это неравенство превращается в равенство, поскольку

$S(kN)=S(10^{r+q})=1)$. Для любого N

$$S(N)=S(10^{r+q}N)\leqslant S(2^q5^r)S(kN)=$$

$$=\frac{1}{c_k}S(kN),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что для чисел k вида $Q2^r5^q$, где Q взаимно просто с 10, отношение $S(KN)/S(N)$ может быть меньше любого заданного $\varepsilon>0$, то есть требуемого положительного числа c_k не существует.

Нам потребуется такая лемма: существует число 10^m-1 (состоящее из m девяток), делящееся на Q. Ее легко доказать с помощью «принципа Дирихле» *). Рассмотрим остатки от деления на Q чисел

9
99
999
9999
...

Какие-то два из них совпадают, и разность соответствующих чисел делится на Q: нули в конце этой разности можно отбросить (поскольку Q взаимно просто с 10).

Пусть $10^m-1=QR$ и n — любое натуральное число. Тогда $10^{mn}-1$ — число, состоящее из mn девяток, — делится на Q и частное $R_n=R(10^{m(n-1)}+10^{m(n-2)}+\ldots+10^m+1)$.

Теперь заметим, что у числа $Q(R_n+1)=QR_n+Q=10^{mn}+Q-1$ сумма цифр при любом n равна $S(Q)$, а сумма цифр числа R_n+1 не меньше $(n-1)S(R)$. Таким образом, выбрав n достаточно большим и взяв $N=R_n+1$, мы получим, что

$$\frac{S(kN)}{S(N)}=\frac{S((R_n+1)Q2^r5^q)}{S(R_n+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{S(2^r5^q)S(Q)}{(n-1)S(R)}<\varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что при $k=2^r5^q$ искомое число c_k существует и равно $\frac{1}{S(2^q5^r)}$, а при других k такого положительного c_k не существует. Правильные ответы прислали *Э. Туркевич, М. Илларионов, М. Розов.*

Н. Б. Васильев

---

*) См. статью А. И. Орлова в «Кванте» № 7, 1971.

В этом номере мы публикуем решения задач Ф116—Ф122.

Ф116

Если температура воздуха в цилиндре, показанном на рисунке 10, равна T_0 ($T_0>0°$ C), то он остывает до температуры $\frac{T_0}{2}$ примерно за время $\tau=30$ *сек*. Поршень начинают вдвигать и выдвигать с некоторой частотой. В каком случае растает больше льда, окружающего цилиндр, за 50 ходов поршня, если они сделаны: а) за 1 минуту; б) за 1 час; в) за 30 суток?

Скорость изменения температуры воздуха в цилиндре пропорциональна самой температуре. Это означает, что изменение температуры идет по экспоненте $T=T_0e^{-\alpha t}$ (α — коэффициент, t — время) (см. «Квант» № 1). Очевидно, если выбранные интервалы времени t составляют арифметическую прогрессию с разностью τ, то есть $t=n\tau$, то температура газа составляет геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-\alpha\tau}$. В этом нетрудно убедиться, записав формулу зависимости температуры газа от времени в виде $\frac{T}{T_0}=\left(e^{-\alpha\tau}\right)^n$. При $n=1$ $\frac{T}{T_0}=\frac{1}{2}$. Это означает, что $e^{-\alpha\tau}=\frac{1}{2}$ и $\frac{T}{T_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Отсюда следует, что в сосуде с неподвижным поршнем температура газа каждые 30 секунд будет уменьшаться вдвое.

Если поршень делает 50 ходов за 1 минуту, то один ход поршня делается за 1,2 секунды. Это время мало́ по сравнению с характерным временем процесса теплопередачи — 30 секундами. Поэтому тепло, выделяющееся при уменьшении объема газа, не успевает рассеяться и практически полностью будет отбираться при увеличении объе-

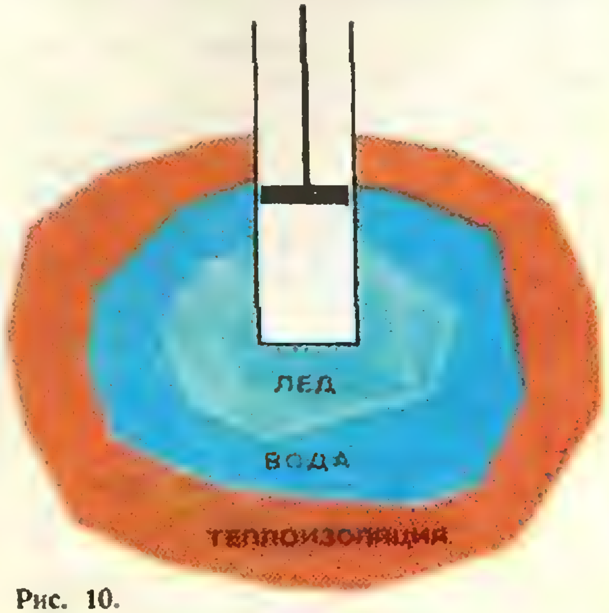


Рис. 10.

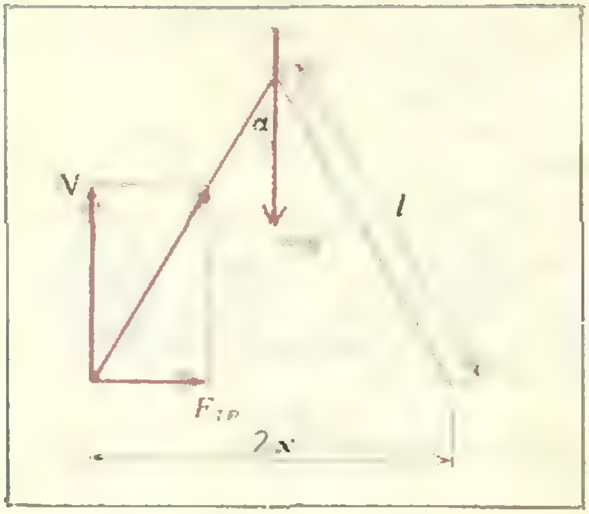


Рис. 11.

ма газа. Следовательно, в этом случае движение поршня не изменит скорости таяния льда.

Ясно также, что и при 50 ходах поршня за 30 суток лед будет таять так же, как он таял бы при неподвижном поршне. Теперь время одного хода поршня слишком велико по сравнению с тем временем, за которое растает практически весь лед и температура воды станет равной 0° С.

Если поршень делает 50 ходов за 1 час, то один ход делается за 1,2 минуты. Благодаря этому тепло, выделившееся при сжатии газа, успеет пойти на таяние льда. В этом случае льда растает больше, чем при неподвижном поршне.

Правильное решение этой задачи прислали *М. Флеров* (Москва) и *М. Вайнмахер* (Кривой Рог).

Ф117

По обледенелой дороге обычно идут, делая маленькие шаги. С какой шириной шага должен идти человек, не боясь упасть, если длина его ног равна 1 метру, а коэффициент трения подошв обуви о дорогу равен 0,1?

Пусть ширина шага равна $2x$ (рис. 11). Когда человек поднимает одну ногу, весь его вес приходится на вторую ногу. Тогда сила N реакции земли равна mg (m — масса человека). Это означает, что максимальная сила трения $F_{тр}$, которая может действовать на ногу человека, не давая ей скользить, равна kmg. Равнодействующая силы N и силы трения $F_{тр}$ направлена к центру тяжести человека, то есть практически вдоль ноги, и образует с вертикалью угол α:

$$\frac{F_{тр}}{N}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{kmg}{mg}=k,$$

но

$$\sin\alpha=\frac{x}{l}.$$

Следовательно,

$$x=l\sin\alpha=l\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\approx 0{,}1l=10\ (см).$$

Ширина шага, который может сделать пешеход, равна 20 *см*.

Эта задача оказалась самой легкой. Ее правильное решение прислали более 50 читателей.

Ф118

В камеру сгорания ракетного реактивного двигателя поступает в секунду масса m водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Выходное сечение сопла S. Давление в этом сечении P, абсолютная температура T. Определить силу F тяги двигателя.

Найдем массу водяных паров, образующихся при сгорании массы m водорода. Запишем уравнение реакции горения водорода

$$2H_2+O_2=2H_2O.$$

Из уравнения реакции можно заключить, что две молекулы водорода соединяются с одной молекулой кислорода. В результате получается две молекулы водяных паров. Это означает, что для сгорания одного киломоля водорода необходима половина киломоля кислорода, и в результате реакции получается один киломоль воды. При сгорании $n=\frac{m}{\mu_в}$ киломолей водорода получится столько же киломолей водяных паров ($\mu_в=2$ *кг/кмоль* — масса одного киломоля водорода). Поэтому при сгорании массы m водорода получается масса $M=\frac{m}{\mu_в}\mu_п=\frac{18}{2}m=9m$ водяных паров ($\mu_п=18$ *кг/кмоль* — масса одного киломоля пара). Эта масса водяных паров вылетает из сопла двигателя за одну секунду. Так как нам известна площадь выходного сопла двигателя, можно найти скорость v газа, выходящего из сопла. За одну секунду из сопла двигателя будет выброшен объем пара $V=vS$. Если плотность пара равна ρ, то масса этого объема пара будет равна $vS\rho$, поэтому $M=\rho Sv$.

Отсюда $v=\frac{M}{\rho S}=\frac{9m}{\rho S}$.

В эту формулу входит плотность пара. Она нам не известна, зато мы знаем давление пара и его температуру. Записав уравнение Клапейрона—Менделеева $PV=\frac{m}{\mu_п}RT$ (R — газовая постоянная), найдем, что плотность пара равна

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{P\mu_п}{RT}\ \text{и}\ v=\frac{9mRT}{P\mu_п S}.$$

Так как за время Δt из сопла ракеты выбрасывается масса пара $M\Delta t$, которой сообщается импульс $M\Delta tv$, то на газ действует сила

$$F_1 = \frac{MMv}{M} = Mv.$$

Такая же по величине сила, но направленная в противоположную сторону, действует на двигатель. Полная сила, действующая на двигатель (то есть сила тяги двигателя) равна сумме реактивной силы F_1 и силы статического давления $F_2 = pS$, то есть

$$F = Mv + pS = 81\,\frac{m^2RT}{p\mu_{\text{н}}S} + pS =$$

$$= \frac{9}{2}\,\frac{m^2RT}{pS} + pS.$$

Обычно сóпла ракетных двигателей устроены так, что давление p газа, выходящего из сопла, малó. Поэтому второй член в выражении для силы тяги двигателя мал по сравнению с первым и при расчетах им можно пренебречь.

Правильные решения прислали: *В. Кущк* (Ржев); *П. Сергеев* (Грозный), *Л. Смушкевич* (Магнитогорск), *И. Сидоров* (Москва), *С. Арасланова* (Н-Ивкино Кировской обл.), *Д. Фушман* (Черновцы), *Е. Долгов* (Москва), *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.), *В. Катенов* (Москва), *Г. Симоненков* (Каунас), *В. Белов* (Вологда), *Н. Федин* (Омск), *М. Федин* (Алушта), *В. Кулич* (Иваново Брестской обл.), *С. Черников* (Семипалатинск), *В. Коротких* (Новокузнецк), *О. Заумыслова* (Москва), *Ю. Полянский* (Зеленодольск ТАССР), *А. Редченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.), *С. Божевольный* (станица Копанская Краснодарского края), *Ю. Лурье* (Грозный), *Е. Шахнович* (Калинин. обл.), *Л. Брагинский* (Фрунзе), *Ю. Шаников* (Щигри Курской обл.), *А. Удальцов* (Калининград Московской обл.), *А. Гордиенко* (с. Полтавченское Краснодарского края), *Б. Бояршинов* (Коломна), *А. Смирнов* (Горький), *А. Мамула* (с. Дыбинцы Киевской обл).

Ф119

К маятнику AB с шариком массы M подвешен маятник BC с шариком массы m (рис. 12). Точка A совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом T. Найти длину нити BC, если известно, что нить AB все время остается в вертикальном положении.

Поскольку нить AB остается вертикальной, на шарик массы M во время движения системы не действуют горизонтальные силы. Это означает, что горизонтальные силы не действуют и на систему, состоящую из двух шариков, M и m, и шарики должны двигаться так, чтобы их центр масс не перемещался в горизонтальном направлении. Поэтому шарик массы m движется так, как будто он прикреплен к нити длины x, где x — расстояние от шарика до центра масс системы. Период колебаний такого маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$. Этот период, очевидно, равен периоду колебаний точки A, то есть T:

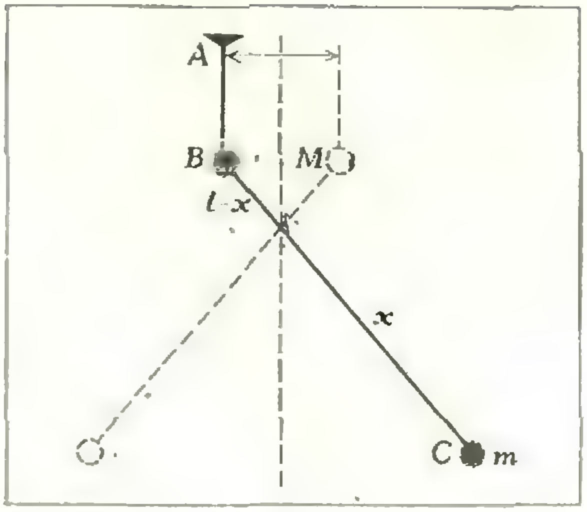


Рис. 12.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}. \qquad (1)$$

Найдем теперь x. Положение центра масс системы находится точно так же, как положение центра тяжести:

$$xm = (l-x)M.$$

Отсюда

$$x = l\,\frac{M}{m+M}.$$

Подставляя это выражение для x в формулу (1), получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{M}{m+M}}.$$

Отсюда

$$l = \frac{T^2g}{4\pi^2}\,\frac{m+M}{M}.$$

Правильное решение задачи прислали: *Л. Брагинский* (Фрунзе), *В. Коротких* (Новокузнецк), *М. Прегер* (Томск), *Н. Федин* (Омск), *Л. Смушкевич* (Магнитогорск), *Ю. Лурье* (Грозный), *П. Сергеев* (Грозный), *Е. Долгов* (Москва).

Ф120

Конькобежец по ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как разъяснить это различие в движении конькобежца и велосипедиста на вираже? Профиль трека изображен на рисунке 13.

Конькобежцу центростремительное ускорение сообщает сила трения о лед $F_{\text{тр}} = kN$, где N — сила нормального давления конькобежца на лед (рис. 14). Так как конькобежец не перемещается в вертикальном направлении, сила N равна по величине действующей на конькобежца силе тяжести mg. Поэтому $F_{тр} = kmg$ и $\frac{mv^2}{R} = kmg$.

Отсюда $v = \sqrt{kgR}$.

Делая поворот, конькобежец проходит расстояние πR. Время t, которое он затрачивает на поворот, равно

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{kg}}. \qquad (1)$$

Чем больше радиус окружности, по которой движется конькобежец, тем больше время, затрачиваемое на поворот. Хотя при увеличении радиуса поворота увеличивается максимальная скорость конькобежца, еще больше увеличивается проходимое им расстояние. Скорость пропорциональна $\sqrt{R}$, а расстояние — R. Именно поэтому конькобежец и старается пройти поворот как можно ближе к бровке.

Теперь рассмотрим движение велосипедиста на наклонном треке. Ему центростремительное ускорение сообщает сумма горизонтальных составляющих силы трения $F_{тр}$ и силы N реакции опоры (рис. 15):

$$F_{тр}\cos\alpha + N\sin\alpha = \frac{mv_1^2}{R}. \qquad (2)$$

Так как велосипедист не перемещается в вертикальном направлении, то сумма вертикальных составляющих всех сил, действующих на велосипедиста, равна нулю:

$$N\cos\alpha - F\sin\alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3), учитывая, что $F_{тр} = kN$, найдем максимальную скорость, с которой может двигаться велосипедист:

$$v_1 = \sqrt{gR\frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Эта скорость зависит не только от радиуса окружности, но и от угла наклона трека к горизонту. При том профиле трека, который показан на рисунке, угол наклона меняется. При $\alpha = \operatorname{arctg}(1/k)$ скорость движения велосипедиста может быть любой *).

Время, необходимое велосипедисту для того, чтобы пройти поворот радиуса R, равно

$$t_1 = \frac{\pi R}{v_1} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}\cdot\frac{1 - k\operatorname{tg}\alpha}{k + \operatorname{tg}\alpha}}.$$

Если велосипедист проходит поворот дальше от бровки, то меняется не только радиус поворота, но и угол α наклона трека к горизонту. Благодаря этому уменьшается время прохождения поворота.

Редакция получила много решений этой задачи. Наиболее полные и обоснованные решения прислали *Е. Долгов* (Москва), *В. Белов* (Вологда), *С. Божевольный* (станица Копанская Краснодарского края), *А. Герман* (Воронеж), *А. Бугай* (Изяслав Хмельницкой обл., УССР), *А. Боявский* (Гомель), *Д. Фушман* (Черновцы) и *П. Сергеев* (Грозный).

Ф121

В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массы M, в который вмерзла свинцовая дробинка массы m. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца $\rho_с = 11{,}3$ *г/см*^{3}, плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ *г/см*^{3}, теплота плавления льда $\lambda = 80$ *кал/г*. Температура воды в сосуде равна 0° C.

Для того чтобы дробинка начала тонуть, нет необходимости в том, чтобы растаял весь лед. Достаточно, если средняя плотность льда с дробинкой станет равна плотности воды. Если массу оставшегося при этом льда обозначить M_1, то условие того, что дробинка начнет тонуть, запишется так:

$$\frac{M_1 + m}{V} = \rho_в.$$

Но объем V льда и дробинки равен сумме их объемов, то есть $\frac{M_1}{\rho_л} + \frac{m}{\rho_с}$.

---

*) Скорость велосипедиста в этом случае будет определяться мощностью, развиваемой им, и силами сопротивления.

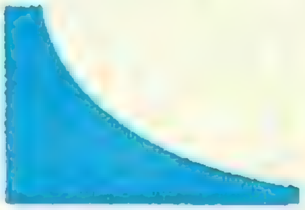


Рис. 13.

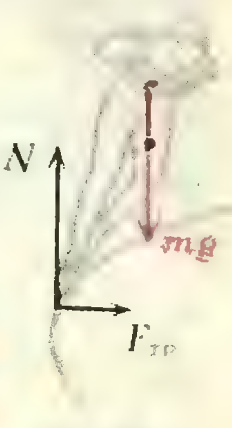


Рис. 14.

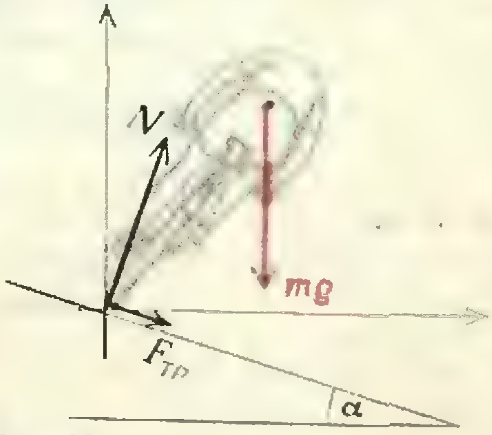


Рис. 15.

Поэтому $M_1 + m = \rho_в \left(\dfrac{M_1}{\rho_л} + \dfrac{m}{\rho_с}\right)$.

Отсюда

$$M_1 = m\,\frac{(\rho_с - \rho_в)\,\rho_л}{(\rho_в - \rho_л)\,\rho_с} = 8{,}2m.$$

Растаять должна масса льда

$$\Delta M = M - M_1 = M - 8{,}2m.$$

Для этого необходимо количество тепла

$$Q = \lambda\Delta M = \lambda(M - 8{,}2m).$$

Правильное решение этой задачи прислали около 40 читателей.

Ф122

Три тела с массами m_1, m_2 и m_3 могут скользить по горизонтальной плоскости без трения (рис. 16), причем $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$. Определить максимальные скорости, которые могут приобрести два крайних тела, если в начальный момент времени они покоились, а среднее тело имело скорость v. Удары считать абсолютно упругими.

Столкновения тела массы m_2 с телами массы m_1 и m_3 будут продолжаться до тех пор, пока его скорость не станет меньше скорости одного из тел m_1 или m_3. Но при этом импульс и энергия тела массы m_2 будет много меньше импульса и энергии этих тел (так как $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$) и, записывая закон сохранения энергии и импульса, мы можем не учитывать энергии и импульса тела массы m_2 после прекращения столкновений. Обозначая u_1 и u_3 скорости тел m_1 и m_3 после того как прекратятся столкновения, мы можем записать:

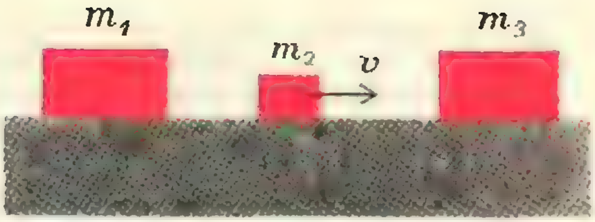


Рис. 16.

$$m_3u_3 - m_1u_1 = m_2v,$$

$$\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_3u_3^2}{2} = \frac{m_2v^2}{2}.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем, что при $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$

$$u_1 = v\sqrt{\frac{m_2m_3}{m_1m_3 + m_1^2}},$$

$$u_3 = v\sqrt{\frac{m_1m_2}{m_3^2 + m_1m_3}}.$$

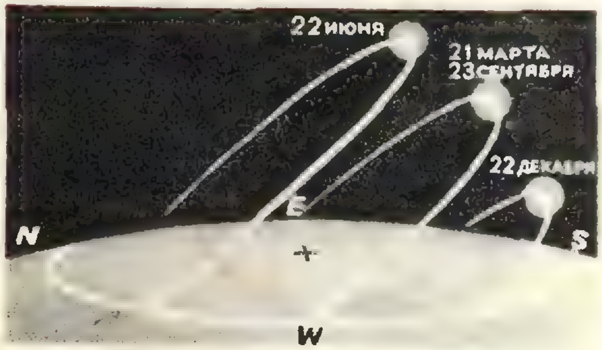
Правильные решения этой задачи прислали *Е. Долгов* (Москва), *А. Боявский* (Гомель), *В. Белов* (Вологда), *В. Терентьев* (Павлово Горьковской обл.), *П. Сергеев* (Грозный), *А. Редченко* (с. Новопетровка Сумской обл.).

И. Ш. Слободецкий

СОЛНЕЧНЫЕ ЧАСЫ

На первой странице обложки изображены солнечные часы. Их смастерил из серебра, платины и бронзы в 1620 году в Аугсбурге (Германия) француз Никола Руган. Со второй половины XVIII века такие портативные часы (диаметр кольца часов Ругана 100 мм) широко применялись для установления истинного солнечного времени и долготы места.

Игла, тень от которой падает на часовое кольцо, помещена в центре кольца перпендикулярно к его плоскости. В рабочем положении игла показывает на Полярную звезду, то есть располагается по оси мира. Кольцо снабжено часовыми делениями, следующими через каждые 15°. При настройке пластина — основание часов — с помощью приданных ей отвеса и компаса устанавливается в горизонтальной плоскости, так что стрелка компаса и игла оказываются в одной вертикальной плоскости (меридиональной). Затем с помощью лимба плоскость часового кольца поворачивается до рабочего положения. Тень тогда практически равномерно перемещается по шкале кольца, так как видимое суточное движение Солнца происходит равномерно по окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси мира, и располагается в пределах, указанных на рисунке.



Восьмиугольная пластина в основании часов на первой странице обложки содержит солнечный календарь.

В. Березин

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Тригонометрические функции

Ж. М. Раббот

В этой статье мы рассмотрим некоторые вопросы тригонометрии, вызывающие затруднения у поступающих в вузы на вступительных экзаменах.

1. Тригонометрические функции числа

Что такое sin 1? *Какой знак имеет* ctg 21? Подобные вопросы часто ставят в тупик многих абитуриентов.

Мы хотим определить тригонометрические функции на множестве всех действительных (вещественных) чисел. Для этого рассмотрим на координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в начале координат («тригонометрический круг»).

Пусть нам задано произвольное число t_0. Отложим на окружности тригонометрического круга от точки E (1; 0) (рис. 1) дугу длиной $|t_0|$ в положительном направлении (против часовой стрелки), если $t_0 \geqslant 0$, и в отрицательном направлении (по часовой стрелке), если $t_0 < 0$ (единицей длины служит радиус тригонометрического круга). При этом мы получим на окружности точку P_{t_0} с координатами $(x_{t_0},\ y_{t_0})$. Абсцисса x_{t_0} точки P_{t_0} называется *косинусом числа* t_0, а ордината y_{t_0} этой точки — *синусом числа* t_0:

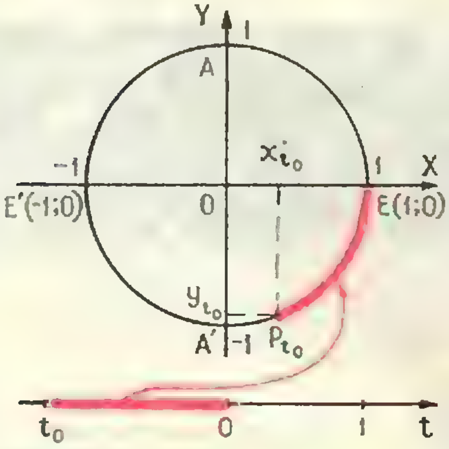


Рис. 1.

$$\boxed{\cos t_0 = x_{t_0};\quad \sin t_0 = y_{t_0}.}$$

Наиболее тонкое место в нашем определении — процесс откладывания на окружности дуги данной длины. Его можно наглядно представлять себе как наматывание (без растяжения) отрезка на окружность.

Итак, чтобы получить, скажем, синус числа t_0, мы сначала сопоставили (с помощью наматывания) числу t_0 определенную точку P_{t_0} на окружности, а затем взяли ординату этой точки:

$$\boxed{t_0 \to P_{t_0}(x_{t_0};\quad y_{t_0}) \to y_{t_0} = \sin t_0.}$$

Пользуясь нашим определением, мы можем изучить свойства функции $y = \sin t$. Покажем, как это делается.

а) Найдем корни уравнения $\sin t = 0$. Пусть число t таково, что $\sin t = 0$. Это означает, что ордината точки P_t, соответствующей числу t, равна нулю. Таких точек на единичной окружности две: E и E' (см. рис. 1). Они будут получаться при откладывании дуг, длины которых кратны длине полуокружности.

Заметив теперь, что половина длины единичной окружности равна π, мы получим, что равенство $\sin t = 0$ равносильно равенству $t = \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

б) Если числа t_1 и t_2 отличаются друг от друга на число, кратное 2π (то есть на целое число длин окружности), то соответствующие числам t_1 и t_2 точки единичной окружности совпадают. Это означает, что из равенства $t_1 - t_2 = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) следует равенство $\sin t_1 = \sin t_2$, то есть число 2π является периодом функции $y = \sin t$.

Докажем, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \sin t$. Предположим противное: пусть $0 < a < 2\pi$ и

$$\sin(t + a) = \sin t \tag{1}$$

при любом t (то есть нашлось положительное число a, меньшее 2π, которое тоже является периодом).

Пусть $t = 0$. Тогда из (1) получим, что $\sin a = 0$. Но в промежутке $0 < a < 2\pi$ есть лишь число π, синус которого равен нулю, поэтому $a = \pi$. Подставив теперь в (1) $t = \frac{\pi}{2}$, мы получим, что $1 = -1$ $\left(\sin \frac{\pi}{2} = 1\right.$ — это ордината точки A на рисунке 1, а $\left.\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1\right.$ — это ордината точки A'). Мы пришли к противоречию. Итак, 2π — наименьший положительный период функции $y = \sin t$.

Установленное нами свойство периодичности позволяет проводить дальнейшее исследование свойств синуса только в пределах одного периода, например, при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

В связи с доказанной периодичностью синуса сделаем следующее замечание. В учебнике Кочетковых «Алгебра и элементарные функции» (§ 207) подразумевается, но явно не сказано, что для периодической функции вместе с числом x должны входить в область определения и все числа $x + nT$ (n — любое целое число, T — период). Между тем это очень важно: иногда удается доказать непериодичность функции, пользуясь именно этим свойством. Покажем, например, что функция $y = \cos \frac{1}{x}$ — непериодическая. Предположим, что T — период этой функции. При $x = -T$ наша функция определена, значит, она должна быть определена и при $x = -T + T = 0$, но при $x = 0$ $\cos \frac{1}{x}$ не существует: мы пришли к противоречию.

Совершенно аналогично можно исследовать свойства функции $y = \cos t$. Вам, по-видимому, совершенно ясно, как определить функции $y = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$ (числового аргумента) и исследовать их свойства.

Упражнения

1. Найдите наименьшие положительные периоды функций:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \operatorname{tg} 2x - \sin 3x$; в) $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$; г) $y = \sin^2 x$; д) $y = \sin(\cos x)$; е) $y = \cos(\sin x)$.

Пример 1. *Доказать непериодичность функции* $y = \sin x^2$.

Решение. Предположим, что данная функция периодическая. Найдем нули этой функции (то есть те значения x, при которых она обращается в нуль): $\sin x^2 = 0$, откуда $x^2 = \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $x = \pm\sqrt{\pi k}$. Если $k = 0$, то $x_0 = 0$; если $k = 1$, то $x_1 = \sqrt{\pi}$. Из сделанного предположения о периодичности функции $y=\sin x^2$ следует, что найдется еще бесконечно много пар соседних ее нулей (получающихся из x_0 и x_1 сдвигами вправо на целое число периодов), разность между которыми равна $x_1 - x_0 = \sqrt{\pi}$. Но для любого $k>1$ имеем

$$|x_{k+1} - x_k| = |\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}| = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} < \sqrt{\pi},$$

так как $\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi} > \sqrt{\pi}$. Полученное противоречие доказывает непериодичность функции $y=\sin x^2$.

Упражнения

2. Докажите непериодичность функций: а) $y = \sin\sqrt{x}$; б) $y = \cos x \cos\sqrt{2}\,x$.

3. Укажите знаки следующих чисел:
а) $\sin 2$; б) $\cos 3{,}1$; в) $\lg 10$; г) $\sin \pi^2$; д) $\operatorname{tg}(\cos 2)$.

4. Дано, что $\cos^2 t + p\cos t + q > 0$ при всех действительных значениях t. Следует ли отсюда, что $x^2 + px + q > 0$ при всех действительных значениях x?

Нетрудно установить простую связь между определениями тригонометрических функций (обобщенного) угла и числового аргумента. Расположим угол так, чтобы его начальная сторона шла по оси Ox (рис. 2). Тогда синус угла по определению равен ординате точки, в которой конечная сторона угла пересекает единичную окружность.

Если угол содержит α радиан, то конечная сторона угла будет пересекать единичную окружность в конце дуги, соответствующей числу α при наматывании. Поэтому (сравните рисунки 1 и 2)

синус угла в α радиан равен синусу числа α.

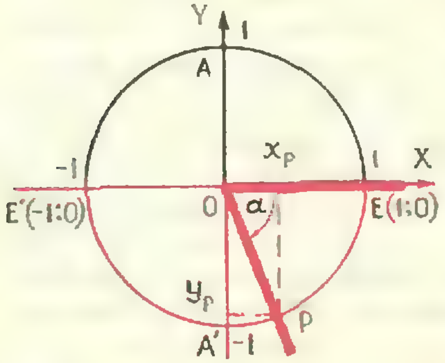


Рис. 2.

Именно это свойство принято в школьном учебнике за определение синуса числа (и аналогично для других функций: косинуса, тангенса, котангенса).

2. Преобразования тригонометрических выражений

При решении различных задач часто приходится проводить тождественные преобразования, пользуясь формулами тригонометрии. При этом надо помнить, что некоторые формулы изменяют область определения; кроме того, необходимо выяснять обратимость всех переходов.

Пример 2. (МАИ, 1970). *Доказать тождество*:

$$\frac{\left(\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}. \qquad (2)$$

Решение. Найдем прежде всего ОДЗ. Левая часть (2) определена, когда $\sin 2\alpha - \sin\alpha \neq 0$, то есть когда $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha \neq 0$, откуда $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq \frac{1}{2}$; окончательно $\alpha \neq \pi n$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$*). Правая часть (2) существует при $\sin\frac{\alpha}{4} \neq 0$, то есть при $\alpha \neq 4\pi l$. Итак, ОДЗ найдена: $\alpha \neq n\pi$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

---

*) Здесь и дальше, если не оговорено противное, подразумевается, что параметры n, k, l и т. п. принимают все целочисленные значения.

Обозначим левую часть тождества через M. Тогда

$$M = \frac{\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + 2\left(\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha + \cos\alpha + 2\cos\frac{3\alpha}{2}}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} + 2\cos\frac{3\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + 1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

Итак, в ОДЗ $M = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

Пример 3. *Доказать, что если* $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 0$, *то*

$$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha. \qquad (3)$$

Решение. Заметим, что условие $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 0$ эквивалентно условию

$$\cos(\alpha + \beta) = 0. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь разность правой и левой частей (3): $\sin(\alpha + 2\beta) - \sin\alpha = 2\sin\beta\cos(\alpha + \beta)$, откуда, используя (4), получим требуемое.

Упражнения

5. (МАИ, 1970). Докажите тождества:

а) $(\sin\alpha - \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sec\alpha)^2 = 4\operatorname{ctg}^2 2\alpha + 1$;

б) $\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha - 1 = \dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\alpha}{4}}$.

6. Докажите тождества:

а) (МИСП, 1969). $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$; б) (МИФИ). $\cos^2\varphi + \cos^2(\alpha + \varphi) - 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha + \varphi) = \sin^2\alpha$.

7. (Физ. фак. МГУ).

а) Докажите, что если $5\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$, то $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3}{2}$;

б) Докажите, что если $\cos x = \cos a\,\cos b$, $x \pm a \neq \pi(2k + 1)$, $b \neq \pi(2k + 1)$, то

$$1 + \operatorname{tg}\frac{x + a}{2}\operatorname{tg}\frac{x - a}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{b}{2}}.$$

Пример 4. *Упростить выражение*

$$M = \sin\alpha + \sin(\alpha + \delta) + \ldots + \sin(\alpha + n\delta).$$

Решение. Заметив, что аргументы синусов образуют арифметическую прогрессию с разностью δ, умножим обе части равенства на $2\sin\frac{\delta}{2}$:

$$2\sin\frac{\delta}{2}\cdot M = 2\sin\frac{\delta}{2}\sin\alpha + 2\sin\frac{\delta}{2}\sin(\alpha+\delta) + \ldots + 2\sin\frac{\delta}{2}\times$$

$$\times\sin(\alpha+n\delta) = \cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(\alpha+\frac{3\delta}{2}\right)+\cdots+\cos\left[\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta\right]-\cos\left[\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta\right]=$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left[\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta\right]=2\sin\left(\alpha+\frac{n\delta}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\delta.$$

Итак, если $\sin\frac{\delta}{2}\neq 0$, то есть $\delta\neq 2\pi k$, то

$$M=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Если же $\delta = 2\pi k$, то
$M = \sin\alpha + \sin(\alpha + 2\pi k) + \ldots + \sin(\alpha + 2\pi n k) = (n+1)\sin\alpha.$

Упражнения

8. Докажите тождества: а) (МИФИ). $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; б) (МГУ). $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$;

в) (МГУ) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{2}=\frac{1}{2}$.

9. (МИФИ). Упростите выражения. а) $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha$;

б) $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \ldots + (-1)^{n+1}\cos n\alpha$;

в) $\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \ldots + n\sin n\alpha$;

г) $\sin^3\frac{\alpha}{3}+3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}+9\sin^3\frac{\alpha}{3^3}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}$.

Пример 5. *Доказать тождество:*

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Решение. Заметив, что в правой части тождества стоят котангенсы, выразим $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}2\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha$.

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Умножая выписанные тождества соответственно на 1, $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{1}{2^n}$ и почленно складывая, мы получим нужный результат. Наши преобразования имеют смысл лишь при $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$ (проверьте!).

Упражнения

10. Докажите тождества: а) (УГПИ). $\sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ + \alpha) + \sin^2(120^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}$; б) (МАИ). $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; в) (МагГПИ) $4\cos^2\alpha + \sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha = 4$.

11. Преобразуйте в произведение: а) (МагГПИ). $\cos^2(x + y) + \sin(x + y) + \cos(x + y) + \sin^2(x + y)$; б) (МАИ). $\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} + 3\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 4$; в) (МИСП, 1969). $\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$; г) (МТИ, 1970). $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Пример 6. *Вычислить без таблиц* $\sin 18^\circ$.

Решение. Мы воспользуемся тем, что $18^\circ \cdot 5 = 90^\circ$, то есть, что $2 \cdot 18^\circ + 3 \cdot 18^\circ = 90^\circ$, откуда

$$\cos(2 \cdot 18^\circ) = \sin(3 \cdot 18^\circ) \qquad (5)$$

и тем, что $\cos 2\alpha$ и $\sin 3\alpha$ рационально выражаются через $\sin\alpha$. Применив формулы $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ и $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, мы из (5) получим: $4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0$.

Обозначив $\sin 18^\circ$ через y, мы приходим к уравнению

$$4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0, \qquad (6)$$

которое легко решить, заметив, что $y = 1$ — его корень (отсюда сразу следует, что левая часть (6) делится на $y - 1$): $(y-1)\ (4y^2+2y-1)=0$, откуда $y_1 = 1$, $y_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Учитывая, что $\sin 18^\circ \neq 1$, $\sin 18^\circ > 0$, находим, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Пример 7. *Упростить выражения*: а) $S_1 = \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha$; б) $S_2 = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha$.

Решение. Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то

$$S_1 + S_2 = n. \qquad (7)$$

Применив теперь результат упражнения 8а) (при каких α это можно сделать?), мы получим:

$$S_1 - S_2 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) + \cdots + (\cos^2 n\alpha - \sin^2 n\alpha) =$$

$$= \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cdots + \cos 2n\alpha = \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (8)$$

Теперь из (7) и (8) легко получаем: $S_1 = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$; $S_2 = \frac{n}{2} - \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. Каков ответ при $\alpha = \pi k$?

Упражнения

12. Вычислите без таблиц: а) $\cos 15^\circ$; б) $\operatorname{tg} 7{,}5^\circ$; в) $\cos 18^\circ$; г) (МАИ, 1970). $\cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ \cdot \cos 175^\circ$; д) (МИСП, 1969). $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

Пример 8. *Найти* $\cos\alpha + \sin\alpha$, *если* $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}48$.

Решение. Извлекая из обеих частей тождества $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ квадратный корень (как всегда, арифметический!), получим: $|\cos\alpha + \sin\alpha| = \sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = 1{,}4$ (подкоренное выражение неотрицательно: $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha \geqslant 0$, так как $\sin 2\alpha \geqslant -1$). Поскольку по условию $\sin\alpha\cos\alpha > 0$, то $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, то есть α находится либо в I, либо в III четверти.

Если $2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, то $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$;

если же $\pi + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, то $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}4$.

Упражнения

13. а) (МАИ). Найдите $\dfrac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m - 1$; б) (МГУ). Докажите, что если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, то $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$ (α и β — углы I четверти); в) (МИСП). Найдите $18\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. г) (МТИ). Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

14. (МГУ). Известно, что $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и что $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma$.

15. (МИФИ). Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$;
г) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;
д) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$;

е) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$;

ж) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$;

з) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2$ (треугольник остроугольный).

16. Докажите неравенства:
а) (МФТИ).

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right);$$

б) (ВГУ). $\cos\alpha + 3\cos 3\alpha + 6\cos 6\alpha \geqslant -7{,}2$;
в) (МФТИ). $(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha) > 0$; г) (МФТИ). $(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)(3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)\times(\operatorname{ctg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha - 1) \leqslant -1$: д) (МГУ). $4\sin 3\alpha + 5 \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha$.

Примечание. В статье приняты следующие сокращения:
МАИ — Московский авиационный институт, МГУ — Московский государственный университет, МГПИ — Московский государственный педагогический институт, МагГПИ — Магаданский государственый педагогический институт, МТИ — Московский текстильный институт, МИСП — Московский институт стали и сплавов, МИФИ — Московский инженерно-физический институт, УГПИ — Ульяновский государственный педагогический институт, ВГУ — Воронежский государственный университет, МФТИ — Московский физико-технический институт.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский физико-технический институт

Вариант 1

1. Из пункта A выехали три велосипедиста, первый на один час раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорость каждого велосипедиста постоянна. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй догнал первого на два часа позже, чем третий. Определить отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скорости второго к скорости третьего равно 2/3.

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найти отношение $BC:CA:AB$.

4. Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y^2 - xy + x^2 = z^2, \\ x^2 - xz + z^2 = y^2, \\ z^3 - y^3 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина). Ребро SC этой пирамиды совпадает с боковым ребром правильной треугольной призмы $A_1B_1CA_2B_2S$ (A_1A_2, B_1B_2 и CS — боковые ребра; A_1B_1C — одно из оснований). Вершины призмы A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB пирамиды. Какую долю от объема всей пирамиды составляет объем ее части, лежащей внутри призмы, если отношение длины бокового ребра пирамиды к длине стороны основания пирамиды равно $2/\sqrt{3}$?

Вариант 2

1. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

2. Решить уравнение:

$$\sin x + \sqrt{1 + \sin 2x} - \cos x = \frac{1}{2}.$$

3. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников OMA, OAB и OBN равны S_1, S_2, S_3 соответственно.

4. Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 2x, \\ y^2 + 3z^2 = 28x^2, \\ y^3 + 8z^3 = (y - 4x)(1 - 4z + 7xy). \end{cases}$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC, а все боковые грани имеют равные площади. Ребро SA равно 2 *см*, ребро SB равно $\sqrt{2}$ *см*. Через вершину B перпендикулярно к ребру SC проведено сечение пирамиды. Найти площадь этого сечения.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Вариант 1

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 \frac{x}{2}} - 2\log_2 \sqrt{x} + \log_2^2 x = 3.$$

3. Найти решения уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 3\operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1)\sec^2 x,$$

удовлетворяющие условию $x > 3$.

4. Про углы треугольника ABC известно, что $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = 1:2:3$. Найти отношение синусов этих углов.

5. Доказать, что многочлен $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ положителен при всех вещественных x.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$$

2. Решить уравнение:

$$2\log_9^2 x = \log_3 x \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1).$$

3. Найти решения уравнения

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0,$$

удовлетворяющие условию $|x| < 2$.

4. Даны углы B и C треугольника ABC ($\angle B \neq \angle C$). Найти котангенс острого угла x, который образует медиана, выходящая из вершины A, со стороной BC.

5. Доказать, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (a + b + c)^2.$$

Московский областной педагогический институт имени Н. К. Крупской

Математический факультет

Вариант 1

1. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен 2α, а высота конуса равна H. Найти объем вписанного в этот конус шара, а также площадь полной поверхности конуса.

2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 x - \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} + \frac{5}{6} = 0.$$

3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{\frac{3}{5}} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} < 1, \\ \sqrt{5 - x^2} > x - 1. \end{cases}$$

4. Найти целые числа x и y, удовлетворяющие условию $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

Вариант 2

1. Найти площадь полной поверхности конуса, если радиус вписанного в него шара равен R, а образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом α.

2. Решить уравнение:

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2.$$

3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}} > 1, \\ 5 - x > \sqrt{x^2 - 16}. \end{cases}$$

4. Найти все значения параметра m, при которых уравнения

$$x^2 + (m^2 - 5m + 6)x = 0$$

и

$$x^2 + 2(m - 3)x + (m^2 - 7m + 12) = 0$$

равносильны.

Физический факультет

1. Равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при основании α, вращается вокруг прямой, проходящей через один из концов основания перпендикулярно к нему. Найти площадь поверхности получившегося тела вращения.

2. Решить уравнение:

$$1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x.$$

3. Найти числовое значение выражения

$$\left(\frac{99a + 1}{5a^2 - 5} + \frac{1}{5a + 5} + \frac{20}{1 - a}\right) : \frac{4}{a^3 b - ab}$$

при $a \approx 1{,}803$ и $b \approx 2$.

4. Найти область определения функции:

$$y = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 6}{(x + 2)(x + 3)}}.$$

ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Б.Б. БУХОВЦЕВ

Какими величинами можно охарактеризовать состояние идеального газа?

Считая, что нам известен химический состав газа и его масса, мы для описания его состояния можем воспользоваться такими параметрами, как объем V, занимаемый газом, давление P, температура T газа. Связь между этими параметрами идеальных газов отражают четыре основных закона: закон Бойля — Мариотта, закон Гей-Люссака, закон Шарля и закон Клапейрона — Менделеева. Пользуясь уравнениями, описывающими эти законы, можно практически решать любые задачи, в которых нас интересует физическое состояние идеального газа.

Закон Бойля — Мариотта

$$PV=\text{const}. \qquad (I)$$

Это соотношение между давлением и объемом газа впервые было установлено английским физиком Бойлем в 1662 году. В 1676 году независимо от Бойля французский физик Мариотт установил такую же зависимость между давлением и объемом газа. Равенство (I), выражающее закон Бойля — Мариотта, выполняется только при определенных условиях: температура газа остается неизменной, масса его постоянна и химический состав газа не меняется. Кроме того, температура должна быть не слишком низка, а давление не слишком велико.

Различные состояния газа при одной и той же температуре можно изобразить на графике (так называемой P—V-диаграмме) точками. Геометрическое место таких точек — гипербола (это видно и из соотношения (I)). Ее можно рассматривать и как график процесса, происходящего при постоянной температуре — так называемого изотермического процесса (рис. 1). Кривую, описывающую изотермический процесс, называют изотермой.

Здесь важно помнить, что, поставив точку на графике, мы тем самым полностью определяем состояние газа: его давление, объем и температуру. А это означает, что газ находится в каждый момент в состоянии равновесия (термодинамического равновесия). Следовательно, все процессы, описываемые уравнениями и изображаемые на графиках, предполагаются протекающими очень медленно или, как говорят, квазистатически.

Рассмотрим пример типичной задачи на применение закона Бойля — Мариотта.

З а д а ч а. Посредине узкой, запаянной с обоих концов горизонтальной трубки (рис. 2) находится столбик ртути длиной $h=25$ *см*. Ртуть разделяет в трубке два столба воздуха длиной $l_0=1$ *м* каждый. Давление воздуха $P_0=76$ *см рт. ст.*, температура остается постоянной. На какое расстояние x переместится столбик ртути, если трубку поставить вертикально?

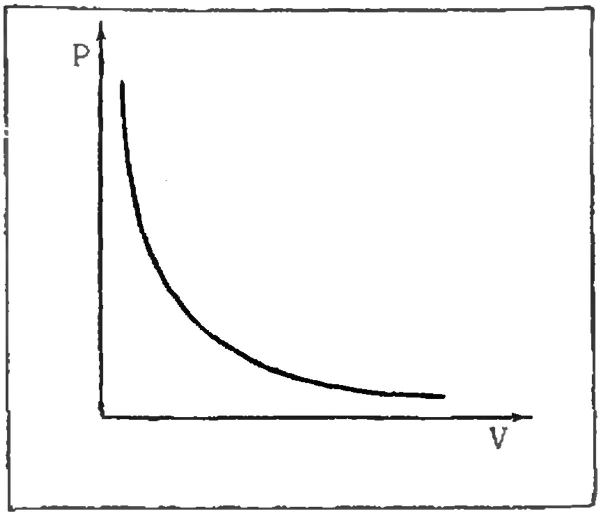


Рис. 1.

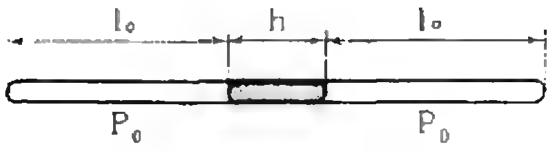


Рис. 2.

Решение. Рассмотрим отдельно два столбика воздуха в стоящей вертикально трубке и применим закон Бойля — Мариотта к каждому из них (площадь сечения трубки S):

$$P_0\, l_0 S = P_1 (l_0 + x)\, S, \qquad (1)$$
$$P_0\, l_0 S = P_2 (l_0 - x)\, S. \qquad (2)$$

Из условия механического равновесия столбика ртути следует, что при вертикальном положении трубки давление в нижнем столбе воздуха равно

$$P_2 = P_1 + \rho g h$$

(ρ — плотность ртути). Подставив это значение P_2 в (2), получим квадратное уравнение, решив которое, найдем, что

$$x = \left(-\frac{P_0}{\rho g} + \sqrt{\left(\frac{P_0}{\rho g}\right)^2 + h^2} \right) \times \frac{l_0}{h} \approx 16\ (см)$$

(отрицательное значение корня не имеет смысла).

Интересно отметить, что при вычислении неизвестного x нам не нужны сведения о плотности ртути ρ, а также о соотношениях между единицами давления. Дело в том, что по определению давление P, которое создает 1 *см рт. ст.*, равно $P = \rho g \cdot 1$ *см*. Следовательно, $\frac{P}{\rho g} = 76$ *см* без каких-либо дополнительных пересчетов.

Итак, состояниям газа с одинаковой температурой отвечает на диаграмме $P—V$ определенная изотерма. Другой постоянной температуре соответствует другая изотерма. Как она расположена по отношению к первой?

Ответить на этот вопрос, основываясь на одном только законе Бойля — Мариотта, невозможно. Необходимо знать еще одну из зависимостей: либо $V(t)$, либо $P(t)$.

Закон Гей-Люссака

Зависимость объема V газа от температуры при неизменном давлении исследовал французский ученый Гей-Люссак. В 1802 году он опубликовал закон изобарического ($P = \mathrm{const}$) расширения газов.

Согласно закону Гей-Люссака при постоянном давлении, постоянной массе и неизменном химическом составе газа его объем V при температуре t (по шкале Цельсия) равен

$$V = V_0 + \beta V_0 t,$$

или

$$V = V_0 (1 + \beta t), \qquad (11)$$

где V_0 — объем, который занимал газ при 0° С. Опытным путем было найдено, что

$\beta = \frac{1}{273}$ *град*$^{-1}$.

Таким образом, при повышении температуры газа на один градус объем его возрастает на одну и ту же величину, равную $\frac{V_0}{273}$. Следовательно, график закона Гей-Люссака, то есть график зависимости V от t при постоянном давлении (изобара) — прямая линия. Учитывая это, можно без вычислений решать задачи, аналогичные следующей.

Задача. При нагревании газа от температуры $t°$ С до температуры $(t+1)°$ С при неизменном давлении объем газа увеличивается на $\frac{1}{300}$ первоначального, то есть на $\frac{1}{300} V_t$. При каких условиях это может быть?

Решение. При нагревании от 0° С до 1° С объем газа увеличивается на $\frac{1}{273} V_0$, то есть на $\frac{1}{273}$ первоначального, и становится равным

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{273} V_0 = \frac{274}{273} V_0.$$

При нагревании от 1° С до 2° С объем снова увеличивается на ту же величину $\frac{1}{273} V_0$, что составляет уже

$\frac{1}{274}$ часть объема V_1. При нагревании от 2° С до 3° С объем возрастает на $\frac{1}{275}V_2$, от 3° С до 4° С—на $\frac{1}{276}V_3$ и т. д. (рис. 3). Вообще при нагревании от $t°$ С до $(t+1)°$ С объем возрастает на $\frac{1}{273+t}$ первоначального. Отсюда следует, что нагревание производилось от 27° до 28° С.

Рассмотрим еще такую задачу.

Задача. При температуре $t_1=25°$ С газ занимает объем $V_1 =$ 1,5 *л*. Какой объем V_2 будет занимать газ, если нагреть его до $t_2 =$ 125° С при неизменном давлении?

Решение. Объемы V_1 и V_2 связаны с объемом газа при 0° С соотношениями

$$V_1 = V_0(1+\beta t_1),\quad V_2 = V_0(1+\beta t_2).$$

Отсюда

$$V_2 = \frac{1+\beta t_2}{1+\beta t_1}V_1 = \frac{\frac{1}{\beta}+t_2}{\frac{1}{\beta}+t_1}V_1 =$$

$$= \frac{273+t_2}{273+t_1}V_1 \approx 2\ (л).$$

Решения обеих задач показывают, что удобно перейти к другой шкале температур (шкале Кельвина), нуль которой (абсолютный нуль) лежит ниже нуля шкалы Цельсия на 273°. Поскольку именно в этой точке пересекаются продолжения всех изобар (рис. 4), закон Гей-Люссака приобретает особенно простую форму:

$$\frac{V}{T} = \text{const при } P = \text{const},$$

если пользоваться абсолютной температурой T.

Закон Гей-Люссака позволяет установить распределение на P—V-диаграмме изотерм, соответствующих различным температурам.

Закон Шарля

Французский физик Шарль исследовал зависимость давления газа от его температуры при условии, что объем газа, его масса и состав остаются постоянными, и пришел к следующим выводам: приращение давления при нагревании на 1° С составляет определенную часть того давления, которое имел газ при 0° С, и пропорционально приращению температуры.

В математической форме записи закон Шарля очень похож на закон Гей-Люссака:

$$P = P_0 + \alpha P_0 t,$$

или

$$P = P_0(1+\alpha t), \qquad \text{(III)}$$

где P_0 — давление данной массы газа при 0° С, P — давление газа в том же объеме при температуре $t°$ С. Величину α называют термическим коэффициентом давления и она равна $\frac{1}{273}$ *град*$^{-1}$.

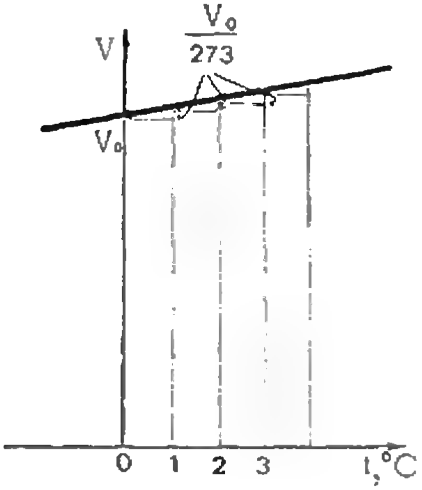


Рис. 3.

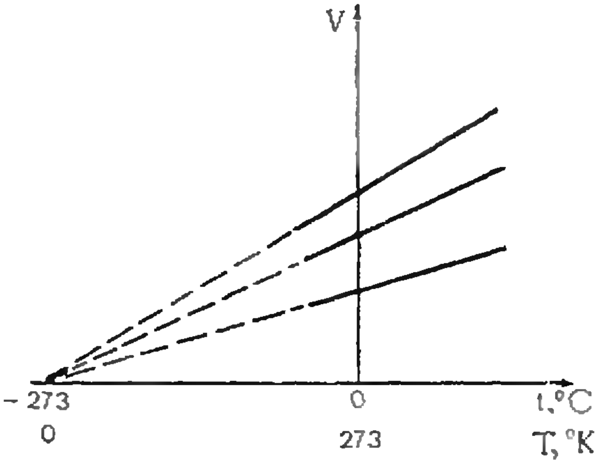


Рис. 4.

На графике зависимости $P(t)$ при $V = \mathrm{const}$ закон Шарля выражается прямыми линиями (изохорами), пересекающими ось t в точке $t = -273$° С. Перейдя к абсолютной шкале температур, *мы получим простую форму* записи закона Шарля:

$$\frac{P}{T} = \mathrm{const} \quad \text{при} \quad V = \mathrm{const}.$$

Эта зависимость легко получается из законов Бойля — Мариотта и Гей-Люссака с помощью двух переходов *$V \to V'$ при $T_1 = const$ и $T_1 \to T_2$ при* $P_2 = \mathrm{const}$ (рис. 5).

Всякий реальный газ подчиняется упомянутым газовым законам лишь приближенно. Полагая, что эти законы выполняются точно, мы считаем газ идеальным. В данной статье речь идет только о таких газах.

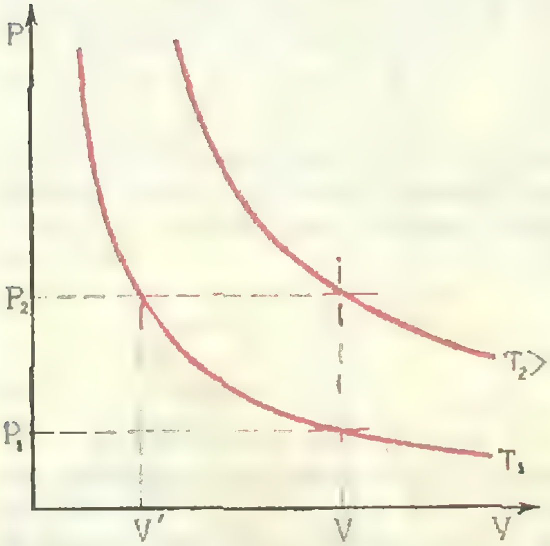


Рис. 5.

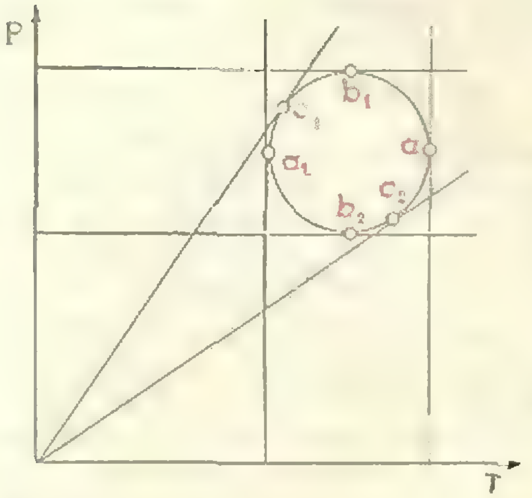


Рис. 6.

Приведем пример задачи на закон Шарля. Манометр на баллоне с кис*лородом показывал* $P_1 = 95$ *ат* в помещении с температурой $t_1 = 17$° С. Баллон вынесли в сарай, где при температуре $t_2 = -13$° С показание манометра стало $P_2 = 85$ *ат*. Не было ли потерь кислорода во время переноски?

Решение сводится к проверке равенства $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$, справедливого при $m = \mathrm{const}$ (Ответ: потерь не было.)

Более сложное поведение газа, когда изменяются и давление, и объем, и температура, легче всего проследить на графике. Рассмотрим, к примеру, такую задачу.

Задача. Некоторый процесс, происходящий с идеальным газом, изображается на графике зависимости давления от температуры в виде окружности. Требуется разбить окружность наименьшим числом точек на части, соответствующие процессам, в каждом из которых любая из величин *P, V и T меняется монотонно* (то есть возрастает или убывает.)

Решение. Точки, соответствующие наибольшей и наименьшей температуре в данном процессе, — это точки a_1 и a_2 касания окружности с вертикальными изотермами (рис. 6). Точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее давление — точки b_1 и b_2 касания окружности с горизонтальными изобарами. Изохоры на графике $P(T)$ изображаются прямыми, проходящими через начало координат. Чем меньше объем, тем круче идет изохора. Две изохоры, касательные к окружности, дают еще две точки — c_1 и c_2. Всего окружность разбивается, таким образом, на шесть кривых, изображающих требуемые процессы.

Из сказанного ясно, что параметры, определяющие состояние данной массы газа неизменного химического состава (P, V и T), связаны друг с другом. Если известны две величины, можно найти третью. Уравнение, определяющее связь температуры, объема и давления, называют уравнением состояния газа.

Уравнение Клапейрона — Менделеева

Для получения этого уравнения свяжем два произвольных состояния идеального газа. Пусть, например, газ переводится из состояния P_1, V_1, T_1 в состояние P_2, V_2, T_2. Для перехода используем уже известные нам процессы. Применяя только два процесса, переход 1—2 (рис. 7) можно осуществить шестью способами (1—3—2, 1—4—2, 1—5—2, 1—6—2, 1—7—2, 1—8—2). Рассмотрим первый из них. Процесс 1—3 изохорический, то есть $V_1 = V_3$. Поэтому $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_3}{T_3}$. Процесс 3—2 изотермический ($T_2 = T_3$) и, следовательно, $P_3V_3 = P_2V_2$. Перемножив все четыре соотношения, получим

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}.$$

Начальное и конечное состояния газа мы взяли совершенно произвольно. Следовательно, для данной массы газа неизменного химического состава можно написать

$$\frac{PV}{T} = B = \text{const}. \qquad \text{(IV)}$$

Уравнение (IV) устанавливает простую связь между давлением, объемом и температурой данной массы газа. Оно полностью описывает состояние идеального газа. Впервые это уравнение вывел Клапейрон, объединив законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Уравнение Клапейрона позволяет решать задачи, в которых связываются состояния газа при неизменной массе.

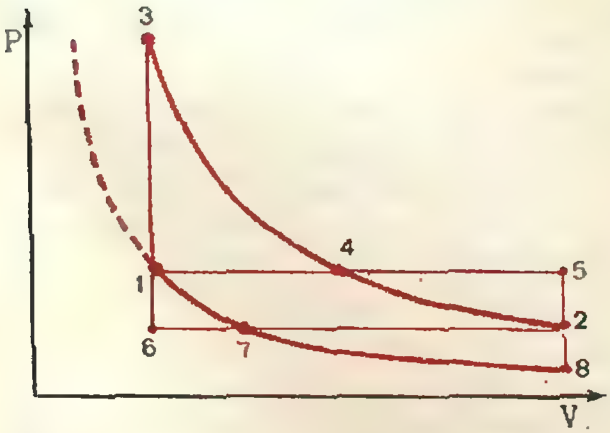


Рис. 7.

Рассмотрим простой пример.

Задача. Цилиндрический сосуд, наполненный газом, разделен подвижной перегородкой на две части так, что отношение объемов частей 2:3. Температура газа в обеих частях одинакова. Каким станет отношение объемов, если температура газа в меньшей части станет равной $T_1 = 227°$ C, а в большей — $T_2 = 60°$ C? Трением пренебречь.

Решение. Для газа в меньшей части $\frac{PV_1}{T} = \frac{P'V_1'}{T_1}$. Для газа в большей части $\frac{PV_2}{T} = \frac{P'V_2'}{T_2}$. Отсюда

$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{273 + 227}{273 + 60} \approx 1.$$

Остался лишь один шаг, чтобы сделать уравнение состояния идеальных газов универсальным. Необходимо учесть массу газа и его химическую «индивидуальность». Этот шаг был сделан великим русским химиком Д. И. Менделеевым. Он использовал закон, открытый в 1811 году итальянским ученым А. Авогадро и заключающийся в том, что все газы независимо от их химической природы при одинаковом давлении и температуре занимают одинаковый объем, если они взяты в количествах, пропорциональных их молекулярной массе. В частности, при 0°C ($T_0 = 273°$ K) и давлении $P = 1$ *атм* объем газа $V_{0\mu} = 22{,}4$ *м³/кмоль* $= 22{,}4$ *л/моль*. Зная это, можно вычислить постоянную B в уравнении (IV). Она пропорциональна числу молей газа. Это число находится делением массы газа на молекулярную массу: $\nu = \frac{m}{\mu}$.

Коэффициент пропорциональности $R=\frac{P_0V_{0\mu}}{T_0}$ называют универсальной газовой постоянной. Подсчет дает для R значение

$$R=8{,}3\cdot10^3\ \textit{дж/град}\cdot\textit{кмоль} = 0{,}082\ \textit{л}\cdot\textit{атм/град}\cdot\textit{моль}.$$

Таким образом, уравнение состояния идеального газа, которое называют уравнением Менделеева—Клапейрона, записывают в виде

$$PV=\frac{m}{\mu}RT. \qquad \text{(V)}$$

Любая задача на расчет процессов в идеальных газах решается почти автоматически, если сразу записать уравнение (V) для каждого состояния газа. Но уравнение (V) позволяет решать и задачи другого типа.

Задача. Плотность пара некоторого соединения углерода и водорода равна $\rho=2{,}5$ *г/л* при температуре $t=10°$ C и давлении $P=760$ *мм рт. ст.* Какое это соединение?

Решение. Из уравнения (V) можно найти молекулярную массу соединения:

$$\mu=\frac{mRT}{PV}=\frac{\rho RT}{P}\approx 58\ (\textit{г/моль}).$$

Такую молекулярную массу имеют изомеры бутана C_4H_{10}.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача. Считая, что из общей массы воздуха 75% приходится на долю азота, а 25% — на долю кислорода, определить, сколько воздуха выйдет из комнаты объемом 50 $м^3$ при повышении температуры от 17° C до 27° C. Атмосферное давление нормальное ($P_0=1$ *атм*).

Решение. Молекулярная масса воздуха

$$\mu=\frac{0{,}75m+0{,}25m}{\frac{0{,}75m}{\mu_1}+\frac{0{,}25m}{\mu_2}}\approx 29\ (\textit{кг/кмоль}).$$

Изменение массы воздуха в комнате

$$\Delta m=\frac{\mu P_0V}{RT_2}-\frac{\mu P_0V}{RT_1}=$$

$$=\frac{\mu P_0VT_0}{P_0V_{0\mu}}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)\approx -2\ (\textit{кг}).$$

Упражнения

1. Барометр дает неверные показания вследствие присутствия небольшого количества воздуха над столбиком ртути. При давлении 755 *мм рт. ст.* барометр показывает 748 *мм рт. ст.*, а при 740 *мм рт. ст.* — 736 *мм рт. ст.* Какое давление будет показывать барометр, если действительное давление равно 760 *мм рт. ст.*?

2. Как изменялось давление газа во время процесса, изображенного на рис. 8?

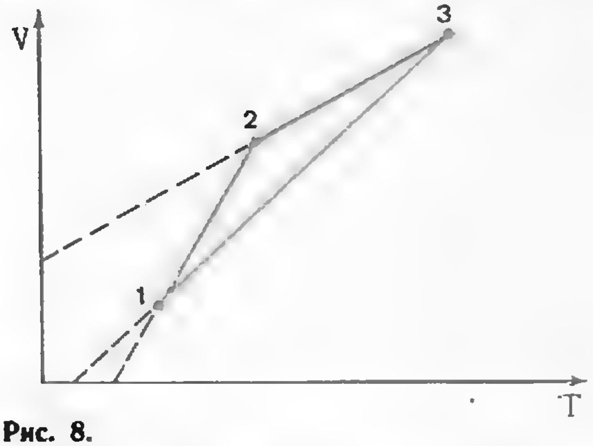


Рис. 8.

3. Сообщающиеся сосуды, показанные на рисунке 9, погружают в теплую воду. Описать поведение ртути в манометре.

4. Свободно скользящий газонепроницаемый поршень удерживается посредине откачанного сосуда двумя идеальными пружинами. Когда в одну из половин сосуда ввели газ при температуре $T_1=300°$ K, длина этой части сосуда оказалась равной $x_1=0{,}2$ *мм*, а после нагревания газа до $T_2=750°$ K длина той же части стала $x_2=0{,}25$ *м*. Какова будет длина x_3 при $T_3=1200°$ K?

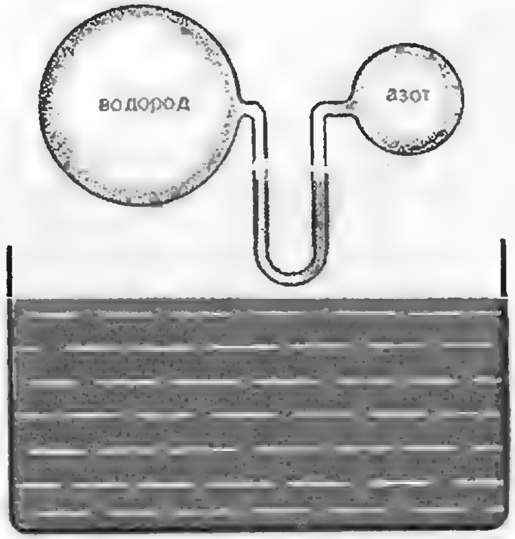


Рис. 9.

5. Вывести уравнение (IV), используя процессы 1—4—2, 1—5—2, 1—7—2 или 1—8—2 (см. рис. 7).

6. Баллон емкостью 20,5 *л* содержит смесь водорода и гелия. Масса смеси 13 *г*, температура 27° C, давление 5,4 *атм*. Определить массу водорода и массу гелия.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ И РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Под таким названием вышла в 1971 году книга М. Гарднера *).

Это не первый перевод книг М. Гарднера. Вышедшие ранее переводы его книг «Этот правый, левый мир», «Теория относительности для миллионов», «Математические чудеса и тайны» завоевали широкое признание советского читателя. Секрет удачи автора в том, что он умеет позаботиться о читателе: там, где необходимость требует что-либо объяснить, он не пренебрегает этим; там, где читатель с удовольствием провел бы рассуждения или вычисления сам, Гарднер предоставляет ему такую возможность. В «Математических головоломках и развлечениях» стиль автора — сочетание довольно высокого для популярного текста научного уровня изложения с мягким, тактичным и, как правило, уместным юмором — остался прежним. На науку у него выработался собственный взгляд, вероятно, еще в 50-е годы, когда он занимался исследованием, что собой представляет псевдонаука. Впрочем, несколько позднее ему довелось редактировать книгу известного философа и физика Карнапа, который пытался доступно для широкого читателя рассказать, что собой представляют понятия, теория и методы физических наук. С другой стороны, Мартин Гарднер приобрел опыт очеркиста, работая до Второй мировой войны в газетах. После войны он начал писать новеллы, и намеревался стать писателем-профессионалом, специализирующимся в беллетристике, но победило влечение к точным наукам, в которых он искал занимательное и парадоксальное.

Книга «Математические головоломки и развлечения» представляет собой сборник математических научно-популярных очерков и отдельных задач с решениями. Эти материалы выдержали читательскую критику, поскольку первоначально издавались в журнале Scientific American, где с 1957 года Мартин Гарднер ведет раздел «Математические игры». Наиболее интересные письма читателей автор включил в книгу.

За счет чего достигается занимательность? Конечно, дело не только в мягком юморе. Целые страницы уделяются истории возникновения и развития чем-либо замечательных математических проблем, игр и теорий, причем читателю представляется возможность участвовать в создании этой истории. Читатель (а он далеко не всегда является профессиональным математиком) находит решения задач, которые ставят в тупик порой и специалистов, хотя и не требуют сколько-нибудь глубоких познаний от того, кто ими занимается. Немаловажную роль для занимательности играют неожиданные выводы, к которым Гарднер подводит читателя.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ И РАЗВЛЕЧЕНИЯ

И еще об одной стороне занимательности книги Гарднера следует сказать особо. Ссылаясь на известного изобретателя головоломок Генри Дьюдени, Гарднер пишет: «...литература по занимательной математике страдает чудовищными повторениями». И тут же добавляет: «...хочу надеяться, что в моей книге читатели обнаружат бо́льшую, чем обычно, порцию свежего материала, который прежде не находил места на страницах занимательной математической литературы». Большинство читателей едва ли не в любом из помещенных в «Математических головоломках и развлечениях» очерке или подборке задач найдет для себя новое и неожиданное.

Устанавливая свое кредо, Мартин Гарднер пишет: «Математики творческого склада обычно не стыдятся своего интереса к занимательным задачам и головоломкам. Топология берет свое начало в работе Эйлера о семи кенигсбергских мостах. Лейбниц потратил немало времени на решение головоломки, которая недавно пережила свое второе рождение под названием «Проверьте уровень своего развития».

---

*) М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. М., «Мир», 1971.

Очевидец рассказывает о целой полке в книжном шкафу Эйнштейна, «забитой математическими забавами и головоломками». «Нетрудно понять интерес, который все эти великие умы питали к математической игре, ибо творческое мышление, находящее для себя награду в столь тривиальных задачках, сродни тому типу мышления, который приводит к математическому и вообще научному открытию. В конце концов, что такое математика, как не систематические попытки найти все лучшие и лучшие ответы на те головоломки, которые ставит перед нами природа?».

При всем том, будучи популярной, книга Гарднера не для легкого чтения. Очень часто он приводит ответы на вопросы, которые могли в свое время заинтересовать читателя, и остались тогда нерешенными. Вот, скажем, игра в крестики и нолики. Кто в нее не играл?

Впрочем, не будем пересказывать эту книгу, вы, вероятно, уже согласны с тем, что ее необходимо прочитать. В заключение приведем несколько фрагментов из этой книги.

* * *

«Кто из нас в детстве не играл в крестики и нолики? Любой мальчишка за час может стать непобедимым чемпионом. В то же время игра в крестики и нолики имеет и более сложные разновидности и более глубокую стратегию.

На языке теории игр крестики и нолики можно назвать конечной (то есть доигрываемой до конца за конечное число ходов) строго детерминированной (то есть не содержащей элемент случайности) игрой двух сторон с полной информацией. Последнее означает, что обоим игрокам известны все сделанные ходы. Если обе стороны играют «рационально», игра должна закончиться вничью. Единственный способ выиграть заключается в том, чтобы заманить неосторожного противника в ловушку, заготовив для следующего своего хода два почти готовых ряда (противник может помешать достроить лишь один ряд).

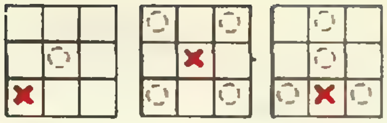


Рис. 1.

Из трех возможных начальных ходов — в угол, в центр и в боковую клетку — самым сильным является ход в угол, так как при этом противник, чтобы не попасть с самого начала в ловушку, из восьми оставшихся клеток может выбрать только одну центральную. Наоборот, если первый ход сделан в центр, то блокировать его можно, лишь заняв угол. Наиболее интересная партия получается только в том случае, когда первый игрок, открывая игру, занимает одну из боковых клеток: при таком начале перед обеими сторонами открываются широкие возможности в постановке ловушек. Три первых хода и ответы на них второго игрока, действующего осмотрительно, показаны на рисунке 1.

За много веков до нашей эры были известны гораздо более интересные с математической точки зрения варианты крестиков и ноликов, чем тот, в который принято играть в наше время. Во всех этих вариантах для игры нужно взять шесть фишек, по три у каждого игрока (у одного, например, три трехкопеечные монеты, а у другого три пятака), и доску, изображенную на рисунке 2.

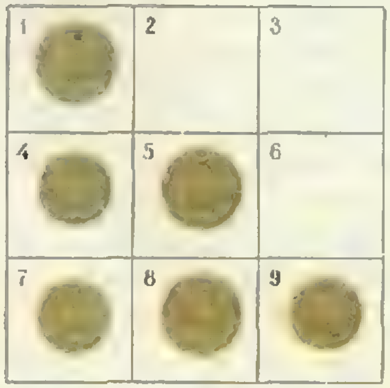


Рис. 2.

В древнем Китае, Греции и Риме был популярен самый простой вариант игры, когда играющие по очереди выставляют на доску фишки и делают это до тех пор, пока не выставят все шесть фишек. Если ни одному игроку не удается поставить три монеты в ряд и выиграть, то игра продолжается. Каждый из противников передвигает по очереди одну из своих фишек на соседнюю клетку. Передвигать фишки можно только по вертикали и горизонтали.

Поскольку первый игрок, начиная с центра, наверняка выигрывает, то такое начало не сулит ничего интересного и обычно им не пользуются. Это ограничение при рациональной тактике приводит к ничьей, но обе стороны могут поставить противнику уйму потенциальных ловушек.

Я знаю многих любителей крестиков и ноликов, которые ошибочно полагают, что самое главное — это научиться неизменно выигрывать, и считают, что они уже постигли все тайны этой игры. Истинный же мастер игры в крестики и нолики должен уметь использовать малейшее преимущество, возникающее даже в тяжелых для него ситуациях. Следующие три примера помогут читателю уяснить сказанное. Первый ход во всех трех партиях делается на одну из клеток 2, 6, 8 и 4.

Если вы начинаете с хода ×8, а противник отвечает вам ходом ○2, то вторым ходом вам лучше всего пойти на четвертую клетку (×4). Этот ход приводит к выигрышу в четырех из шести возможных ответных ходов противника. Помешать вам выиграть противник может лишь ходом ○7 или ○9. Если противник сначала пошел ×8, а вы ответным ходом заняли одну из нижних угловых клеток, например, ○9, то вы еще можете надеяться на победу: противнику достаточно совершить любой из ходов ×2, ×4 или ×7.

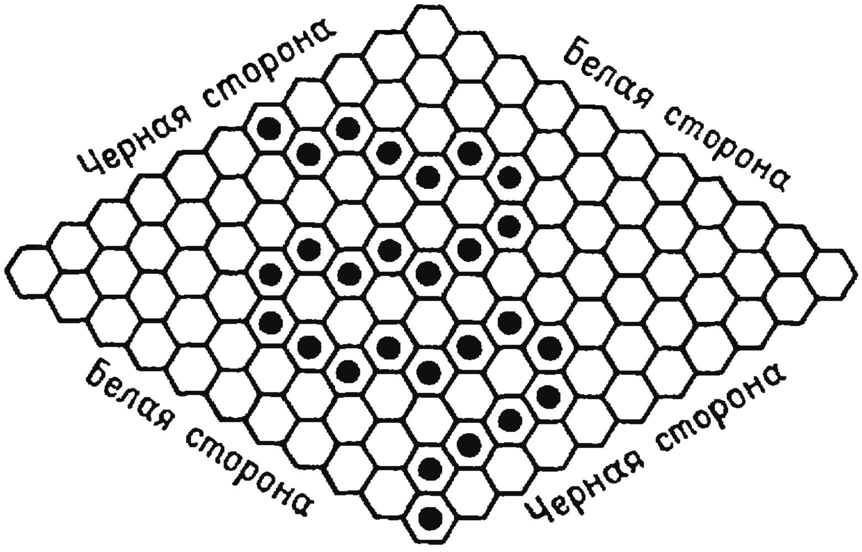


Рис. 3.

Если противник делает первый ход ×8, то ответный ход ⊙5 может привести к интересному развитию партии: если противник вторым ходом занимает клетку 2(×2), то вы можете даже позволить ему выбрать за вас ту клетку, которую вы займете при следующем ходе. При любом вашем ходе выигрыш вам обеспечен.

* * *

В наши дни редко кому удается придумать математическую игру, которая была бы одновременно и новой, и интересной. Именно такой оригинальной и увлекательной является игра в гекс, впервые появившаяся лет пятнадцать назад в Институте теоретической физики Нильса Бора в Копенгагене. Гекс вполне может стать одной из наиболее популярных и наиболее полно исследованных математических игр нашего века.

В гекс играют на доске, имеющей форму ромба, составленного из шестиугольников (рис. 3). Число шестиугольников может быть разным, но обычно предпочитают играть на доске, вдоль стороны которой укладывается одиннадцать шестиугольников. Две противоположные стороны ромба называются «черными», две другие «белыми». Шестиугольники, находящиеся в углах ромба, относятся к обеим сторонам. Один игрок играет черными фишками, второй белыми. Играющие по очереди ставят фишку на любой шестиугольник, еще не занятый другой фишкой. Цель «черных» состоит в том, чтобы построить цепь из черных фишек между двумя «черными» сторонами. «Белые» стремятся построить цепь из белых фишек между «белыми» сторонами.

Цепь может как угодно изгибаться, поворачивать. Фишки ставят до тех пор, пока кто-нибудь из игроков не выстроит свою цепь. На рисунке 3, например, видно, как победили «черные». Игра никогда не кончается вничью, потому что один из участников может запереть другого только построив свою цепь. Хотя правила гекса очень просты, тем не менее он оказывается удивительно тонкой математической игрой.

Придумал гекс датчанин Пит Хейн. В молодости Хейн провел несколько лет в Институте теоретической физики, а затем, сделав несколько технических изобретений, стал работать в промышленности. Так продолжалось до 1940 года, до вторжения немцев в Данию. Во время оккупации Хейн дважды уходил в подполье — он был председателем антинацистского демократического союза, распущенного с приходом нацистов.

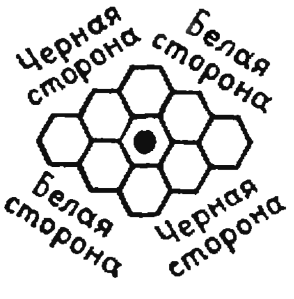


Рис. 4.

Идея игры в гекс пришла Хейну в голову, когда он размышлял над знаменитой топологической проблемой четырех красок. Вскоре правила игры были опубликованы в газете «Политикен» и гекс стал необычайно популярен в Дании под названием «Многоугольник».

Читателям, которым захочется поиграть в гекс, следует заранее заготовить листки с начерченными на них досками. Ходы можно отмечать крестиками и кружками. Если вам больше нравится передвигать фишки на «настоящей» доске, можно нарисовать большую доску на листе толстого картона или сложить ее из шестиугольных керамических плиток. Если плитки достаточно большие, то играть можно обычными шашками.

Чтобы понять все тонкости игры в гекс, лучше воспользоваться игровым полем, состоящим из небольшого числа шестиугольников. На доске 2×2 (четыре шестиугольника) всегда выигрывает тот, кто делает первый ход. На доске 3×3 легко выиграть, если первый ход сделать в центр доски (рис. 4). «Черные» могут пойти двумя разными способами, заняв любой из двух шестиугольников,

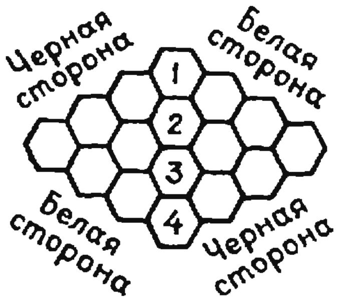


Рис. 5.

расположенных по обе стороны от центра, и поэтому на третьем ходу обязательно выигрывают.

На доске 4×4 все гораздо сложнее. Начинающий игру выигрывает наверняка лишь в том случае, если он сразу же занимает одну из четырех пронумерованных клеток (рис. 5). Сделав первый ход на любую другую клетку, он непременно проиграет. Начав игру с клеток 2 или 3, первый игрок одержит победу на пятом ходу; начав с клеток 1 или 4 — на шестом.

Для доски 5×5 еще можно доказать, что если первый игрок сразу же занимает центральную клетку, то он может выиграть на седьмом ходу. Для досок большего размера анализ становится слишком сложным. Стандартная доска 11×11 таит в себе астрономическое число усложнений, и полный анализ игры в гекс на такой доске находится за пределами человеческих возможностей.

Специалисты по теории игр считают гекс особенно интересной игрой. Действительно, для игры на стандартной доске не известно, какой тактики необходимо придерживаться, чтобы наверняка обеспечить победу. Однако доказательством от противного можно довольно изящно показать, что для первого игрока всегда существует выигрышная стратегия на доске любого размера.

* * *

В заключение приведем еще две задачи

* * *

В трехэтажном доме проведена скрытая проводка. Наружу провода выходят только в двух местах: на третьем этаже и в подвале. В том и другом случаях вывод представляет собой пучок из 11 абсолютно одинаковых проводов. Какой конец провода в верхнем выводе соответствует тому или иному концу провода в нижнем выводе, неизвестно. Именно это и должен был установить монтер.

Чтобы выполнить свою задачу, он может сделать две вещи:

1) закоротить любые провода вверху или внизу, скрутив их концы;

2) отыскать замкнутый контур с помощью специального тестера, состоящего из батарейки и звонка.

Не желая понапрасну бегать вверх и вниз по лестнице, электрик, увлекающийся к тому же исследованием операций, уселся на ступеньке с карандашом и бумагой и вскоре придумал наиболее эффективный способ решения задачи.

В чем состоял его метод?

* * *

Одна из самых старых топологических головоломок, известных любому школьнику, состоит в вычерчивании непрерывной линии, пересекающей по одному разу все 16 звеньев замкнутой сети прямолинейных отрезков, изображенных на рисунке 6. Кривая, проведенная на этом рисунке, не может служить решением головоломки, потому что не пересекает одного звена сети. При построении решения использовать какие-нибудь трюки — проводить кривую через вершины сети, вдоль ее звеньев, складывать лист бумаги и т. д., — нельзя.

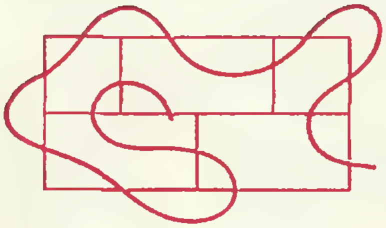


Рис. 6.

Нетрудно доказать, что на плоскости эта головоломка решения не имеет. Возникают два вопроса: можно ли решить ее на сфере? Существует ли решение на поверхности тора?»

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

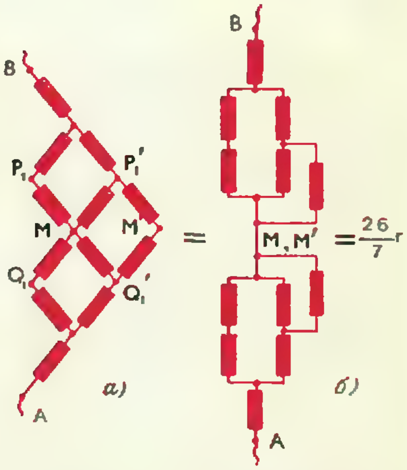
ПОПРАВКА

к статье А. Хацета

«Методы расчета эквивалентных сопротивлений»

(«Квант» № 2, 1972)

По вине редактора в решении задачи № 6 допущена ошибка. Утверждение, что пары точек P_1 и P'_1, Q_1 и Q'_1 (см. рис. 6*б* в статье) эквипотенциальны, неверно. Эквипотенциальными являются точки M и M' (см. рис. *а*). Соединив эти точки, можно преобразовать цепь так, как это указано на рисунке *б*. Сопротивление такой цепи равно $\frac{26}{7}r$. Следовательно, сопротивление всей цепи (см. рис. 6*а* в статье) равно $\frac{13}{7}r$.



ФUМ
ш 239 ЛЕНИНГРАД 1972

СЛЕТ УЧАЩИХСЯ физико-математических школ

С 3 по 8 января 1972 года в Ленинграде проходил слет учащихся физико-математических школ. Это уже третий слет — о первых двух, состоявшихся в Горьком и Тбилиси в 1971 году, сообщалось в «Кванте» № 2 за этот год.

На этот раз организатором слета была Ленинградская школа № 239. На слете было представлено 18 городов: Алма-Ата, Брест, Волгоград, Горький, Душанбе, Казань, Киев, Кишинев, Кострома, Минск, Москва, Мурманск, Одесса, Рига, Ташкент, Тбилиси, Чебоксары и Ленинград.

Оргкомитет слета во главе с преподавателем 239-й школы Г. П. Посецельским подготовил обширную программу. Организационные заботы взяли на себя учащиеся школы, справились они с этим прекрасно.

3 января состоялось торжественное открытие слета. 4 января был день математики. Сначала на пленарном заседании профессор В. А. Залгаллер прочел доклад «Роль математики в выполнении задач 9-й пятилетки». В этом докладе было рассказано о современных приложениях математики в технике и промышленности, в частности, о применении автоматизированных систем. Затем с докладом «Проблемы развития современной алгебры» выступил кандидат физико-математических наук А. Е. Евсеев.

После пленарного заседания проходила микроолимпиада по математике. Ею руководил студент ЛГУ Валерий Федотов. Школьникам были предложены 7 задач (в двух вариантах), на решение которых давался один час. Тексты задач вы найдете в конце статьи. Решившие эти задачи проходили в другую аудиторию, где им предлагалась еще одна из двух задач (на выбор). По итогам микроолимпиады было присуждено 8 дипломов первой степени, 18 — второй и 26 — третьей.

После микроолимпиады началась работа секций арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии, логики и двух секций прикладной математики. Работой секций руководили сотрудники Ленинградского отделения математического института (ЛОМИ) Академии наук СССР. Было заслушано 57 докладов. Среди них были и короткие сообщения, и большие доклады. Были и биографические доклады о выдающихся математиках.

Например, были прочитаны даклады «Победитель простых чисел П. Л. Чебышев» *Ирой Шитихиной* (9 кл. 8 шк., Волгоград), «Числа Фибоначчи» *Александром Сазоновым* (10 класс 131 шк., Казань), «Сумма кубов членов арифметической прогрессии» *Андреем Вощенковым* (9 кл. 239 шк., Ленинград), «Центр и радиус точечного множества на плоскости» *Любовью Бубель* (10 кл. 40 шк., Горький), «Аксиоматика» *Вадимом Стромовым* (10 кл. 239 шк., Ленинград), «Геометрические построения с помощью циркуля» *Тамарой Чайка* (9 кл. 42 шк., Тбилиси), «От единицы до кватерниона» *Владимиром Побочим* (9 кл. 121 шк., Ленинград), «Динамические системы» *Николаем Малышевым* (10 кл. 40 шк., Горький), «Линейное программирование» *Еленой Козловой* (9 кл. 110 шк., Ташкент), «Графы и раскрашивание карт» *Андреем Калязиным* (10 кл. 444 шк., Москва), «Авиценна — таджикский математик» *Рано Намеевой* (школа-интернат № 2, Душанбе) и другие.

При оценке докладов жюри, составленное из руководителей секций, обращало внимание прежде всего на самостоятельность работы.

Были присуждены шесть специальных дипломов «За серьезную подготовку и содержательное выступление на секции математики». Их получили *Александр Иванов* (9 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Теорема Бернулли и ее применение к решению задач на максимум и минимум», *Ира Винокурова* (10 кл. 110 шк., Ташкент) за доклад «Вычисление длины кривых», *Нино Гварамадзе* (10 кл. 42 шк., Тбилиси) за доклад «Об одном свойстве периодических функций», *Владимир Лемер* (10 кл. 32 шк., Кострома) за доклад «Доказательство малой теоремы Ферма», *Владимир Емельянов* и *Сергей Родионов* (10 кл. 366 шк., Ленинград) за совместный доклад «Математическое доказательство «пользы от хищников». В последнем докладе средствами моделирования и дифференциального исчисления было рассмотрено динамическое равновесие между «волками» и «зайцами», изменение их численности во времени после отстрела «волков» и, тем самым, последствия отстрела «волков».

Были также присуждены дипломы «За интересное сообщение на секции» (с названием секции) первой, второй и третьей степени. Эти дипломы получили еще 19 школьников. Остальные докладчики получили дипломы «За активное участие в работе секций математики».

Две премии от журнала «Квант» за самостоятельность мышления и серьезный подход к математике и физике были присуждены *Игорю Неровнову* (9 кл. 1 шк., Брест) и *Андрею Беляеву* (10 кл. школы-интерната № 2, Чебоксары).

Вечером 4 января был поднят флаг слета.

5 января был день физики. Работа секций физики проходила в новом здании физического факультета ЛГУ в Петергофе (под Ленинградом). Сотрудники Ленинградского университета приняли самое активное участие в подготовке и организации работы секций физики. Пленарное заседание открыл заместитель декана физического факультета ЛГУ В. И. Вальков. Он пожелал участникам слета плодотворной, интересной работы, больших успехов в их дальнейшей научной деятельности. С интересным докладом выступил перед аудиторией крупный советский ученый, один из ведущих специалистов в области оптики профессор С. Э. Фриш. Он рассказал о развитии физики в нашей стране, о той роли, которую играет физика в прогрессе науки и техники, подробно остановился на основных проблемах оптики, над которыми работают ученые в наши дни.

После доклада школьникам была предложена экспериментальная викторина. Она проходила очень интересно. Перед аудиторией проводился небольшой эксперимент, демонстрирующий какое-нибудь физическое явление, и всем участникам предлагалось рассказать о сущности физических процессов, лежащих в основе этого явления. Для правильного ответа нужны были хорошие знания физики в пределах школьного курса. Вот некоторые из опытов, которые демонстрировались на викторине.

В цилиндрическую банку введены два электрода, подсоединенные к электрофорной машине. Банка наполняется через резиновую трубку дымом. Когда «включают» электрофорную машину, дым очень быстро исчезает. Как объяснить это явление?

Всем школьникам известно, как работает тепловой амперметр. Через проволоку проходит электрический ток, проволока нагревается, удлиняется и прикрепленная к ней стрелка амперметра «ползет» вверх. Нагрев проволоку до белого каления, ток выключают. Стрелка амперметра начинает возвращаться к нулю. В некоторый момент (то есть при некоторой температуре проволоки) происходит скачок — стрелка опять «ползет» вверх, а затем возвращается в прежнем направлении к нулю. Чем это объяснить?

Интересный опыт был продемонстрирован с газовым гелий-неоновым лазером. В темноте луч лазера проецируется на экран. На экране видна светящаяся точка. Затем экспериментатор помещает на пути луча пластинку, и картина на экране меняется: вместо точки появляется система светящихся точек, образующих квадратную сетку. При этом самые яркие точки располагаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях, образуя крест. Что за пластинку поставили на пути луча?

Ребята принимали активное участие в викторине. Были, конечно, и неверные ответы, но ошибки исправлялись тут же, на ходу.

После небольшого перерыва началась работа секций. Всего на семи секциях физики было прочитано 54 доклада. Ребята выбирали себе доклады, которые им хотелось бы послушать, и некоторые успели побывать не на одной секции. Темы докладов были самые разнообразные, охватывающие очень многие области физики: о критическом состоянии вещества и об электромагнитном биополе мозга, о полупроводниковых фотодиодах и о нейтронных звездах, о голографии и об экспериментальных обоснованиях специальной теории относительности Эйнштейна. Наиболее интересными были те доклады, в которых школьники творчески подходили к решению поставленной задачи, рассказывали о результатах самостоятельных исследований, проявляли глубокие, фундаментальные знания в рассматриваемом вопросе.

В этом плане очень интересным был доклад *Владимира Гончарова* (10 кл. 131 шк., Казань). Володя продемонстрировал собранный им самим прибор, дающий возможность наглядно проиллюстрировать свойства ультразвука, и рассказал о различных областях техники и производства, в которых находит применение ультразвук.

Всем очень понравился доклад *Николая Макарова* (10 кл. 239 шк., Ленинград) «К вопросу о свободном падении струй». В нем были сообщены результаты измерений величины ускорения свободного падения. Жюри отметило самостоятельность эксперимента, поставленного Николаем, хорошую обработку результатов и четкость изложения доклада.

Вообще перед жюри стояла трудная задача: надо было из многих хороших докладов выбрать лучшие. После длительного сове-

щания жюри секций физики постановило за серьезные, самостоятельные доклады, за проявленные глубокие знания по физике, за научный подход к решению поставленной задачи присудить специальные дипломы следующим участникам слета: *Владимиру Гончарову* (10 кл. 131 шк., Казань) за доклад «Демонстрация опытов с ультразвуком», *Григорию Либерману* (10 кл. 116 шк., Одесса) за доклад «О способе решения ряда гравитационных задач», *Николаю Макарову* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «К вопросу о свободном падении струй», *Юрию Калафати* (10 кл. 444 шк., Москва) за доклад «Парамагнитное возбуждение колебаний», *Владимиру Гомоюнову* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Об одном оптическом эффекте и роли ограничения пучков», *Аркадию Аксельроду* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Расчет нормальных колебаний молекул», *Кириллу Тынтареву* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Испарение капли воды в стационарном потоке теплого воздуха».

Дипломы первой степени были присуждены восьми участникам слета, дипломы второй степени — еще восьми участникам. 19 школьников получили поощрительные дипломы.

7 января на слете работали секция истории (в музее истории Ленинграда; на этой секции было сделано 7 докладов), секция литературы (в Пушкинском доме; 17 докладов и конкурс поэзии); секция комсомольского актива работала в здании школы № 239. Вечером 7 января две команды, составленные из участников слета, провели «математический бой» — соревнование (похожее на КВН) по решению задач.

На слете были проведены спортивные соревнования по баскетболу, шахматам, настольному теннису и стрельбе, фотоконкурс «Города и люди Союза», по итогам которого 10 работ были отмечены премиями и грамотами, смотр художественной самодеятельности.

За время пребывания в Ленинграде участники слета посетили комнату В. И. Ленина в Смольном, побывали в театрах, совершили экскурсии на крейсер «Аврора», в Петропавловскую крепость, в музей Кировского завода, в музей истории Ленинграда, Русский музей, Эрмитаж и автобусную экскурсию по городу «Ленинград — город Ленина».

8 января состоялось торжественное закрытие слета; участникам слета были вручены дипломы, грамоты и сувениры. Делегации разных городов вручали памятные подарки его организаторам. Слет несомненно принес огромную пользу в установлении контактов между физико-математическими школами разных городов, и память о нем надолго останется у всех делегатов.

А. Н. Виленкин, Т. С. Петрова

Задачи микроолимпиады по математике

Какие из следующих утверждений верны, а какие — нет?

Вариант 1

1. В неравных треугольниках против неравных сторон лежат неравные углы.

2. Существует пятиугольник, который можно разрезать на два треугольника.

3. $\underbrace{1777\ldots7771}_{1972\text{ цифры}}$ — простое число.

4. Существует выпуклый 13-угольник с четырьмя острыми углами.

5. Если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то три высоты первого треугольника соответственно равны трем высотам второго.

6. Если сумма цифр числа делится на 81, то и само число делится на 81.

7. Ушестеренная площадь треугольника не превосходит суммы квадратов его сторон.

Вариант 2

1. В неравных треугольниках на неравные стороны опускаются неравные высоты.

2. Существует семиугольник, который можно разрезать на два треугольника.

3. $\underbrace{1888\ldots8881}_{1972\text{ цифры}}$ — число составное.

4. Существует выпуклый 14-угольник с тремя острыми углами.

5. Если три медианы треугольника равны между собой, то его биссектрисы также равны между собой.

6. 57599 — простое число.

7. $\pi^{\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 60^\circ} =$
$= e^{\ln \operatorname{ctg} 11^\circ \cdot \ln \operatorname{ctg} 12^\circ \cdot \ldots \cdot \ln \operatorname{ctg} 60^\circ}$.

Дополнительные задачи для решивших один из вариантов

1. На карьере добыли 15 камней, веса которых образуют арифметическую прогрессию с разностью 29 кг, причем вес самого тяжелого камня — 1000 кг. Можно ли вывезти эти камни на четырех трехтонных грузовиках?

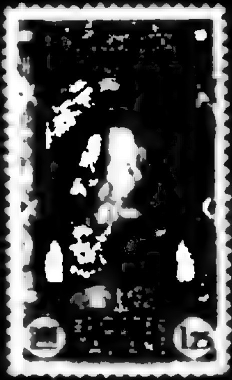
2. Даны 1972 числа:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt[k]{k}, \ldots, \sqrt[1972]{1972}.$$

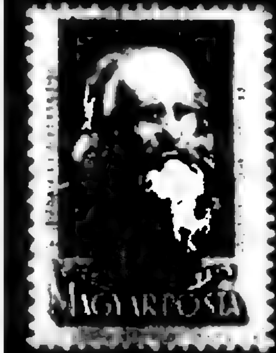
Доказать, что произведение всевозможных попарных разностей этих чисел меньше, чем

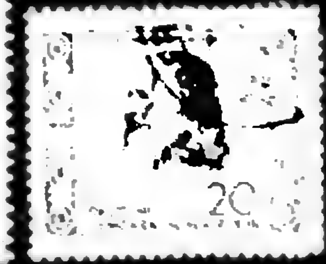
$$\frac{1}{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 1972^{1972}}.$$

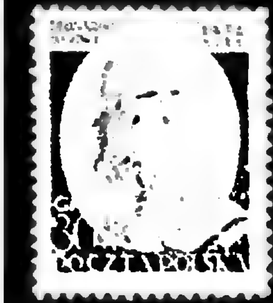
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

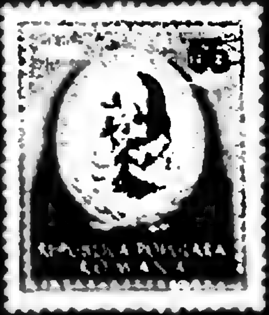


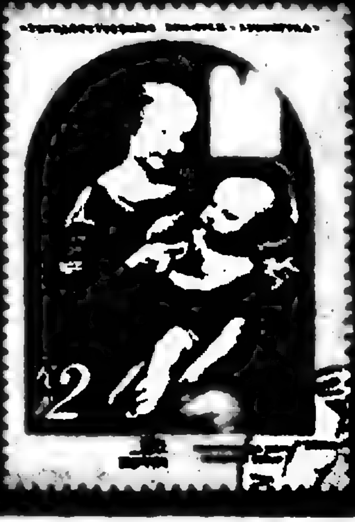
POSTE LIRE
REPUBBLICA ITALIANA











МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

Леонардо да Винчи (1452—1519 г.) один из крупнейших представителей эпохи Возрождения.

Среди титанов, порожденных этой эпохой, ему принадлежало одно из первых мест. По словам Энгельса, он был «не только великим художником, но и великим математиком, механиком и инженером, которому обязаны важнейшими открытиями самые разнообразные отрасли физики».

Леонардо да Винчи утверждал, что научные исследования должны основываться на экспериментальном изучении природы. Он писал: «Истолкователем природы является опыт. Он не обманывает никогда. Наше суждение иногда обманывается, потому что ожидает результатов, не подтверждаемых опытом. Надо производить опыты, изменяя обстоятельства, пока не извлечем из них общих правил, потому что опыт доставляет истинные правила... Они в свою очередь направляют наши исследования в природе и наши работы в области искусства».

Леонардо да Винчи предвосхитил ряд открытий, сделанных много веков спустя. Он заложил основу учения о волнах и рычаге; им были намечены основные принципы авиации. Свои научные открытия Леонардо использовал во множестве изобретений и при строительстве крупнейших зданий, каналов, военно-инженерных сооружений.

Первые марки, посвященные Леонардо да Винчи, вышли на его родине в Италии в 1932 г. Затем марки, посвященные Леонардо, выходили неоднократно. Вверху приведена марка, выпущенная в Италии в 1935 году. Она посвящена Международному салону аэронавтики в Милане; на ней изображен портрет Леонардо на фоне летящих самолетов — в честь его заслуг в вопросах исследования возможности полета человека.

Наибольшее количество марок, посвященных Леонардо да Винчи, вышло в 1952 году, когда отмечалось 500 лет со дня его рождения. На фото вы видите марки, выпущенные к этой дате в Италии, Венгрии, Польше, Румынии и ГДР (на марках Италии, Венгрии и Польши изображен автопортрет Леонардо да Винчи).

Современники гораздо больше ценят Леонардо да Винчи как художника. Мы помещаем марку, на которой воспроизведена одна из его картин («Мадонна Бенуа»), хранящаяся в Эрмитаже.

А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Искусственные ядра»

Достаточна.

К статье «Тригонометрические функции»

1. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 2π; в) 4π; г) π (указание: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$); д) 2π; е) π.

2. б) Предположим, что T — период данной функции, то есть что $\cos(x+T)\times$ $\times\cos[\sqrt{2}(x+T)] = \cos x \cos\sqrt{2}x$ при любом x. Подставив в это равенство $x=0$, получим: $\cos T\cos\sqrt{2}T = 1$. Последнее равенство может выполняться лишь в двух случаях: $\cos T = 1$, $\cos\sqrt{2}\,T = 1$ или $\cos T = -1$, $\cos\sqrt{2}\,T = -1$ (если предположить, что один из сомножителей по абсолютной величине меньше 1, тогда второй должен быть по абсолютной величине больше 1, чего быть не может). В первом случае $T=2\pi k$, $T=\frac{2\pi n}{\sqrt{2}}$, откуда, поделив первое равенство на второе, получим, что $\sqrt{2}=\frac{n}{k}$ (то есть, что $\sqrt{2}$ — рациональное число). Второй случай приводится к противоречию аналогично.

3. а) положительное (дуга длиной 2 кончается во II четверти); б) отрицательное; в) положительное; г) отрицательное $\left(3\pi < \pi^2 < 10 < \frac{7\pi}{2}\right)$; д) отрицательное.

4. Нет, не следует; рассмотреть случай $p=-5$, $q=6$.

7. а) Преобразуем:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\sin\beta + \sin(2\alpha+\beta)}{-\sin\beta+\sin(2\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\sin\beta + 5\sin\beta}{-\sin\beta+5\sin\beta} = \frac{6\sin\beta}{4\sin\beta} = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что утверждение задачи верно лишь при $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$.

б) Имеем: $1+\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2} =$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}} =$$

$$= 2\cos a : \left[\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{x+a}{2}+\frac{x-a}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\cos a}{\cos x + \cos a} = \frac{2\cos a}{\cos a + \cos a\cos b} =$$

$$= \frac{2}{\cos b + 1} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

9. а) Обозначив данное выражение через M, имеем при $\alpha \neq \pi k$:

$$M = \frac{2^n \sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\ \ldots\ \cos 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2^{n-1}\sin 2\alpha\cos 2\alpha\ \ldots\ \cos 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha} =$$

$$= \ldots = \frac{\cos 2^{n+1}\alpha}{2^n\sin\alpha}.$$

При $\alpha=\pi k$ имеем

$$M = \cos\pi k\cos 2\pi k\ldots\cos 2^n\pi k =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } k=2p, \\ -1 & \text{при } k=2p+1. \end{cases}$$

б) Обозначив данное выражение через M, получим при $\alpha \neq \pi(2k+1)$:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\,M = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha -$$

$$-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \cdots +$$

$$+ 2(-1)^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} +$$

$$+ \cos\frac{5\alpha}{2} + \cos\frac{7\alpha}{2} - \cdots +$$

$$+(-1)^{n+1}\cos\frac{2n-1}{2}\alpha +$$

$$+(-1)^{n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} + (-1)^{n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha.$$

При $\alpha = \pi(2k+1)$

$M = \cos\pi(2k+1) - \cos 2\pi(2k+1) + \cos 3\pi(2k+1) - \ldots + (-1)^{n+1}\cos \pi n(2k+1) = -1-1-1- \ldots -1 = -n.$

в) Ответ:

$$M = \frac{(n+1)\sin n\alpha - n\sin(n+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

при $\alpha \neq 2k\pi$; $M = 0$ при $\alpha = 2k\pi$.

г) По формуле синуса тройного угла имеем:

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3},$$

$$\sin\frac{\alpha}{3} = 3\sin\frac{\alpha}{3^2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{3^2} = 3\sin\frac{\alpha}{3^3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^3},$$

. . . .

$$\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}} = 3\sin\frac{\alpha}{3^n} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^n},$$

откуда

$$\sin^3\frac{\alpha}{3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{4}\sin\alpha,$$

$$\sin^3\frac{\alpha}{3^2} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3^2} - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{3},$$

$$\sin^3\frac{\alpha}{3^3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3^3} - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{3^2},$$

. . . .

$$\sin^3\frac{\alpha}{3^n} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3^n} - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}.$$

Умножая последние равенства соответственно на 1, 3, 3^2, … 3^{n-1} и почленно складывая, получим, что искомое выражение равно $\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right)$.

11. а) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x+y}{2}$;

б) $4\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) : \cos^3\alpha$;

в) $2\sin 3\alpha\sin 5\alpha\cos\alpha$;

12. а) $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$;

б) $\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$;

в) $\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$;

г) $-\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$;

д) 4.

13. а) $\frac{2-m}{m}$ при $m \neq 0$; при $m = 0$ выражение не имеет смысла; в) 7; г) -2.

14. 3.

16. б) Данное неравенство равносильно такому: $\cos\alpha + 3(\cos 3\alpha + 4\cos^2 3\alpha) \geqslant -1{,}2$. Преобразуем:

$\cos 3\alpha + 4\cos^2 3\alpha = \left(2\cos 3\alpha + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \geqslant -\frac{1}{16}$, откуда получаем:

$\cos\alpha + 3(\cos 3\alpha + 4\cos^2 3\alpha) \geqslant -1 - \frac{3}{16} > -1 - \frac{2}{10} = -1{,}2.$

К «Вариантам вступительных экзаменов по математике 1971 года»

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Вариант 1

1. 1 : 2.

2. Так как

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x = \frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x},$$

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x},$$

то исходное уравнение можно записать в виде $\sin 5x(\cos 2x\cos 3x + \cos x\cos 4x) = 0$ (предполагая, что $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x \neq 0$). Отсюда:

а) $\sin 5x = 0$; $x = \frac{\pi}{5}k$;

б) $\cos 2x\cos 3x + \cos x\cos 4x = 0.$ (1)

Используя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, преобразуем (1) к виду

$$\cos x(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0, \qquad (2)$$

и так как $\cos x \neq 0$, то из (2) находим $\cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$, откуда

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + \pi k.$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{5}k,\quad x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8} + \pi k,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Пусть Q, P, N — точки касания окружности со сторонами треугольника (рис. 1).

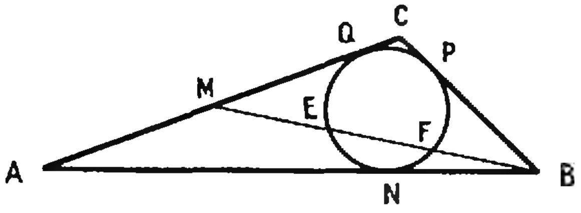


Рис. 1.

Введем следующие обозначения: $AB = c$; $BC = a$, $AC = b$, $BM = x$. Тогда, по условию, $ME = EF = FB = \frac{x}{3}$.

Из теоремы о касательной и секущей следует, что $NB = MQ = \frac{x\sqrt{2}}{3}$. Но так как $QC = CP$ и $NB = BP$, то

$$a = \frac{b}{2}. \tag{3}$$

Далее, так как $AQ = AN$, то

$$\frac{b}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{3} = c - \frac{x\sqrt{2}}{3}$$

или

$$c - \frac{b}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}x. \tag{4}$$

Но

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}. \tag{5}$$

(Эта формула следует из теоремы: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.) Подставляя значения x из (5) в (4), используя (3), получаем

$$20\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 36\frac{c}{b} + 13 = 0,$$

откуда находим

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2};\ \frac{13}{10}.$$

В первом случае $a : b : c = 1 : 2 : 1$ — треугольник ABC вырождается в отрезок. Во втором случае $a : b : c = 5 : 10 : 13$.

Ответ: $BC = CA : AB = 5 : 10 : 13$.

4. Сложив первое и второе уравнение системы, получим

$$2x^2 - xy - xz = 0$$

или

$$x(2x - y - z) = 0.$$

а) $x = 0$. Подставив это значение x во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} x = 0, \\ z^2 = y^2 \\ z^3 - y^3 = y^2 + z^2. \end{cases} \tag{6}$$

Если $z = y$, то из третьего уравнения системы (6) следует $y = 0$. Получаем решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Если $z = -y$, то из третьего уравнения системы (6) находим два значения для y: $y = 0$ или $y = -1$. Это дает еще одно решение: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.

б) $2x - y - z = 0$. (7)

Подставляя $z = 2x - y$ в первое уравнение исходной системы, находим $x = 0$ либо $x = y$.

При $x = 0$ из (7) следует $z = -y$, и мы приходим к рассмотренному выше случаю.

Если же $x = y$, то из (7) находим $z = x$; тогда из третьего уравнения исходной системы следует $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $(0, 0, 0)$; $(0, -1, 1)$.

5. Проведем через точку C плоскость π, перпендикулярную к ребру SC, и пусть E и F — точки пересечения с плоскостью π продолжений ребер SA и SB (рис. 2).

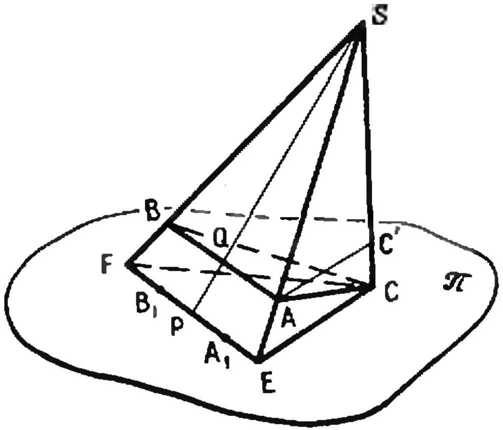


Рис. 2.

Так как $\angle ESC = \angle FSC$ (пирамида $SABC$ правильная), то $SE = SF$ и, следовательно, $FE \parallel AB$, то есть плоскость грани SAB пересекается с плоскостью π по прямой, параллельной AB. SC одновременно является боковым ребром правильной треугольной призмы, основание которой, треугольник A_1B_1C, лежит в плоскости π, а вершины A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB. Таким образом, вершины A_1 и B_1 лежат на прямой EF.

Пусть точка P — середина отрезка EF; тогда PS пересекает AB в его середине — точке Q. Проведем $AC' \parallel EC$.

Из подобия треугольников SQA и SPE имеем

$$\frac{AQ}{PE}=\frac{SA}{SE}, \qquad (8)$$

а из подобия треугольников SAC' и SEC

$$\frac{SA}{SE}=\frac{AC'}{EC}. \qquad (9)$$

Так как $AC'\perp SC$, то $AC'<AC$, поэтому из (9) следует

$$\frac{SA}{SE}<\frac{AC}{EC}. \qquad (10)$$

Из (8) и (10) получим

$$\frac{AQ}{PE}<\frac{AC}{EC} \text{ или } \frac{AQ}{AC}<\frac{PE}{EC}. \qquad (11)$$

Треугольник ABC правильный, поэтому

$$\frac{AQ}{AC}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Тогда из (11) следует

$$\sin\angle PCE=\frac{PE}{EC}>\frac{1}{2},$$

то есть $\angle FCE$ больше 60°. Отсюда следует, что точки A_1 и B_1 лежат на отрезке EF, P — середина A_1B_1 и $A_1B_1<EF$.

Теперь нетрудно сделать рисунок (рис. 3). Сторона основания AB пирамиды $SABC$ пересекается с гранями призмы A_1A_2SC и B_1B_2SC в точках M и N.

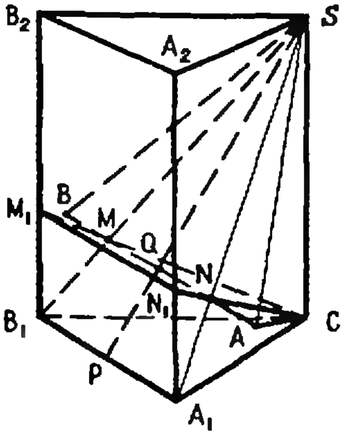


Рис. 3.

Обозначим $x=MN$, $a=AB$, $b=A_1B_1$, h — высота пирамиды. Найдем объемы пирамиды $SABC$ и ее части, лежащей внутри призмы:

$$V_{SABC}=\frac{1}{6}\,ah\cdot QC,$$

$$V_{SMNC}=\frac{1}{6}\,hx\cdot QC,$$

откуда

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SMNC}}=\frac{x}{a}. \qquad (12)$$

Из подобия треугольников MSN и B_1SA_1 находим

$$\frac{x}{b}=\frac{SQ}{SP}. \qquad (13)$$

Рассмотрим треугольник SPC (рис. 4). Проведем прямую $QL\parallel PC$. Из подобия треугольников SQL и SPC имеем

$$\frac{SQ}{SP}=\frac{QL}{PC}. \qquad (14)$$

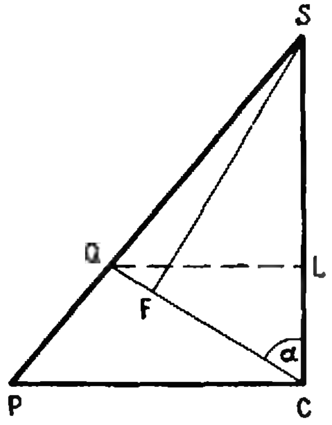


Рис. 4.

Далее, PC — высота основания призмы, $PC=b\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $QL=QC\cdot\sin\alpha$.

Угол α — это угол между ребром SC и высотой QC основания правильной пирамиды. Если SF — высота пирамиды, то $FC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. По условию, $SC=\frac{2}{\sqrt{3}}\,a$, откуда $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=60^\circ$, и, следовательно,

$$QL=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ=\frac{3a}{4}.$$

Из (13) и (14) находим

$$\frac{x}{b}=\frac{SQ}{SP}=\frac{QL}{PC}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2b},$$

откуда $\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это, как следует из (12), дает искомое отношение объемов.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 2

1. 63. 2. $x=\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$,

$$x=-\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k.$$

3. $\dfrac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2\left(S_2^2-S_1S_3\right)}$.

4. $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$; $(t, 4t, -2t)$. t — любое действительное число. 5. $\frac{3\sqrt{6}}{40}$.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ

Вариант 1

1. $x_1 = 1$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 1$. Указание. Ввести новые неизвестные: $u = \sqrt[3]{x}$, $v = \sqrt[3]{y}$. 2. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 4$.

3. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, где $k = 2, 3, 4, \ldots$

4. $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$.

5. Решение. Пусть $x \leqslant 0$; тогда данный многочлен положителен, поскольку $x^8 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, $-x^5 \geqslant 0$, $-x \geqslant 0$. Пусть $0 < x < 1$; тогда данный многочлен представим в виде $x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x)$, откуда видно, что он положителен, поскольку $x^3 > 0$, $x^2 > 0$, $1 - x^3 > 0$, $1 - x > 0$. Пусть $x \geqslant 1$; тогда данный многочлен представим в виде $x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1$, откуда видно, что он положителен, поскольку $x^5 \geqslant 0$, $x^3 - 1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $x - 1 \geqslant 0$.

Вариант 2

1. $x_1 = 7$, $y_1 = 3$; $x_2 = -7$, $y_2 = -3$.
2. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{2}{11} l\pi$ при $k = 0, -1$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

4. $\frac{1}{2} \left| \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C \right|$.

МОСКОВСКИЙ ОБЛАСТНОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени Н. К. КРУПСКОЙ

Математический факультет

Вариант 1

1. $$S = \frac{2\pi H^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$
$$V = \pi H^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

2. $x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $x_2 = \pm\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$, где k и n — любые целые числа.
3. $-2 < x < 2$.
4. $x_1 = y_1 = 1$; $x_2 = y_2 = -1$. Указание. Представить левую часть в виде $x^4 + y^4 + 1 + 1$ и использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим четырех чисел.

Вариант 2

1. $$S = \frac{2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

2. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где k — любое целое число. 3. $x < -7$ 4. $m_1 = 3$; $m_2 = 4$.

Физический факультет

1. $S = \frac{\pi a^2}{\cos \alpha}$. 2. $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, где k и n — любые целые числа. 3. $-5\, ab$; -20. 4. $x < -3$, $x \geqslant \frac{3}{2}$.

К статье «Законы идеальных газов»

1. 751,2 *мм рт. ст.*

2. 1—2 — давление уменьшается; 2—3 — давление увеличивается; 3—1 — давление увеличивается.

3. Разность уровней ртути в коленах трубки не изменится.

4. $x_3 = 0{,}3$ *м*.

6. 5 *г* водорода, 8 *г* гелия.

К заметке «Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 4, 3-я стр. обл.)

1. а=1, г=5, д=3, е=2, к=8, м=6, с=7, ф=9.

2. Все выключатели нужно соединить последовательно с лампочкой, затем эту цепочку подключить к источнику. Первый, второй и пятый выключатели должны быть в «нормальном» положении разомкнутым и замыкаться при нажатии соответствующих кнопок; остальные выключатели в «нормальном» положении должны быть замкнутыми и при нажатии соответствующих кнопок должны «размыкаться».

3. Начиная с вершины: 6, 1, 4, 5, 2, 3.

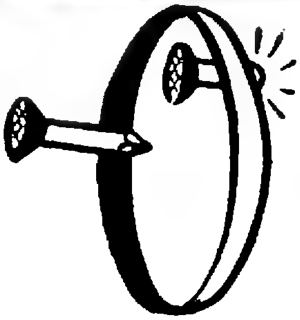
4. Вода действительно холоднее окружающего воздуха, но когда человек выходит из реки, капли воды на теле начинают испаряться, отбирая часть тепла от тела. Тело охлаждается, и поэтому воздух кажется холоднее воды

5. Число, стоящее в каждой клетке начиная с третьей, равно числу, стоящему на 2 клетки раньше, плюс один.

6. Можно предложить несколько способов. Вот один из них: уравновесить на весах сосуд, доверху заполненный водой, затем снять сосуд, положить в него камень (при этом выльется часть воды) и вновь поставить на весы. Для того, чтобы вновь уравновесить весы, на другую чашку нужно будет положить гирю весом $P_1 = (\rho_к - \rho_в) gV$ ($\rho_к$ — плотность камня, $\rho_в$ — плотность воды, V — объем камня). Затем вытащить камень и вновь взвесить сосуд. От веса сосуда с водой он будет отличаться на $P_2 = \rho_в g V$. Отсюда $V = \frac{P_2}{\rho_в g}$. Поэтому $P_1 = (\rho_к - \rho_в) g \frac{P_2}{\rho_в g} = \frac{\rho_к}{\rho_в} P_2 - P_2$. Или $\rho_к = \rho_в \frac{P_1 + P_2}{P_2}$.

КВАНТ

ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

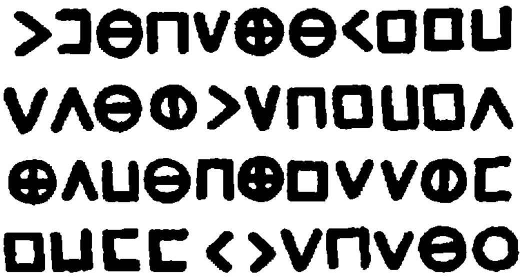


1. К стене прислонен обруч. В одной точке в стене «внутри» обруча вбит гвоздь так, что обруч касается его. Найти геометрическое место точек, в которые надо вбить второй гвоздь внутри обруча, чтобы обруч оставался неподвижным.

2. В предлагаемой шифровке значками зашифрованы цифры и знаки +, —, =. Каждая строчка шифровки содержит запись одного из арифметических действий типа:

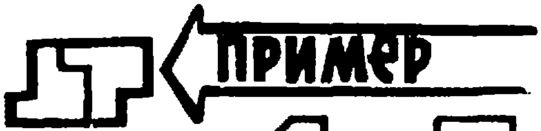
25+184=209 или 2568=2573—5.

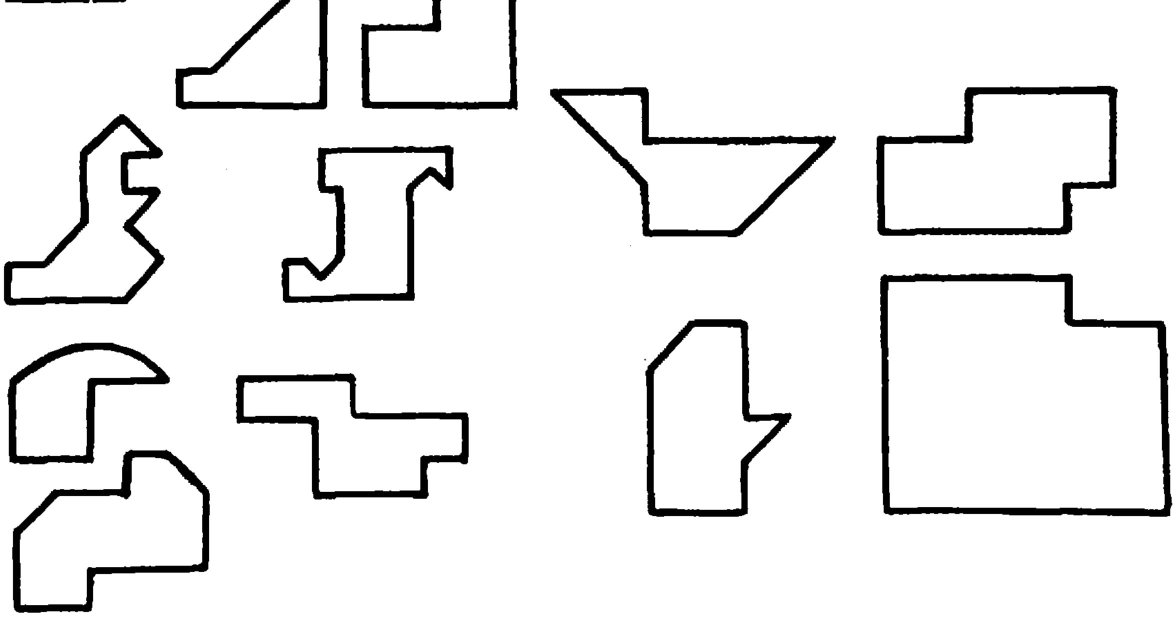
Попробуйте определить, какой цифре или знаку соответствует каждый из значков.



3. Каждую из приведенных фигур, попробуйте разрезать на две равные фигуры, то есть на две такие фигуры, которые можно совместить, наложив одну на другую.

В качестве примера на первой из этих фигур показан требуемый разрез.





ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 5

К нашим читателям!

Продолжается подписка на второе полугодие 1972 года на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Постоянно помещаются рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке и в розничную продажу не поступает.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

НОМЕР
6

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

6
ИЮНЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ

2 От метра до парсека *А. А. Михайлов*
9 Вычисление объемов с помощью принципа Кавальери *В. Л. Рабинович*
15 Парадоксы спутников *Л. Блитцер*
20 Потенциальная энергия тел в поле тяготения *Н. М. Сперанский*
22 Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов *З. А. Скопец*
26 График кубического четырехчлена *О. А. Жаутыков*
29 Задача Наполеона *В. Н. Березин*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

30 Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики *В. Н. Вагутен*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

36 Задачи **М146—М150; Ф158—Ф162**
38 Решения задач **М106—М107; Ф123—Ф128**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

44 Побываем на устном экзамене *Е. Б. Ваховский, А. Б. Волынский*
51 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года
54 Экзамен по физике в Московском инженерно-физическом институте
55 Решение задач по электростатике (Потенциал) *Г. Я. Мякишев*
59 Закон Ома для неоднородного участка цепи *В. Н. Ланге*
62 О системах физических единиц *М. Л. Смолянский*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

67 Осторожно, брак *И. М. Яглом*

ИНФОРМАЦИЯ

70 Московский физико-технический институт *А. П. Савин, Н. А. Минц*
73 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ (3-я стр. обл.)
СМЕСЬ (стр. 8, 14, 21, 28, 29, 35, 50, 61, 69)

ОТ МЕТРА ДО ПАРСЕКА

А. А. Михайлов

Всем известно, что такое метр — мера длины, введенная при установлении метрической системы мер Парижской академией наук в 1791 г. во время великой французской революции.

Разнообразие мер, царившее до этого в разных странах, представляло большие неудобства, особенно ощутимые при оживлении путешествий и международной торговли. В связи с этим французские ученые предложили основную меру длины заимствовать не от размеров человеческого тела, а из неодушевленной природы, связав ее с размерами Земли как планеты, в расчете на то, что величина Земли есть нечто неизменное. Ведь именно это требуется от всякой меры. Поэтому было решено принять за основную меру длины одну десятимиллионную часть расстояния от полюса до экватора, точнее — четверти парижского меридиана. Такая величина была выбрана в связи с тем, что часть этого меридиана была измерена еще в начале XVIII века. Это измерение, произведенное французскими учеными, дало неожиданный результат — длина одного градуса меридиана оказалась не одинаковой в разных частях Земли, а слегка увеличивающейся с севера на юг. В таком случае Земля не могла быть точным шаром, как раньше думали, а должна была быть немного вытянутой в направлении полюсов, то есть по оси вращения.

Однако теоретические соображения Ньютона требовали обратного — сплюснутости Земли у полюсов и растянутости к экватору. Это должно быть следствием вращения Земли вокруг оси: точки на экваторе, находящиеся дальше от оси вращения и имеющие бо́льшую линейную скорость, стремятся дальше удалиться от оси вращения, чем точки, находящиеся ближе к полюсам. Ньютон показал, что Земля вследствие этого должна принять форму эллипсоида, образованного вращением эллипса вокруг малой оси. Большая ось эллипса — диаметр экватора Земли.

Вот тогда возник спор между учеными, основывавшимися на результатах французского измерения меридиана, и теоретиками, разделявшими мнение Ньютона.

Для решения спорного вопроса французская академия наук снарядила в тридцатых годах XVIII века две экспедиции для измерения длины градуса меридиана — одну на экватор в Перу и другую под северный полярный круг в Лапландию (на границу нынешней Финляндии со Швецией).

Результаты измерений, проведенных этими экспедициями, с несомненностью показали, что длина градуса меридиана у экватора заметно короче, чем у полярного круга. Таким образом, прав оказался Ньютон: Земля имеет форму эллипсоида.

По более поздним уточненным измерениям длина дуги 1° меридиана такова:

у полюса — 111 696 *м*,
у экватора — 110 576 *м*.

Что же касается размеров Земли, то, по одному из новейших определений советского геодезиста Ф. Н. Красовского,

радиус экватора $a = 6378245$ *м*,
полярный радиус $b = 6356863$ *м*,
сжатие $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{298.3}$.

Но вернемся к концу XVIII века, когда в дополнение к измерениям в

Лапландии и Перу было закончено еще более точное градусное измерение во Франции. Из всего этого материала была выведена длина окружности меридиана, одна сорокамиллионная доля которой и была принята за основную меру длины — метр (что по-гречески означает «мера»). Производя градусные измерения, французские ученые пользовались старинной мерой длины, называвшейся «туазом» (один туаз равнялся шести парижским футам; фут — длина ступни; в одном футе было двадцать дюймов: а дюйм — это мера длины, равная толщине большого пальца). Определив длину метра, выраженную в долях туаза, изготовили платиновую линейку такой длины и положили ее на вечное хранение в Международном бюро мер в Париже. Эта линейка получила название «архивный метр» и стала законной мерой длины метрической системы, которую приняли многие страны мира.

С тех пор много раз и в разных странах производились градусные измерения, одно из которых, и самое замечательное, в 1816—1854 гг. было проведено под руководством директора Пулковской обсерватории В. Я. Струве и военного геодезиста К. И. Теннера. Это измерение охватывало дугу в 25° протяженностью около 2800 *км* от рыбацкой деревушки Фугленес на севере Норвегии до города Измаила на берегу Дуная. Вычисленная по новейшим измерениям длина четверти меридиана оказалась несколько больше 10 миллионов архивных метров и составляет 10 002 138 *м*, так что архивный метр оказался примерно на 0,2 *мм* короче своей номинальной длины. Однако менять уже принятую меру было нерационально, это вызвало бы лишь путаницу. Поэтому архивный метр остался законной мерой длины, а для обеспечения ее сохранности были сделаны 30 точных копий, которые распределили по разным странам. Постоянство этих «нормальных» метров периодически проверяется, для чего их привозят в Париж, чтобы сравнить между собой и с архивным метром. Точность измерений при сравнении достигает 0,0001 *мм*, то есть доходит до 1/10 000 000 доли длины.

Американский физик Майкельсон, а затем и другие сравнили длину метра с длиной волны определенных линий оптического спектра и этим закрепили его длину независимо от любых случайностей, которые могут произойти с архивным метром или его копиями.

Такова вкратце история метра, ставшего основной единицей длины для всех измерений в повседневной жизни, науке и технике. Этот же метр лежит в основе измерений расстояний в космосе, но пришлось пройти сложный и длительный путь, прежде чем эту земную меру удалось перенести в космическое пространство, что было сделано в несколько этапов.

Первым и важнейшим этапом было измерение расстояния от Земли до Солнца. Необходимость начинать с этой величины вытекает из третьего закона Кеплера. Он гласит, что квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца. Периоды обращения планет известны с очень большой точностью. Следовательно, отношение кубов расстояний планет от Солнца тоже точно известно, а для того, чтобы от отношений перейти к самим расстояниям, нужно найти расстояние до Солнца от какой-либо одной планеты, например, от Земли.

Попытки узнать это расстояние делались давно, еще до открытия законов Кеплера в начале XVII века. Остроумный способ был предложен в III веке до нашей эры греческим астрономом Аристархом Самосским, правда, не для определения расстояния от Земли до Солнца, а для того, чтобы узнать, во сколько раз Солнце от Земли дальше, чем Луна, которая вследствие своего быстрого движения по звездному небу правильно считалась ближайшим к нам небесным телом. Этот способ заключался в

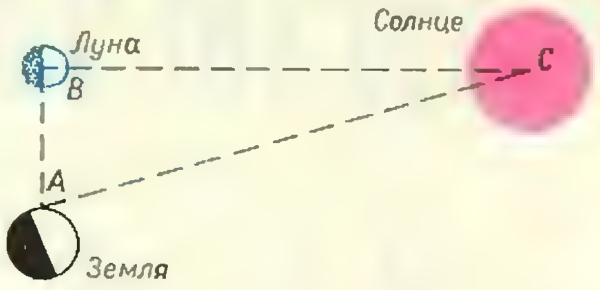


Рис. 1.

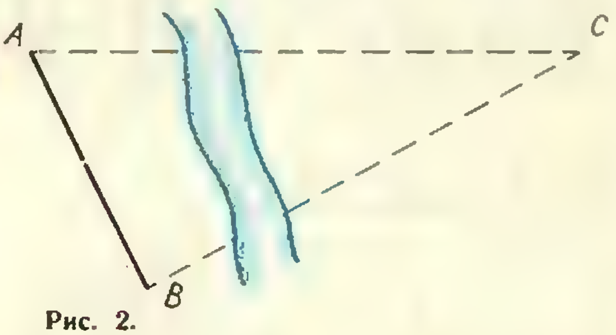


Рис. 2.

следующем. В первую и последнюю четверти диск Луны виден освещенным ровно наполовину, и линия, отделяющая светлую сторону от темной, *представляется диаметром лунного* диска (рис. 1). Угол между направлениями Луна — Солнце и Луна — Земля (угол ABC) прямой, как это видно из рисунка 1. Если измерить в это время угол между направлениями Земля — Луна и Земля — Солнце (угол BAC), то можно найти отношение расстояний Земля — Солнце и Земля — Луна (то есть отношение $\frac{AC}{AB}$). Во времена Аристарха Самосского для угла BAC было получено значение 87°. Следовательно, $\frac{AC}{AB} = \sec 87^\circ \approx 19$. Так что Солнце оказалось в 19 раз дальше Луны. Теперь мы знаем, что этот результат сильно ошибочен и что Солнце почти в 400 раз дальше Луны, так как угол BAC отличается от прямого угла всего лишь на 9′, а $\sec 89^\circ 51' = 382$. Измерения не могли быть выполнены с достаточной точностью, тем более, что из-за неровностей поверхности Луны нельзя уловить момент, когда освещена ровно половина ее диска.

Лишь с усовершенствованием угломерных инструментов и применением оптических труб можно было попытаться измерить расстояния до ближайших планет, а затем, пользуясь третьим законом Кеплера, вычислить расстояние до Солнца.

Для этой цели применяется геометрический простой метод засечки, которым широко пользуются геодезисты и топографы при определении расстояния до недоступного или удаленного предмета. Представим себе, что мы находимся в пункте *A на берегу реки и нам нужно* найти расстояние до пункта C, находящегося на другой стороне реки (рис.2). Выбираем на «своем» берегу пункт B, расстояние до которого AB легко измерить, и в треугольнике ACB измерим углы CAB и CBA. Теперь по известной стороне AB треугольника, называемой базисом, и двум прилежащим углам можно вычислить расстояние AC. Это все простая геометрия, но для уверенного определения расстояния до пункта C нужно, чтобы угол засечки ACB не был слишком острым, то есть чтобы базис AB не был очень малым по сравнению со сторонами AC и BC.

Применительно к Солнцу этот способ крайне труден, так как самый большой базис, который можно выбрать на Земле, — диаметр земного шара — почти безнадежно мал по сравнению с расстоянием до Солнца. Угол засечки в этом случае составляет всего лишь 17,6″.

Для пояснения принципа определения расстояния до Солнца представим себе двух наблюдателей на Земле (рис. 3). Одного в точке A, из которой Солнце видно в зените (по тому же направлению, что и из центра Земли O), и другого на экваторе в точке B; для него Солнце находится на горизонте. Допустим, что каждый наблюдатель каким-нибудь способом определил направление на Солнце — соответственно AC

и BC, которые пересекаются под очень острым углом p. Тогда в прямоугольном треугольнике CBO гипотенуза CO равна

$$CO = OB \cdot \operatorname{cosec} p,$$

где $OB = R$ — радиус земного шара.

Угол p называется параллаксом Солнца. Очевидно, p — угол, под которым из центра Солнца виден экваториальный радиус Земли. Его величина для среднего расстояния до Солнца равна 8,8″. Считая $R = 6400$ *км*, получаем

$$CO = 6400 \cdot \operatorname{cosec} 8{,}8'' \approx 150\,000\,000 \text{ км}.$$

Таково приближенное среднее значение расстояния до Солнца. Это именно среднее значение, так как земная орбита есть эллипс и Солнце находится не в его центре, а в фокусе; поэтому расстояние до Солнца в течение года изменяется примерно на 1,7 % = 2 550 000 *км* в ту и другую сторону.

Мы привели эти рассуждения только для того, чтобы показать принцип определения среднего расстояния между центрами Земли и Солнца. Это расстояние называют астрономической единицей длины или сокращенно а.е. Астрономическая единица является основной мерой для определения всех расстояний в солнечной и в звездной системах.

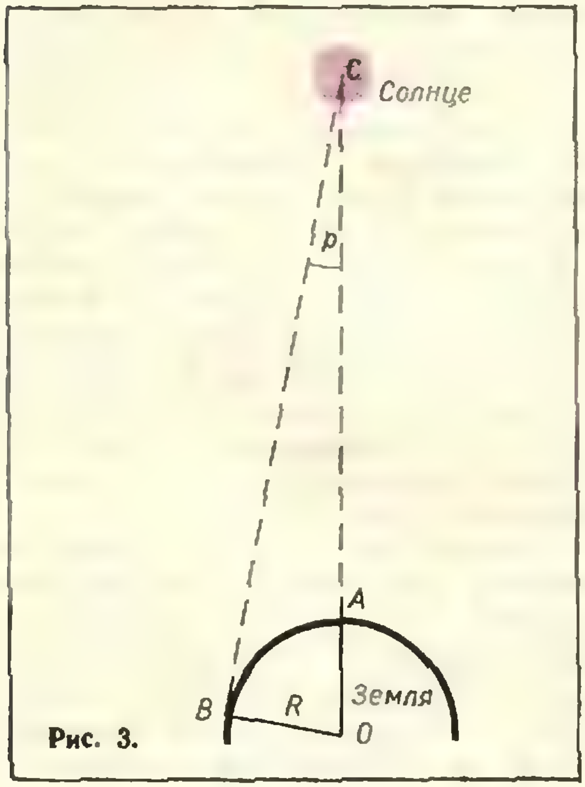


Рис. 3.

Трудность в практическом выполнении описанных измерений заключается в определении направлений AC и BC. Действительно, по отношению к чему можно находить эти направления? Если бы днем вокруг Солнца на небе были видны звезды, они дали бы тот далекий фон, по отношению к которому можно определить эти направления. Но этого нет, к тому же и центр Солнца ничем не обозначен, так что визировать его непосредственно нельзя. Вот почему удобнее определять расстояние до планеты, которая видна ночью на фоне звезд. (Есть планеты, которые значительно ближе к Земле, чем Солнце, что облегчает измерения.)

Первоначально для этой цели был выбран Марс, наблюдения которого в 1672 году впервые дали более менее верное значение параллакса Марса; а зная его, как мы уже упомянули, можно было вывести и параллакс Солнца. Когда в начале прошлого века были открыты первые малые планеты, появилась возможность пользоваться ими, так как некоторые из них подходили особенно близко к Земле. Кроме того, они малы по размерам и видны на небе как точки, подобно звездам, что сильно облегчает определение направлений. Одна из таких планет — Эрос — в 1930—31 гг. приближалась до расстояния в 0,15 а. е., когда ее параллакс достигал 60″. Тогда наблюдениями ее занимались 26 обсерваторий разных стран. Обработка полученного огромного материала дала наиболее точное значение солнечного параллакса. Тем не менее рассчитанная по нему длина а. е. все же содержала ошибку порядка 50 000 *км*. Эта ошибка может показаться очень большой. Однако нужно учесть, к какому огромному расстоянию она относится и насколько трудно измерять параллакс. Такую ошибку можно проиллюстрировать следующим образом. Представьте себе, что вы измеряете ширину комнаты и находите, что она равна 3 *м*. Нелегко вам будет получить при этом ошибку, не превосходящую 1 *мм*. Но именно такую относительную величину представляет ошибка 50 000 *км* по сравнению с а. е. в 150 000 000 *км*.

Для большинства случаев в астрономии такая точность в определении длины а. е. была достаточной. Но с началом космического века потребовалась значительно бóльшая точность. Действительно, космические ракеты запускались к Венере и к Марсу. Диаметры этих планет соответственно равны 12 400 *км* и 6800 *км*. Поэтому для корректировки полета ракеты так, чтобы она попала в заданное место планеты, нужно знать а. е. с точностью по крайней мере в десять раз большей. Здесь на помощь пришла радиолокация. Регистрация отраженного планетой сильного импульса радиоволн и определение времени прохождения сигналом расстояния туда и обратно позволили вычислить расстояние до планеты, а вместе с тем и а. е. с точностью до нескольких сотен километров, то есть повысить точность в сотни раз. Такие наблюдения были проведены в СССР и США и дали очень согласные результаты. С небольшим округлением а. е. теперь принята равной 149 600 000 *км*.

Это и есть основная единица длины, которой измеряются расстояния во вселенной, как в солнечной системе, так и за ее пределами. Однако для выражения расстояния до звезд эта единица все же слишком мала, и здесь употребляется другая, гораздо бóльшая мера (ведь не станем же мы мерить расстояние между городами миллиметрами). Такая укрупненная мера равна 206 265 а. е., или $3{,}0857 \cdot 10^{13}$ *км*, и называется парсеком. Выбор такого странного соотношения между а. е. и парсеком будет понятен из следующего.

Расстояния до звезд, по крайней мере ближайших к нам, измеряются тем же геометрическим способом засечки, что и расстояния до ближайших планет. Но вследствие чрезвычайной удаленности звезд находящийся в пределах земного шара базис, едва достаточный для измерения расстояний до планет, исчезающе мал по сравнению с расстоянием до звезд. Здесь нужен базис во много раз более длинный. И такой базис нашли.

Через каждые полгода Земля, переходя на противоположную точку своей орбиты, смещается почти на две а. е., то есть 300 000 000 *км* от первоначального положения. Такое смещение должно вызвать изменение направления, по которому с Земли видна та или иная звезда, причем чем ближе звезда, тем больше должно быть это изменение. Звезды должны казаться смещающимися и качаться из стороны в сторону, что является отражением орбитального движения Земли вокруг Солнца. Угол, на который смещается звезда при перемещении Земли на одну а. е., называется годичным параллаксом звезды.

Существование такого видимого покачивания звезд с годичным периодом было впервые теоретически предсказано Коперником в XVI веке и должно было служить наиболее веским доказательством движения Земли. Однако наблюдения того времени не обнаруживали ничего подобного. Но Коперник, убежденный в правильности своей теории, утверждал, что звезды слишком далеки, чтобы их параллаксы можно было измерить. Тихо Браге в конце XVI века тоже не мог обнаружить параллактических смещений звезд, хотя его наблюдения превосходили по точности все предыдущие и были на пределе возможностей для невооруженного глаза.

Изобретение зрительной трубы в десятки раз повысило точность измерений. Тем не менее, параллаксы звезд оставались незаметными. Лишь в 1837—38 гг. три выдающихся астронома: В. Я. Струве в Дерпте (ныне Тарту в Эстонии), Ф. Бессель в

Кенигсберге (ныне Калининграде) и Т. Гендерсон в обсерватории Мыса Доброй Надежды обнаружили и измерили параллаксы трех звезд: яркой Веги в созвездии Лиры, довольно слабой, но обладающей большим собственным движением 61-й звезды созвездия Лебедя и яркой звезды южного неба, невидимой в наших широтах — альфа Центавра. Параллаксы всех этих звезд оказались меньше $1''$.

Дадим теперь определение годичного параллакса звезды (рис. 4): это есть угол p, под которым со звезды A был бы виден радиус земной орбиты $R = BC$ (если считать орбиту окружностью).

Из прямоугольного треугольника ABC найдем расстояние $D = BA$ от Земли до Звезды (радиус Земной орбиты в среднем равен 1 а. е.):

$$D = BA = \frac{R}{\sin p} = \frac{1}{\sin p}\ \text{а. е.}.$$

Если выражать p секундами дуги, то так как этот угол очень мал, можно считать, что

$$\sin p \approx p \text{ (в долях радиана).}$$

В окружности единичного радиуса, длина которой 2π, содержится $360 \cdot 60 \cdot 60 = 1\,296\,000$ секунд, откуда

$$1'' = \frac{2\pi}{1\,296\,000} \approx \frac{1}{206\,265} \text{ доли радиана.}$$

Тогда $D \approx \dfrac{206\,265}{p''}$ а. е.

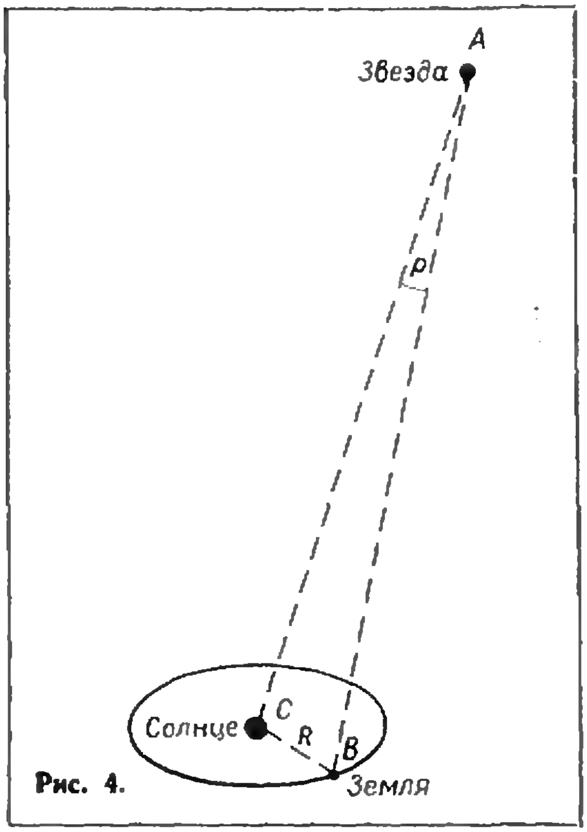


Рис. 4.

Вот откуда взялось это странное на первый взгляд число. 206 265 а. е. и является новой единицей длины для измерения звездных расстояний. Очевидно, это есть расстояние до воображаемой звезды, параллакс которой равен одной секунде, откуда и произошло само название парсек (сокращенно *пс*), составленное из первых слогов слов «параллакс» и «секунда». Расстояние же до звезды с параллаксом в p'' выражается теперь очень просто:

$$D = \frac{1}{p''}\ пс.$$

Звезд с параллаксом, равным $1''$, мы не знаем. Все звезды находятся дальше, так что p всегда есть правильная дробь. Ближайшая известная звезда — альфа Центавра — имеет параллакс $0{,}75''$, и расстояние до нее равно $\frac{1}{0{,}75''} = 1{,}33$ *пс*. Наиболее яркая звезда неба Сириус находится в два раза дальше.

Выразим расстояние в один парсек в километрах:

$$1\ пс = 1\ \text{а. е.} \cdot 206\,265 \approx 3{,}0857 \cdot 10^{13}\ км.$$

Следовательно, расстояние до ближайшей к нам звезды альфа Центавра равно примерно $4 \cdot 10^{13}$ *км*.

Звезд с параллаксом больше $0{,}1''$, то есть находящихся на расстояниях, меньших 10 *пс*, очень мало, всего несколько десятков. Огромное большинство звезд гораздо дальше, они отстоят от нас на сотни и тысячи парсеков. Для таких расстояний употребляется единица длины килопарсек, в тысячу раз большая парсека.

Итак, мы рассказали о длинном пути от земной единицы длины — метра — до парсека, которым измеряются расстояния до звезд других звездных систем. В популярной литературе часто употребляется другая единица — световой год, то есть расстояние, которое луч света в вакууме проходит в течение одного года. По наиболее точным определениям скорость света равна 299 792b, 5*км/с*; число секунд в календарном году (365,25 суток) есть $365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,557\,600$. Перемножив эти числа, мы получим, что световой год равен $9{,}46 \cdot 10^{12}$ *км*. Это огромное число все же меньше одного парсека: 1 *пс* = 3,26 световых лет. Ближайшая к нам звезда альфа Центавра находится на расстоянии 4,35 световых лет, а от ближайшей внегалактической туманности в созвездии Андромеды свет идет примерно 1 500 000 лет, и расстояние до нее оценивается в 460 000 парсек, или 460 килопарсек.

Для определения таких больших расстояний геометрический способ засечки совершенно непригоден. Поэтому были найдены другие, астрофизические способы, основанные на определении светимости звезд.

Иногда большие числа называют астрономическими.

Приведенные примеры оправдывают это название.

НОВОСТИ НАУКИ

Частицы из солнечных недр

Единственный источник энергии, который может поддерживать деятельность Солнца, — это ядерные реакции, протекающие в его недрах. Так думают современные физики и астрономы. Эта гипотеза может быть проверена наблюдениями. Цепочка ядерных реакций, которые протекают на Солнце, начинается со столкновения двух протонов, которые при этом излучают позитрон (e^+) и антинейтрино и превращаются в ядро тяжелого водорода — дейтрон:

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \bar{\nu}.$$

Как бы глубоко в недрах Солнца ни происходила такая реакция, антинейтрино должны вылетать из Солнца, так как они очень слабо взаимодействуют с веществом и поэтому лишь очень малая часть этих частиц поглотится внутри Солнца.

В течение многих лет физики готовились к тому, чтобы зарегистрировать на Земле антинейтрино, летящие от Солнца. Это оказалось очень трудным делом, и в последнее время даже появились сомнения в самом существовании потока солнечных антинейтрино. По крайней мере сообщалось, что их во всяком случае, существенно меньше, чем это требовалось теорией для обеспечения всего потока энергии, рождающегося в недрах Солнца.

Наконец, прошлым летом усилия физиков увенчались успехом. Американский физик Дэвис, много лет работавший над методами регистрации таких частиц, сообщил о том, что ему удалось зарегистрировать антинейтрино, летящие от Солнца.

Они регистрировались с помощью счетчика, наполненного изотопом хлора — хлор-37. (На самом деле в счетчике было примерно 500 000 литров жидкого четыреххлористого углерода CCl_4.) Ядра хлора превращались в ядра аргона-37 в результате реакции

$$\bar{\nu} + Cl^{37} \rightarrow Ar^{37} + e^-.$$

В опытах измерялось количество образовавшегося аргона по его радиоактивному распаду, идущему по схеме

$$Ar^{37} \rightarrow Cl^{37} + e^+ + \bar{\nu}.$$

Такой метод был много лет назад предложен академиком Б. М. Понтекорво.

В своей огромной установке Дэвис регистрировал всего по одному распаду Ar^{37} в два дня. Однако именно столько их и должно быть, если учесть, что, как и в Солнце, большинство антинейтрино пролетают всю установку насквозь.

Исходя из своих расчетов, физики ожидали, что число антинейтрино будет раз в 6 больше, однако теория не настолько точна, чтобы подобное расхождение вызвало серьезное беспокойство. Как бы то ни было, антинейтрино, которые свидетельствуют о термоядерных реакциях, снабжающих Солнце (а значит и нашу Землю) энергией, наконец зарегистрированы.

Я. А. Смородинский

Вычисление объемов с помощью принципа Кавальери

В. Л. Рабинович

Что такое объем? Как вычислить объем конкретного тела? Уже для ответа на первый из этих вопросов даже для такого «простого» случая, как прямоугольный параллелепипед, хотя бы одно из измерений которого не соизмеримо с фиксированной единицей длины, приходится пользоваться рассуждением, связанным в той или иной форме с переходом к пределу бесконечной последовательности. При переходе к более сложным вопросам — об определении и вычислении объема произвольного параллелепипеда, затем произвольной призмы, потом (очень важный шаг!) пирамиды, наконец, «круглых» тел: цилиндров, шара и шаровых сегментов — приходится использовать все новые и новые переходы к пределам, буквально нагромождая их друг на друга.

Рассуждения эти, с одной стороны, таят немало тонкостей и трудностей, с другой — представляются (внешне) довольно-таки «стандартными». И непосильность учета всех этих тонкостей и оговорок в школьном курсе математики, и обманчивая «похожесть» всех этих рассуждений о пределах в равной степени приводят к тому, что на них (на рассуждения) начинают смотреть зачастую как на неизбежные ритуальные заклинания, не вдумываясь и не пытаясь постичь их подлинный смысл и цель. Просто пропускать их — тоже как-то «неудобно», «неприлично»: все-таки математика! . . .

Так нельзя ли хотя бы до лучших времен одним махом разделаться со всеми этими неприятными разговорами о пределах? Оказывается, очень даже можно. Для этого достаточно принять в качестве постулата (аксиомы) так называемый принцип Кавальери *). Именно принять, а не доказывать. Это, конечно, не означает, что принцип этот вообще нельзя доказывать и обосновывать. Больше того, рассуждения о «неделимых», с помощью которых сам Кавальери пришел к его формулировке (во многом, кстати, поразительно предвосхищенные еще Архимедом с его «методом исчерпывания»), были уже довольно близки к методам интегрального исчисления Ньютона и Лейбница, посредством которых в наше время и определяются объемы «со всей строгостью». Но раз уж нашей целью как раз и было на этом этапе избавиться от всяческих пределов, неделимых, бесконечно малых и т. п., то разумнее и честнее будет не пользоваться никакими суррогатами. В конце концов, мы же знаем, что геометрия строится на базе аксиом. Так вот — будет еще одна аксиома. (По ходу дела мы увидим, что фактически придется воспользоваться еще парой аксиом, которые, впрочем, можно воспринимать и как определения.)

Итак, формулируем принцип Кавальери:

Если при пересечении двух тел **) F *и* F_1 (см. рис. 1) *плоскостями, параллельными одной и той же плоскости* α, *в сечении всегда получаются фигуры, площади которых находятся*

---

*) Бонавентура Кавальери (1598—1647) — итальянский математик, ученик Галилея.

**) Под «телом» мы всюду понимаем «нечто имеющее объем», не пытаясь точнее определить заключенные в кавычках слова.

в постоянном отношении $\lambda(\lambda > 0)$:

$$S = \lambda S_1,$$

то объемы этих тел находятся в том же отношении:

$$V(F) = \lambda(F_1) \text{ *)}.$$

Слово «объем» здесь впервые появляется не в «наводящих» рассуждениях, а в составе строго формулируемого предложения; поэтому нашу аксиому мы можем понимать и как определение объема — конечно, лишь для таких тел F, что для них найдутся соответствующие F_1, для которых понятие объема уже определено предварительно (см. ниже).

Применим теперь принцип Кавальери для вывода формул объемов некоторых тел. Предварительно нам, однако, придется напомнить, что *объем куба*, ребро которого равно единице длины, принимается равным единице (такой куб называется *единичным***).

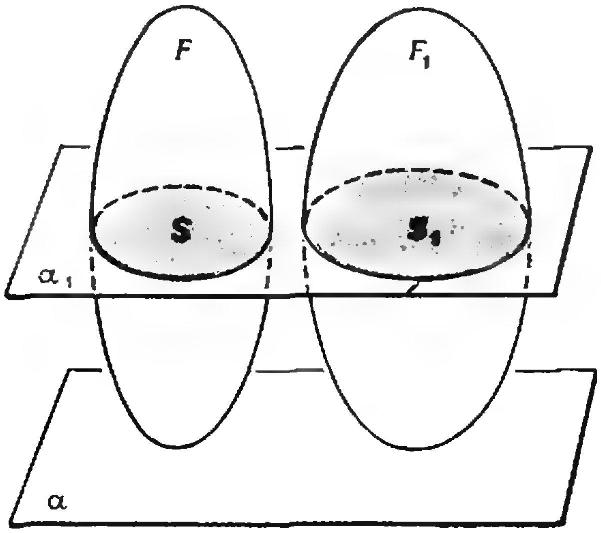


Рис. 1.

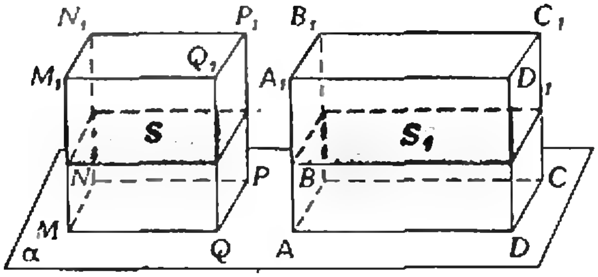


Рис. 2.

а) *Произвольные призма и цилиндр.* Сначала рассмотрим *прямоугольный параллелепипед* с изменениями, равными 1, 1 и h (h может быть как рациональным, так и иррациональным числом). Пусть (рис. 2) в параллелепипеде AC_1 $AB = AA_1 = 1$, $AD = h$. Рассмотрим единичный куб MP_1, основание которого расположено на той же плоскости α, на которой находится основание $ABCD$ параллелепипеда. Легко видеть, что площади сечений S_1 и S параллелепипеда и куба любой плоскостью, параллельной плоскости α, находятся в постоянном отношении h, то есть $S_1 = h \cdot S$. Следовательно, по принципу Кавальери

$$V(AC_1) = h \cdot V(MP_1) = h \cdot 1 = h \text{ *)}.$$

Пусть теперь дана *произвольная призма* (или *цилиндр*) F (рис. 3) с площадью основания S и высотой h. Расположим параллелепипед AC_1 с измерениями 1, 1, h так, чтобы его грань $ABB_1A_1 (AB = 1, AA_1 = 1)$ находилась в той же плоскости α, что и основание данной призмы F. Поскольку $AD = h$, то и верхние основания данной призмы и параллелепипеда AC_1 лежат в одной плоскости. Тогда в сечении призмы F любой плоскостью, параллельной α и пересекающей призму, получится фигура, равная основанию призмы. Площадь этой фигуры поэтому равна S. Та же плоскость в сечении с параллелепипедом дает квадрат площади 1.

---

*) Обычно в литературе принципом Кавальери называют предложение, являющееся частным случаем приведенного, когда отношение площадей сечений, о котором говорится в предложении, равно единице. Однако у самого Кавальери принцип приводится и используется и в указанной более общей форме.

**) Это первое из упомянутых выше дополнительных условий, которое можно понимать или как аксиому об объеме единичного куба, или как определение этого объема.

*) Если принять в качестве постулата упомянутый выше частный случай принципа Кавальери при $\lambda = 1$, то вместо только что приведенной «аксиомы единичного куба» (см. предыдущее примечание) придется взять это соотношение в качестве «аксиомы прямоугольного параллелепипеда».

Условия принципа Кавальери выполнены. Значит,

$$V(F) = SV(AC_1).$$

Но мы нашли, что $V(AC_1) = h$. Итак,

$$V(F) = Sh.$$

б) *Произвольные пирамида и конус.* Сначала рассмотрим частный случай. Куб AC_1 с ребром, равным h (рис. 4), может быть расчленен на три четырехугольные пирамиды A_1ABCD, $A_1BCC_1B_1$ и $A_1DCC_1D_1$. Эти пирамиды равны между собой. Действительно, первые две пирамиды могут быть совмещены так, чтобы их основания (равные квадраты $ABCD$ и B_1C_1CB) и равные ребра AA_1 и B_1A_1 совпали. Тогда и пирамиды совместятся. Аналогично показывается равенство последних двух пирамид *). Значит, объем каждой из пирамид втрое меньше объема куба AC_1:

$$V(A_1ABCD) = \frac{1}{3}h^3 \text{**)}.$$

Пусть теперь дана произвольная пирамида F (или конус) с площадью основания S и высотой h. Расположим эту пирамиду так, чтобы ее основание находилось в той же плоскости α, в которой находится основание рассмотренной только что четырехугольной пирамиды A_1ABCD (ее будем обозначать для краткости F_1). Можно считать, что вершины этих пирамид находятся по одну сторону от плоскости α. Тогда, используя теорему о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, легко получить, что площади сечений обоих тел плоскостью, параллельной плоскости α, будут относиться как площади их оснований. Поэтому может быть применен принцип Кавальери:

$$V(F) = V(F_1)\cdot\frac{S}{h^2} = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}Sh.$$

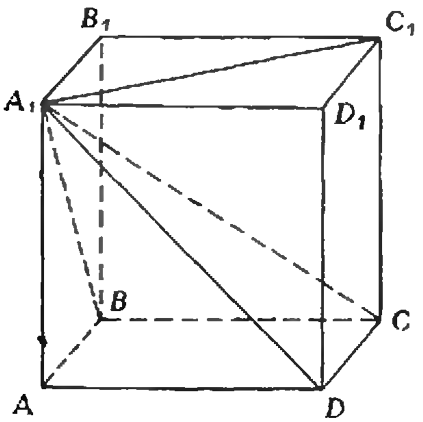


Рис. 3.

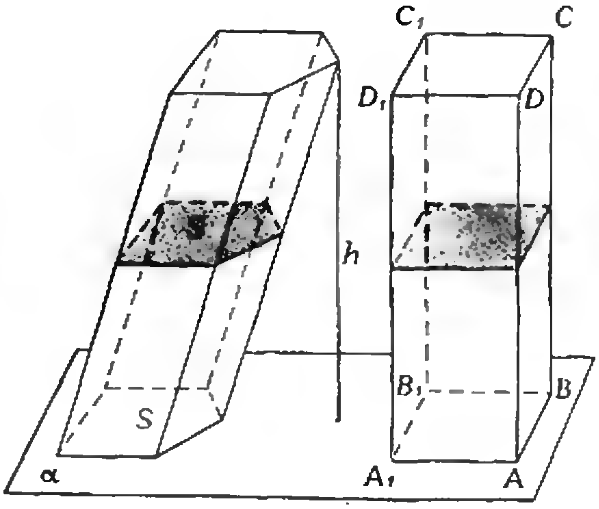


Рис. 4.

в) *Шар, шаровой сегмент.* Рассмотрим полушар с центром в O и радиусом R. Продолжим плоскость α ограничивающего этот полушар большого круга и поместим на эту плоскость основанием куб с ребрами, равными R (рис. 5). Если мы отделим от этого куба четырехугольную пирамиду $BA_1B_1C_1D_1$, имеющую вершиной вершину B куба, а основанием — верхнее основание последнего, то получим некоторое тело, которое будем обозначать через F_1. Пересечем оба тела некоторой плоскостью α', параллельной плоскости α

---

*) Необходимые совмещения любой пары из этих трех пирамид могут быть реализованы, например, при вращении одной из пирамид около оси A_1C на угол 120°.

**) Здесь мы используем последнее из дополнительных определений (аксиом): *объем совокупности нескольких тел* (в данном случае куба) *равен сумме объемов этих тел* (пирамид). Равенство же объемов равных тел (пирамид) легко следует из принципа Кавальери.

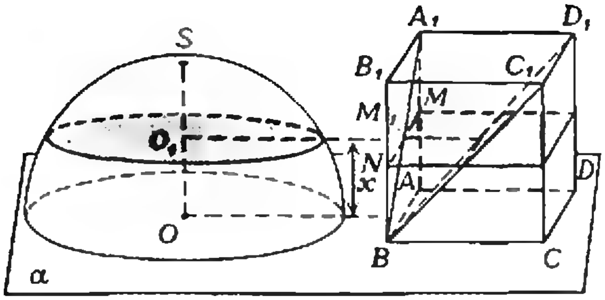


Рис. 5.

и отстоящей от α на расстояние x ($x < R$). В сечении с полушаром эта плоскость дает круг, площадь которого равна $(R^2 - x^2)\pi$. В сечении же тела F_1 той же плоскостью получится фигура, площадь которой равна $R^2 - x^2$ (ибо $M_1N = NB = x$). Отсюда ясно, что условия принципа Кавальери выполнены. Следовательно:

$$V_{\text{полушара}} = \pi V(F_1) = \pi(V_{\text{куба}} - V_{\text{пир}}) = \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше.

Найдем теперь объем шарового сегмента F' с высотой $SO_1 = h$ (см. тот же рис. 5). Заметим, что приведенное выше для полушара рассуждение показывает, что к сегменту F' и телу F'_1, полученному после изъятия из прямоугольного параллелепипеда MC_1 усеченной пирамиды M_1C_1, также применим принцип Кавальери. Поэтому (учитывая, что $BN = M_1N = R - h$):

$$V(F') = \pi V(F'_1) = \pi[V(MC_1) - V(M_1C_1)] = \pi\left[R^2h - \frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{3}\left(R - h\right)^3\right],$$

откуда

$$V_{\text{шар. сегм.}} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

г) *Тор.* Тором, как известно, называется тело, полученное вращением круга около оси, расположенной в плоскости круга и не пересекающей последнего. (Форму тора имеет, например, надутая камера автомобильной шины; в просторечии тор часто именуют «баранкой».)

Для вывода формулы объема тора представим себе, что тор F «лежит» на плоскости α, касаясь ее по некоторой окружности. Обозначим радиус круга, при вращении которого получен тор, через R, а радиус окружности, которую описывает центр круга O_1, через a. Представим себе, что на плоскости α «лежит» цилиндр F' радиуса R и высоты a, касающийся плоскости α по образующей S_1S_2. На рисунке 6 оба тела изображены в прямоугольной проекции на плоскость, параллельную оси вращения тора. При этом цилиндр расположен так, что его образующая не параллельна плоскости проекции (xy — ось вращения тора). Пересечем оба тела плоскостью, параллельной плоскости α и отстоящей от O_1 на расстояние r ($LO_1 = SS_1 = R$, $OO_1 = AD = BC = S_1S_2 = a$; см. рис. 6). Эта плоскость в сечении с тором дает кольцо, площадь которого равна, как нетрудно подсчитать, $4\pi a\sqrt{R^2 - r^2}$. В сечении же цилиндра получится прямоугольник площади $2a\sqrt{R^2 - r^2}$. По принципу Кавальери

$$V(F) = 2\pi V(F_1) = 2\pi^2 aR^2.$$

д) Теперь мы легко выходим за пределы так называемой «элементарной геометрии»; рассмотрим, например, *сегмент параболоида вращения*. Парабола $y = kx^2$ вращается около оси Oy (см. рис. 7), образуя некоторую поверхность вращения. Определим объем тела F, ограниченного

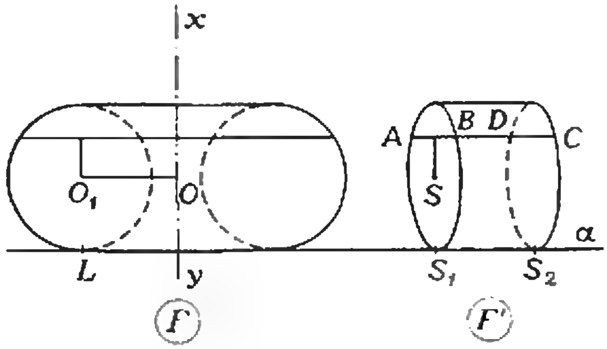


Рис. 6.

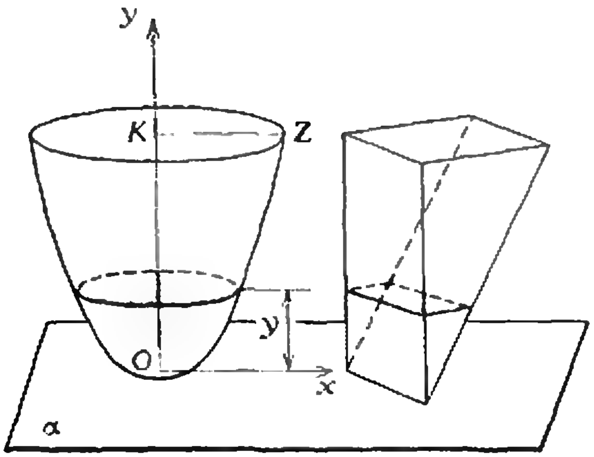


Рис. 7.

этой поверхностью и плоскостью, перпендикулярой оси Oy и отсекающей на этой оси отрезок $OK = h$ (такую форму имеет, например, автомобильная фара). Будем считать данным также радиус основания сегмента $KZ = a$.

Рассмотрим прямую треугольную призму F_1 высоты 1, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами, равными h. Расположим эту призму так, чтобы одна из меньших боковых граней оказалась лежащей в одной плоскости с основанием сегмента так, как показано на рисунке 7. Тогда нетрудно доказать, что в сечении сегмента плоскостью, параллельной основанию, получится круг площади $\pi x^2 = \pi \frac{y}{k}$; та же плоскость в сечении с призмой дает прямоугольник площади $y \cdot 1$. Применив принцип Кавальери, получим:

$$V(F) = \frac{\pi}{k} V(F_1) = \frac{\pi a^2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 \cdot 1 = \frac{1}{2} \pi a^2 h.$$

е) Применим, наконец, принцип Кавальери для вывода полезной в приложениях формулы, связывающей площадь плоской фигуры с площадью прямоугольной проекции этой фигуры:

$$S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos \alpha,$$

где через α обозначен угол между плоскостями фигуры и ее проекции.

Пусть фигура $ADBC$ имеет своей прямоугольной проекцией на некоторую плоскость фигуру $A_1D_1B_1C_1$ (см. рис. 8). Прямые, проектирующие точки контура фигуры $ADBC$ (AA_1, BB_1, CC_1 и т. д.), являются образующими некоторой цилиндрической поверхности. Отложим на образующих отрезки равной длины AA_2 и A_1A_0 и проведем через точки A_2 и A_0 плоскости, параллельные соответственно плоскостям ABC и $A_1B_1C_1$. Мы получим два цилиндра — наклонный (AB_2) и прямой (A_1B_0). В сечении этих цилиндров любой плоскостью, параллельной образующей, получаются равновеликие фигуры — параллелограмм MNN_2M_2 и прямоугольник $M_0N_0N_1M_1$. Поэтому в силу принципа Кавальери и цилиндры оказываются равновеликими:

$$V(AB_2) = V(A_1B_0). \qquad (*)$$

С другой стороны:

$$V(AB_2) = S_{ADBC} \cdot B_2E;$$

$$V(A_1B_0) = S_{A_1D_1B_1C_1} \cdot A_0A_1 \qquad (**)$$

(B_2E — высота наклонного цилиндра). Из (*) и (**) находим (так как $\angle BB_2E = \alpha$):

$$S_{A_1D_1B_1C_1} = S_{ADBC} \cdot \frac{B_2E}{BB_2} = S_{ADBC} \cdot \cos\alpha,$$

что и нужно было вывести.

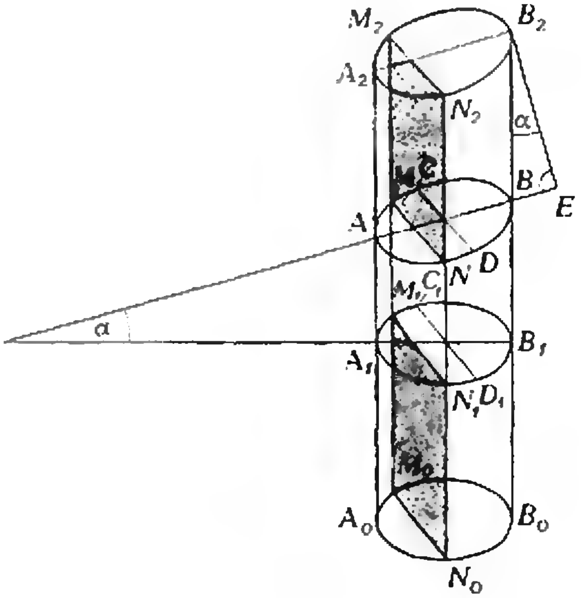


Рис. 8.

Упражнения

1. Доказать, что площадь *эллипса* равна πab, где a, b — полуоси эллипса *).

2. Определить объем *эллипсоида вращения*, получаемого вращением эллипса с полуосями a и b около оси, равной $2a$.

3. Доказать, что объем *тетраэдра* (треугольной пирамиды) равен $\frac{2}{3}S_{\text{ср}}\cdot h$, где через h обозначено расстояние между скрещивающимися прямыми, на которых лежат противоположные ребра тетраэдра, а $S_{\text{ср}}$ есть площадь сечения этого тетраэдра плоскостью, равноудаленной от этих двух прямых.

4. *Клином* называется многогранник, который получится, если концы отрезка, параллельного основаниям некоторой трапеции, соединить с вершинами этой трапеции, так, как указано на рисунке 9. Доказать, что объем клина равен $\frac{1}{3}(a+b+c)\,S_{\perp}$, где a, b — основания трапеции, c — длина данного отрезка, а $S_{\perp}$ — площадь треугольника, получаемого при сечении плоскостью, перпендикулярной к ребрам a, b, c клина (или его продолжения вдоль этих ребер).

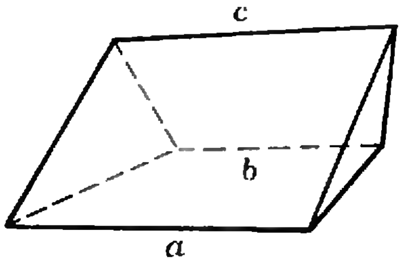


Рис. 9.

---

*) Об эллипсе см. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс» в журнале «Квант» № 9 за 1970 г.

Физики и

Альберт Эйнштейн любил играть на скрипке под аккомпанемент Артура Шнабеля. Как-то раз Эйнштейн сфальшивил. Попробовали еще раз — снова неудача. Шнабель вышел из себя: «Не так, Альберт, не так! Послушай, как я играю: раз, два, три, раз, два, три... Боже мой, неужели ты не умеешь считать?»

* * *

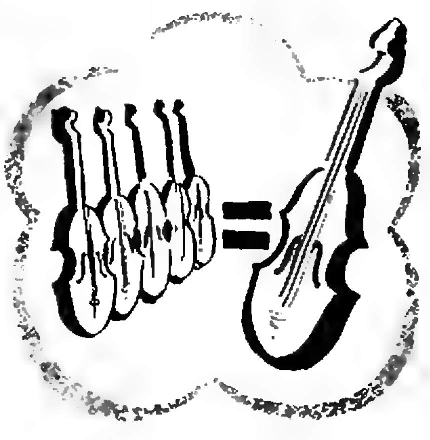
Как-то раз Роберт Бунзен пошел в консерваторию на концерт. «Послушайте,— спросил он в антракте соседа,— те скрипки, что находятся справа от дирижера, играют одно и то же?» — «Совершенно верно»,— ответил сосед. «Неэкономно! — покачал головой Бунзен,— не проще ли было заменить их одной большой скрипкой, чтобы на ней играл один человек?»

* * *

В юности Макс Планк увлекался теорией музыки. Тогда он воспитал в себе настолько тонкий слух, что ему, как он впоследствии рассказывал друзьям, ни один концерт не мог доставить полного удовольствия — всегда он подмечал даже неизбежные мельчайшие ошибки исполнителей. Лишь много лет спустя, к своей радости, он потерял «сверхчувствительность».

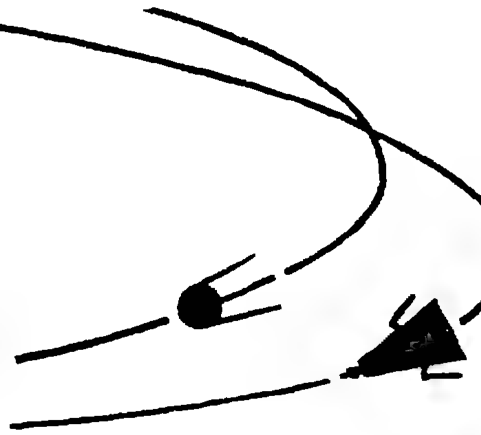
* * *

Эрнест Резерфорд не отличался музыкальным слухом, хотя обладал довольно звучным голосом. Его репертуар состоял всего из двух вещей, которые позволяли безошибочно определить настроение ученого. Если он шел по коридору, бодро напевая песню «Вперед, солдаты Христа» (песня узнавалась по словам, а не по мотиву), значит, дела в лаборатории обстояли благополучно. Если же Резерфорд нараспев произносил слова панихиды, это означало, что на сей раз он не в духе.



Л. БЛИТЦЕР

ПАРАДОКСЫ СПУТНИКОВ



Закон инерции хорошо известен. И хотя на Земле мы никогда не видели равномерно движущегося тела, на которое не действовали бы никакие силы, тем не менее шайба на льду может служить хорошей моделью такого тела: сила трения мала, а сила тяжести компенсируется силой реакции льда. В космосе, там, где летают искусственные спутники, ничто не компенсирует силу тяжести. Поэтому там тела, на которые не действуют никакие силы (кроме силы притяжения), движутся по эллипсам, параболам или гиперболам. Это можно считать «законом инерции» для спутников *).

Как же выглядит для спутника «второй закон Ньютона», то есть как изменяется скорость спутника, если на него действует какая-либо сила, кроме сил притяжения к Земле? Об этом рассказано в статье, которую мы перепечатываем из «American Journal of Phisics**» за 1971 г. Текст § 2 несколько изменен с тем, чтобы рассматривать движение не по эллипсу, а по окружности, так как формулы для такого движения можно легко получить, пользуясь школьным учебником физики. Эллиптичность орбиты спутника в данном случае несущественна.**

Статья подготовлена к печати Н. Я. Смородинской.

I. Введение

Как вы думаете, что происходит со скоростью и кинетической энергией искусственного спутника Земли при торможении в атмосфере? Вы наверняка ошибетесь, если будете руководствоваться лишь тем, что вам подсказывает повседневный «земной» опыт. Оказывается, скорость и кинетическая энергия спутника при торможении в атмосфере возрастают! Это удивительное явление было настолько неожиданным, что его стали называть парадоксом. Мы расскажем здесь о трех, казалось бы, совершенно разных явлениях, объяснение которых связано с этим парадоксом.

1) Сокращение размеров орбиты спутника и увеличение его скорости в земной атмосфере.

2) Колебание экваториального спутника Земли относительно положения устойчивого равновесия..

3) Изменение продолжительности земного месяца.

Первое из перечисленных явлений объясняется торможением в атмосфере, причина второго кроется в «трехосности» нашей планеты, а третье связано с тем, что на поверхности Земли образуются приливные выступы.

---

*) См. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение тел», «Квант» № 1, 1971.

II. Невозмущенная кеплеровская орбита

Давайте вспомним самые простые уравнения движения, подчиняющегося законам Кеплера. Если бы Земля была сферически симметрична и если бы вокруг нее не было ни атмосферы, ни других возмущающихся факторов, то хорошо известно, что орбита земного спутника представляла бы собой эллипс, один из фокусов которого лежал бы в центре Земли (рис. 1).

Когда орбита спутника близка к окружности с радиусом a, то период обращения его вокруг Земли равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \qquad (1)$$

где $\mu = \gamma M$ (γ — гравитационная постоянная и M — масса Земли).

Согласно третьему закону Кеплера таким же будет и период обращения спутника по эллиптической орбите с большой полуосью, равной a.

Можно показать, что при движении по круговой орбите потенциальная энергия U, кинетическая энергия K и полная энергия E спутника выражаются через a, μ и массу спутника m следующим образом:

$$U = -\frac{\mu m}{a}\,{}^{*)}, \qquad (2)$$

$$K = \frac{\mu m}{2a}, \qquad (3)$$

$$E = -\frac{\mu m}{2a}. \qquad (4)$$

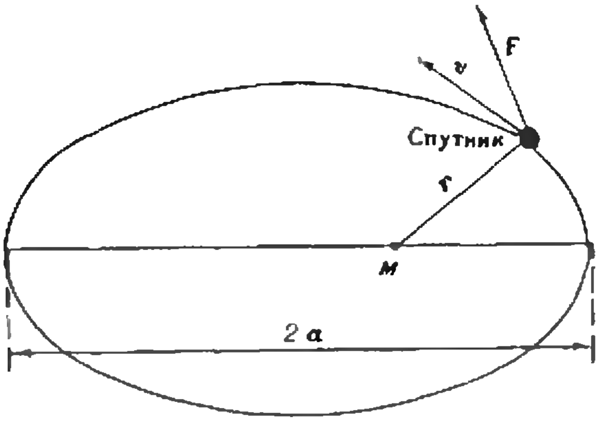


Рис. 1. Кеплеровский эллипс. F — возмущающая сила.

Отсюда видно, что эти величины связаны соотношением

$$U = -2K = 2E. \qquad (5)$$

Для эллиптической орбиты соотношение (5) и формулы (2)—(4) остаются верными, но вместо кинетической и потенциальной энергии нужно говорить о средней (за один оборот вокруг Земли) кинетической и средней потенциальной энергиях спутника.

III. Объяснение парадокса

Рассмотрим теперь, что происходит, когда на спутник действует какая-нибудь произвольная дополнительная сила. Очевидно, что если эта сила *больше* гравитационной $\left(\text{равной } \frac{\mu}{r^2}\right)$, то она должна играть основную роль. Это условие выполняется, например, в момент запуска спутника. Если же возмущающая сила мала по сравнению с силами гравитации, то орбита должна быть кеплеровской (то есть эллипсом или окружностью.) Именно этот случай мы и будем исследовать.

Любую непрерывно действующую возмущающую силу F можно заменить последовательностью бесконечно малых импульсов. В результате работы, совершаемой силой F в течение произвольного малого интервала времени Δt, энергия спутника возрастает на величину ΔE:

$$\Delta E = F_{\text{т}}\,\Delta S = F_{\text{т}}\,v\Delta t,$$

где $F_{\text{т}}$ — тангенциальная составляющая силы F, направленная по касательной к орбите, а v — скорость спутника.

Бесконечно малому приращению энергии ΔE соответствует увеличение радиуса орбиты спутника на бесконечно малую величину Δa.

Посмотрим теперь на формулу (4). Мы увидим, что с увеличением энергии спутника радиус его орбиты увеличивается. Сосчитаем, на какую величину Δa изменится радиус орбиты, если энергия спутника изменится на ΔE.

---

*) См. статью Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяжести» на стр. 20.

$$E = -\frac{\mu m}{2a}; \quad E + \Delta E = -\frac{\mu m}{2(a+\Delta a)}, \tag{6}$$

отсюда

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{1+\frac{a}{\Delta a}} \approx -\frac{\Delta a}{a}$$

или

$$\Delta a = -\frac{a}{E}\,\Delta E = \frac{2a^2}{\mu m}\Delta E. \tag{7}$$

Найдем еще связь между изменением скорости и изменением кинетической энергии

$$K + \Delta K = \frac{m(v+\Delta v)^2}{2}$$

и

$$\frac{\Delta K}{K} \approx 2\frac{\Delta v}{v}. \tag{8}$$

Отсюда

$$\Delta v = \frac{v}{2}\frac{\Delta K}{K} = -\frac{v}{2K}\,\Delta E, \tag{9}$$

т. к. из соотношения (5)

$$\Delta K = -\Delta E. \tag{10}$$

Подставляя теперь значение $\Delta E = F_{т} v \Delta t$, получим

$$\Delta v = -\frac{1}{m} F_{т} \Delta t. \tag{11}$$

Отсюда, считая изменения Δv и Δt малыми, получим выражение для ускорения спутника.

$$W = -\frac{1}{m} F_{т}. \tag{12}$$

Это уравнение на вид противоречит второму закону Ньютона (знак минус перед F). На самом деле никакого противоречия, конечно, нет. Вспомним, что сила F представляет собой лишь возмущение по сравнению с доминирующей силой $\frac{1}{r^2}$. Из формулы (10) видно, что если энергия спутника увеличилась из-за увеличения радиуса орбиты на ΔE, то кинетическая энергия уменьшилась на ΔE. При этом потенциальная энергия увеличилась на $2\Delta E$, это и дало увеличение полной энергии.

Заметьте, что все наши рассуждения совершенно не зависят от того, какая именно возмущающая сила действует на спутник.

Исследуя зависимость всех этих величин от знака ΔE, можно составить таблицу 1. Из нее видно, что в результате возрастания орбитальной энергии спутника его период, потенциальная энергия и размеры орбиты растут, а линейная скорость уменьшается. Если же сила, действующая на спутник, уменьшает его энергию, то это вызовет сокращение размеров орбиты и увеличение скорости.

IV. Торможение в атмосфере

Рассмотрим, что происходит при торможении спутника в земной атмосфере. В этом случае возмущающая (тормозящая) сила направлена против движения, то есть ΔE всегда имеет отрицательный знак. В соответствии с таблицей 1 большая полуось и период обращения будут постепенно убывать, следовательно, средняя

Таблица 1

Величина	Обозначение	Если $\Delta E>0$ (ускоряющая сила)	Если $\Delta E<0$ (тормозящая сила)
Радиус орбиты (большая полуось в случае движения по эллипсу)	a	увеличивается	уменьшается
Период обращения	T	увеличивается	уменьшается
Кинетическая энергия	K	уменьшается	увеличивается
Потенциальная энергия	U	увеличивается	уменьшается
Линейная скорость	v	уменьшается	увеличивается

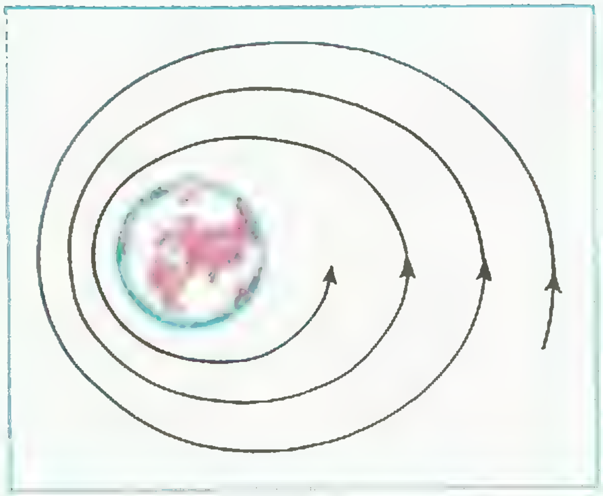


Рис. 2. **Сжатие орбиты искусственного спутника при торможении в атмосфере.**

скорость должна расти. Теряемая потенциальная энергия частично переходит в кинетическую, а остальная превращается в тепло. В перигее орбиты торможение максимально, потому что в этой точке скорость и атмосферная плотность принимают свои максимальные значения. В апогее же торможение будет минимальным. Поскольку в перигее спутник каждый раз получает отрицательный импульс, его орбита будет постепенно сжиматься, все сильнее приближаясь к круговой (рис. 2). Такое сжатие орбиты спутника под действием торможения в атмосфере неизбежно для всех искусственных спутников Земли и обычно сопровождается постепенным ростом скорости. Форма траектории приближается к окружности.

V. Движение экваториальных спутников с периодом 24 часа

Предположим, что Земля шарообразна, и рассмотрим искусственный спутник, который обращается в экваториальной плоскости по круговой орбите с периодом двадцать четыре часа. Поскольку движение спутника по орбите происходит синхронно с вращением Земли, географическая долгота такого спутника будет постоянной.

На этом свойстве основано использование спутников с круговыми орбитами для транслирования телевизионных передач и для географических исследований.

На самом деле распределение массы Земли неоднородно, а форма ее отличается от шарообразной, поэтому внешнее гравитационное поле Земли похоже на гравитационное поле тела, которое обладает тремя осями симметрии, а в сечении экваториальной плоскостью имеет эллипс. (На основе данных, полученных при исследовании траекторий спутников, можно сказать, что разность длин большой и малой осей эллиптического экваториального сечения Земли составляет 130 *м*, причем конец большой полуоси лежит на 15° западной долготы).

Давайте посмотрим, как происходит движение спутника во вращающейся системе отсчета, а именно в системе отсчета, связанной с Землей (рис. 3). Из соображений симметрии ясно, что когда спутник находится на продолжении одной из главных осей экваториального эллипса (в точках *A* или *B*), гравитационная сила ста-

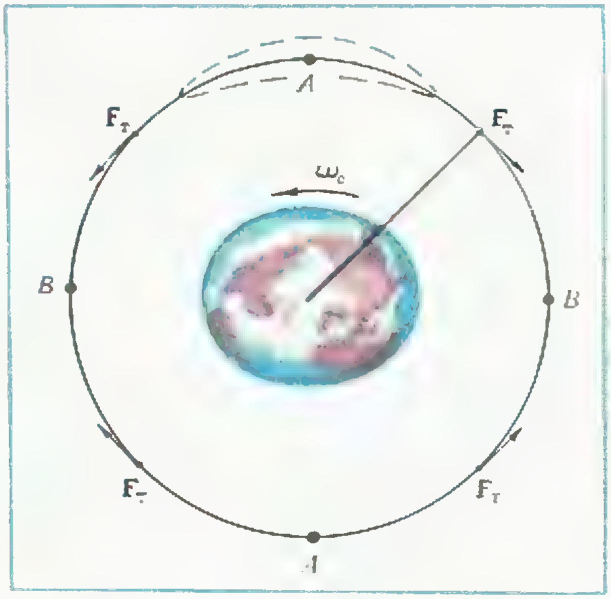


Рис 3. **Сечение Земли экваториальной плоскостью, перпендикулярной оси вращения (южный полюс находится за плоскостью рисунка). $F_т$ — сила, действующая на спутник вдоль касательной; *A* — положение устойчивого равновесия; *B* — положение неустойчивого равновесия. Пунктирной кривой показана траектория колебаний 24-часового спутника около положения устойчивого равновесия.**

новится чисто радиальной. Следовательно, в этих точках во вращающейся системе отсчета спутник должен быть в равновесии (висеть на месте). Во всех же остальных точках спутник будет испытывать притяжение, направленное в сторону ближайшего конца главной оси. Следовательно, будет существовать тангенциальная компонента силы $F_т$, направленная по касательной в сторону ближайшего конца главной оси (рис. 3). На первый взгляд может показаться, что спутник должен получать ускорение в направлении действия силы $F_т$, однако, согласно уравнению (12), все происходит совершенно иначе. В соответствии с разобранным парадоксом спутник будет медленно перемещаться в противоположном направлении в сторону ближайшего положения равновесия A, расположенного на малой оси. Поскольку спутник обладает некоторым количеством движения, он пройдет немного дальше точки A, после чего направление действия силы изменится на противоположное и спутник начнет постепенно двигаться в обратную сторону. Таким образом, спутник будет совершать колебания относительно положения равновесия A на малой оси.

В этом процессе потери энергии не происходит. Траектория спутника с периодом обращения 24 часа изображена пунктиром на рисунке 3. Период колебаний зависит от амплитуды, которая в свою очередь определяется начальными условиями.

VI. Увеличение длительности земного месяца

Перейдем к третьей задаче, также связанной с рассмотренным парадоксом. Астрономам давно известно, что Луна постепенно удаляется от Земли, в результате чего период ее обращения, то есть наш земной месяц, все время увеличивается. Одним из следствий лунного притяжения являются происходящие на Земле приливы. Если бы вся Земля была покрыта океаном и между массой воды и морским дном не было трения, то оба приливных горба лежали бы на прямой, соединяющей центры Луны и Земли (рис. 4). Однако скорость вращения Земли больше, чем угловая скорость движения Луны по орбите, поэтому приливные горбы из-за трения между морским дном и водой вытягиваются вперед по направлению вращения Земли.

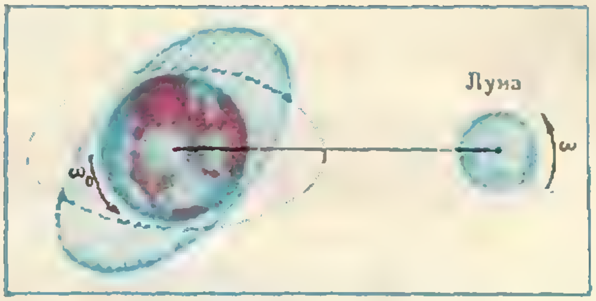


Рис. 4. Приливные выступы на Земле. (Для наглядности их размер сильно преувеличен.)

Поверхность Земли и океанов, как показано на рисунке 4, приобретает форму эллипсоида, аналогичного экваториальному эллипсу предыдущей задачи. Однако в этом случае водяной горб на Земле лишь немного опережает Луну. Горб, ближайший к Луне, взаимодействует с ней сильнее, чем более удаленный горб, поэтому тангенциальная составляющая силы, действующей на Луну, направлена в ту сторону, в которую движется Луна.

Орбитальная энергия Луны при этом возрастает, так как $F_т > 0$. Призвав на помощь все тот же парадокс, сразу заключаем, что полуось a лунной орбиты и период обращения Луны вокруг Земли возрастают. Иными словами, Луна постепенно удаляется от Земли, а продолжительность месяца увеличивается. В то же время линейная и угловая скорости Луны уменьшаются.

Полный момент количества движения системы должен сохраняться, потому что дополнительное поступление энергии извне отсутствует. Раз момент количества движения Луны относительно центра Земли возрастает, момент количества движения Земли относительно своей оси вращения должен все время убывать и день должен становиться длиннее.

Н. М. СПЕРАНСКИЙ

Потенциальная энергия тел в поле тяготения

Еще в школьном курсе физики указывается на существование глубокой аналогии между гравитационным и электростатическим полями, вытекающей из формального математического сходства закона тяготения Ньютона и закона Кулона. И в поле тяготения и в электростатическом поле работа по перемещению тел или электрических зарядов не зависит от формы пути, а определяется лишь потенциалами точек начала и конца перемещений и величинами масс или зарядов. Отсюда, в свою очередь, следует, что работа по замкнутому контуру, как в том, так и в другом поле равна нулю.

Потенциал любой точки электростатического поля $\varphi = \frac{kQ}{r}$, где Q — точечный заряд, образовавший поле, r — расстояние от данного заряда до точки, в которой определяется потенциал φ, а k — постоянная, зависящая от выбора системы единиц. В системе СГС $k = 1$; в системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; k - коэффициент пропорциональности в законе Кулона.

Работа по перемещению точечного заряда q равна

$$A = q\left(\frac{kQ}{r_2} - \frac{kQ}{r_1}\right), \qquad (1)$$

где r_1 соответствует начальной точке, в которой находился заряд q, а r_2 — его конечному положению.

Из аналогии между гравитационным и электрическим полем заключаем, что работа W в гравитационном поле, например, Земли равна

$$W = -m\left(\frac{\gamma M}{r_2} - \frac{\gamma M}{r_1}\right), \qquad (2)$$

где γ — гравитационная постоянная (коэффициент пропорциональности в законе тяготения), M — масса Земли, m — масса точечного тела, переносимого в поле силы тяготения Земли, а r_1 и r_2 — соответственно начальное и конечное расстояния от данного тела до центра планеты.

Мы поставили в этой формуле знак «—», так как два тела всегда притягиваются. Это соответствует взаимодействию положительного и отрицательного зарядов. Для того чтобы увеличить расстояние между телами ($r_2 > r_1$), нужно совершить положительную работу. При уменьшении расстояния между телами направление перемещения тела совпадает с направлением действующей на него силы. Следовательно, в этом случае работа отрицательна.

Определим теперь потенциальную энергию тела на расстоянии R от центра Земли. Так как изменение потенциальной энергии равно работе, затрачиваемой на перемещение тела, то, полагая, что потенциальная энергия равна нулю бесконечно далеко от Земли ($r_1 = \infty$), найдем

$$U = -\frac{\gamma M}{R} m.$$

График зависимости U от расстояния R показан на рисунке 1. Это гипербола, изображенная сплошной красной линией. На поверхности Земли $U = -\frac{\gamma M}{R_3} m$, где R_3 —радиус Земли.

Обычно решая задачи, связанные с перемещением тела у поверхности Земли, мы пользуемся другой формулой:

$$U = mgh,$$

где h — расстояние до поверхности Земли и g — ускорение свободного падения. Не ошибаемся ли мы?

Давайте отсчитывать величину потенциальной энергии тела от поверхности Земли, то есть считать, что на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю. Это означает, что нам нужно поднять красную кривую на рисунке 1 на $\frac{\gamma M}{R_З} m$, а формулу для потенциальной энергии тела записывать так:

$$U = -\frac{\gamma M}{R} m + \frac{\gamma M}{R_З} m = \gamma M m \frac{(R - R_З)}{R R_З}.$$

Если изменение расстояния тела до центра Земли $h = R - R_З$ мало по сравнению с $R_З$, то $R \approx R_З$ и $RR_З \approx R_З^2$. Поэтому

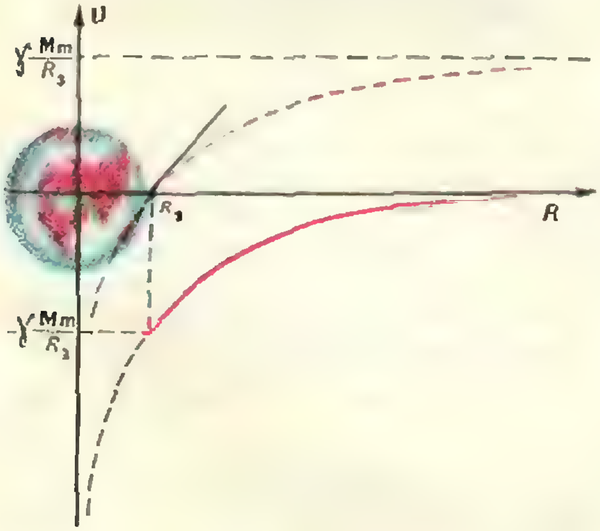


Рис. 1.

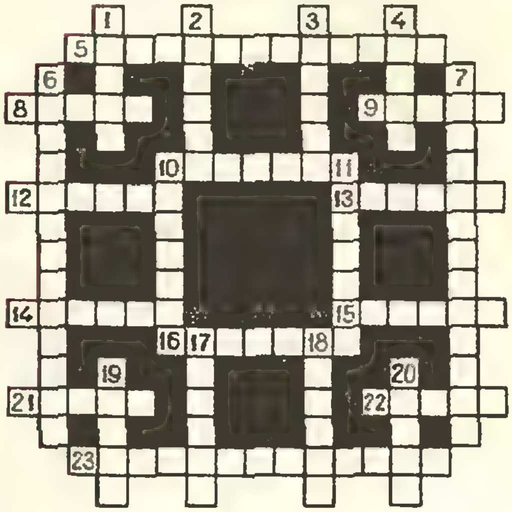
$$U = \frac{\gamma M m}{R_З^2} h.$$

Поскольку в большинстве практических задач вращением Земли обычно пренебрегают, можно считать, что на поверхности Земли тело массы m притягивается с силой $mg = \frac{\gamma M m}{R_З^2}$, то $\frac{\gamma M}{R_З^2} = g$ и $U = mgh$. Мы снова получили ту же формулу. Ясно, что ею можно пользоваться при $h \ll R_З$. При этом мы заменяем пунктирную кривую касательной к ней в точке $R = R_З$.

Кроссворд МФТИ

В № 1 нашего журнала за 1972 год мы поместили кроссворд МФТИ (кстати, как заметили многие наши читатели, в ответах на этот кроссворд есть неточность: «фокус с светом» — это, конечно, «преставление», а не «представление»).

Предлагаем вам еще раз проверить свои «юмористические способности». Мы уверены, что вы справитесь с помещенным ниже кроссвордом. Если захотите (на всякий случай) проверить, верно ли вы ответили на все вопросы кроссворда, то посмотрите на стр. 58 этого номера журнала.



По вертикали:

1. Приспособление для выращивания молодежи. 2. Твердая еда. 3. Съедобный эллипсоид. 4. Коммунальный чайник без ручки. 6. Действие, обратное вымогательству. 7. Псевдоним. 10. Первое русское декольтированное платье. 11. Место прописки Адама Козлевича. 17. Клятва наших предков. 18. Геометрическое место равных топов. 19. Пять шестых восточного бандита. 20. Начало пресловутого танца.

По горизонтали:

5. Черт знает что. 8. Комета без головы. 9. Папирус двадцатого века. 10. Населенный пункт в окрестностях Долгопрудного. 12. Инородный подкожный предмет. 13. Ликвидация брака. 14. То, что думает волк-интеллигент, глядя на Красную Шапочку. 15. Сельскохозяйственный работник. 16. Фотополуфабрикат. 21. Организованная паника. 22. Национальное сухое блюдо. 23. Ругательство.

Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов

З. А. Скопец

Напомним, что скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длин (модулей) этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}). \qquad (1)$$

Такое определение годится для векторов и на плоскости, и в пространстве. Скалярное умножение связано со сложением векторов распределительным (дистрибутивным) законом:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}. \qquad (2)$$

Это свойство удобно использовать во многих случаях, в особенности при доказательстве стереометрических теорем о перпендикулярных прямых и плоскостях*). Но беда в том, что обычно само свойство (2) доказывается с помощью некоторых из этих теорем**). В этой заметке мы покажем, что существует путь, свободный от указанного недостатка: мы выведем свойство (2) из соотношения Лейбница для элементов треугольной пирамиды, а затем докажем это соотношение без использования теорем стереометрии.

Соотношение Лейбница интересно и само по себе. Оно выражает расстояние от вершины тетраэдра до точки пересечения медиан противоположной этой вершине грани тетраэдра через длины всех шести его ребер.

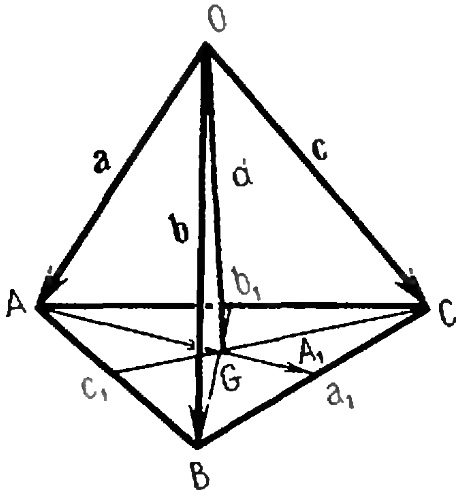


Рис. 1.

1. Соотношение Лейбница. *Пусть дан тетраэдр $OABC$ (рис. 1), G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Положим: $OG = d$, $OA = a$, $AB = c_1$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$. Тогда*

$$d^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{1}{9}\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right). \qquad (3)$$

Это соотношение мы выведем несколько позднее. А сейчас покажем,

---

*) По новым программам операции над векторами в пространстве будут изучаться в 9-м классе в курсе стереометрии.

**) В приложении, помещенном в конце статьи, соответствующая фраза выделена курсивом.

GOTEFRID GUILIELMUS LEIBNITZ SER^mo ELECT. BRUNS. LUNEB. ABINT. CONS.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (с гравюры М. Берингерота, 1703 г.). Латинское двустишие гласит: если (высшая) мудрость скрыла что-либо от разума, дошедшего до сути всего, то потому, что сама этого не знала.

как из него следует распределительное свойство скалярного произведения векторов (2). Положим $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = \mathbf{b}$, $\overline{OC} = \mathbf{c}$.

Очевидно, $\overline{AG} = 2\overline{GA}_1$, где A_1 — середина стороны $\overline{BC}$. Следовательно, $\overline{OG} - \mathbf{a} = 2(\overline{OA}_1 - \overline{OG})$. Но $\overline{OA}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, поэтому $\overline{OG} - \mathbf{a} = -2\overline{OG} + (\mathbf{b}+\mathbf{c})$ или

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}). \qquad (4)$$

Отсюда

$$d^2 = \overline{OG}^2 = \mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = \frac{1}{9}[\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})]^2.$$

Из определения скалярного произведения векторов и теоремы косинусов следует (рис. 2 *а*, *б*), что

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \overline{AB}^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}, \qquad (5)$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab}. \qquad (6)$$

Согласно соотношению (6) имеем:

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}[\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + (\mathbf{b}+\mathbf{c})^2]$$

или

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}[\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{bc}]. \qquad (7)$$

Из соотношения Лейбница (3) и формулы (5) следует:

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{3}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - \frac{1}{9}[(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2 + (\mathbf{c}-\mathbf{a})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2] = \frac{1}{3}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - \frac{2}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{bc} - \mathbf{ac} - \mathbf{ab})$$

или

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) + \frac{2}{9}(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}). \qquad (8)$$

Сопоставляя (7) и (8), находим:

$$\frac{1}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) + \frac{2}{9}[\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \mathbf{bc}] = \frac{1}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) + \frac{2}{9}(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}).$$

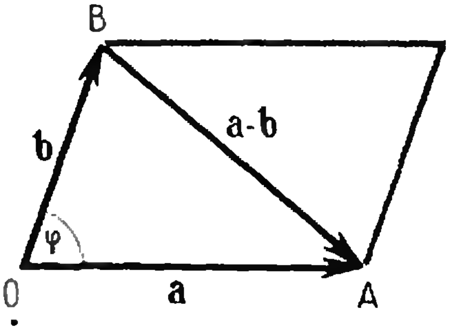


Рис. 2а.

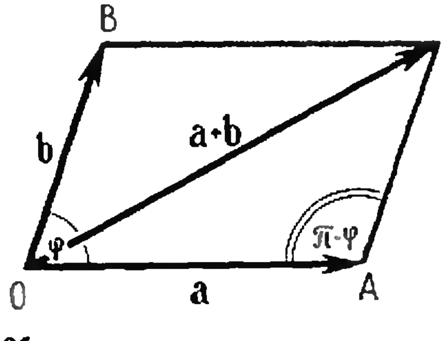


Рис. 2б.

Отсюда следует распределительное свойство скалярного произведения векторов (2).

2. Теперь остается доказать соотношение (3), не прибегая к теоремам стереометрии.

По теореме косинусов из треугольников OAG и OA_1G:

$$a^2 = d^2 + AG^2 - 2d\,AG\cos\varphi = d^2 + \frac{4}{9}AA_1^2 - \frac{4}{3}d\,AA_1\cos\varphi,$$

$$OA_1^2 = d^2 + A_1G^2 + 2d\,A_1G\cos\varphi = d^2 + \frac{1}{9}AA_1^2 + \frac{2}{3}d\,AA_1\cos\varphi.$$

Исключая φ, находим:

$$a^2 + 2OA_1^2 = 3d^2 + \frac{2}{3}AA_1^2. \qquad (9)$$

Но $OA_1^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a_1^2}{4}$, $AA_1^2 = \frac{1}{2}(b_1^2 + c_1^2) - \frac{a_1^2}{4}$ — это следует из формулы, выражающей квадрат длины медианы треугольника через длины его сторон (рис. 3). Подставляя значения OA_1^2 и AA_1^2 в формулу (9), получим:

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a_1^2}{2} = 3d^2 + \frac{b_1^2 + c_1^2}{3} - \frac{a_1^2}{6}.$$

Отсюда

$$3d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{3}$$

или

$$d^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

Заметим, что соотношение Лейбница остается в силе и тогда, когда точка O лежит в плоскости треугольника ABC (рис. 1). Именно для этого случая обычно рассматривается соотношение Лейбница в планиметрии, причем в несколько измененной форме:

$$3d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2). \qquad (3')$$

Равносильность соотношений (3) и (3′) вытекает из равенства

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{b_1^2 + c_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{4} + \frac{c_1^2 + a_1^2}{2} - \frac{b_1^2}{4} + \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} - \frac{c_1^2}{4}\right) = \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

3. Добавим несколько задач, решения которых основаны на применении соотношения Лейбница (3) или (3′).

а) *Множество точек пространства, сумма квадратов расстояний которых до вершин треугольника ABC ($BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$) постоянна и равна k^2, есть сфера, центр которой совпадает с точкой G пересечения медиан треугольника ABC (при условии, что $k^2 > \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$).*

В самом деле, из (3) следует, что

$$d^2 = \frac{1}{3}k^2 - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$$

и при $k^2 > \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$ расстояние d от точки O до точки G постоянно и равно радиусу R этой сферы:

$$R = \frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}.$$

б) *Точка, сумма квадратов расстояний которой до вершин треугольника минимальна, есть точка пересечения медиан этого треугольника.*

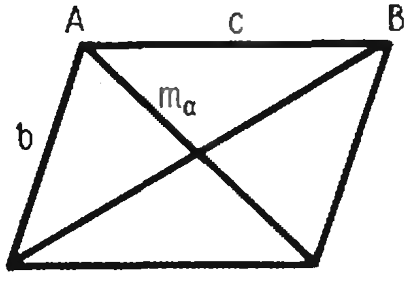


Рис. 3.

Из (3′) следует, что $a^2 + b^2 + c^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3OG^2$. Левая часть достигает минимума при условии $OG = 0$, или когда точка O совпадает с точкой G.

в) *Если в окружность вписаны два равносторонних треугольника, то сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин одного треугольника равна сумме квадратов ее расстояний до вершин другого треугольника.*

г) *Если вершину параллелепипеда соединить со всеми остальными его вершинами, то получатся семь отрезков, из которых один — диагональ d параллелепипеда, три — диагонали d_1, d_2, d_3 его боковых граней, остальные три — ребра a, b, c параллелепипеда.*

Путем двукратного применения соотношения Лейбница (3)

1) доказать истинность следующего соотношения, связывающего указанные семь линейных элементов параллелепипеда:

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - (a^2 + b^2 + c^2); \qquad (10)$$

2) вывести распределительное свойство скалярного произведения векторов, исходя из соотношения (10).

Приложение

Используя теоремы стереометрии (см. сноску на стр. 22), мы можем легко доказать, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{bc}. \qquad (11)$$

Докажем сначала такую лемму.

Лемма. Проекция вектора на ось не зависит от того, от какой точки пространства отложен вектор.

Доказательство. Пусть $\mathbf{C'D'}$ — проекция вектора $\mathbf{CD}$ на ось l, то есть CC' и DD' — перпендикуляры, опущенные из точек C и D на l (рис. 4). Пусть E — четвертая вершина параллелограмма $CC'D'E$, тогда $\mathbf{CE} = \mathbf{C'D'}$, $CC' \parallel ED'$ и потому $ED' \perp l$. *Поскольку* $ED' \perp l$ *и* $DD' \perp l$, *то* $DE \perp l$ *и, следовательно,* $DE \perp CE$. Тем самым, мы доказали, что проекция вектора $\mathbf{CD}$ на ось l равна его проекции на ось, параллельную l и проходящую через начало вектора — точку C:

$$\mathbf{C'D'} = \mathbf{CE}.$$

Теперь утверждение леммы очевидно (если $\mathbf{C_1D_1} = \mathbf{CD}$, то соответствующие прямоугольные треугольники CDE и $C_1D_1E_1$ равны по острому углу $\varphi = \angle ECD = \angle E_1C_1D_1$ и гипотенузе $CD = C_1D_1$).

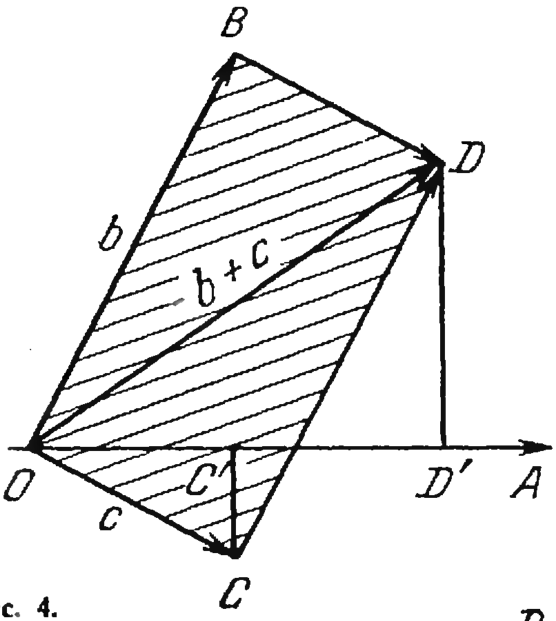


Рис. 4.

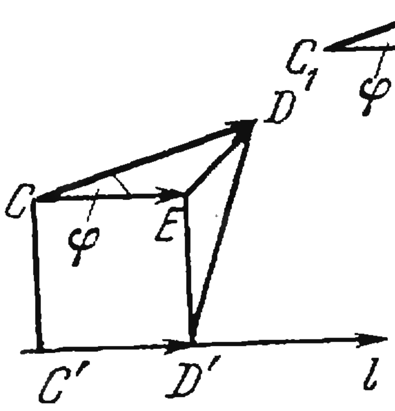


Рис. 5.

Одновременно мы видим, что координата проекции вектора $\mathbf{c} = \mathbf{CD}$ на ось l равна

$$\text{пр}_l\mathbf{c} = |c| \cos\varphi,$$

где $|c|$ — длина вектора c, φ — угол между вектором и осью (это число положительно, если проекция направлена в ту же сторону, что ось, и отрицательно, если в противоположную).

Теперь заметим, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно $|\mathbf{a}|\ \text{пр}_a\mathbf{b}$, где $\text{пр}_a\mathbf{b}$ — координата проекции вектора $\mathbf{b}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{a}$, так что (11) можно переписать так:

$$|\mathbf{a}|\ \text{пр}_a(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\ \text{пр}_a\mathbf{b} + |\mathbf{a}|\ \text{пр}_a\mathbf{c}. \qquad (12)$$

Осталось доказать, что

$$\text{пр}_a(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{пр}_a\mathbf{b} + \text{пр}_a\mathbf{c}. \qquad (13)$$

Это вытекает из рисунка 5, где $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$, $\mathbf{OD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ поскольку по лемме проекция вектора $\mathbf{OB}$ равна проекции вектора $\mathbf{CD} = \mathbf{OB}$; равенство (13) следует из того, что $\mathbf{OD'} = \mathbf{OC'} + \mathbf{C'D'}$.

О. А. Жаутыков

ГРАФИК КУБИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХЧЛЕНА

В «Кванте» № 11 за 1971 год рассказывалось о некоторых формулах, позволяющих выразить корни кубического уравнения через его коэффициенты. Однако во многих задачах оказывается полезным уметь представить себе график «кубического четырехчлена». Об этом и идет речь в публикуемой ниже статье.

Поставим своей задачей научиться строить график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0), \qquad (1)$$

то есть многочлена 3-й степени. Конечно, можно пытаться построить кривую (1) по точкам. Но это слишком долгий путь, требующий утомительных вычислений. Мы расскажем о более простом способе, позволяющем в каждом конкретном случае легко представить себе в общих чертах поведение кривой, описываемой уравнением (1).

Будем исходить из графика функции

$$y = x^3, \qquad (2)$$

называемого кубической параболой. Эта кривая строится по точкам (рис. 1); ее вид необходимо запомнить. Она играет при изучении графика кубического многочлена (1) роль, аналогичную роли параболы $y = x^2$ в теории квадратного трехчлена.

Кубическая парабола обладает следующими основными свойствами:

1) она симметрична относительно начала координат и проходит в третьей и первой четвертях (другими словами, функция (2) — нечетная);

2) в начале координат кубическая парабола пересекает ось абсцисс, одновременно касаясь ее.

Легко сообразить далее, как выглядит график функции

$$y = ax^3, \qquad (3)$$

где a — действительное число (рис. 2). Если $a > 0$, то кривая (3) симметрична относительно начала координат и проходит в третьей и первой четвертях; чем больше a, тем круче ветви кривой (3), чем меньше a, тем они положе. Например, при $a > 1$ ветви кривой (3) сильнее по сравнению с кубической параболой (2) прижаты к оси Oy.

При $a < 0$ график функции (3) симметричен кривой $y = |a|x^3$ относительно оси ординат — он проходит во второй и четвертой четвертях.

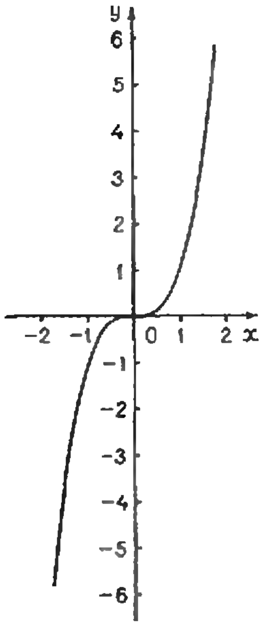


Рис. 1.

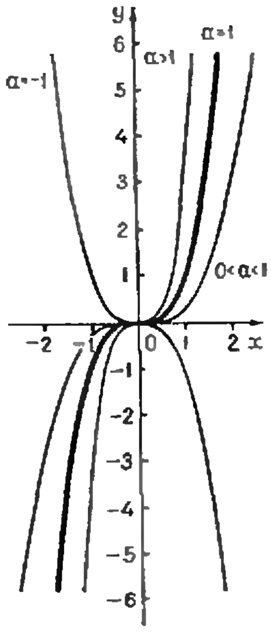


Рис. 2.

Наконец, рассмотрим график функции

$$y = ax^3 + mx. \qquad (4)$$

Его легко построить методом сложения двух графиков — уже знакомой нам кривой (3) и прямой $y = mx$, проходящей через начало координат: нужно при каждом значении абсциссы x сложить соответствующие ординаты кривой (3) и прямой $y = mx$.

Ясно, что вид графика функции (4) зависит от знаков чисел a и m. Именно, если $a > 0$ и $m < 0$, то кривая (4) имеет вид, показанный на рисунке 3 *а*, если же $a > 0$ и $m > 0$, — то вид, изображенный на рисунке 3 *б*. График функции (4) в случае $a < 0$ и $m > 0$ (рис. 3 *в*) получается зеркальным отображением относительно оси ординат кривой, изображенной на рисунке 3 *а*, а в случае $a < 0$ и $m < 0$ (рис. 3 *г*) — зеркальным отображением кривой на рисунке 3 *б*; впрочем, на рисунке 3 *г* мы увеличили a, и парабола стала круче, сохранив, однако, общий вид.

Основные свойства кривой (4) состоят в следующем:

1) она пересекает (в начале координат) прямую $y = mx$, одновременно касаясь ее;

2) если числа a и m одного знака, то эта кривая лишь в начале координат пересекает ось абсцисс; если же числа a и m разных знаков, то эта кривая трижды пересекает ось абсцисс (в точках $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{-\frac{m}{a}}$).

Итак, график функции (4) мы рисовать научились. А теперь покажем, что для любой функции типа (1) всегда можно найти такие (действительные) числа m, k, h, что график функции (1) получается смещением кривой (4) на h влево и на k вниз.

В самом деле, если перенести кривую (4) на h влево и на k вниз, то получится кривая, описываемая уравнением

$$y + k = a(x + h)^3 + m(x + h),$$

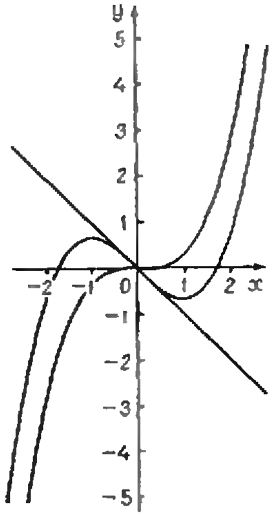


Рис. 3 а.

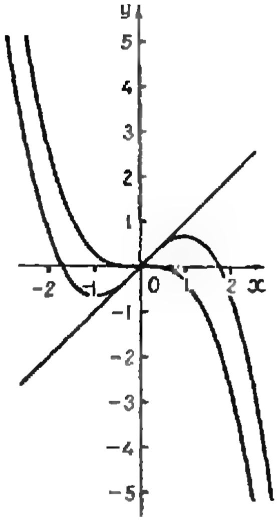


Рис. 3 в.

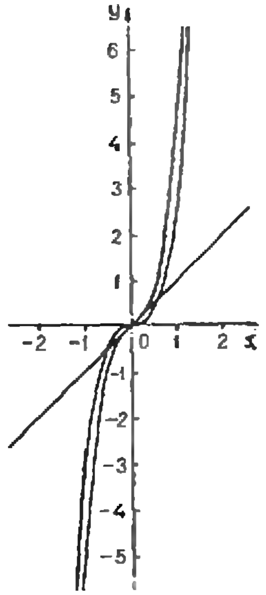


Рис. 3 б.

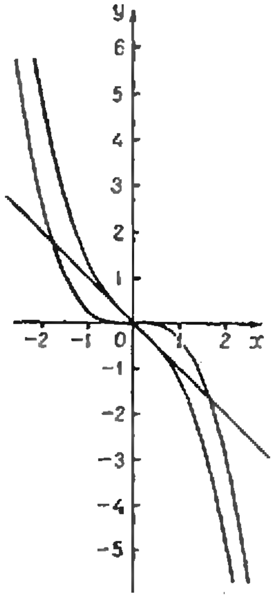


Рис. 3 г.

или

$$y = ax^3 + 3ahx^2 + (3ah^2 + m)x + (ah^3 + mh - k).$$

Этот многочлен будет совпадать с многочленом (1), если $b = 3ah$, $c = 3ah^2 + m$, $d = ah^3 + mh - k$, то есть если числа h, m и k положить равными

$$h = \frac{b}{3a}, \quad m = c - \frac{b^2}{3a},$$

$$k = \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} - d. \qquad (5)$$

Следовательно, *графиком функции (1) служит кривая (4), где число m берется из (5), смещенная на h влево,* *если $h > 0$, или на $|h|$ вправо, если $h < 0$, и на k вниз, если $k > 0$, или на $|k|$ вверх, если $k < 0$, где числа h и k определяются по формулам* (5).

Пример. Построить график функции $y = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

По формулам (5) находим:

$$m = -9\frac{1}{3}, \quad h = -1\frac{1}{3},$$

$$k = -5\frac{25}{27}.$$

Поэтому нам нужно построить график функции

$$y = x^3 - \frac{28}{3}x$$

(рис. 4 *а*), а затем передвинуть его на $\frac{4}{3}$ вправо вдоль оси абсцисс и на $\frac{160}{27}$ вверх вдоль оси ординат (рис. 4 *б*).

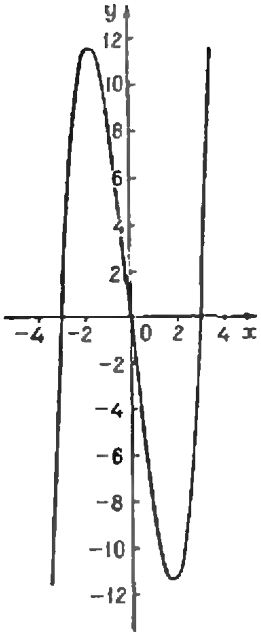


Рис. 4 а.

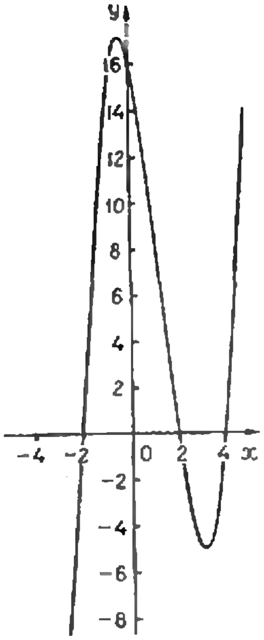


Рис. 4 б.

АРМЯНСКИЕ НАРОДНЫЕ ЗАДАЧИ

(Письмо читателей)

Дорогая редакция!

У нас в школе уже 2-й год действует математический клуб «*XYZ*» (*X* — труд, *Y* — знания, *Z* — народный фольклор). В основном клуб собирает народные задачи, которые в Армении называются «храхчанаканами». А их много...

Армянские математики Анания Ширакаци (VII в.), Мхитар Ерзнкаци (XIV в.), Закария Саркаваг (XVII в.) и другие в своих работах предлагали разные «храхчанаканы».

...Члены клуба «*XYZ*» собрали и отредактировали более 15 задач — храхчанаканов из нашего села. Некоторые из них мы предлагаем вашему вниманию.

Камень затянули во двор

Во время строительства Ваанаванка *) везли из каменоломни двухсотпудовый камень. Полдороги четыре быка везли его три дня. Камень был тяжелый, пришлось его разбить, от него осталось 150 пудов, а быков взяли на половину больше, чем было. Сколько времени камень тянули во двор Ваанаванка?

Сто марзан пшеницы

Мельник разделил 100 марзан пшеницы на три части, чтобы погрузить на лошадь, осла и ослика. Если от груза лошади отнять один груз осла, то остаток ослик может перевезти в шесть приемов, а если отнять два груза осла, то остаток ослик может перевезти в четыре приема, а на пятый — останется груз, на половину меньший, чем в каждый из предыдущих четырех.

Узнайте, сколько груза мельник погрузил на лошадь, осла и ослика?

Дочери Навасарда

Дочери Навасарда были ковроткачихами. Если бы Навасард дал каждой дочери по семи моткам ниток без одного, то у него еще осталась бы такая же доля мотков. А если бы он дал каждой по семи и еще одному мотку, то дочке Заре ниток бы не досталось совсем. Сколько мотков ниток было у Навасарда и сколько дочерей?

Лиса и лисята

На семи горах растут по семь деревьев, под каждым деревом — семь нор, в каждой норке живет семь лисиц, у каждой лисицы семь лисят. Сколько всего лисиц?

Роберт Эджананский
Клуб «XYZ» Лернадзорской восьмилетней школы Кафанского района Армянской ССР

---

*) *Ваанаванк*—известный армянский монастырь X века.

ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

У французского императора Наполеона было увлечение (подробнее об этом смотрите, например, «Занимательную геометрию» Я. И. Перельмана) — составление геометрических задач. Некоторые задачи Наполеона отличаются простотой постановки и допускают изящные решения.

На первой странице обложки (сверху) приведен рисунок к условию геометрической задачи, которая, согласно заметке французского журнала «Mathesis», (1938 г.), была составлена Наполеоном.

Каждая из сторон произвольного треугольника (он окрашен в зеленый цвет) поделена точками на три равных отрезка. На средних отрезках построены внешним образом равносторонние треугольники (они окрашены в красный цвет). Тогда вершины треугольников, не лежащие на сторонах зеленого треугольника, образуют треугольник, стороны которого окрашены синим цветом. Требуется доказать, что последний треугольник равносторонний.

Для доказательства проведем дополнительное построение: соединим отрезками соседние вершины треугольников. Мы получим треугольники, окрашенные оранжевым цветом. Каждый из углов, отмеченных на рисунке 1 дугами, равен 120°. Кроме того, замечаем, что треугольники, которые составляются из двух оранжевых и одной красной частей, равнобедренные, и что сумма «внешних» углов при вершинах трех треугольников, основаниями которых служат синие отрезки, равна 360°. Затем вырезаем из плоскости чертежа и шарнирно поворачиваем вокруг точек *E* и *C* два треугольника, как показано на рисунке 2. В результате получаются два треугольника с общей стороной *EC*, приведенные на рисунке 3. Эти треугольники равны по трем сторонам. Суммы пар углов, выделенных дугами у вершин *E* и *C*, составляют по 120°. Следовательно, на каждый из углов, принадлежащих общему основанию этих треугольников, приходится по 60°. Треугольник с синими сторонами действительно оказался равносторонним.

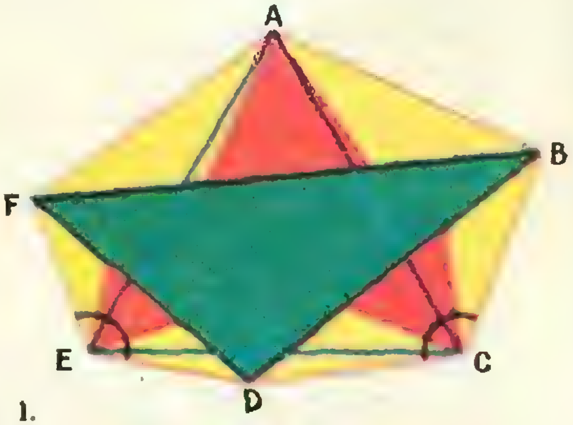


Рис. 1.

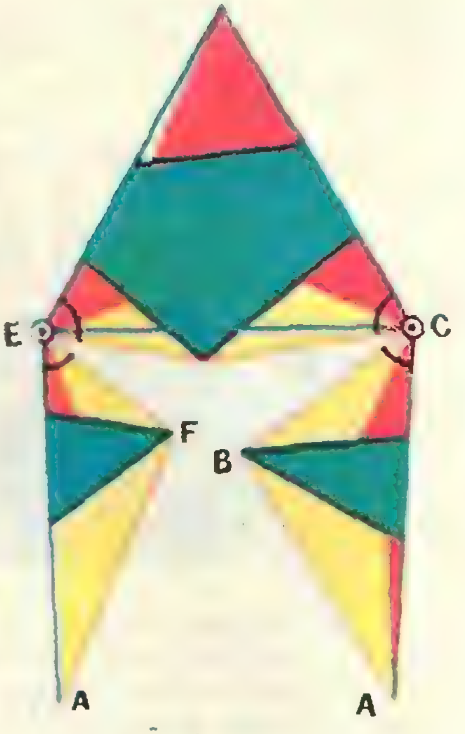


Рис. 2.

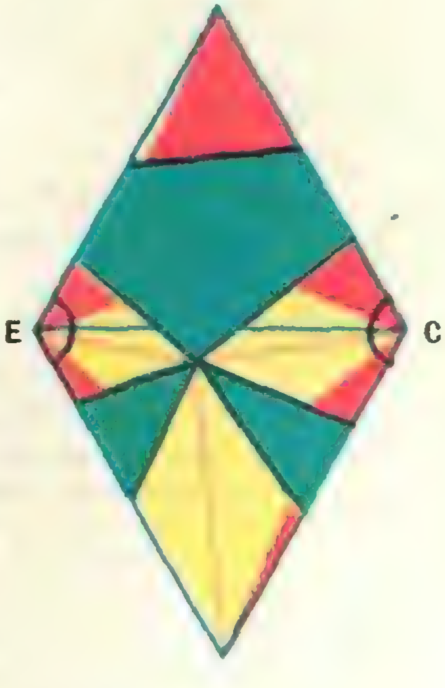


Рис. 3.

А что на втором рисунке на обложке? Оказывается, если на средних отрезках на сторонах исходного треугольника построены равносторонние треугольники внутренним образом, то «свободные» их вершины также образуют равносторонний треугольник. Докажите это самостоятельно. Попробуйте найти и обобщение задачи Наполеона.

В. Н. Березин

В.Н. ВАГУТЕН

Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики

Эта статья написана по материалам экспериментального задания для 8—9-х классов Всесоюзной заочной математической школы Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Все знают, что любое целое положительное число можно разложить в произведение простых множителей; так например,

$$400 = 2^4 \cdot 5^2, \quad 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$
$$290981 = 43 \cdot 67 \cdot 101.$$

Почему такое разложение единственно? Более простой факт: если произведение mn делится на 43, то хотя бы одно из чисел m и n должно делиться на 43. Как это доказать?

Эти факты считаются очевидными. Между тем доказать их не так просто. Это мы сделаем в конце статьи, а начнем с самых простых утверждений, относящихся к делимости целых чисел, и расскажем о том, как найти наибольший общий делитель двух чисел, не раскладывая их на простые множители.

Всюду латинскими буквами (a, b, c, d и т. д.) мы обозначаем целые числа.

1. Делимость суммы, разности и произведения

Мы говорим, что целое число a делится на целое число b, если существует такое целое число k, что $a = kb$. В таком случае число b называется *делителем* числа a.

Сразу выведем два простых утверждения:

1°. *Если числа a и b делятся на c, то и их сумма $a + b$, и их разность $a - b$ делятся на c;*

2°. *Если a делится на c, а b делится на d, то их произведение ab делится на cd.*

Докажем 1°. Поскольку a делится на c, то $a = kc$, где k — некоторое целое число. Точно так же $b = mc$, где m — целое число. Поэтому $a + b = (k + m)c, a - b = (k - m)c$, откуда следует, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делится на c.

Докажем 2°. Пусть $a = kc$, $b = md$. Тогда $ab = (km)cd$, откуда и следует утверждение 2°.

Задача 1. Докажите, что если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c.

Задача 2. Какие из следующих утверждений верны, а какие нет:

а) если одно слагаемое делится на 6, а другое не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

в) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то хотя бы одно из них не делится на 6;

г) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то каждое слагаемое не делится на 6;

д) если произведение нескольких сомножителей делится на 6, то и один из сомножителей делится на 6?

Задача 3. Про целые числа a, b и c известно, что каждое из чисел $a+b$ и $a-b$ делится на c. Следует ли отсюда, что каждое из чисел a и b делится на c?

Задача 4. Докажите, что если a^2+ab+b^2 делится на $a+b$, то a^4+b^4, делится на $(a+b)^2$.

2. Деление с остатком

Все знают правило деления одного целого числа a на другое целое число b «столбиком». Это деление можно продолжать до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если $a = 1972$, а $b = 31$, то при делении получится частное 63 и остаток 19:

$$\begin{array}{r|l} 1972 & 31 \\ \cline{2-2} -186 & 63 \\ \hline 112 & \\ 93 & \\ \hline 19 & \end{array},$$

или $1972 = 31 \cdot 63 + 19$. Можно по этому поводу сформулировать следующее предложение (см. рис. 1):

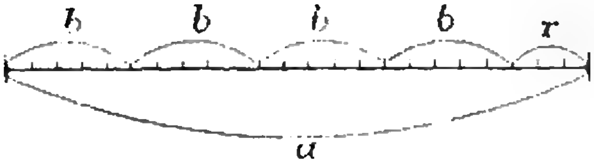


Рис. 1.

> *если a и b — целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q, что $a = bq + r$, где «остаток» r — целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant r < b$.*

Задача 5. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры от № 97 до № 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира № 211? (На всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково).

Задача 6. Было 5 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 5 частей, и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1971 кусок?

Задача 7. Найдите наименьшее шестизначное число, которое делится на 3, на 7 и на 13.

Задача 8. Какой остаток дает число 98 765 432 123 456 789:

а) при делении на 4;

б) при делении на 8;

в) при делении на 9?

3. Наибольший общий делитель [НОД]

Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a, и b, и выберем из них наибольшее. Этот наибольший общий делитель чисел a и b мы будем обозначать через НОД (a, b). Например, НОД $(4,12) = 4$; НОД $(21,91) = 7$; НОД $(15,28) = 1$.

Если НОД $(a, b) = 1$, *то числа* a *и* b *называются взаимно простыми.*

Задача 9. Произведение двух чисел равно 600. Какое наибольшее значение может иметь НОД таких чисел?

Задача 10. Докажите, что если $d =$ НОД (a, b), $a = kd$, $b = ld$, то НОД $(k, l) = 1$.

Задача 11. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 264 белых и 192 красных тюльпанов?

Задача 12. а) На листке клетчатой бумаги нарисован прямоугольник размером 10×15, на его диагонали лежат 6 узлов сетки (рис. 2). Пусть имеется прямоугольник $m \times n$, стороны которого проходят по линиям сетки. Сколько узлов сетки лежит на его диагонали?

б) Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $mx + ny = mn$, где m и n — данные натуральные числа? (Напомним, что натуральными называются целые положительные числа).

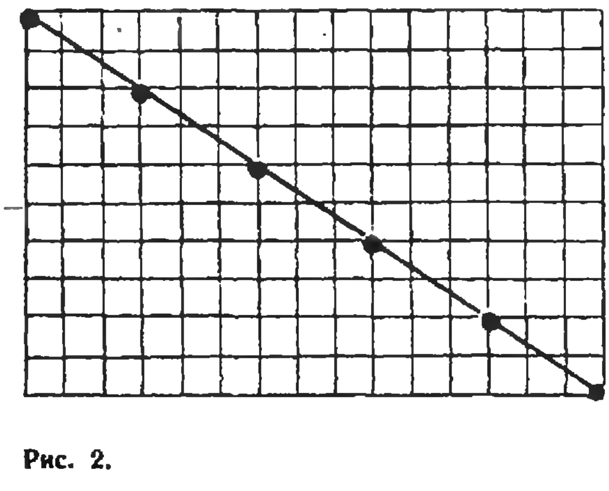


Рис. 2.

4. Алгоритм Евклида

Для того, чтобы найти НОД двух чисел, можно, конечно, действовать так: выписать все делители каждого из чисел, выбрать общие делители, а затем взять из них наибольший. Можно поступить иначе, не отыскивая отдельно делители каждого из чисел.

Докажем следующую важную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $a = bq + r$, *тогда* НОД (a, b) = НОД (b, r).

С этой целью покажем, что у пары чисел (a, b) множество общих делителей в точности такое же, как у пары чисел (b, r). Отсюда, конечно, будет следовать, что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем, что каждый общий делитель чисел a и b является также делителем числа r, и наоборот, что каждый общий делитель чисел b и r является делителем числа a.

Докажем сначала первое утверждение. Пусть a и b делятся на k. Тогда bq делится на k (см. 2° из п. 1) и $r = a - bq$ делится на k (см. 1° из п. 1).

Перейдем ко второму утверждению. Если b и r делятся на m, то bq делится на m и $a = bq + r$ делится на m (здесь мы опять пользовались утверждениями 1 и 2° из п. 1).

Доказанная лемма позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

Пример. *Найдем, чему равен* НОД (6069, 663).

Решение. Разделим 6069 на 663 с остатком:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102.$$

Из леммы следует, что НОД (6069, 663) = НОД (663, 102).

Ищем НОД (663, 102). Для этого делим 663 на 102:

$$663 = 102 \cdot 6 + 51.$$

Снова, применив лемму, получаем НОД (663, 102) = НОД (102, 51). Но 102 делится на 51 без остатка:

$$102 = 51 \cdot 2,$$

поэтому НОД (102, 51) = 51, следовательно,

51 = НОД (102, 51) = НОД (663, 102) = НОД (6069, 663).

Ответ. НОД (6069, 663) = 51.

Метод отыскания наибольшего общего делителя, основанный на последовательном применении леммы 1, носит специальное название — *алгоритм Евклида.*

Задача 13. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 987 654 321 и 123 456 789,

б) 7 777 777 777 и 777 777.

Задача 14. От прямоугольника 324 *см* × 141 *см* отрезают несколько квадратов со стороной 141 *см*, пока не останется прямоугольник, у которого одна из сторон меньше 141 *см*. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне, до тех пор, пока это возможно, и так далее (рис. 3).

На какие квадраты будет разрезан прямоугольник? (Укажите их размеры и количество).

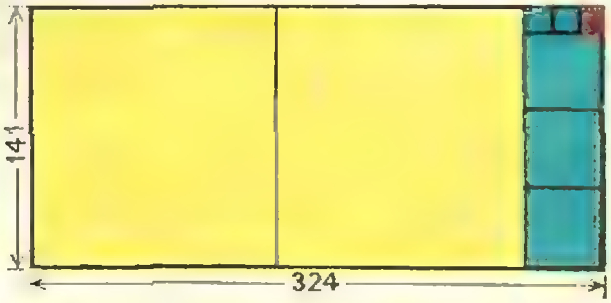


Рис. 3.

Итак, алгоритм Евклида — это простой метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Если у нас имеется два числа a и b, причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b и получаем остаток r_1, который меньше, чем b. Затем мы делим число b на r_1 и находим остаток r_2, который меньше, чем r_1. Далее, мы делим число r_1 на число r_2, при этом получаем остаток r_3, меньший, чем r_2, и так далее, пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделится на остаток r_n нацело, без остатка (то есть $r_{n+1} = 0$).

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а

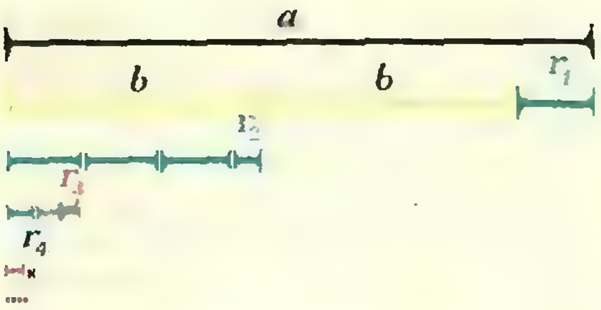


Рис. 4. Пусть a и b — два отрезка, $a > b$. Отложим b на a столько раз, сколько возможно; получим остаток r_1. Отложим r_1 на b столько раз, сколько возможно; получим остаток r_2. Отложим r_2 на r_1 сколько возможно; получим остаток r_3, и т. д.

Если, откладывая некоторое r_n на r_{n-1}, мы не получим остатка (то есть $r_{n+1} = 0$), то отрезок r_n и есть наибольшая общая мера отрезков a и b. Если длины a и b — целые, то все остатки $r_1, r_2, \ldots$ также имеют целые длины, процесс откладывания оборвется и последнее r_n и есть НОД (a, b). Если процесс откладывания отрезков не обрывается, то отрезки a и b несоизмеримы (отношение a/b иррационально).

все остатки — неотрицательные числа. Последний остаток r_n и есть НОД (a, b):

$$r_n = \text{НОД}\,(r_n,\ r_{n-1}) = \text{НОД}\,(r_{n-1},\ r_{n-2}) = \ldots = \text{НОД}\,(r_2,\ r_1) = \text{НОД}\,(r_1,\ b) = \text{НОД}\,(a,\ b).$$

С одной геометрической иллюстрацией алгоритма Евклида мы встретились в задаче 14. Более известный и важный геометрический вариант алгоритма Евклида — алгоритм отыскания наибольшей общей меры двух отрезков (рис. 4).

Задача 15. Найдите наибольшее число α такое, что числа $\frac{15}{28\alpha}$ и $\frac{6}{35\alpha}$ — целые. Другими словами, найдите длину отрезка α, являющегося наибольшей общей мерой отрезков длиной $\frac{15}{28}$ и $\frac{6}{35}$.

3. Линейное уравнение

С помощью алгоритма Евклида можно доказать одно важное свойство наибольшего общего делителя.

> Лемма 2. *Если* НОД $(a, b) = d$, *то можно найти такие целые числа* x *и* y, *что* $d = ax + by$.

В самом деле, остаток r_1 при первом делении a на b записывается в виде $ax_1 + by_1$, так как $r_1 = a - bq_1$ (то есть $x_1 = 1$, $y_1 = -q_1$). Следующий остаток r_2 при делении b на r_1 тоже записывается в виде $ax_2 + by_2$, так как

$$r_2 = b - r_1q_2 = b - (ax_1 + by_1)q_2 = a(-x_1q_2) + b(1 - y_1q_2) = ax_2 + by_2.$$

Очевидно, такое же рассуждение применимо по отношению ко всем следующим остаткам, пока мы не придем к равенству $r_n = ax + by$, но $r_n =$ НОД (a, b). Лемма 2 доказана.

Вернемся к примеру, разобранному в предыдущем пункте, в котором мы нашли НОД $(6069, 663) = 51$. Найдем теперь такие числа x и y, что

$$51 = 6069x + 663y.$$

Наибольший общий делитель мы нашли из цепочки равенств:

$$6069 = 663\cdot 9 + 102,$$
$$663 = 102\cdot 6 + 51,$$
$$102 = 51\cdot 2.$$

Из первого равенства

$$102 = 6069 - 663\cdot 9.$$

Второе равенство дает нам

$$51 = 663 - 102\cdot 6 = 663 - (6069 - 663\cdot 9)6 = -6069\cdot 6 + 663\cdot 55.$$

Итак, мы нашли числа $x = -6$ и $y = 55$ такие, что

$$6069x + 663y = 51.$$

Важным частным случаем леммы 2 является такое утверждение.

> *Если числа* a *и* b *взаимно просты, то найдутся такие целые числа* x *и* y, *что*
> $$ax + by = 1.$$

Заметим, между прочим, что лемма 2 следует из этого утверждения. Например, уравнение, которое мы решали:

$$6069x + 663y = 51$$

можно было бы сразу сократить на 51 и решать эквивалентное уравнение

$$119x + 13y = 1.$$

Здесь числа 119 и 13 взаимно просты.

Решение $x = -6$, $y = 55$ годится для обоих уравнений.

Еще одно замечание. Мы привели способ, позволяющий находить только одно решение такого уравнения. На самом деле, если есть хотя бы одно решение, то их существует бесконечно много.

Например, числа

$$x = -6 + 13t,\ y = 55 - 119t \qquad (*)$$

(t — любое целое число) также являются решениями обоих наших уравнений. В самом деле,

$$119(-6 + 13t) + 13(55 - 119t) = 1$$

и, конечно,

$$51 \cdot 119(-6 + 13t) + 51 \cdot 13(55 - 119t) = 51,$$

то есть

$$6069(-6 + 13t) + 663(55 - 119t) = 51.$$

Формулы $(*)$ дают все решения этих уравнений в целых числах. Докажем это. Пусть (x, y) — какое-то решение:

$$119x + 13y = 1.$$

Вычтем из этого уравнения почленно уже известное нам равенство

$$119 \cdot (-6) + 13 \cdot 55 = 1.$$

Получим

$$119(x + 6) + 13(y - 55) = 0$$

или

$$119(x + 6) = 13(55 - y).$$

Поскольку левая часть последнего равенства делится на 13, *а число* 119 *и* 13 *взаимно просты, то число* $x + 6$ *должно делиться на* 13: $x + 6 = 13t$, *где* t *— некоторое целое число*. Тогда $y = 55 - 119t$. Тем самым мы по существу выяснили, как находить решения любого линейного уравнения $ax + by = c$ в целых числах. В общем случае результат таков:

Для того, чтобы уравнение $ax + by = c$ *имело решения в целых числах* (x, y), *необходимо и достаточно, чтобы* c *делилось на* НОД $(a, b) = d$. *Если это условие выполнено и* (x_0, y_0) *— одно из решений этого уравнения, то все его решения задаются формулами*

$$x = x_0 + b_1 t,\ y = y_0 - a_1 t,$$

где

$$a_1 = \frac{a}{d},\ b_1 = \frac{b}{d}.$$

Задача 16. Найдите такие целые числа x и y, что $85x + 204y = 17$.

Задача 17. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах:

а) $105x + 56y = 42$;

б) $104x + 65y = 43$?

Задача 18. а) Можно ли составить батарею напряжением 220 *в*, соединяя последовательно элементы двух типов: напряжением 6 *в* и 16 *в*, — и если можно, то сколько надо взять тех и других?

б) Тот же вопрос, если напряжение элементов 6 *в* и 15 *в*.

Задача 19. Можно ли разменять 45 рублей на рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры так, чтобы получить всего 20 купюр?

6. Основная теорема арифметики

До доказательства основной теоремы сделаем еще один шаг — докажем лемму.

Лемма 3. *Если произведение* ab *делится на* c, *причем числа* b *и* c *взаимно просты, то* a *делится на* c.

Действительно, поскольку у нас НОД $(b, c) = 1$, то по лемме 2 найдутся такие целые числа x и y, что $1 = bx + cy$. Умножая обе части равенства на a, получаем, что $a = abx + acy$. Так как по условию ab делится на c, то и abx, и, разумеется, acy делятся на c, а значит, и их сумма a делится на c.

Лемма 3 очень часто используется при решении задач, причем иногда совсем «незаметно». Мы, например, опирались на нее в предыдущем пункте при выводе формул, дающих все решения уравнения $119x + 13y = 1$ (там мы выделили соответствующую фразу курсивом).

Задача 20. Докажите, что если число a делится на взаимно простые числа b и c, то a делится на bc.

Задача 21. Какие из следующих утверждений верны:

а) если ab делится на 15, то хотя бы один из сомножителей делится на 15;

б) если ab делится на 17, от хотя бы один из сомножителей делится на 17;

в) если a делится на 6, а b делится на 10, то ab делится на 15;

г) если ab делится на 60, а b взаимно просто с 10, то a делится на 20.

Напомним теперь, что *натуральное число* p *называется простым, если оно имеет ровно два делителя:* p *и* 1.

Если p просто, то для любого целого числа a верно одно из двух утверждений: либо a делится на p, либо a и p взаимно просты (потому что НОД (a, p) может равняться только p или 1).

Лемму 3 можно сформулировать в частном случае так:

> *если произведение ab делится на простое число p, то или число a, или число b делится на число p.*

Отсюда сразу выводится основная теорема арифметики.

> *Каждое число разлагается на простые множители и притом единственным образом.*

Действительно, пусть число раскладывается на несколько множителей и хотя бы один из них не является простым числом, тогда этот множитель сам разлагается на множители; если среди его множителей снова имеется не простой множитель, он опять разлагается на множители, и так далее. Поскольку каждый множитель числа меньше самого числа, такой процесс не может продолжаться бесконечно, и мы обязательно придем к разложению числа на простые множители.

Докажем теперь, что не может быть двух различных разложений числа на простые множители. Предположим, что имеются два разложения числа $a: a = p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_k$ $(r \leqslant k)$, где p_i и q_i — простые числа. Так как левая часть равенства делится на p_1, то и правая его часть должна делиться на p_1, и значит, одно из чисел q_i должно делиться на p_1. Но q_i — простое число, значит, $q_i = p_1$. Сократив равенство на общий множитель $q_i = p_1$, обратимся к множителю p_2 и установим аналогично, что он равен некоторому множителю q_i. Сократив равенство на $p_2 = q_i$, обратимся к множителю p_3 и так далее. В конце концов слева сократятся все множители и останется 1, а так как q_i — целые положительные числа, то и справа не может остаться ничего, кроме 1. Итак, числа p_i и q_i будут соответственно равны и оба разложения тождественны.

Задача 22. Разложите числа 1971, 1972 и 1973 на простые множители.

Задача 23. а) Докажите, что если m и n взаимно просты и $am = bn$, то существует такое целое k, что $a = kn$, $b = km$.

б) Докажите, что если m и n взаимно просты и $x^m = y^n$, то найдется такое целое число z, что $x = z^n$, а $y = z^m$.

ШКОЛЬНИКИ РАСЧИЩАЮТ КАТОК

Группа школьников расчищает лопатами каток, покрытый ровным слоем снега. Действуя оптимальным образом, они расчищают круглый каток радиусом 10 *м* (рис. 1) за 1 *ч*. За сколько времени они смогут расчистить каток радиусом 20 *м*? Что школьники расчистят быстрее — этот каток или хоккейную площадку, имеющую форму прямоугольника 20 *м* × 64 *м* (рис. 2), покрытую таким же слоем снега? Считается, что время затрачивается на работу против сил трения.

(Ответ смотрите на стр. 50)

В. М. Фишман

Рис. 1.

Рис. 2.

ЗАДАЧНИК Кванта

ЗАДАЧИ

Решения задач можно посылать не позднее чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант». После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете; например: «Задачник «Кванта», М146, М148». В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь.

М146. а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в) * Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное утверждение верно, а для каких — нет.

А. Романов

М147. Докажите, что если четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, таков, что касательные к окружности в точках A и C пересекаются на продолжении диагонали BD, то

а) касательные в точках B и D пересекаются на продолжении диагонали AC;

б) биссектрисы внутренних углов A и C четырехугольника пересекаются на диагонали BD (а углов B и D — на AC).

И. Ф. Шарыгин

М148. Последовательность x_0, x_1, $x_2, \ldots$ определяется следующими условиями: $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$, для любого $n > 1$ $(\alpha+\beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1}\beta x_{n-1} x_1 + \alpha^{n-2}\beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n$. Здесь λ, α, β — заданные положительные числа. Найдите x_n и выясните, при каком n величина x_n будет наибольшей.

А. Л. Лопшиц

М149. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

а) если равны периметры треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, то $ABCD$ — прямоугольник;

б) если равны периметры треугольников ABO, BCO, CDO и DAO, то $ABCD$ — ромб.

Н. Б. Васильев

М150*. Из чисел $1, 2, \ldots, k$ составляются всевозможные наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n (легко видеть, что их k^n). Выбраны два подмножества P и Q таких наборов (один и тот же набор может входить и в P, и в Q). Известно, что если взять произвольный набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ из P и произвольный набор $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ из Q, то они будут совпадать хотя бы в одном месте (то есть $p_i = q_i$ для некоторого i). Тогда либо в P, либо в Q не более чем k^{n-1} наборов.

Докажите это утверждение

а) для $k = 2$ и любого n;

б) для $n = 1, 2, 3$ и любого $k \geqslant 2$;

в) для произвольных $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$.

Попробуйте найти другие ограничения на количество элементов в подмножествах P и Q, связанных таким условием.

В. Б. Алексеев

Ф158. Гантелька, расположенная горизонтально, падает с высоты h и ударяется одним из концов о стол

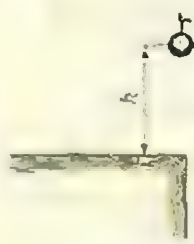


Рис. 1.

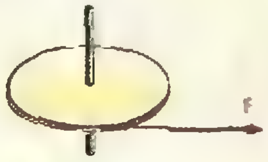


Рис. 2.

(рис. 1). Какое расстояние пролетит гантелька после удара до того, как она опять станет горизонтальной? Гантелька состоит из двух одинаковых тяжелых шариков, насаженных на невесомый стержень длины l. Удар гантельки о стол абсолютно упруг. Стол после удара мгновенно убирают.

Олимпиада МФТИ, 1971 г.

Ф159. Разность между давлениями внутри и снаружи резинового шарика возросла на $\alpha_1\%$, а при этом радиус увеличился на $q_1\%$. На сколько процентов возрастет радиус шарика, если разность между давлениями внутри и снаружи шарика возрастет на $\alpha_2\%$?

И. Ф. Гинзбург

Ф160. Диск радиуса R раскручивают вокруг вертикальной оси с помощью веревки длины l, которую тянут с постоянной силой F (рис. 2). После этого диск соскакивает с оси и попадает на горизонтальную плоскость. Сколько оборотов сделает диск на плоскости до полной остановки, если его масса равна m, а коэффициент трения диска о плоскость равен k?

С. А. Беляев

Ф161. Вольтамперные характеристики элементов C и B показаны на рисунках 3, *а* и *б* (это идеализированные вольтамперные характеристики стабилотрона и баретора). Какой ток идет через элемент C в цепях, показанных на рисунке 4? Каково падение напряжения на элементе B в схемах, показанных на рисунке 5?

А. Р. Зильберман

Ф162. Противостоянием Марса называется момент, когда Марс, Солнце и Земля находятся на одной прямой. Великое противостояние — это момент, когда расстояние Земля — Марс минимально. Считая, что орбита Земли — круг, а орбита Марса — эллипс, найти, через сколько лет повторяются великие противостояния.

Полный оборот вокруг Солнца Марс делает за 687 дней.

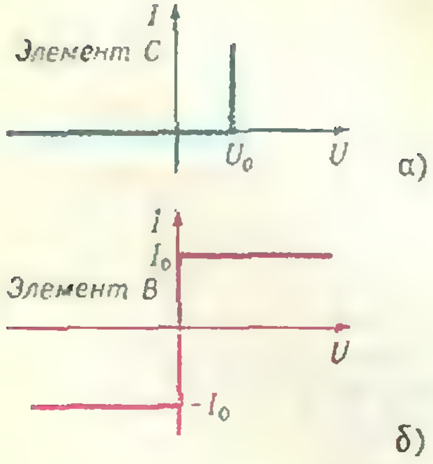


Рис. 3.

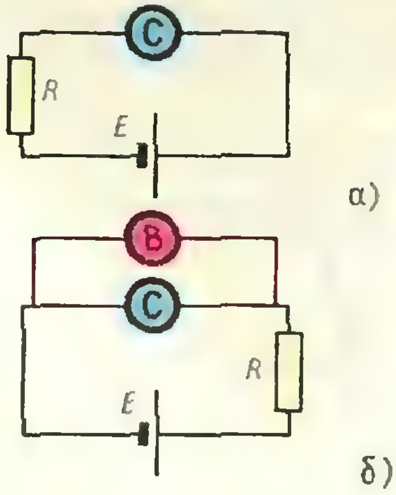


Рис. 4.

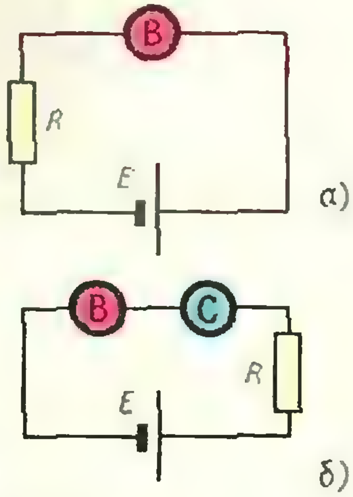


Рис. 5.

ЗАДАЧНИК
кванта

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М106—М107

М106

Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0,$$

то квадратные трехчлены

$$x^2 + p_1 x + q_1, \quad x^2 + p_2 x + q_2$$

имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

Нам понадобятся следующие свойства квадратного трехчлена:

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

1. Если для какого-то числа c выполняется неравенство $f(c) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет два различных действительных корня.

2. Если для чисел c и d выполняется неравенство $f(c)\,f(d) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет два действительных корня, причем одно из чисел c и d лежит между этими корнями, а другое — нет.

Эти свойства очевидны, если посмотреть на график (рис. 1), но мы все-таки докажем их строго.

1. Поскольку $f(c) = c^2 + pc + q = \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4q) < 0$, то $p^2 - 4q > 0$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня $\frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$.

2. Поскольку $f(c)\,f(d) < 0$, то $f(c)$ или $f(d)$ отрицательно. По свойству (1) уравнение $f(x)$ имеет два корня. Обозначим их α и β. Тогда $f(x) = x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$. Число x лежит между корнями тогда и только тогда, когда $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ или $f(x) < 0$. Поскольку одно из чисел $f(c)$, $f(d)$ отрицательно, а другое положительно, то ровно одно из чисел c и d лежит между корнями.

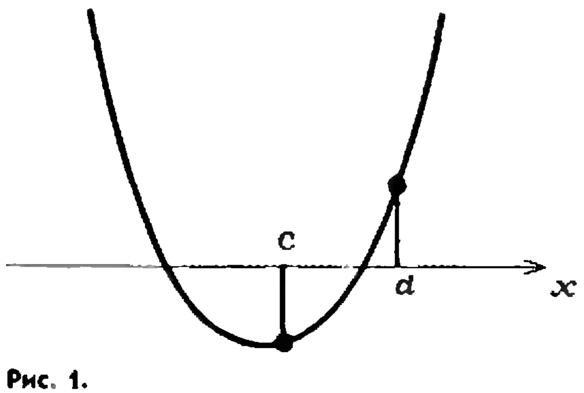


Рис. 1.

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи. Введем обозначения:

$$f_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1,$$
$$f_2(x) = x^2 + p_2 x + q_2,$$
$$R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

Мы должны доказать, что если $R < 0$, то каждое из уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ имеет по два различных действительных корня и между корнями одного из этих уравнений лежит ровно один корень другого.

Рассмотрим разность

$$f_1(x) - f_2(x) = f_3(x). \tag{1}$$

Заметим, что $p_1 - p_2 \neq 0$, так как если $p_1 - p_2 = 0$, то $R = (q_1 - q_2)^2 \geqslant 0$, что противоречит условию. Поэтому уравнение $f_3(x) = 0$ имеет корень $\gamma = -\dfrac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$, причем, конечно, $f_3(x)$ можно записать так:

$$f_3(x) = (p_1 - p_2)(x - \gamma). \tag{2}$$

Кроме того, как следует из (1),

$$f_1(\gamma) = f_2(\gamma). \tag{3}$$

Теперь квадратный трехчлен $f_2(x)$ (умноженный на коэффициент $(p_1 - p_2)^2$ «разделим с остатком» на $f_3(x)$, то есть напишем тождество

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(x) = f_3(x)\, g(x) + R. \tag{4}$$

Мы не случайно использовали ту же букву R: остаток равен именно выражению R, данному в условии задачи. Действительно,

$$(p_1 - p_2)^2 (x^2 + p_2 x + q_2) = [(p_1 - p_2)x + (q_1 - q_2)][(p_1 - p_2)x + (p_1 - p_2)p_2 - \\ - (q_1 - q_2)] + (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

Подставив γ в (4), получим (учитывая, что $f_3(\gamma) = 0$):

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0. \tag{5}$$

Поэтому $f_1(\gamma) = f_2(\gamma) < 0$. Следовательно (по свойству (1)) оба уравнения имеют по два действительных корня. Обозначим их соответственно α_1, β_1 и α_2, β_2. Тогда

$$f_2(x) = (x - \alpha_2)(x - \beta_2). \tag{6}$$

Теперь, используя последовательно (1), (2), (6) и (5), получаем:

$$f_1(\alpha_2)\, f_1(\beta_2) = f_3(\alpha_2)\, f_3(\beta_2) = \\ = (p_1 - p_2)^2 (\alpha_2 - \gamma)(\beta_2 - \gamma) = (p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0, \tag{7}$$

откуда следует (по свойству (2)), что корни уравнений чередуются.

Используя графики, результат задачи и основное в нашем решении соотношение (5) можно объяснить в два слова (рис. 2). Алгебраическая подоплека нашего решения более глубока.

Из нашего решения, да и из рисунка 2 видно, что $R = 0$ *тогда и только тогда, когда квадратные трехчлены f_1 и f_2 имеют общий корень* (или совпадают). Это обстоятельство можно использовать в задачах такого типа: каким условиям должны удовлетворять числа λ и μ, чтобы уравнения $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ и $x^2 + \mu x - \lambda x + \mu = 0$ имели общий корень? Достаточно подставить в выражение R значения $p_1 = \lambda$, $q_1 = -1$, $p_2 = \mu - \lambda$, $q_2 = \mu$, и нужное условие готово:

$$(\mu + 1)^2 + (2\lambda - \mu)(\mu - \lambda + \mu\lambda) = 0.$$

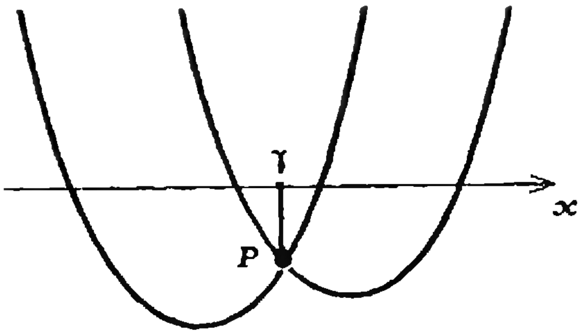


Рис. 2. Для того чтобы корни квадратных трехчленов f_1 и f_2 были действительны и перемежались, необходимо и достаточно, чтобы точна пересечения их графиков лежала ниже оси абсцисс, то есть чтобы число

$$f_1(\gamma) = f_2(\gamma) = \frac{R}{(p_1 - p_2)^2}$$

было отрицательным.

Оказывается, что и для двух многочленов произвольной степени

$$f_1(x) = a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + c_1.$$
$$f_2(x) = a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \ldots + c_2$$

можно выписать такой многочлен R от $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2$, что условие $R = 0$ будет выполняться *тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 имеют общий делитель* (многочлен от x степени 1 или выше). R называется *результантом* многочленов f_1 и f_2.

В курсе высшей алгебры приводится компактная запись результанта в виде «определителя», составленного из коэффициентов f_1 и f_2.

Особенно прозрачным становится понятие результанта, когда f_1 и f_2 разлагаются на линейные множители:

$$f_1 = a_1 (x - \alpha_1)(x - \beta_1) \ldots (x - \gamma_1), \quad f_2 = a_2 (x - \alpha_2)(x - \beta_2) \ldots (x - \gamma_2)$$

(на множестве комплексных чисел это всегда так, ведь там любой многочлен имеет корень). Тогда, как можно доказать,

$$R = R(f_1, f_2) = a_1^m a_2^n (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2) \ldots (\gamma_1 - \gamma_2), \qquad (8)$$

где произведение берется по всем парам корней f_1 и f_2 (то есть в нем mn сомножителей). Проверьте, что в нашей задаче $R = (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_2)$, и подумайте, как с помощью этого выражения R через корни (быть может, комплексные!) квадратных трехчленов решить задачу другим способом. Из равенства (8) вытекает такое, уже встречавшееся нам в частном случае, равенство:

$$R = a_1^m f_2(\alpha_1) f_2(\beta_1) \ldots f_2(\gamma_1) =$$
$$= (-1)^{mn} a_2^n f_1(\alpha_2) f_1(\beta_2) \ldots f_1(\gamma_2).$$

Основное свойство результанта с учетом комплексных корней можно сформулировать так: $R = 0$ *тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 имеют общий корень.*

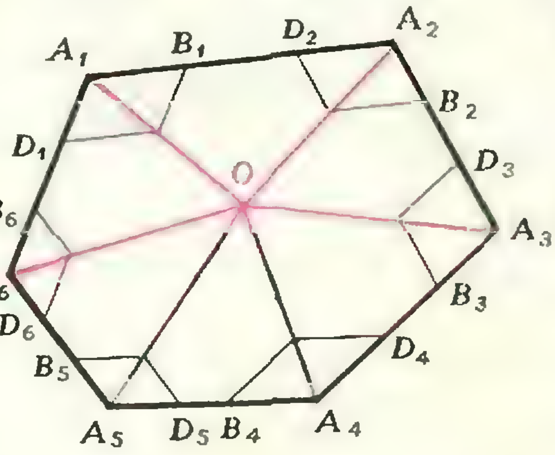


Рис. 3.

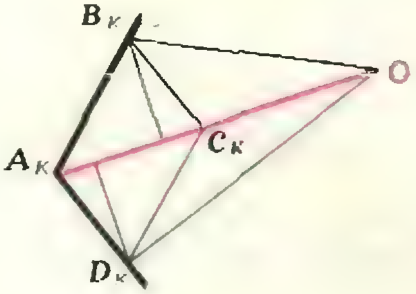


Рис. 4.

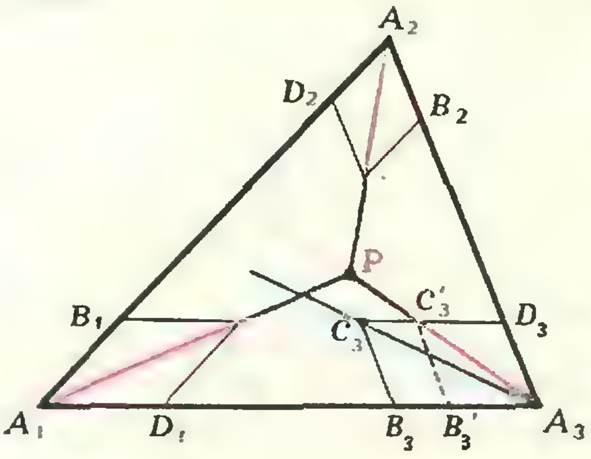


Рис. 5.

M107

а) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 3). На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, ... на стороне A_nA_1 точки B_n и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2, \ldots, A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, $A_2C_2, \ldots, A_nC_n$ пересекутся в одной точке. Докажите, что

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \ldots \cdot A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \ldots \cdot A_nD_n.$$

б) Докажите, что для треугольника верно и обратное утверждение: пусть на стороне A_1A_2 выбраны точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$; тогда, если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке.

а) Пусть O — точка пересечения. Запишем равенство, которое нам нужно доказать, так (сдвинем в знаменателе все сомножители, перенесем A_1D_1 в конец):

$$\frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \ldots \cdot A_nB_{n-1} \cdot A_nB_n}{A_2D_2 \cdot A_3D_3 \cdot \ldots \cdot A_nD_n \cdot A_1D_1} = 1.$$

Теперь заметим, что отношения отрезков $\frac{A_1B_1}{D_2A_2}, \frac{A_2B_2}{D_3A_3}, \ldots, \frac{A_nB_n}{D_1A_1}$ соответственно равны отношениям площадей треугольников (площадь треугольника MNL мы обозначим так: $S(MNL)$)

$$\frac{S(A_1B_1O)}{S(D_2A_2O)}, \frac{S(A_2B_2O)}{S(D_3A_3O)}, \ldots, \frac{S(A_nB_nO)}{S(D_1A_1O)},$$

так что нужное нам равенство можно записать так:

$$\frac{S(A_1B_1O) \cdot S(A_2B_2O) \cdot \ldots \cdot S(A_{n-1}B_{n-1}O) \cdot S(A_nB_nO)}{S(A_2D_2O) \cdot S(B_3D_3O) \cdot \ldots \cdot S(B_nD_nO) \cdot S(A_1D_1O)} = 1;$$

или (сдвинув сомножители знаменателя обратно)

$$\frac{S(A_1B_1O)\cdot S(A_2D_2O)\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot S(A_nB_nO)}{S(A_1D_1O)\cdot S(A_2D_2O)\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot S(A_nD_nO)}=1.$$

Но последнее равенство очевидно. Действительно, площади треугольников A_iB_iO и A_iD_iO для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ равны, поскольку они имеют общую сторону A_iO и равные высоты (рис. 4); высоты, опущенные из вершин B_i и D_i на сторону A_iO, равны, потому что диагональ A_iC_i делит параллелограмм $A_iB_iC_iD_i$ на два равных треугольника.

б) Обратную теорему можно вывести из прямой. Пусть P — точка пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2. Предположим, что прямая A_3P не проходит через точку C_3. Тогда она пересекает одну из сторон B_3C_3 или D_3C_3 параллелограмма $A_3B_3D_3C_3$, скажем, D_3C_3 (рис. 5) в точке C'_3. Выберем на стороне A_3A_1 такую точку B'_3, что $A_3B'_3C'_3D_3$ — параллелограмм. Теперь, согласно прямой теореме, $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot A_3B'_3=A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot A_3D_3$, с другой стороны, по условию $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot A_3B_3=A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot A_3D_3$, поэтому $A_3B'_3=A_3B_3$, следовательно, наше предположение о том, что точки C_3 и C'_3 (и, следовательно, точки B_3 и B'_3) не совпадают, неверно.

В. Л. Гутенмахер

В этом номере мы публикуем решения задач Ф123—Ф128

Ф123

На рисунке 10 показана часть схемы, состоящей из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметр, вольтметр, источник тока и соединительные провода, можно измерить величину одного из сопротивлений, не разрывая ни одного контакта в схеме?

Приборы нужно подключить так, как показано на рисунке 10, *б*. Точки O, A и B при таком подключении будут иметь одинаковые потенциалы (сопротивление амперметра мало и падением напряжения на нем можно пренебречь). Следовательно, через сопротивления, включенные между точками O, A и B, ток идти не будет. Это означает, что амперметр покажет ток, идущий через сопротивление, включенное между точками O и C. Вольтметр покажет падение напряжения на этом сопротивлении. Разделив показание вольтметра на показание амперметра, найдем величину измеряемого сопротивления.

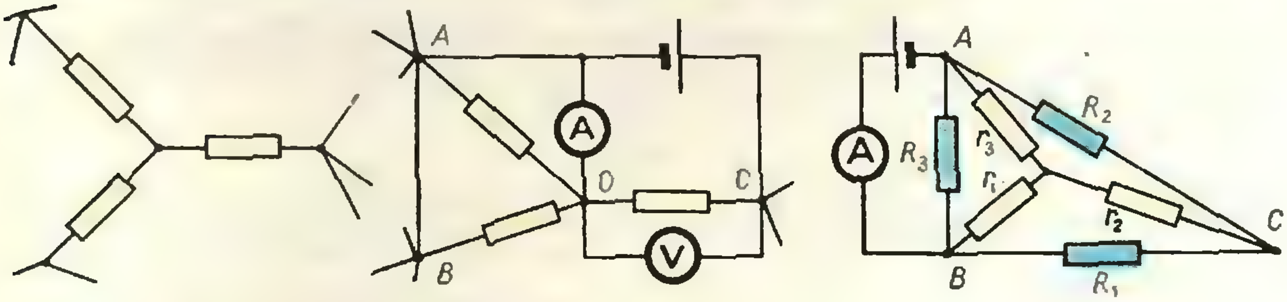
Мы получили несколько писем, в которых читатели предлагали другой подход к решению этой задачи. Всю остальную схему, не показанную на рисунке, можно заменить тремя «эквивалентными» сопротивлениями, включенными между точками A и B, B и C, A и C. Величины этих сопротивлений неизвестны. Таким образом, наша цепь эквивалентна схеме с шестью неизвестными сопротивлениями: r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 и R_3 (рис. 10, *в*). Соединив источник и амперметр последовательно, включим их между точками A и B. Ток I, который покажет амперметр при таком включении, разделяется в точке A на токи, идущие через сопротивления r_1, R_1 и R_3. Измерив с помощью вольтметра падения напряжения на этих сопротивлениях, можно составить уравнение:

$$I=\frac{U_{R_1}}{R_1}+\frac{U_{R_3}}{R_3}+\frac{U_{r_1}}{r_1}.$$

Так как тот же ток I равен сумме токов, идущих через сопротивления R_3, r_3 и R_2, то, измерив падения напряжения на этих сопротивлениях, можно записать:

$$I=\frac{U_{R_3}}{R_3}+\frac{U_{R_2}}{R_2}+\frac{U_{r_3}}{r_3}.$$

Точно так же можно составить еще четыре уравнения, включая источник и амперметр



а б в

Рис. 10.

между точками A и C и между точками C и B. Решив затем систему из шести уравнений с шестью неизвестными, можно найти сопротивления r_1, r_2 и r_3.

Этот способ, конечно, нельзя считать удачным, тем более, что никому из читателей, приславших нам такое решение, не удалось в общем виде решить эту систему уравнений. Не удалось решить ее и участникам заключительного тура Всесоюзной олимпиады, которым предлагалась эта задача.

Ф124

Свет от источника S на пути к экрану проходит через покоящийся стеклянный кубик с ребром l (рис. 11). Насколько быстрее свет дойдет до экрана, если кубик привести в движение со скоростью v? Скорость света в воздухе c, показатель преломления стекла n ($v \ll c$, $n > 1$).

Скорость света в стекле равна $c' = \frac{c}{n}$. Свет проходит стеклянный кубик за время $t = \frac{l}{c'} = \frac{ln}{c}$. Кубик за это время перемещается на расстояние $x = vt = \frac{vln}{c}$. На это расстояние сокращается путь света в воздухе по сравнению с тем случаем, когда кубик неподвижен. Значит, время, за которое свет доходит до экрана, сокращается на $\Delta t = \frac{x}{c} = \frac{vln}{c^2}$.

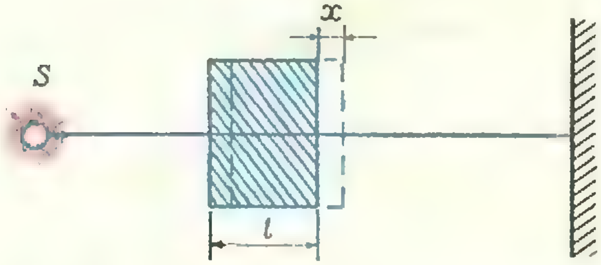


Рис. 11.

Некоторые читатели прислали более строгое решение этой задачи, учитывающее эффекты, связанные с теорией относительности. Мы не будем разбирать это решение подробно. Заметим только, что при учете «релятивистских эффектов» скорость света в движущемся стеклянном кубике нужно считать равной не $c' = \frac{c}{n}$, а $c'' = \frac{c' + v}{1 - \frac{c'v}{c^2}} = \frac{(c + nv)c}{nc - v}$.

В то же время длина кубика в неподвижной системе координат равна не l, а $l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Поэтому нужно учитывать не только уменьшение пути, проходимого светом в воздухе благодаря движению кубика, но и уменьшение пути, проходимого светом в стекле.

Ф125

В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема V. Давление газов в полости пренебрежимо мало. Поршень оказывает на воду постоянное давление p. Какую кинетическую энергию приобретает вода в момент, когда полость исчезнет? Начальная скорость воды равна нулю. Силу тяжести можно не учитывать.

На поршень действует сила $F = pS$, где S — площадь поршня. Работа, совершенная поршнем, равна произведению этой силы на перемещение поршня x. Но перемещение поршня связано с изменением объема газа в цилиндре: $x = \frac{V}{S}$. Поэтому

$$A = Fx = pS\frac{V}{S} = pV.$$

Эта работа и равна изменению кинетической энергии воды. Такой же результат можно получить из соображений размерности. Из двух величин p и V можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность энергии pV.

Ф126

Оценить максимальную силу, которую будет показывать динамометр, присоединенный к плоскостям, закрывающим «магдебургские полушария» (полусферы) с радиусом R. Полусферы растягиваются в противоположные стороны силами F. Атмосферное давление равно 1 *атм*.

Каждая из плоскостей находится в равновесии благодаря действию на нее трех сил: силы T, действующей со стороны динамометра, силы $F_0 = p_0S$ атмосферного давления и силы реакции полусферы (рис. 12). Так как в тот момент, когда плоскость отрывается от полусферы, сила реакции полусферы равна нулю, то $T_{\text{мах}} = F_0 = \rho S = \rho_0 \pi R^2 \approx 12{,}6 \cdot 10^3 \text{н}$.

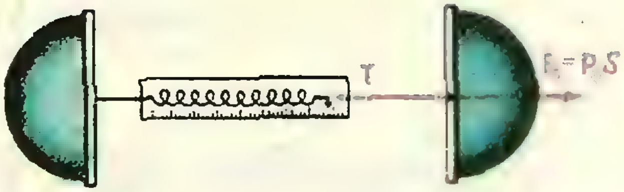


Рис. 12.

Ф127

В стакан с водой, вращающийся вокруг своей оси, бросают шарик, который плавает на поверхности воды. В каком месте поверхности будет находиться шарик?

Так как шарик плавает на поверхности воды, то плотность материала шарика меньше плотности воды: $\rho_{\text{ш}} < \rho_{\text{в}}$.

Предположим, что шарик находится на расстоянии R от оси вращающегося сосуда. Если бы плотность шарика была равна плотности воды $\rho_{\text{в}}$, он находился бы на неизменном расстоянии от оси вращения. Центростремительное ускорение такому шарику сообщает равнодействующая силы тяжести и сил давления окружающей воды. Поскольку шарик движется по окружности радиуса R, то эта равнодействующая равна $m\omega^2 R = \rho_{\text{в}} V \omega^2 R$ (ω — угловая скорость вращения сосуда, V — объем шарика).

На шарик плотности $\rho_{\text{ш}}$, помещенный в ту же точку, со стороны окружающей воды действует точно такая же сила. Эта сила сообщает шарику ускорение $a = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ш}}} \omega^2 R$, большее центростремительного ускорения, необходимого для вращения по окружности радиуса R. Следовательно, шарик будет двигаться к оси вращения сосуда. Это означает, что положение равновесия шарика находится на оси сосуда.

Ф128

Тонкую однородную палочку кладут так, что она опирается на две плоскости, наклоненные к горизонту под углами α и β, угол между плоскостями равен 90° (рис. 13). Что будет происходить с палочкой? Каким будет ее окончательное положение, если трение между палочкой и плоскостями очень мало?

Пусть угол между палочкой и одной из плоскостей равен γ. Соединим центр тяжести палочки C с вершиной угла O и покажем, что длина отрезка CO не зависит от величины γ. Проведем $CD \perp OB$. Треугольник CDB подобен треугольнику OAB. Поэтому $\frac{DB}{OB} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$. Это означает, что $DB = OD$, и треугольник OCD равен треугольнику CDB по двум катетам. Отсюда следует, что отрезок OC равен половине длины палочки при любом угле γ, то есть центр тяжести палочки C при ее движении описывает окружность.

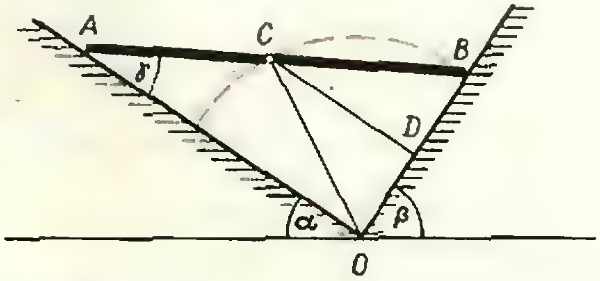


Рис. 13.

Тело находится в равновесии, если его потенциальная энергия минимальна или максимальна. Однако в положении с минимальной потенциальной энергией равновесие устойчиво, а в положении с максимальной энергией — неустойчиво. Поэтому палочка может находиться в устойчивом равновесии только тогда, когда она лежит на одной из плоскостей. Палочка будет колебаться, поочередно ударяясь о каждую плоскость и затем отскакивая от нее.

Из-за трения колебания будут затухать, и через достаточно большое время палочка остановится у одной из плоскостей.

Интересно разобрать случай, когда трение не мало. Попробуйте это сделать самостоятельно, а мы рассмотрим такую задачу в одном из ближайших номеров журнала.

И. Ш. Слободецкий

Побываем на устном экзамене

Е. Б. Ваховский, А. Б. Волынский

Что спрашивают на устном экзамене по математике? Такой вопрос особенно часто задают поступающие в те вузы, где предъявляются повышенные требования (МГУ, МФТИ и другие). Стандартный ответ, заключающийся в том, что нужно четко отвечать на билеты и знать все пункты программы, мало кого удовлетворяет. «Как отвечать на билет и какие имеются билеты, мы знаем по выпускным школьным экзаменам, — говорят абитуриенты, — но нам неизвестно, что спрашивают после ответа на билет».

В известной мере этот вопрос оправдан. В то время как имеющаяся сейчас литература может дать поступающим почти полное представление о письменных экзаменах, материалы устных экзаменов существуют только в виде брошюрок, изданных в различных институтах для внутреннего пользования.

В настоящей статье авторы сделали попытку на нескольких примерах проиллюстрировать специфику устного экзамена.

Статья делится на две части. В первой части будут приведены формулировки задач без решений (наиболее сложные задачи будут снабжены краткими указаниями); во второй части будут даны решения или указания. Предполагается, что читатель вначале самостоятельно попробует свои силы, затем заглянет в указание, если таковое имеется, и лишь потом посмотрит в решение, если все усилия будут безрезультатны.

Если рассмотреть все вопросы (задачи), задаваемые на устном экзамене, то их условия можно разделить на два уровня.

К вопросам первого (более простого) уровня можно отнести те вопросы, на которые абитуриент, твердо знающий программу, может и должен ответить почти сразу — через несколько минут. Если абитуриент неправильно отвечает или затрудняется при ответе на такой вопрос, то это значит, что он имеет серьезные провалы в основах элементарной математики.

Задачи второго уровня — более сложные. Они, безусловно, потребуют от абитуриента активного, а не простого формального владения школьной программой. Следует, правда, отметить, что такие вопросы могут встречаться только в институтах с повышенными требованиями по математике.

Вопросы первого уровня

1. Решить уравнение

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1}=1.$$

2. Если в уравнении $x^2+px+q=0$, где p, q — действительные числа

а) $q>0$, то верно ли, что корни его одного знака?

б) $q<0$, то верно ли, что корни его разных знаков?

3. Внутри окружности радиуса R находятся две другие окружности, касающиеся друг друга и данной окружности. Найти периметр треугольника, вершинами которого служат центры трех окружностей.

4. Может ли для углов треугольника удовлетворяться равенство

$$\sin A + \sin B = \sin C?$$

5. Возможно ли равенство $\sin\alpha = \lg\sin\alpha$?

6. Доказать, что треугольник является равнобедренным, если у него равны две медианы.

7. Доказать, что для произвольной трапеции $ABCD$ справедливо равенство $AO\cdot BO = DO\cdot CO$, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

8. Полуокружность радиуса R разделена на три равные части и точки деления соединены с одним из концов диаметра, стягивающего эту полуокружность. Найти площадь, ограниченную двумя хордами и заключенной между ними дугой.

9. В некоторой пирамиде двугранные углы при основании равны α и площадь основания S. Найти площадь боковой поверхности.

Вопросы второго уровня

1*. Найти множество точек плоскости $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sin x + \sin y = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}.$$

2*. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -1{,}75$.

3*. Решить неравенство $2^{3x} + 3^{2x} - 2\cdot 11^{x} > 0$.

4*. При каких условиях квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ с действительными коэффициентами является квадратом линейного двухчлена с действительными коэффициентами?

5*. Сколько сфер можно провести через четыре точки в пространстве?

6* Можно ли пересечь плоскостью параллелепипед таким образом, чтобы в сечении получился правильный пятиугольник?

Указание. Применить теорему о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

7*. Треугольник ABC — остроугольный, $\angle A = \alpha$. На стороне BC как на диаметре описана полуокружность; P и Q — точки пересечения этой полуокружности со сторонами AB и AC соответственно. Найти отношение площадей треугольников ABC и PAQ.

8*. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника как на диаметре построены круги. Доказать, что они покрывают весь четырехугольник.

9*. Найти первые три десятичных знака числа $\sqrt[7]{0{,}999}$.

10*. а) Существует ли восьмиугольная пирамида, у которой все ребра равны?

б) Для каких n существует правильная n-угольная пирамида, у которой все ребра равны?

11*. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Доказать, что отрезки AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

12*. В угол вписаны две окружности: A и B — точки касания первой окружности со сторонами угла, A_1 и B_1 — второй. Отрезок AB_1 пересекает эти окружности в точках C и C_1. Доказать, что $AC = B_1C_1$.

13*. Построить треугольник, если даны: прямая, на которой лежит основание, и две точки — основания высот, опущенных на боковые стороны.

14*. Существует ли треугольник, у которого середины

а) биссектрис лежат на одной прямой;

б) высот лежит на одной прямой?

Указание. Продумайте различие между пунктами а) и б).

15*. Доказать, что $\operatorname{tg} 5^\circ$ — иррациональное число.

Указание. Предположите противное и сделайте отсюда какое-то заключение для известного нам тангенса некоторого угла.

16*. В треугольнике все стороны меньше единицы. Доказать, что его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Указание. Не применять теорему Герона.

17*. Привести пример двух подобных, но неравных треугольников, имеющих по две соответственно равные стороны.

Указание. Постарайтесь найти не геометрический, а алгебраический подход, работая с длинами сторон этих треугольников.

18*. Пусть l_1 и l_2 — две скрещивающиеся прямые в пространстве. Найти геометрическое место точек, из которых нельзя провести прямую, пересекающую l_1 и l_2.

19*. Существует ли такая треугольная пирамида, у которой к каждому ребру прилегает хотя бы один тупой плоский угол?

Указание. Доказать, что такой пирамиды не существует, использовав тот факт, что некоторые из сторон тупоугольного треугольника не могут быть наибольшими.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Вопросы первого уровня

1. Ответ: $x \neq -1$. Иногда дают ответ: x — любое, забывая, что знаменатель не должен равнять нулю.

2. Обычно эти вопросы задают подряд — сначала а), потом б). Вспомнив теорему Виета: $x_1 x_2 = q$, абитуриент часто, не думая, отвечает на вопрос а) утвердительно. Ответ неверный, что доказывает простой пример уравнения: $x^2 + 1 = 0$, здесь $q > 0$, но корни мнимые и сравнивать их с нулем нельзя. Таким образом, ответ на вопрос а) — отрицательный. Вслед за этим абитуриенту задают вопрос б). Наученный горьким опытом, он отвечает на него также отрицательно, забывая, что если $q < 0$, то корни не могут быть мнимыми, так при этом дискриминант $p^2 - 4q > 0$. Поэтому ответ на вопрос б) — положительный.

3. Ответ: $2R$. Указание: см. рисунок 1.

4. Нет, не может. Этот факт часто доказывают с помощью тригонометрических выкладок. Но ответ получится сразу, если заметить, что стороны a, b, c, треугольника пропорциональны синусам соответствующих углов, и из равенства $\sin A + \sin B = \sin C$ следует $a + b = c$.

5. Нет. С одной стороны, $\sin \alpha > 0$ (иначе $\lg \sin \alpha$ не существует), а с другой, $\lg \sin \alpha \leqslant 0$ (так как $\sin \alpha \leqslant 1$).

6. Если в $\triangle ABC$ (см. рис. 2) медианы AD и CE равны, то $\triangle AOC$ — равнобедренный, так как $AO = \frac{2}{3} AD$ и $CO = \frac{2}{3} CE$. Но тогда отрезок OF медианы BF является высотой в $\triangle AOC$. Следовательно, и медиана в $\triangle ABC$ является высотой, то есть $\triangle ABC$ — равнобедренный.

7. Из подобия $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ (см. рис. 3) видно, что $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$, откуда $AO \cdot BO = CO \cdot DO$.

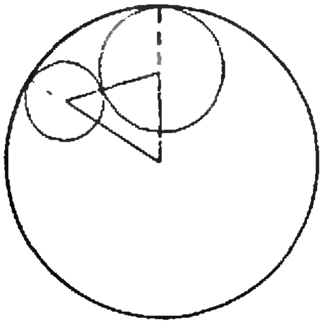


Рис. 1.

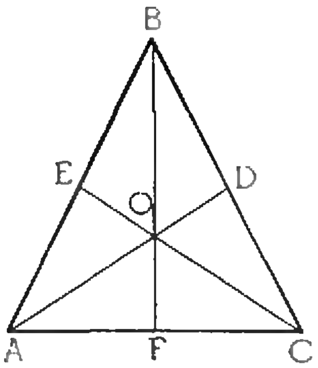


Рис. 2.

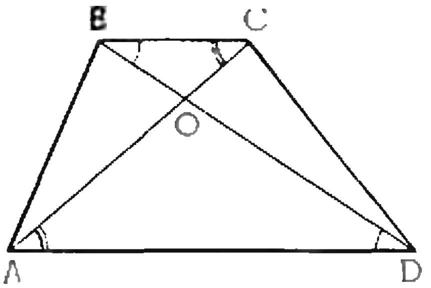


Рис. 3.

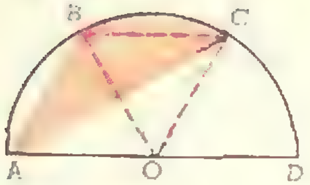


Рис. 4.

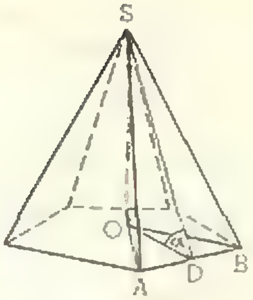


Рис. 5.

8. Очевидно, площадь искомой фигуры равна сумме площадей треугольника ABC и сегмента, отсекаемого хордой BC (рис. 4). Но площади треугольников ABC и BOC одинаковы, так как у них общее основание BC и высоты, опущенные на это основание, равны. Следовательно, площадь искомой фигуры совпадает с площадью сектора BOC, то есть равна $\frac{\pi R^2}{6}$.

9. Рассмотрим одну из боковых граней SAB (рис. 5). Пусть SO — высота пирамиды, $SD \perp AB$, $OD \perp AB$ и $\measuredangle SDO = \alpha$. Так как у треугольника SAB и OAB общее основание AB, то отношение их площадей

$$\frac{S_{\triangle SAB}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{SD}{OD} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

откуда

$$S_{\triangle SAB} = \frac{S_{\triangle OAB}}{\cos\alpha}.$$

Если мы запишем аналогичные равенства для каждой боковой грани и сложим их, то получим, что боковая поверхность равна $\frac{S}{\cos\alpha}$.

Вопросы второго уровня

1*. Задача решается разбором четырех случаев

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ y < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

Например, в случае $\{x > 0, \ y > 0\}$ уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin y = 1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \end{cases}$$

где

$$n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Разобрав все четыре случая, получим множество точек, изображенных на рисунке 6.

2*. Из известного неравенства $a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \ (a > 0)$ легко получается неравенство $a + \frac{1}{a} \leqslant -2 (a < 0)$. Отсюда $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| \geqslant 2$. Наше уравнение противоречит этому неравенству и потому оно не имеет решений.

3*. Указание. Разделив неравенство на 11^x, представим его в виде $\left(\frac{8}{11}\right)^x + \left(\frac{9}{11}\right)^x > 2$. Если $x \geqslant 0$, то $\left(\frac{8}{11}\right)^x \leqslant 1$ и $\left(\frac{9}{11}\right)^x \leqslant 1$. Напротив, если $x < 0$, то $\left(\frac{8}{11}\right)^x > 1$ и $\left(\frac{9}{11}\right)^x > 1$.

4*. Если $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$, то этот трехчлен имеет равные корни: $x_1 = x_2 = -\frac{e}{d}$. Следовательно, его дискриминант

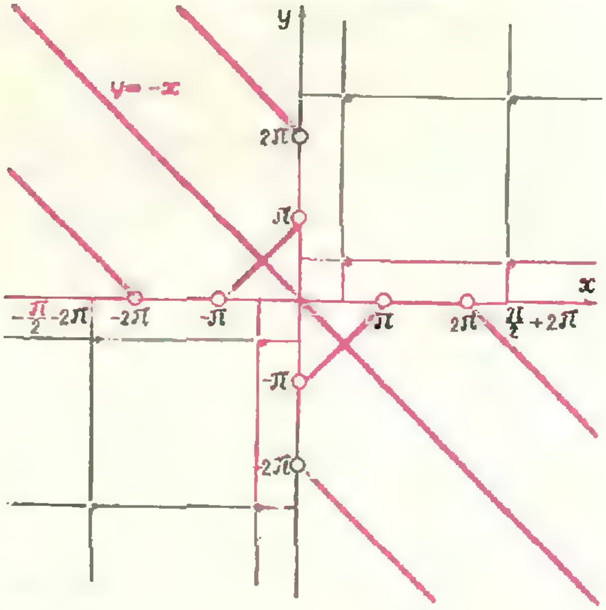


Рис. 6.

$D = b^2 - 4ac = 0$. Обычно это соотношение и считают ответом. Однако этого мало. Следует заметить, что если $D = 0$, то можно лишь утверждать, что $ax^2 + bx + c = a\ (x - x_1)^2$, где x_1 — корень трехчлена, но выражение $a\,(x - x_1)^2$ еще не является квадратом двучлена с действительными коэффициентами. Его можно привести к виду $\left(\sqrt{a}\ x - \sqrt{a}x_1\right)^2$ тогда и только тогда, когда $a > 0$.

5*. Ответ. Если четыре точки лежат в одной плоскости, то через них либо нельзя провести ни одной сферы (если они не лежат на одной окружности), либо можно провести бесконечно много сфер (если эти точки лежат на одной окружности). Если же четыре точки не лежат в одной плоскости, то через них можно провести одну единственную сферу.

6*. Для того, чтобы в сечении получился пятиугольник, секущая плоскость должна пересечь пять граней. Так как в параллелепипеде всего шесть граней, то из этих пяти найдутся две параллельные грани. Секущая плоскость должна пересечь эти две грани по параллельным прямым, но в правильном пятиугольнике нет двух параллельных сторон.

7*. Так как BC — диаметр (рис. 7) то $BQ \perp AC$ и $CP \perp AB$. Отсюда

$$AQ = AB \cos\alpha \text{ и } AP = AC \cos\alpha.$$

$$\frac{S_{\triangle PQA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AP\ AQ \sin\alpha}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha} = \cos^2\alpha.$$

8*. Пусть O — любая точка в четырехугольнике $ABCD$. Все четыре угла $\angle BOA$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ не могут быть острыми, так как их сумма равна 2π. Следовательно, один из углов, например, $\angle BOC \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Но тогда окружность, построенная на BC как на диаметре, содержит точку O.

9*. Из свойств показательной функции вытекает, что

$$0{,}999 < \sqrt[7]{0{,}999} < 1.$$

10*. Все боковые грани данной пирамиды — равносторонние треугольники. Следовательно, все плоские углы при вершине равны 60°. Но известно, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°. Аналогичное рассуждение показывает, что такая n-угольная пирамида может существовать лишь при $n \leqslant 5$. Тот факт, что при $n = 3, 4, 5$ такие пирамиды существуют, мы предоставляем доказать читателю, заметив только, что существование такой n-угольной пирамиды равносильно условию $a_n > R_n$ (где a_n — сторона правильного n-угольника, а R_n — радиус описанной окружности).

11*. Пусть O — точка пересечения диагоналей, а E и F — точки пересечения BD с AM и AN соответственно (рис. 8). Легко видеть, что E — точка пересечения медиан треугольника ABC, поэтому $BE = \frac{2}{3}BO$ и $EO = \frac{1}{3}BO$. Аналогично $FD = \frac{2}{3}OD$ и $OF = \frac{1}{3}OD$. Но поскольку $BO = OD$, то $BE = FD$, а $EF = EO + OF = \frac{2}{3}BO$, $EF = BE = FD$.

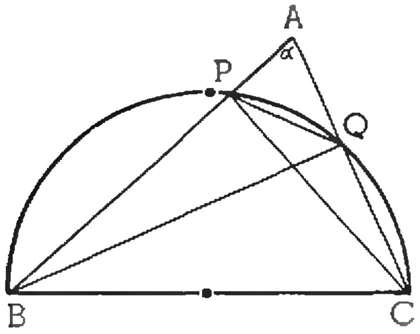


Рис. 7.

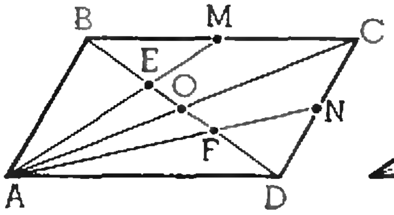


Рис. 8.

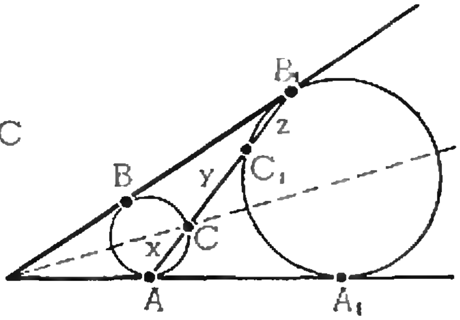


Рис. 9.

12*. Пусть (рис. 9) $AC = x$, $CC_1 = y$, $B_1C_1 = z$. Согласно известной теореме

$$AA_1^2 = AB_1 \cdot AC_1 = (x + y + z) \times \times (x + y).$$

Аналогично

$$BB_1^2 = AB_1 \cdot B_1C = (x + y + z) \times (y + z).$$

Но тогда из очевидного равенства $AA_1^2 = BB_1^2$ вытекает $x + y = y + z$, то есть $x = z$.

13*. Итак, дана прямая l и точки D и E (рис. 10). Предположим, что задача решена. Поскольку $\angle ADC = \angle AEC = 90°$, точки A, D, E и C лежат на полуокружности, построенной на AC как на диаметре. Отсюда вытекает способ построения. Из середины отрезка DE восставим к нему перпендикуляр, он пересечет l в точке O. Из точки O как из центра проведем полуокружность радиуса $OE = OD$; она пересечет l в точках A и C. Проводя AD и CE, получим точку B.

14*. Очевидно, что середины биссектрис (как и высот) лежат на сторонах (или на их продолжениях) треугольника $A_1B_1C_1$, образованного средними линиями первоначального треугольника ABC (рис. 11). Разница между случаями а) и б) состоит в том, что середины биссектрис лежат внутри сторон треугольника $A_1B_1C_1$, а середины высот могут, вообще говоря, лежать на его сторонах или даже вне треугольника. Если допустить, что середины биссектрис лежат на одной прямой, то получится противоречие, так как тогда будет существовать прямая, пересекающая все три стороны треугольника $A_1B_1C_1$. Простой пример прямоугольного треугольника показывает, что середины высот могут лежать на одной прямой.

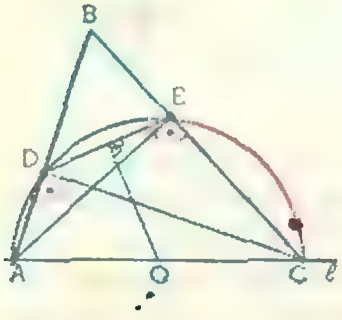


Рис. 10.

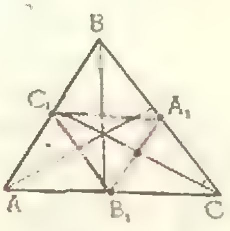


Рис. 11.

15*. Из тождества

$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

следует, что $\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta)$ является рациональным числом, если таковы $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\beta$. Если предположить теперь, что $\mathrm{tg}\,5°$ рациональное число, то получим, что $\mathrm{tg}\,10° = \mathrm{tg}\,(5° + 5°)$ тоже рациональное число и, далее, $\mathrm{tg}\,20°$ и $\mathrm{tg}\,30°$ тоже рациональны. Последнее, однако, противоречит иррациональности числа $\mathrm{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

16*. Основные усилия абитуриентов в этой задаче, как правило, связаны с различными попытками применить формулы Герона, так как в условиях идет речь о сторонах и площади. Тем не менее наиболее короткое решение связано с другой идеей.

Все углы треугольника ABC не могут быть больше $60°$, так как иначе их сумма была бы больше $180°$. Пусть, например, $\angle A \leqslant 60°$. Тогда из формулы $S = \frac{bc}{2}\sin A$ вытекает, что

$$S_{ABC} < \frac{1}{2}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

17*. Пусть стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию: 1, q, q^2 $(q > 1)$. Увеличим стороны этого треугольника в q раз; новый треугольник будет иметь стороны q, q^2, q^3. Оба треугольника подобны и имеют две равные стороны: q и q^3. Осталось отметить, что такие треугольники действительно существуют. Достаточно проверить, что неравенство $q^2 < 1 + q$ выполняется при $1 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

18*. Через каждую их прямых l_1 и l_2 можно провести единственную плоскость, параллельную другой прямой (см. рис. 12). Очевидно, что любая точка, лежащая в одной из этих двух плоскостей и не лежащая на заданных прямых, принадлежит искомому геометрическому месту. Других точек нет. Действительно, пусть

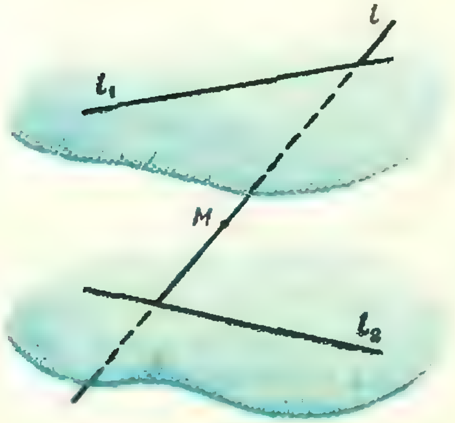


Рис. 12.

точка M не лежит ни в одной из этих двух плоскостей. Проведем через точку M и прямые l_1 и l_2 две плоскости. Линия пересечения этих плоскостей — прямая l — проходит через точку M и не параллельна ни l_1, ни l_2 (иначе одна из этих двух плоскостей будет параллельна одной из прямых l_1 или l_2). Следовательно, прямая l пересекает l_1 и l_2.

19*. Замечание. Если в треугольнике к некоторой стороне прилегает тупой угол, то эта сторона не может быть наибольшей.

Решение. Предположим противное, то есть что существует пирамида с указанным в условии свойством. Среди всех ее ребер выберем наибольшее. К этому ребру также, по условию, прилегает плоский тупой угол. Но тогда, в силу приведенного выше замечания, это ребро не может быть наибольшим, и мы приходим к противоречию.

ШКОЛЬНИКИ РАСЧИЩАЮТ КАТОК

(см. стр. 35)

Работа затрачивается на то, чтобы вынести снег за пределы катка. Каждый комок снега выгоднее всего нести к ближайшей точке на границе катка (по радиусу). Следовательно, работа, которую школьники должны при этом затратить, пропорциональна расстоянию от комка снега до края катка, поэтому она пропорциональна объему столбика над кусочком снега, высота столбика равна расстоянию от кусочка снега до края катка. Построим все такие столбики; тогда работа по расчистке катка будет численно равна сумме объемов всех столбиков. Для круглого катка столбики заполняют прямой круговой конус с прямым углом при вершине (рис. 1). Если h — радиус

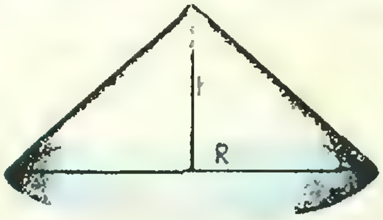


Рис. 1.

катка, то объем построенного конуса равен $\frac{\pi}{3}R^3$, то есть пропорционален кубу радиуса катка. Следовательно, каток радиусом в 20 *м* школьники расчистят за 8 часов.

Хоккейную площадку школьники смогут расчистить значительно быстрее. Столбики, построенные над хоккейной площадкой, заполняют тело, имеющее форму «крыши сарая» (рис. 2).

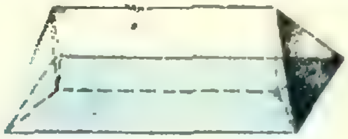


Рис. 2.

Объем «крыши сарая» легко вычислить, а если сравнить полученный объем с объемом кругового конуса, то получится, что школьники расчистят хоккейную площадку за шесть часов.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

1. Решить уравнение:

$$3\operatorname{tg} x\,(7+\cos 2x)=2\,(\cos 2x-1).$$

2. Решить неравенство

$$\log_3^2 x+2\log_9 (x^2)<2.$$

3. Автомобиль едет из пункта A в пункт C. От пункта A до пункта B, расположенного между A и C, он едет со скоростью 48 *км/ч*. В пункте B он уменьшает свою скорость на a *км/ч* $(0<a<48)$ и с этой скоростью проезжает треть пути от B до C. Оставшуюся часть пути от B до C он едет со скоростью, которая на $2a$ *км/ч* превышает первоначальную скорость 48 *км/ч*. При каком значении a автомобиль быстрее всего проделает путь от B до C?

4. В правильную четырехугольную пирамиду с вершиной S и основанием $ABCD$ вписана сфера. Сторона основания равна a, боковое ребро равно $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. На апофеме SE грани DSC взята точка M так, что $SM=ME$. Найти расстояние между точками, в которых прямая AM пересекает сферу, вписанную в пирамиду.

5. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Точки M, Q, N и P являются основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины E соответственно на стороны AB, BC, CD (или их продолжении) и диагональ AD. Известно, что $EP=d$, а отношение площади треугольника MQE к площади треугольника PNE равно k. Найти длину отрезка EM.

Факультет психологии

1. Вычислить без помощи таблиц

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}.$$

2. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На продолжении ребер AB и BB' соответственно отложены отрезки AM и $B'N$ длины $AM=\frac{1}{2}AB$ и $B'N=2B'B$ $\left(BM=\frac{3}{2}AB;\ BN=3BB'\right)$. Где на ребре CC' надо выбрать точку P, чтобы сечением куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P, был четырехугольник?

3. Найти все значения x, для которых

$$\min\left\{1-x^2,\ \frac{1-x}{2}\right\}>\frac{1}{2}.$$

4. Рабочий изготовил некоторое количество деталей видов A и B, причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B. Если бы он изготовил деталей A в 2 раза больше, то общее число деталей было бы меньше 32, а если бы он изготовил деталей B в 2 раза больше, то общее число деталей было бы больше 28. Сколько деталей A и сколько деталей B изготовил рабочий?

5. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 3x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x+\frac{a}{2}=0$$

имеет ровно три корня, расположенные на отрезке $\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi$?

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Специальности:
промышленное и гражданское строительство, эксплуатация транспорта, экономика транспорта, строительство железных дорог

1. Экскаватор должен вырыть котлован объемом 120 000 $м^3$ в назначенный срок (не более месяца). Если бы он ежедневно вынимал на 100 $м^3$ грунта больше, то затратил бы на выполнение всей работы на 14 дней больше того времени, которое он тратит, чтобы вырыть $^1/_3$ котлована, работая по плану. В какой срок был вырыт котлован?

2. Решить уравнение

$$\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2.$$

3. Хорда окружности равна 10 *см*. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой конец — секущая параллельно касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 *см*.

4. Доказать тождество

$$4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Специальности: автоматика, телемеханика и связь, электрификация транспорта, мосты и туннели

1. Двое должны выполнить некоторую работу. Вначале 2 *ч* работал первый, затем присоединился второй и вместе они работали 1 *ч*. Оставшуюся после этого работу второй заканчивает за 3 *ч*. За какое время каждый может выполнить всю работу, если первому для выполнения работы нужно на 2 *ч* меньше, чем второму?

2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=4+\dfrac{y}{2}, \\ \log_3(x+2y)+\log_{\frac{1}{3}}(x-2y)=1. \end{cases}$$

3. В ромб, сторона которого 20 *см*, вписан круг. Найти площадь круга, если одна диагональ ромба больше другой в $\frac{4}{3}$ раза.

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x-\frac{3}{4}\sin^2 2x=0.$$

Специальности: прикладная математика, автоматизированные системы управления, электронные счетно-решающие машины

1. Три совхоза расположены не на одной прямой. Расстояние от первого до третьего через второй вчетверо длиннее пути между ними. Расстояние от первого до второго через третий на a длиннее прямого пути. Расстояние от второго до третьего через первый равно 185 *км*. В каком интервале находятся все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение совхозов?

2. Решить уравнение

$$1-2x-x^2=\operatorname{tg}^2(x+y)+\operatorname{ctg}^2(x+y).$$

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней β. Определить объем параллелепипеда.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0.$$

Уральский государственный университет

Математико-механический факультет

1. Число $1+\sqrt{2}$ является корнем уравнения

$$x^3+ax^2+bx+2=0.$$

Найти коэффициенты a, b уравнения и все его корни при условии, что a и b — рациональные числа.

2. Треугольник AOB повернут в своей плоскости вокруг точки O на 90°, причем вершина A перешла в вершину A_1, а B — в B_1. Доказать, что в треугольнике OAB_1 медиана, опущенная на сторону AB_1, перпендикулярна A_1B, а в треугольнике OA_1B медиана, опущенная на сторону A_1B, перпендикулярна AB_1.

3. При каких x и y имеет место неравенство

$$\log_3 x+\log_x 3+2\cos y\leqslant 0?$$

4. Найти все значения параметров a и b, при которых система

$$\begin{cases} x+y=a, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=b \end{cases}$$

имеет решение.

Физический факультет

1. По кольцевой железной дороге от пункта A_1 отправляется поезд, который последовательно проходит пункты A_2, A_3, ..., A_n, снова A_1, A_2, A_3, ..., A_n и так далее. Известно, что каждый последующий перегон между соседними пунктами поезд проходит со средней скоростью в q раз большей, чем средняя скорость на предыдущем перегоне. Определить, во сколько раз время, потраченное на прохождение m полных кругов, больше времени, потраченного на первый круг.

2. Через точку M, лежащую внутри круга радиуса r, проведены диаметр AB и хорда CD так, что $\angle BMD=\alpha$, $\angle BDM=\beta$. Найти площадь треугольника MBD.

3. Решить неравенство:

$$\log_x(x^3+1)\log_{(x+1)} x>2.$$

4. При каких значениях a уравнение

$$\frac{\sin x-1}{\sin x-2}+a=\frac{2-\sin x}{3-\sin x}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Московский инженерно-физический институт

Вариант 1

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти это число.

2. В трапеции, основания которой a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x.$$

4. Решить уравнение

$$\cos(\pi\sqrt{x-4})\cos(\pi\sqrt{x})=1.$$

Вариант 2

1. Коллекция марок состоит из трех альбомов. В первом альбоме содержится две десятых всех марок, во втором альбоме — несколько седьмых, в третьем же альбоме 303 марки. Сколько марок в коллекции?

2. Плоскость, параллельная основанию и проходящая через центр вписанного в прямой круговой конус шара, поделила конус на две части одинакового объема. Найти угол между основанием и образующей конуса.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x|^{\lg|y|} = 4, \\ xy = 40. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = a.$$

При каких значениях параметра a уравнение имеет решения?

Новосибирский государственный университет

Специальности: математика, физика, экономика

1. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25 *см*, а вписанной в него окружности — 12 *см*. Найти стороны треугольника.

2. В равнобочной трапеции большее основание имеет длину a и разделено на 4 равные части. К точкам деления восставлены перпендикуляры, разбивающие трапецию на 4 части — две средние и две крайние. Площадь одной средней части составляет 2,51 площади одной крайней. Найти длину меньшего основания трапеции.

3. Найти все решения уравнения

$$\cos x + \cos 3x = \sqrt{1 + \sin 2x \sin 4x},$$

удовлетворяющие условию $x^2 \leqslant 15$; указать число этих решений.

4. Отрезки $AB = AD$ — ребра куба. Через главную диагональ куба с концом в вершине B и середину ребра AD проведена плоскость; расстояние от точки D до проведенной плоскости равно h. Найти длину ребра куба.

Специальности: химия, биология, геология

1. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{11-x} - \sqrt{x-7}}{\sqrt{11-x} + \sqrt{x-7}} = \frac{2}{9-x}.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos x} = 2\operatorname{ctg} x,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 7$. Указать число этих решений.

3. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен R. Найти длину гипотенузы.

4. Дан прямой цилиндр с радиусом основания, равным r. Точка A, лежащая на окружности верхнего основания, соединена прямой с точкой B на окружности нижнего основания. Длина дуги $A'B$ (где A' — проекция точки A на основание) равна l. Найти площадь треугольника ABQ, где Q — середина оси цилиндра, если длина этой оси равна h.

Московский текстильный институт

Вариант 1

1. Упростить

$$\left[\frac{n^{\frac{3}{2}} + n - n^{-\frac{1}{2}} - 1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt[4]{(n-1)^{-1}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{4}}}\right] \frac{n^3 + n - 2}{\sqrt{n-1}}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x+6).$$

3. Решить уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos 2x + 1 = 0.$$

4. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 14 *см*, а радиус описанной окружности равен 5 *см*. Найти площадь круга, вписанного в данный треугольник.

Вариант 2

1. Упростить:

$$\frac{4\sqrt[4]{x} + x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x} + \sqrt{2x}} - \sqrt{4 + x - 4\sqrt{x}},$$

$$0 < x \leqslant 4.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{(x+2)(x-7)} > x - 5.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin x \operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 1.$$

4. Полная поверхность правильной треугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине равен α. Найти радиус круга, описанного около основания.

ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ В МОСКОВСКОМ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ

Для поступающих в Московский инженерно-физический институт проводится устный экзамен по физике. Каждый экзаменационный билет состоит из двух вопросов по теории из различных разделов школьного курса физики и одной задачи.

Чтобы дать представление о характере и степени трудности экзаменационных задач, мы публикуем несколько билетов, предлагавшихся в 1971 году.

Билет 1

1. Собирающие и рассеивающие линзы. Формула линзы. Построение изображения в линзах.

2. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал поля точечного заряда (без вывода).

3. В трубке, закрытой с одной стороны и закрепленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, находится поршень массы $m = 1$ *кг* (рис. 1). Площадь сечения трубки $S = 8$ *см*^{2}. Поршень передвинули, увеличив объем воздуха под ним в $n = 2$ раза. Найти начальное ускорение поршня после того, как его отпустили. Трением пренебречь. Наружное давление воздуха $p_0 = 760$ *мм рт. ст.*

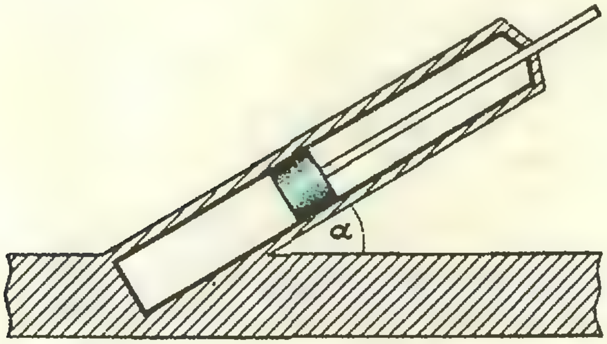


Рис. 1.

Билет 2

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал поля точечного заряда (без вывода).

2. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон газового состояния.

3. Тело весом 0,5 *кг*, укрепленное на штанге длиной 2 *м*, равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг оси, делая 20 оборотов в минуту. Определить силу натяжения штанги при вращении в наивысшей и наинизшей точках траектории тела.

Билет 3

1. Кинетическая и потенциальная энергия. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике.

2. Дисперсия света. Спектр. Спектры испускания и поглощения.

3. Проволочное полукольцо радиуса $r = 10$ *см* находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$. Вектор **B** перпендикулярен плоскости полукольца. Центр полукольца соединен с ним двумя проводниками (рис. 2), один из которых AO — неподвижный, другой — OC — поворачивают вокруг точки O с угловой скоростью $\omega = 10$ *рад/сек*. Сопротивление единицы длины всех проводников $\rho = 0{,}65$ *ом/м*. Найти ток в контуре AOC в момент, когда угол φ между AO и OC равен π.

Билет 4

1. Электроемкость. Единицы электроемкости. Электроемкость проводящей сферы. Конденсаторы.

2. Механическая работа. Формула работы. Мощность. Энергия. Единицы их измерения.

3. Цилиндрический сосуд, закрытый с обоих торцов, поместили на наклонную плоскость, составляющую угол $\theta = 30°$ с горизонтом (рис. 3). В цилиндре находится собирающая линза L с фокусным расстоянием $f = 10$ *см*; фокальная плоскость линзы совпадает с верхним торцом цилиндра. В сосуде находится жидкость с показателем преломления $n = \sqrt{3}$ (см. рис. 3). Из точки S на дне сосуда выходит вертикально луч света. На какое расстояние сместится след этого луча, когда цилиндр будет скользить без трения по наклонной плоскости?

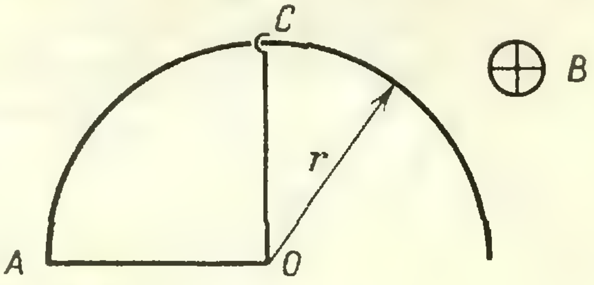


Рис. 2.

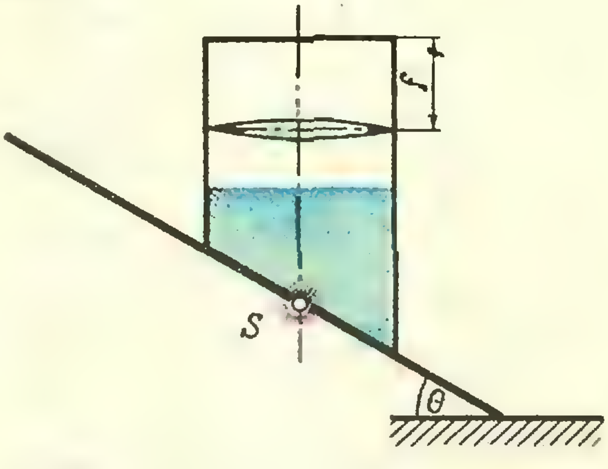


Рис. 3.

Решение задач по электростатике

(Потенциал)

Г. Я. Мякишев

Наибольшие трудности в курсе электростатики вызывает понятие потенциала или разности потенциалов.

Работа электростатических сил равна изменению потенциальной энергии, взятой с обратным знаком:

$$\Delta A = -(\Pi_2 - \Pi_1) = -\Delta\Pi,$$

где Π_1 и Π_2 — начальное и конечное значения энергии. Так как работа пропорциональна силе, а сила, в свою очередь, пропорциональна заряду q, на который действует поле, то энергия заряда в поле $\Pi \sim q$. Следовательно, отношение $\frac{\Pi}{q}$ не зависит от заряда и может быть принято за характеристику поля. Эта характеристика называется потенциалом:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q}. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta A = -q(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (2)$$

Проекция напряженности поля на произвольное направление, задаваемое малым отрезком Δl, связана с разностью потенциалов на концах этого отрезка формулой

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}. \qquad (3)$$

Понятие разности потенциалов оказывается довольно сложным из-за того, что работа выражается не через сам потенциал, а через разность потенциалов (формула (2)). Поэтому добавление к потенциалу любой постоянной не изменит величины работы, а значит, и не изменит ничего, что имело бы физический смысл. Потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной, как и потенциальная энергия *).

Подобно напряженности поля, величина потенциала зависит от распределения в пространстве электрических зарядов. В частности, потенциал равномерно заряженной бесконечной плоскости в системе СИ определяется формулой

$$\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x + c, \qquad (4)$$

где σ — поверхностная плотность заряда, x — расстояние до плоскости, c — произвольная постоянная. Так как напряженность поля плоскости $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, то формулу (4) можно переписать в виде

$$\varphi = Ex + c. \qquad (5)$$

Потенциал точечного заряда можно найти с помощью закона Кулона и формулы (2) для разности потенциалов. Но это достаточно сложная задача. Гораздо проще доказать, что, взяв потенциал точечного заряда в виде

---

*) Это трудно представить себе. Ведь если мы знаем потенциал в каждой точке, то тем самым напряженность электрического поля также определена в каждой точке. Но в то же время потенциал в данной точке может быть любым, раз он определен с точностью до постоянной.

Дело здесь в следующем. Потенциал в точке можно считать равным любому значению, но изменение потенциала при смещении из данной точки в другую, сколь угодно близкую, будет вполне определенным, так как зависимость потенциала от координат $\varphi(x, y, z)$ известна. Если потенциал вообще не меняется при таком смещении, то в этой точке поле равно нулю. Зная характер изменения потенциала вблизи произвольной точки, можно всегда найти величину и направление напряженности поля в этой точке с помощью формулы (3).

$$\varphi = \frac{q}{r} + c, \qquad (6)$$

где c — произвольная постоянная, можно с помощью (2) получить закон Кулона. Это и будет означать, что формула (6), которая приводится без доказательства в школьном курсе физики, действительно определяет потенциал точечного заряда в системе СГСЭ.

В самом деле, пусть точечный заряд q_2 смещается в поле другого точечного заряда q_1 на очень малый отрезок Δr. Тогда, согласно формулам (2) и (6),

$$\Delta A = -q_2(\varphi_2 - \varphi_1) = -q_2 q_1 \times \\ \times \left(\frac{1}{r + \Delta r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q_1 q_2 \Delta r}{r^2 + r\Delta r}.$$

Так как Δr мало, то $r^2 \gg r\Delta r$ и

$$\Delta A = F\Delta r = \frac{q_1 q_2}{r^2}\Delta r.$$

Следовательно, сила F равна $\frac{q_1 q_2}{r^2}$, а это и есть закон Кулона. Значит, формула (6) справедлива.

Подобно тому как напряженность поля сферически симметрично заряженного шара совпадает с напряженностью точечного заряда, потенциал заряженного шара (вне шара) также определяется формулой (6). В системе СИ

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} + c, \qquad (7)$$

если шар находится в однородном диэлектрике с диэлектрической проницательностью ε.

Для решения задач достаточно хорошо представлять себе физический смысл основных формул. Кроме того, часто приходится использовать простые, но очень важные положения: работа электростатического поля на замкнутом пути равна нулю и все точки проводника в электростатике имеют один и тот же потенциал.

Задача 1. Может ли существовать электростатическое поле, напряженность которого не меняется в направлении x и возрастает в направлении y (рис. 1)?

Решение. Не может, так как в таком поле работа при перемещении заряда по замкнутому контуру (например, прямоугольному со сторонами, параллельными x и y) отлична от нуля.

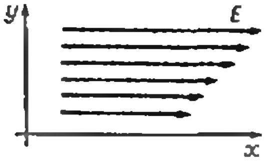


Рис. 1.

Задача 2. К внутренней стенке изолированного от земли электрометра прикреплен металлический листочек (рис. 2). Стержень и корпус электрометра соединили проводом и после этого сообщили корпусу электрометра некоторый заряд. Отклонятся ли при этом листочки электрометра? Что произойдет с листочками, если провод убрать и после этого стержень соединить с землей?

Решение. Корпус и стержень, соединенные проводом, будут иметь равные потенциалы. Поле внутри электрометра равно нулю и листочки не будут отклоняться. После удаления соединительного провода и заземления стержня оба листочка отклонятся, так как между стержнем и корпусом возникнет разность потенциалов и, соответственно, электрическое поле. Появление разности потенциалов очевидно из условия равенства нулю работы электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому пути $ABCDEFA$,

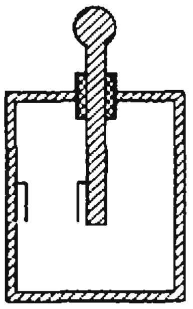


Рис. 2.

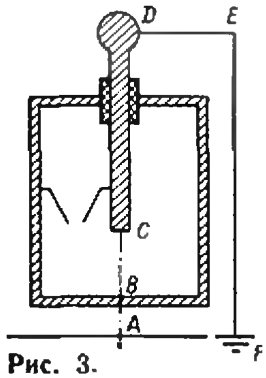


Рис. 3.

изображенному на рисунке 3. Работа на участке AC должна быть равна нулю, так как путь $CDEFA$ проходит внутри проводника. Следовательно, разность потенциалов между корпусом и стержнем равна по величине разности потенциалов между корпусом и землей, которая (поскольку корпусу электрометра сообщен заряд) не равна нулю.

Задача 3. Чему равна потенциальная энергия Π взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга?

Решение. Согласно определению потенциала (1) и формулы для потенциала точечного заряда (6),

$$\Pi = \varphi_1 q_2 = \varphi_2 q_1 = \frac{q_1 q_2}{r} + C. \tag{8}$$

Задача 4. Уединенный проводящий шар радиуса R несет заряд q. Какова энергия шара?

Решение. Если произвольную постоянную в формуле (7) положить равной нулю, то потенциал шара в пустоте

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Но собственная энергия шара не равна $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$, как это может показаться вначале.

Энергию шара можно найти, вычислив работу, которую нужно совершить для того, чтобы сообщить шару заряд q. Будем заряжать шар, перемещая к нему заряд из бесконечности одинаковыми маленькими порциями. При этом потенциал шара будет линейно увеличиваться от нуля до $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Среднее значение потенциала $\frac{1}{2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Поэтому энергия шара оказывается равной

$$\Pi = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}. \tag{9}$$

Задача 5. На расстоянии d от точечного заряда q расположен незаряженный шар радиуса R. Чему равен потенциал φ шара?

Решение. Потенциал всех точек шара одинаков. Поэтому для решения задачи достаточно найти потенциал одной точки шара. Проще всего найти потенциал центра шара. Он равен потенциалу, созданному в центре шара точечным зарядом q: $\varphi_1 = \frac{q}{d}$ (произвольную постоянную считаем равной нулю), плюс потенциал φ_2, созданный зарядами, возникающими на поверхности шара вследствие электростатической индукции. Но потенциал φ_2 равен нулю, так как суммарный заряд на сфере равен нулю и все элементы наведенного заряда находятся на равном расстоянии от центра:

$$\varphi = \frac{q}{d} + \sum_i \frac{\Delta q_i}{r} = \frac{q}{d} + \frac{1}{r}\sum_i \Delta q_i = \frac{q}{d}.$$

Задача 6. Внутрь полой проводящей сферы радиуса r, несущей заряд $+Q$, через маленькое отверстие внесли тело, имеющее заряд $-q$. Чему равен потенциал точки, находящейся на расстоянии $R>r$ от центра сферы.

Решение. Поместим вначале заряд $-q$ в центре сферы. На внешней поверхности этот заряд индуцирует заряд $-q$, а на внутренней $+q$, причем заряды распределяются равномерно. Потенциал в точке, находящейся на расстоянии R, равен $\varphi_R = \frac{Q-q}{R}$ (так как суммарный потенциал наведенных зарядов равен нулю).

При перемещении заряженного тела внутри сферы силовые линии электрического поля деформируются, но не проникают сквозь проводящую поверхность сферы. Поэтому найденное значение потенциала остается справедливым при любом положении заряда $-q$ внутри сферы.

Задача 7. В центре проволочного кольца радиуса R находится заряженная частица, имеющая скорость v_0 (рис. 4). Заряд кольца $+Q$, заряд частицы $-q$. Какую скорость v будет иметь частица вдали от кольца?

Решение. Потенциал в центре кольца равен сумме потенциалов, созданных отдельными элементарными зарядами ΔQ_i на кольце. Так

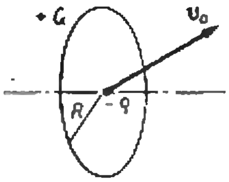


Рис. 4.

как заряд ΔQ_i можно рассматривать как точечный, то

$$\varphi = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{R} + c = \frac{Q}{R} + c.$$

Потенциальная энергия взаимодействия заряда $-q$ с зарядом $+Q$ равна

$$П = -q\varphi = -\frac{qQ}{R} - qc.$$

Полная энергия в начальный момент

$$E_{н} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{qQ}{R} - qc.$$

В конечном состоянии кинетическая энергия частицы равна $\frac{mv^2}{2}$, а потенциальная энергия $-qc$, так как зависящее от расстояния слагаемое потенциальной энергии обращается в нуль. По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{qQ}{R} - qc = \frac{mv^2}{2} - qc.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Qq}{mR}}.$$

Как видите, результат не зависит от значения постоянной c.

Упражнения

1. На рисунке 5 изображены эквипотенциальные поверхности. Найти направление электрического поля в точке O.

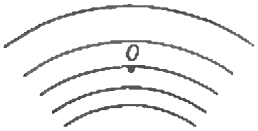


Рис. 5.

2. Металлический шар диаметром 2 *м* расположен в центре большого помещения и заряжен до потенциала 10 *в*. Какое количество тепла выделится, если шар соединить проводником с землей?

3. Сферическая оболочка радиуса R заряжена равномерно зарядом Q. Используя закон сохранения энергии, найти растягивающую силу, приходящуюся на единицу площади оболочки.

4. N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены одноименными зарядами до одного и того же потенциала φ_1. Каков будет потенциал φ большей капли ртути, получившейся в результате слияния этих капель?

5. Два заряда по 50 ед. СГСЭ каждый находятся на расстоянии $R_1 = 100$ *см* друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $R_2 = 50$ *см*.

6. Нарисуйте график зависимости потенциала и напряженности поля двух заряженных шариков от расстояния вдоль линии, проходящей через центры этих шариков.

7. Нарисуйте график зависимости потенциала и напряженности поля от расстояния до центра заряженного металлического шарика радиуса r, окруженного толстой металлической оболочкой, внутренний радиус которой равен R_1 ($R_1 > r$), а внешний — R_2.

Ответы на кроссворд МФТИ (см. стр. 21)

По вертикали: 1. Парта. 2. Лангет. 3. Огурец. 4. Титан. 6. Вымогательство. 7. Доброжелатель. 10. Сарафан. 11. Арбатов. 17. Ей-же-ей. 18. Изотоп. 19. Басма. 20. Босса.

По горизонтали: 5. Фантасмагория. 8. Омета. 9. Забор. 10. Столица. 12. Заноза. 13. Развод. 14. Съем-ка. 15. Орагай. 16. Негатив. 21. Аврал. 22. Вобла. 23. Импрессионист.

Закон Ома для неоднородного участка цепи

В. Н. Ланге

Закон Ома для участка электрической цепи, позволяющий рассчитать силу текущего по нему тока, имеет следующий вид:

$$I=\frac{U}{R}. \qquad (1)$$

В этой формуле R — сопротивление участка цепи, U — разность потенциалов начальной и конечной точек участка, то есть

$$U=\varphi_1-\varphi_2.$$

Однако записанный в таком виде закон применим не всегда. Чтобы показать это, рассмотрим простейшую цепь, состоящую из источника тока с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r и сопротивления R (рис. 1). Разобьем эту цепь на два участка ARB и BEA. В применении к участку ARB формула (1) дает:

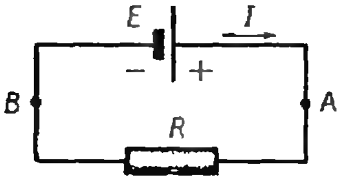


Рис. 1.

$$I_R=\frac{U_{AB}}{R}=\frac{\varphi_A-\varphi_B}{R}. \qquad (2)$$

Попробуем воспользоваться той же формулой (1) для вычисления силы тока, идущего по участку BEA. Началом и концом его являются соответственно точки B и A. Поэтому

$$I_E=\frac{U_{BA}}{r}=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{r}. \qquad (3)$$

Если не обращать внимания на знак, числители выражений (2) и (3) совпадают, тогда как знаменатели, вообще говоря, различны. Следовательно, приходится заключить, что

$$I_R\neq I_E,$$

а это, конечно, нелепо, поскольку в неразветвленной цепи сила тока должна быть всюду одинакова. Причина ошибки заключается в том, что формула (1) применима только к однородным участкам цепи, то есть к участкам, не содержащим источников тока (гальванических элементов, аккумуляторов, динамомашин, фотоэлементов и т. д.). Участок BEA является неоднородным — он содержит источник тока с э. д. с.

Как же выглядит формула закона Ома для неоднородного участка цепи? Оказывается, нужное выражение легко получить из закона Ома для замкнутой цепи

$$I=\frac{E}{R+r}. \qquad (4)$$

Приведем равенство (4) к общему знаменателю:

$$IR+Ir=E. \qquad (5)$$

В первое слагаемое входят величины, относящиеся к однородному участку ARB (см. рис. 1), и на основании равенства (1) мы можем записать

$$IR=U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B.$$

Тогда выражение (5) можно переписать в следующем виде:

$$Ir=E+(\varphi_B-\varphi_A),$$

откуда

$$I=\frac{E+(\varphi_B-\varphi_A)}{r}=\frac{E+U_{BA}}{r}. \qquad (6)$$

При выводе формулы (6) мы рассматривали неоднородный участок цепи, сопротивление которого состояло лишь из внутреннего сопротивления источника. В общем случае неоднородный участок цепи может содержать различные сопротивления (в частности, иногда следует учитывать сопротивление проводов), и формула (6) записывается тогда в виде

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + E}{R_п}, \qquad (7)$$

где $R_п$ — полное сопротивление участка.

Из формулы (7) как частные случаи следуют законы Ома для замкнутой цепи и для однородного участка цепи.

Действительно, для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ (поскольку в этом случае начало и конец «участка» совпадают). Тогда из формулы (7) имеем

$$I = \frac{E}{R_п}. \qquad (8)$$

В случае однородного участка цепи $E = 0$ и формула (7) принимает вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

(Здесь R уже не содержит внутреннего сопротивления источника.)

При использовании формулы (7) для решения задач следует помнить, что э. д. с. считается положительной, если при движении вдоль неоднородного участка цепи от его начала к концу мы сначала проходим отрицательный полюс, а затем положительный. Если в результате решения для величины силы тока получается отрицательное значение, то это означает, что ток на участке цепи идет в «обратном» направлении, то есть от конца участка к началу.

Рассмотрим теперь несколько задач, которые легко решаются с помощью формулы (7).

Задача 1. Определить ток, идущий по изображенному на рисунке 2 участку AB. Э. д. с. источника $E = 20$ *в*, внутреннее сопротивление $r = 1$ *ом*; потенциалы точек A и B соответственно $\varphi_A = 15$ *в*, $\varphi_B = 5$ *в*; сопротивление проводов $R = 3$ *ом*.

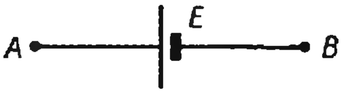


Рис. 2.

Решение. Считая началом участка точку A, а концом — точку B, и беря поэтому э. д. с. со знаком «минус», получим по формуле (7):

$$I = \frac{(15 в - 5 в) - 20 в}{3\ ом + 1\ ом} = -2{,}5\ а.$$

Отрицательный знак показывает, что ток идет в направлении $B \rightarrow A$, то есть от точки с меньшим потенциалом к точке, потенциал которой больше. Между прочим, это «противоестественное» поведение тока обычно и наблюдается внутри всех источников тока.

Задача 2. Два элемента соединены «навстречу» друг другу (рис. 3). Определить разность потенциалов между точками A и B (на зажимах батареи), если $E_1 = 1{,}4$ *в*, $r_1 = 0{,}4$ *ом*; $E_2 = 1{,}8$ *в*, $r_2 = 0{,}6$ *ом*.

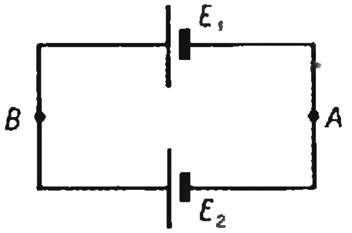


Рис. 3.

Решение. Формула (7) в применении к участку AE_2B дает

$$I = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) + E_2}{r_2}.$$

Для участка BE_1A имеем

$$I = \frac{(\varphi_B - \varphi_A) - E_1}{r_1} = -\frac{(\varphi_A - \varphi_B) + E_1}{r_1}.$$

Поскольку ток на обоих участках один и тот же (цепь неразветвленная), можно приравнять правые части этих выражений и решить уравнение, которое получится, относительно разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$:

$$\varphi_A - \varphi_B = -\frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} = -1{,}56\ (в).$$

Знак «минус» показывает, что потенциал точки A ниже, чем потенциал точки B.

Упражнения

1. Шесть одинаковых элементов соединены так, как показано на рисунке 4. Определить разность потенциалов между двумя произвольно взятыми точками цепи. Рассмотреть случай, когда подобным образом соединены N элементов.

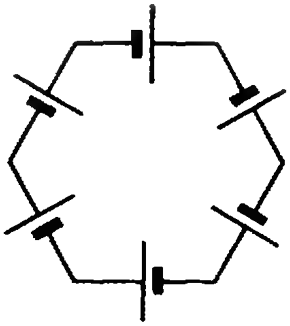


Рис. 4.

2. Однородное металлическое кольцо помещено в равномерно изменяющееся со временем магнитное поле. Плоскость кольца перпендикулярна линиям вектора индукции (это оговорка, впрочем, несущественна). Чему равна разность потенциалов между двумя произвольно взятыми точками кольца?

3. Половина кольца, упомянутого в предыдущей задаче, имеет сопротивление R, вторая половина обладает сопротивлением r ($R > r$). Построить график распределения потенциала вдоль окружности кольца.

Юмор Физтеха

Новое о вечном

Запущенный в серийное производство вечный двигатель не выдержал испытания временем.

С олимпиады

«Задумайте число, прибавьте к нему 18, потом разделите на нуль и у вас ничего не получится. Как вы думаете, почему?»

Однажды на лекции

Блестящий пример метода последовательного приближения к истине продемонстрировал как-то доцент Б. О. Солоноуц. Написав на доске формулу, он спросил аудиторию:

— Скажите, вы это знаете?

Молчание.

— Точнее, во время экзаменов вы это знали?

Молчание.

— Еще точнее, во время экзаменов вы должны были это знать?

По рядам пронеслось единодушное «Да!».

* * *

Близились экзамены. На одной из лекций по математическому анализу студенты поинтересовались содержанием будущей письменной экзаменационной работы. Лектор ответил:

— Задачи будут интересные. Одну из них сейчас решает вся кафедра. Если решит, мы эту задачу включим в экзаменационную работу.

* * *

— Я буду рисовать на двумерной доске, поскольку в n-мерном пространстве рисовать довольно неудобно.

* * *

— Импульс не знает, куда ему смотреть, поэтому обращается в нуль.

* * *

«Профессор А. М. Молчанов возобновляет чтение курса «Теория колебаний по понедельникам».

(Из объявления).

О системах физических единиц

В редакцию журнала поступает большое число писем от наших читателей с просьбой поместить в журнале таблицы систем физических единиц.

В этом номере мы публикуем таблицы, в которых приведены единицы Системы Интернациональной (СИ), системы СГС, а так же внесистемные единицы.

При решении задач на равных правах могут быть использованы как система СИ, так и система СГС.

Статью подготовил к печати **М. Л. Смолянский.**

Таблица 1. Список единиц системы СИ

№	Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единицы	Определение единиц
1	2	3	4	5
		Основные единицы		
1	Длина	метр	*м*	Длина, равная 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ (оранжевая линия) атома криптона-86.
2	Масса	килограмм	*кг*	Единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.
3	Время	секунда	*с*	Секунда — 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.
4	Сила электрического тока	ампер	*А*	Сила неизменяющегося электрического тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 *м* один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу, равную $2\cdot10^{-7}$ *Н* на каждый метр длины.
5	Температура	кельвин	*К*	Единица термодинамической температуры — 1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды.
6	Сила света	кандела	*кд*	Сила света, испускаемая с площади 1/600 000 $м^2$ сечения полного излучателя в перпендикулярном этому сечению направлении, при температуре затвердевания платины и давлении 101 325 *Па*.

1	2	3	4	5

Дополнительные единицы

1	2	3	4	5
7	Плоский угол	радиан	*рад*	Угол между двумя радиусами окружности, дуга между которыми по длине равна радиусу.
8	Телесный угол	стерадиан	*ср*	Телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу сферы.

Некоторые производные единицы

1	2	3	4	5
1	Скорость	метр в секунду	*м/с*	Скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой она за время 1 *с* проходит путь в 1 *м*.
2	Ускорение	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$	Ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за время 1 *с* скорость точки изменяется на 1 *м/с*.
3	Частота	герц	*Гц* (*Гц*=1/*с*)	Частота, при которой за время 1 *с* происходит один цикл периодического процесса.
4	Плотность	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	Плотность однородного тела, имеющего при объеме 1 $м^3$ массу 1 *кг*.
5	Сила	ньютон	*Н* ($Н = (кг \cdot м)/с^2$)	Сила, сообщающая телу массой 1 *кг* ускорение 1 $м/с^2$ в направлении действия силы.
6	Количество движения (импульс)	килограмм-метр в секунду	$(кг \cdot м)/с$	Количество движения тела массой в 1 *кг*, движущегося со скоростью 1 *м/с*.
7	Давление	паскаль	*Па* ($Па = Н/м^2$)	Давление, вызываемое силой 1 *Н*, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 $м^2$.
8	Работа, энергия	джоуль	*Дж* ($Дж = Н \cdot м$)	Работа силы 1 *Н* при перемещении ею тела на расстояние 1 *м* в направлении действия силы.
9	Мощность	ватт	*Вт* (*Вт*=*Дж/с*)	Мощность, при которой работа 1 *Дж* совершается за время 1 *с*.
10	Момент силы	ньютон-метр	$Н \cdot м$	Момент силы, равной 1 *Н*, относительно точки, расположенной на расстоянии 1 *м* от линии действия силы.
11	Количество теплоты	джоуль	*Дж*	Количество теплоты, эквивалентное механической работе 1 *Дж*.

1	2	3	4	5
12	Удельная теплота	джоуль на килограмм	*Дж/кг*	Удельная теплота процесса, в котором веществу массой 1 *кг* сообщается (или отбирается от него) количество теплоты 1 *Дж*.
13	Теплоемкость	джоуль на кельвин	*Дж/К*	Теплоемкость тела, повышающего температуру на 1 *К* при подведении к нему количества теплоты 1 *Дж*.
14	Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-кельвин	*Дж/(кг·К)*	Удельная теплоемкость вещества, имеющего при массе 1 *кг* теплоемкость 1 *Дж/К*.
15	Количество электричества	кулон	*Кл* *(Кл=А·с)*	Количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника при токе силой 1 *А* за время 1 *с*.
16	Электрическое напряжение	вольт	*В* *(В=Вт/А)*	Электрическое напряжение, вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 *А* при мощности 1 *Вт*.
17	Напряженность электрического поля	вольт на метр	*В/м*	Напряженность однородного электрического поля, при которой между точками, находящимися на расстоянии 1 *м* вдоль линии напряженности поля, создается разность потенциалов 1 *В*.
18	Электрическая емкость	фарада	*Ф* *(Ф=В/А)*	Емкость конденсатора, между обкладками которого при заряде 1 *Кл* возникает напряжение 1 *В*.
19	Электрическое сопротивление	ом	*Ом* *(Ом=В/А)*	Сопротивление проводника, между концами которого при силе тока 1 *А* возникает напряжение 1 *В*.
20	Электрическая проводимость	сименс	*См* *(См=1/Ом)*	Электрическая проводимость проводника сопротивлением 1 *Ом*.
21	Магнитный поток	вебер	*Вб* *(Вб=Кл·Ом)*	Магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 *Ом* проходит количество электричества 1 *Кл*.
22	Магнитная индукция	тесла	*Т* (Т=Вб/$м^2$)	Магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение проводника площадью 1 $м^2$ равен 1 *Вб*.
23	Индуктивность	генри	*Г* *(Г=Вб/А)*	Индуктивность контура, с которым при силе тока в нем 1 *А* сцепляется магнитный поток 1 *Вб*.

1	2	3	4	5
24	Световой поток	люмен	*лм* (*лм*=*кд·ср*)	Световой поток, испускаемый точечным источником в телесном угле 1 *ср* при силе света 1 *кд*.
25	Освещенность	люкс	*лк* (*лк*=*лм*/*м*^{2})	Освещенность поверхности площадью 1 *м*^{2} при падающем на нее световом потоке 1 *лм*.
26	Яркость	кандела на квадратный метр	*кд*/*м*^{2}	Яркость светящейся поверхности площадью 1 *м*^{2} при силе света 1 *кд*.
27	Световая энергия	люмен-секунда	*лм·с*	Световая энергия светового потока 1 *лм*, действующего в течение 1 *с*.

Таблица 2. Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами системы СИ

№	Физическая величина	Название единицы	Обозначение единицы	Значение в единицах системы СИ или определение
1	Время	минута час	*мин* *ч*	1 *мин* = 60 *с* 1 *ч* = 3600 *с*
2	Масса	тонна центнер	*т* *ц*	1 *т* = 1000 *кг* 1 *ц* = 100 *кг*
3	Количество вещества	киломоль моль	*кмоль* *моль*	Количество вещества, содержащее столько же молекул (атомов, частиц), сколько атомов содержится в нуклиде углерода C^{12} массой 12 *кг* (точно). 10^{-3} *кмоль*
4	Температура	градус Цельсия	°С	t° С = TК — 273,15
5	Плоский угол	полный угол прямой угол градус минута секунда	— — ° ′ ″	2π *рад* = 6,283... *рад* π/2 *рад* = 1,570... *рад* π/180 *рад* = 1,745... 10^{-2} *рад* π/10800 *рад* = 2,908... 10^{-4} *рад* π/648000 *рад* = 4,848... 10^{-6} *рад*
6	Площадь	гектар	*га*	1 *га* = 10^{-4} *м*^{2}
7	Объем	литр	*л*	1 *л* = 10^{-3} *м*^{3}
8	Скорость	километр в час	*км/ч*	1 *км/ч* = $\frac{10}{36}$ *м/с* = 0,2777 *м/с*
9	Работа, энергия	киловатт-час	*квт·ч*	1 *квт·ч* = 3 600 000 *Дж*
10	Количество электричества	ампер-час	*А·ч*	1 *А·ч* = 3600 *Кл*

Таблица 3. Система СГС

№	Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единицы	Связь с единицами измерения СИ
	Основные единицы			
1	Длина	сантиметр	*см*	1 *см* = 10^{-2} *м*
2	Масса	грамм	*г*	1 *г* = 10^{-3} *кг*
3	Время	секунда	*с*	
	Производные единицы			
1	Сила	дина	*дин*	1 *дин* = 10^{-5} *Н*
2	Давление	дина на сантиметр квадратный	*дин/см*^{2}	1 *дин/см*^{2} = 0,1 *Па*
3	Работа, энергия	эрг	*эрг*	1 *эрг* = 10^{-7} *Дж*
4	Мощность	эрг в секунду	*эрг/с*	1 *эрг/с* = 10^{-7} *Вт*
5	Сила тока	ед. силы тока СГС	—	1 *ед. с. т.* = $\frac{1}{3}10^{-9}$ *А*
6	Количество электричества	ед. кол. эл. СГС	—	1 *ед. к. э.* = $\frac{1}{3}10^{-9}$ *Кл*
7	Разность потенциалов, электродвижущая сила	ед. разности потенциалов СГС	—	1 *ед. разн. пот.* = 300 *В*
8	Напряженность электрического поля	ед. напр. эл. поля СГС	—	1 *ед. напр. эл. поля* = $3\cdot10^{4}$ *В/м*
9	Электрическое сопротивление	ед. эл. сопр. СГС	—	1 *эд. эл. сопр.* = $9\cdot10^{11}$ *Ом*
10	Электроемкость	ед. эл. ем. СГС (*см*)	*см*	1 *см* = $\frac{1}{9}\cdot10^{-11}$ *Ф*
11	Магнитный поток	максвелл	*мкс*	1 *мкс* = 10^{-8} *Вб*
12	Магнитная индукция	гаусс	*гс*	1 *сг* = 10^{-4} *Т*
13	Индуктивность и взаимная индукция	ед. индукт. СГС (*см*)	*см*	1 *см* = 10^{-9} *Г*
14	Напряженность магнитного поля	эрстед	*э*	1 *э* = $\frac{10^3}{4\pi C}$ *А/м*

Таблица 4. Несистемные единицы

№	Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единиц	Переводной множитель в систему СИ
1	Давление	бар техническая атмосфера миллиметр ртутного столба миллиметр водяного столба	*бар* *ат* или *кг/см*^{2} *мм. рт. ст.* *мм. вод. ст.*	10^5 $9{,}806\cdot10^4$ 133,3 9,806
2	Работа, энергия	ватт-час киловатт-час лошадиная сила-час	*Вт·ч* *кВт·ч* *л. с. ч.*	3600 $3{,}6\cdot10^6$ $2{,}65\cdot10^6$
3	Мощность	лошадиная сила	*л. с.*	735,49
4	Количество тепла	калория	*кал* *ккал*	4,1868 4186,8

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Осторожно, брак!

В самом конце 1970 и в январе 1971 года на прилавках книжных магазинов появились два тома книги М. Е. Подтягина «Элементарная математика» (теория и практика) *). Почти сразу весь тираж был распродан: книги со столь многообещающим названием на прилавках книжных магазинов не залеживаются. На что же потратили свои 25 тысяч рублей 20 тысяч покупателей двухтомника М. Е. Подтягина?

Раскроем первый том. Уже на 7-й странице (с которой, собственно, и начинается книга) глаз натыкается на фразу: «Только число может быть использовано на практике». Как прикажете понимать эту глубокомысленную сентенцию? Что все, не имеющее прямого отношения к математике (ну, скажем воздух, вода, солнце, хлеб ...), не может быть использовано на практике? Или что в самой математике всякие там множества, функции, графики и прочее опять-таки никакого практического значения не имеют? — Не ломайте голову. Ничего эта фраза не означает. Просто автор очень любит поучать читателя, изрекая разного рода «истины», в лучшем случае общеизвестные, но чаще бессодержательные или бессмысленные, если не вовсе неверные: «В алгебре, высшей математике и физике принято правило: сперва выполняется умножение, а потом деление» (т. I, стр. 22) — а в каком порядке надо производить арифметические действия в геометрии или в химии? Изложение загромождено бесчисленными «учеными» цитатами: например, на стр. 162 второго тома не просто говорится, что «теоремы сложения занимают совершенно особое место в курсе гониометрии» (а что собственно означает это утверждение? Дальше оно никак не расшифровывается), но фраза эта еще заключается в кавычки и читателю сообщается, что автор нашел ее на 183 странице книги В. Г. Чичигина «Методика преподавания тригонометрии», изданной Учпедгизом в 1954 году. Особенно любит М. Е. Подтягин цитировать ... М. Е. Подтягина: «В предисловии к I тому сказано: ,,Метод уравнений красной нитью проходит через весь курс''» (т. II, стр. 198); «в § 177 (I тома книги — *И. Я.*) дано геометрическое изображение комплексного числа: ,,Условимся комплексное число $a + bi$ изображать точкой на плоскости, имеющей абсциссу, равную a, и ординату, равную b''» (стр. 222, т. II); «Всякое уравнение есть равенство двух функций ...» (т. II, стр. 226—227; здесь взятая в кавычки цитата из М. Е. Подтягина занимает два абзаца) и т. д.

Язык М. Е. Подтягина настолько неряшлив, что не знаешь, за счет какой неграмотности относить все попадающиеся на глаза бессмыслицы: математической или общеязыковой. На странице 8 т. I появляется «последовательность точек, расстояния которых от начала равны натуральному ряду чисел». Ничего себе «пособие к приемным экзаменам»! Чем так «пособлять», так уж лучше никак: не позавидуешь поступающему в вуз, который попытается убедить экзаменатора, что нечто «равно ряду чисел» ... Еще через 6 страниц можно прочитать, что «Эратосфен составил таблицу простых чисел, вычеркнув из натурального ряда все составные» — уж не хочет ли автор сказать, что Эратосфен оперировал сразу со всем бесконечным рядом натуральных чисел?! В пределах все того же первого печатного листа (стр. 11, т. I) мы натыкаемся еще на одну загадку: старые русские меры критикуются как ... «неточные».

Автор «пособия» любит пользоваться жирным шрифтом (в I томе книги) и курсивом (во II томе) *), щедро рассыпая по книге всякого рода определения и «правила», которые он, видимо, рекомендует заучить наизусть (иначе зачем нужен жирный шрифт?). Вряд ли после сказанного выше мы удивим кого-либо, сказав, что большинство этих «правил» бессмысленны, тавтологичны или неверны. § 6 первого тома начинается с определения:

«сложить два натуральных числа — значит составить новое число (сумму), содержащее столько единиц, сколько их находится в данных числах».

---

*) М. Е. Подтягин. Элементарная математика (пособие к приемным экзаменам по математике в вузы), М., «Высшая школа», т. I, Арифметика и алгебра, 1970, 526 стр., цена 71 коп.; т. II, Геометрия и тригонометрия, 1971, 351 стр., цена 54 коп. (тираж обеих книг — 20 тыс. экз.).

*) Почему щедро использованный в I томе жирный шрифт исчезает во II томе, мы понять не смогли; так же не ясно, чем мотивировано различие в заголовках обеих книг: слова «том II» на обложке и титульном листе второй из книг заменены в первой книге словами «Теория и практика», но слов «том I» там вовсе нет.

Те читатели «Кванта», у которых есть младшие братья или сестры, легко убедятся, заглянув в их учебники, что подобными псевдоопределениями давно уже не пичкают и первоклассников. Правда, М. Е. Подтягин снабжает свое «определение» следующим «пояснением»: «Никаких правил сложения однозначных чисел не существует», но оно, в отличие от тавтологичного «определения», уже просто неверно! (Все мы запоминаем «таблицу сложения» — хотя обычно и не пользуемся этим термином — еще до таблицы умножения, — и именно она позволяет нам складывать любые многозначные числа.) А как вам понравится «правило»:

«Вычитание натуральных чисел возможно только при условии $c \geqslant b$»

(т. I, стр. 13), не сопровождаемое никакими пояснениями смысла обозначений c и b. (Правда, его не спасут и пояснения: все равно нестрогое неравенство надо было бы заменить на строгое, так как натуральный ряд в книге начинается не с нуля, а с единицы ...) Еще загадочнее следующее «правило»:

«Чтобы разделить частное на число, достаточно делимое разделить на произведение делителя и частного»

(т. I, стр. 21) — запомнить его легко, но отвечать так на экзамене мы не порекомендуем никому... Свойство сочетательности сложения чисел (т. I, стр. 12) автор определяет, опираясь на понятие суммы нескольких чисел, совсем забывая, что само это понятие вводится на основе сочетательного закона для сложения! Аналогично, глава об уравнениях (т. I, стр. 137) начинается с определения:

«два числа или два выражения считаются равными, если разность между ними равна нулю»

— таким образом, понятие «равны» автор определяет через понятие «равна». На стр. 22, т. I автор декларирует таинственное «свойство переместительности ряда делений», даже не пытаясь (на наш взгляд, впрочем, вполне разумно!) объяснить, в чем бы оно («свойство») могло состоять ... А вот еще маленький ребус, опять-таки из начала первого тома (стр. 43): «$\frac{b}{2\cdot 3}$ делится на 6 и на 2, но не на 12» — даже если отвлечься от того забавного обстоятельства, что в соответствующем параграфе буква b больше ни разу не встречается, смысл этого удивительного утверждения могли бы объяснить разве что участники КВН!

На странице 99 все того же первого тома мы можем прочитать о «древнегреческом папирусе Ахмеса» — как тут не вспомнить о «древнеримских греках»! Вообще автор живо интересуется историей математики: на стр. 3, т. II он ухитряется привести «точную» (во всяком случае, она стоит в кавычках) цитату из неразысканной до сих пор историками науки «Истории геометрии» Эвдема Родосского!

И снова «определения», «определения»:

«$i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей»

(т. I, стр. 458) — приводя это глубокое «определение», автор называет 5 источников, откуда оно заимствовано, включая сюда и Большую Советскую Энциклопедию; *«геометрическим местом точек называется бесконечное множество точек, обладающих одним и тем же геометрическим свойством»* (т. II, стр. 28 — единственная информация, которую можно извлечь из этого «определения», состоит в том, что геометрическое место точек не может быть конечным множеством точек), или уж совсем классический пример псевдонаучного заклинания (т. II, стр. 111), где площадь многоугольника «определяется» как *«вещественное число, определяющее* (?) *размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником»* — можно подумать, что слово «размер» понятнее, чем «площадь».

«Аксиомы» вроде «Ограниченную прямую можно непрерывно (?) продолжать по прямой» (т. II, стр. 7) столь же анекдотичны, как и размышления автора о сущности аксиоматического метода, сводящиеся к тривиальностям типа «Как мы увидим (?) ниже,.. не все аксиомы обладают самоочевидностью и могут быть проверены на опыте» (т. II, стр. 6) — так и подмывает попросить автора «проверить на опыте» хотя бы одну, самую что ни на есть «самоочевидную» аксиому!

Все отмеченные дефекты были бы нетерпимы и в обычном учебнике, но автор ведь, как мы понимаем, претендует на создание пособия «высшего» типа. В веселом же положении окажется доверчивый читатель, решивший готовиться в вуз с помощью М. Е. Подтягина! Так что если уж вам не повезло и вы успели купить эти две удивительные книги, то хоть не упорствуйте и не жалейте потраченных денег: выбросьте эти книги немедленно!

Не слишком ли поспешен такой совет? Ни в коем случае! Ведь «пособие» буквально кишит и самыми элементарными ошибками. Несколько примеров. На стр. 280, т. I упущен случай $y_1y_2 = 0$, из-за чего вывод о числе различных корней биквадратного уравнения оказывается неверным. На стр. 60, т. I не оговорено условие несократимости дробей, без чего неверно сформулированное там правило обратимости простых дробей в десятичные. На стр. 28, т. II неравенство двух отрезков мотивируется тем, что эти отрезки «являются катетами неравных треугольников» (типичный случай непонимания различия между прямой и обратной теоремой!). На стр. 223, т. II аргумент φ комплексного числа $a + bi$ определяется формулой $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ (неверной!). На стр. 261 и следующих т. II автор базирует ряд рассуждений на неверном предположении, что для всякой наклонной призмы существует перпендикулярное боковым ребрам сечение, пересекающее все ребра. Никуда не годится изложение «теории» обратных тригонометрических функций на стр. 186—188, т. II. Грубые ошибки допущены в формулировках и решениях задач 265, 594, 596, 729 из т. I...

Не умея справиться со школьной программой, автор без всякой нужды (и что хуже всего, без всяких оговорок) выходит за ее пределы, заводя, например, в § 69, т. II разговоры о двучленных тригонометрических уравнениях (а что это такое? — автор этого понятия не определяет); в § 77, т. II — даже о степенных рядах (!). и т. п. Стоит ли добавлять, что разговоры эти ведутся на уровне, вполне соответствующем всей книге.

Можно было бы долго продолжать этот печальный перечень несуразиц, которыми пестрит злосчастное «пособие» — но многие читатели «Кванта» сочли бы это (и безусловно справедливо) совершенно излишней роскошью. В конце концов, настоящая рецензия преследует лишь, так сказать, чисто профилактическую цель: сообщить читателям журнала — а через них и всем старшеклассникам, — что пользоваться (по указанному на обложке назначению) книгами М. Е. Подтягина нельзя: это — педагогический брак.

И. М. Яглом

ЗАДАЧИ НА ОСЕВУЮ СИММЕТРИЮ

1. В равнобедренном треугольнике *ABC* угол при вершине *B* равен 40°. *BD* — перпендикуляр к *AC*. Треугольник *KDN* имеет наименьший периметр из всех треугольников, вписанных в треугольник *ABC* с вершиной в точке *D*. Найти $\angle KDN$.

2. Дан квадрат и точка *A* вне него. Провести прямую через точку *A* и данный квадрат так, чтобы отрезок прямой внутри квадрата, имел наибольшую длину.

3. Дан квадрат *ABCD* и окружность вне него. Построить новый квадрат, две вершины которого лежали бы на стороне *AB* или на ее продолжении, третья — на окружности, четвертая — на любой из трех сторон (*BC*, *CD*, *DA*) квадрата.

4. Дана прямая *l* и две прямые *a* и *b*, пересекающие прямую *l*. Построить квадрат так, чтобы две его вершины лежали на прямой *l*, а две другие — на прямых *a* *b*. (Рассмотреть все случаи.)

5. Дан биллиардный стол размером $a \times b$. Внутри него поместили шарик. Шарику сообщается некоторая скорость, которая направлена так, что шарик, отскочив последовательно от трех бортов, возвращается в ту же самую точку (рис. 1). Найти угол, который образует вектор начальной скорости шарика с бортом биллиарда (графически).

6. Даны три биллиарда разной длины, но одинаковой ширины (рис. 2). От длинных бортов одновременно посылают шары с одинаковыми по величине и направлению скоростями. Могут ли шары вернуться к тому же борту неодновременно?

7а. Дан куб со стороной, равной 1 *м* (рис. 3). На ребре *AA'* расположена точка *N* так, что *AN*=*AN'*. Через точку *K*, расположенную на ребре *B'C'*, на расстоянии 25 *см* от вершины *C'*, проведен перпендикуляр к основанию. Внутренние стенки куба абсолютно упруги. Из точки *N* на прямую *KS* кидают абсолютно упругий шарик так, что он, ударившись о грань *BB'C'C*, отскакивает на грань *DD'C'C*, от нее — на грань *AA'D'D*, а затем падает на ребро *AB*. Найти такую горизонтальную скорость *v*, при которой возможно описанное выше явление.

7 б. Условия те же, что и в п. а), но положение прямой *KS* не дано. Под каким углом к грани *AA'D'D* и с какой горизонтальной скоростью надо бросить шарик, чтобы он, отразившись от трех граней, попал в точку *B*?

О. Березин, Е. Орлюк

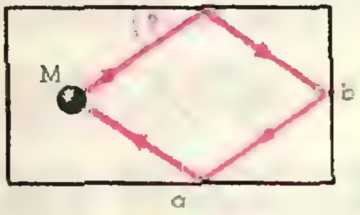


Рис. 1.

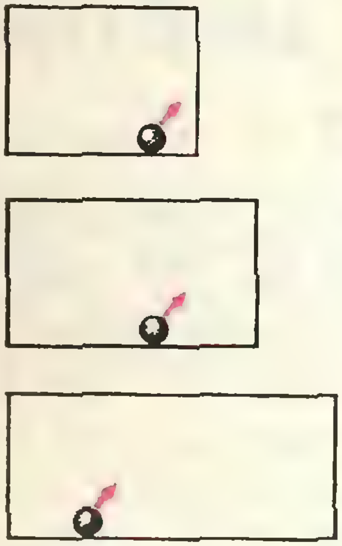


Рис. 2.

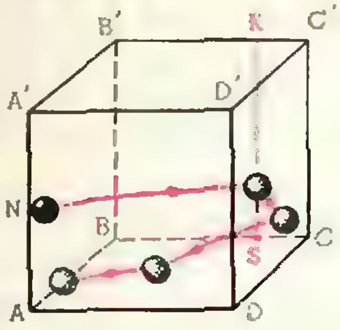


Рис. 3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

(25 лет со дня основания)

Многие читатели нашего журнала обращаются с просьбой рассказать о Московском физико-техническом институте. 25 ноября 1971 года МФТИ отметил свое 25-летие. В связи с этим мы помещаем статью, в основу которой положены материалы многотиражной газеты МФТИ «За науку». Статья подготовлена А. П. Савиным и Н. А. Минц.

История Московского ордена Трудового Красного Знамени физико-технического института начиналась задолго до момента его основания. Еще до войны ряд крупнейших ученых нашей страны — академики И. В. Курчатов, А. Ф. Иоффе, М. А. Лаврентьев, П. Л. Капица, Н. Н. Семенов, С. А. Христианович — обратились к правительству с предложением открыть в СССР высшее учебное заведение нового типа для подготовки кадров по новейшим областям физики и техники.

Физтех был создан в ноябре 1946 года.

Особенность системы обучения, принятой в физико-техническом институте, состоит в том, что здесь фундаментальное высшее образование сочетается со специальной подготовкой в так называемых базовых научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро, где созданы специальные кафедры института.

На первых курсах студентам дается общенаучная подготовка.

Математика, общая и теоретическая физика, общественные науки изучаются в объеме университетских курсов, чтобы будущие специалисты хорошо владели знаниями, составляющими основу образования физика-исследователя. Быстрому ознакомлению с возрастающим потоком научно-технической информации способствует углубленное изучение иностранных языков.

Обучение конкретной специальности и самостоятельная исследовательская работа в базовом институте начинается уже со второго—третьего курсов.

В базовом институте студент слушает лекции по специальности, участвует в работе научных семинаров, глубоко входит в исследовательскую работу лабораторий института. Будущий специалист имеет дело с новейшими приборами; участвует в решении не модельных, специально для его практики придуманных задач, а актуальных проблем, стоящих перед лабораторией. Дипломная работа каждого студента МФТИ входит, как правило, в тематический план базового института. В творческой обстановке научного коллектива студент проходит неоценимую школу воспитания. Работа под непосредственным руководством крупного ученого во многом предопределяет успех его будущей самостоятельной деятельности.

Среди базовых институтов МФТИ — ведущие научные центры Москвы: физический институт АН СССР им. П. Н. Лебедева, Институт физических проблем АН СССР им. С. И. Вавилова, Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова, Институт теоретической и экспериментальной физики

Лекцию читает академик Б. М. Понтекорво.

На лекции в большой физической аудитории.

АН СССР, институт химической физики АН СССР и многие другие.

За годы работы институтом подготовлено 5200 инженеров, аспирантуру окончили 1280 человек. Среди выпускников института 5 академиков и членов-корреспондентов АН СССР, 78 докторов наук, 12 лауреатов Ленинской премии, 17 лауреатов Государственной премии и премий выдающихся ученых. Более 1000 выпускников института имеют ученые степени и звания.

Успехи института во многом обусловлены тем, что им проводится большая работа по подбору достойного пополнения студенческих рядов.

Поиск талантливой и трудолюбивой молодежи начинается задолго до приемных экзаменов в институте. 120 аспирантов и более 300 студентов преподают в заочной физико-технической школе института. В ней занимается несколько тысяч ребят из самых различных районов страны. Преподаватели и студенты института активно участвуют в проведении различных физических и математических олимпиад.

В настоящее время институт готовит специалистов на семи факультетах.

Факультет радиотехники и кибернетики

Готовит инженеров-физиков для исследований в области современной радиоэлектроники. Основными специальностями факультета являются электронные вычислительные машины и устройства, системы автоматического управления, техническая кибернетика, теория информации, радиофизика и радиотехника. Студенты, имеющие склонность к экспериментальным исследованиям, могут специализироваться в области радиотехнических и физико-технических измерений рекордной точности.

Факультет общей и прикладной физики

Специальности факультета очень разнообразны. Это физика низких температура и астрофизика, физика частиц высоких энергий и твердого тела, физика квантовых генераторов и космическая радиосвязь, а также «традиционные» физические специальности: акустика, оптика, теоретическая физика.

Факультет аэрофизики и космических исследований

Основные научные направления факультета, по которым ведется подготовка специалистов, связаны с исследованиями космоса, а также с изучением околоземного пространства, атмосферы, гидросферы Земли и собственно Земли. Большое внимание на факультете уделяется подготовке научных работников, обеспечивающих разработку средств космических исследований.

На факультете существует широкий диапазон специальностей, связанных с физикой и механикой жидкости, газа и плазмы, физикой и механикой быстропротекающих процессов, механикой упругих и пластических сред, технической кибернетикой, управлением полетом и процессами в энергоустановках. Большой популярностью пользуются специальности, связанные с термогидродинамикой моря и атмосферы.

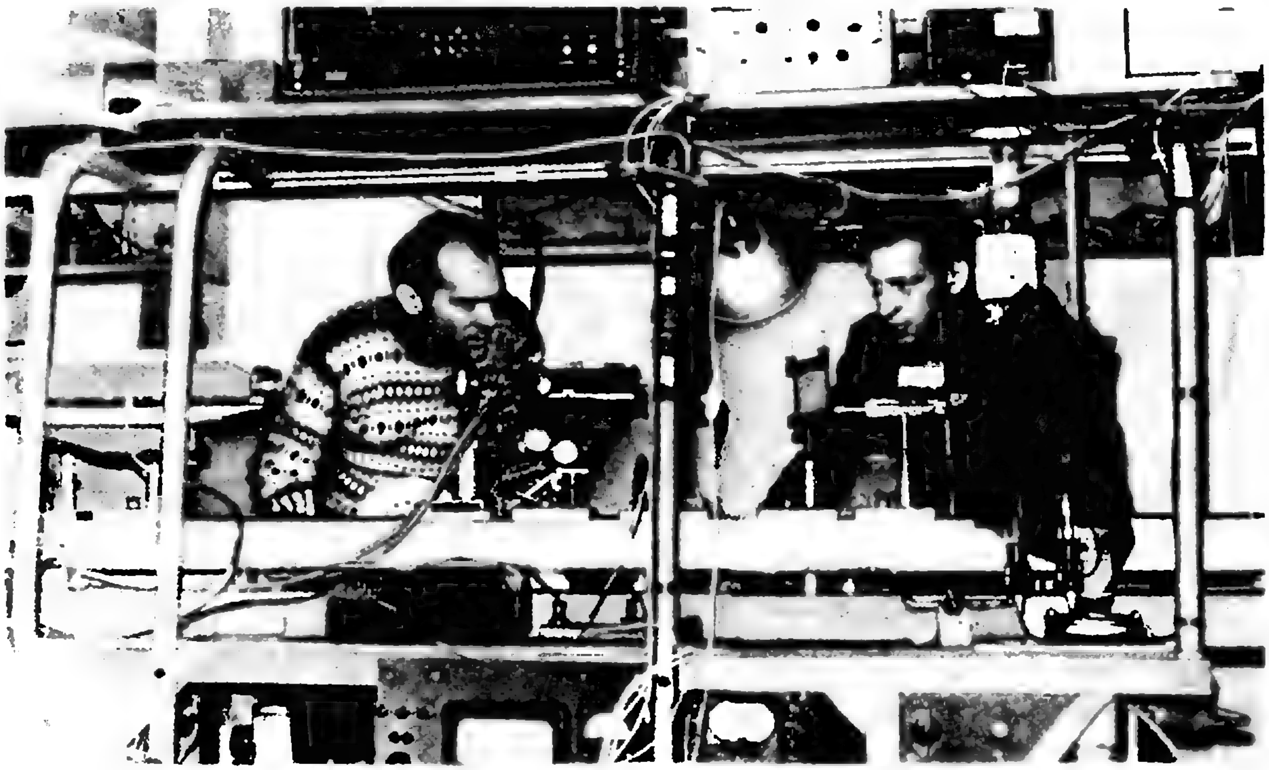
Факультет молекулярной и химической физики

Основные направления, которые изучаются на этом факультете, это физика плазмы, молекулярная биофизика и химическая физика.

В области физики плазмы изучаются проблемы, связанные с разработкой методов непосредственного превращения энергии плазмы в энергию электрического тока.

В области молекулярной биофизики готовятся специалисты по исследованию процессов, протекающих в живых клетках, изучению проблем наследственности.

Изучающие химическую физику знакомятся с химией полимеров, химической кинетикой, радиационной химией, физическими методами исследования физико-химических



В лаборатории квантовой электроники.

процессов и физико-химическими процессами при высоких температурах и давлениях.

Факультет физической и квантовой электроники

Готовит специалистов по физике твердого тела, газового разряда и плазмы, электронике полупроводников, квантовой и микроэлектронике, по преобразователям и источникам энергии.

На факультете создана лаборатория физической и квантовой электроники, где студенты осваивают современные методы пленочной электроники, электронной микроскопии, электроно- и рентгенографии, изучают квантовые генераторы и усилители, микроэлектронику, преобразователи солнечной и тепловой энергии в электрическую.

Факультет аэромеханики и летательной техники

Задачей факультета является подготовка высококвалифицированных специалистов по аэродинамике, динамике полета, прочности летательных аппаратов различного назначения. Выпускники факультета должны владеть современными методами аэрофизического эксперимента и расчетно-теоретическими методами.

Факультет управления и прикладной математики

Выпускники факультета должны уметь описывать различные процессы формальным математическим языком, создавать математические языки, способные описывать явления, с которыми наука ранее не встречалась, развивать и внедрять новые вычислительные методы для решения различных задач, в том числе и задач математической физики. Они изучают дискретный анализ, машинные языки, теоретическую кибернетику, исследование операций, теорию игр, теорию оптимальных процессов.

Обучение студентов проводится сугубо индивидуально, поэтому даже студенты, имеющие одинаковые специальности, работают, как правило, в разных направлениях, соответствующих их интересам и склонностям.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К «Армянским народным задачам»

(см. стр. 28)

«Камень затянули во двор». $4\frac{1}{2}$ дня.

«Сто марзаи пшеницы». 75, 15, 10.

«Дочери Навасарда». 7 дочерей, 48 мотков.

«Лиса и лисята». $8 \cdot 7^4 = 19208$.

К статье «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики»

1. По условию $a = kb$ и $b = lc$. Отсюда $a = (kl)\,c$.

2. Утверждение а) верно: докажем это. Пусть $a + b = c$, причем a делится на 6, а b не делится на 6. Докажем, что c не делится на 6. Предположим противное: пусть c делится на 6. Но тогда $b = c - a$ делится на 6 (см. 1°). Мы получили противоречие с условием задачи.

Утверждение б) неверно. Для опровержения его достаточно привести противоречащий пример: $7 + 5 = 12$. Здесь каждое из двух слагаемых не делится на 6, в то время как их сумма делится на 6.

Утверждение в) верно: если бы оба слагаемых делились на 6, то тогда и их сумма делилась бы на 6.

Утверждение г) неверно. Противоречащий пример: $6 + 5 = 11$.

Утверждение д) неверно. Противоречащий пример: $2 \cdot 3 = 6$.

3. Нет, не следует. Противоречащий пример: $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$; тогда $a + b = 4$ делится на 2, и $a - b$ делится на 2, но ни a, ни b не делятся на 2.

4. Из равенств $ab = (a + b)^2 - (a^2 + ab + b^2)$, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ следует, что ab и $a^2 + b^2$ делятся на $a + b$. Из равенства $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2) - 2a^2b^2$ следует, что $a^4 + b^4$ делится на $(a + b)^2$.

5. Так как на одном из этажей в каком-то подъезде находится 6 квартир (с № 97 по № 102), то и на всех этажах находится по 6 квартир в каждом подъезде. Так как в каждом подъезде 8 этажей, то всего в подъезде $6 \cdot 8 = 48$ квартир. Поскольку $211 = 48 \times 4 + 19$, то квартира № 211 находится в 5-м подъезде, а так как $19 = 4 \cdot 4 + 3$, то эта квартира находится на 5-м этаже.

6. При разрезании одного куска на 5 частей число всех кусков увеличивается на 4. Таким образом, число кусков будет всегда иметь вид $4k + 1$, то есть давать при делении на 4 остаток 1. Однако $1971 = 4 \cdot 492 + 3$, и ответ отрицательный.

7. Шестизначное число должно делиться на $3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$, а $100\,000 = 366 \cdot 273 + 82$, можно добавить 191, получится $100\,191 = 367 \cdot 273$.

8. а) 1; б) 5; в) 8.

9. Пусть a и b — данные числа, $d =$ НОД (a, b). Тогда $a = kd$, $b = md$, где числа k и m уже не имеют общих делителей, больших единицы, то есть k и m взаимно просты. Из того, что $ab = 600$, следует, что $kmd^2 = 600$. Но наибольший квадрат целого числа, на который делится число 600, есть число 100, поэтому наибольшее значение d равно 10. Пример: $a = 60$, $b = 10$.

11. 24 букета.

12. а) НОД $(m, n) + 1$; б) НОД $(m, n) - 1$.

13. а) $987\,654\,321 = 8 \cdot 12\,345\,789 + 9$; $123\,456\,789$ делится на 9 и

$$\text{НОД}\ (987\,654\,321,\ 123\,456\,789) = 9.$$

б) 77.

14. Два квадрата размером 141×141, три 42×42, два 15×15, один 12×12, четыре 3×3. НОД $(324, 141) = 3$, поэтому меньших квадратов не будет.

15. $\alpha = \frac{3}{140}$.

16. После деления на НОД $(85, 204) = 17$ получим: $5x + 12y = 1$. Но $12 = 2 \cdot 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, откуда $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2\,(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12$.

Одно решение: $x = 5$, $y = -2$. Общее решение: $x = 5 + 12t$, $y = -2 - 5t$, где t — любое целое число.

17. а) Да; б) нет.

18. а) Мы должны найти такие целые числа x и y, чтобы выполнялось равенство

$$6x + 16y = 220$$

или

$$3x + 8y = 110.$$

Одно из решений: $x_1 = 330$, $y_1 = -110$. Общее решение можно записать так:

$$x = 330 - 8t,\ y = -110 + 3t, \qquad (*)$$

где t — любое целое число. Теперь естественно выбрать такое t, чтобы x и y были неотрицательными. (Можно, конечно, подключать аккумуляторы «в обратную сторону» — «плюс» к «плюсу», но мы постараемся обойтись без этого.)

Учтем это требование:

$$330 - 8t \geqslant 0, \ \text{то есть} \ t \leqslant \frac{330}{8} = 41\frac{1}{4},$$

$$-110 + 3t \leqslant 0, \ \text{то есть} \ t \geqslant \frac{110}{3} = 36\frac{2}{3}.$$

Подставляя $t = 37, 38, 39, 40, 41$ в формулы (*), получаем 5 вариантов:

батарей по 6 *в*	34	26	18	10	2
батарей по 16 *в*	1	4	7	10	13

б) Здесь дело сводится к решению уравнения $6x + 15y = 220$. Однако НОД $(6,15) = 3$, а 220 не делится на 3. Поэтому уравнение не имеет решений в целых числах.

19. Сумма четного числа нечетных чисел четна, поэтому 45 рублей нельзя разменять указанным способом.

20. Поскольку $a = bd$ и делится на c, а НОД $(b, c) = 1$, то по лемме 3 число d делится на c.

21. а), б) и г) верны; б) неверно.

22. $1971 = 3^3 \cdot 43$; $1972 = 4 \cdot 17 \cdot 29$; 1973 — простое.

23. а) если am делится на n и НОД $(m, n) = 1$, то $a = kn$, поэтому $b = km$.

б) пусть в разложении x на простые множители некоторое простое p входит в степени a, а в разложении y — то же p в степени b. Тогда из теоремы о единственности разложения на простые множители $am = bn$ и из задачи а) следует, что $a = kn$, $b = km$. В разложение t на простые множители включим p с показателем k, и так — для всех простых множителей чисел x и y.

К «Вариантам вступительных экзаменов»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

1. $x = n\pi$, где n — любое целое число. Указание. Выразить $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$.

2. $3^{-\sqrt{3}-1} < x < 3^{\sqrt{3}-1}$.

3. $a = 12$ *км/ч*. Указание. Надо определить, при каком значении a выражение $\frac{BC/3}{48-a} + \frac{2BC/3}{48+2a}$ принимает наименьшее значение (расстояние BC — фиксированная величина).

4. $\frac{a}{2}$. Указание. Пусть прямая AM пересекает сферу в точках P и Q, причем на отрезке AM точки расположены в таком порядке: A, P, Q, M. По теореме о касательной и секущей получить равенство $AQ \cdot AP = \frac{a}{2}$. Доказать, далее, что вписанная сфера касается грани DSC в точке M, и потому точка Q совпадает с точкой M. После этого непосредственным вычислением показать, что $AQ = a$.

5. $d\sqrt{k}$. Указание. Убедиться, что $\triangle MQE \backsim \triangle PNE$, причем EM и EP — сходственные стороны.

Факультет психологии

1. 3.

2. Точка P должна совпадать либо с вершиной C, либо с вершиной C_1.

3. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$.

4. 11 деталей вида A, 9 деталей вида B.

5. $a = 1$.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Специальности: промышленное и гражданское строительство и др.

1. За 30 дней.

2. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{\frac{33}{2}}$.

3. $r = \frac{25}{4}$ *см*.

Специальности: автоматика, телемеханика и связь и др.

1. Первый — за 6 *ч*, второй — за 8 *ч*.

2. $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.

3. $9{,}6^2\pi$ *см*^{2}.

4. $x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5} + \frac{n\pi}{2}$,

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Специальности: прикладная математика и др.

1. $0 < a < 68$.

2. $x = -1$, $y = 1 + \frac{\pi}{4}(2n + 1)$,

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. $d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$.

4. $x_1 = \frac{3\pi}{8} + n\pi$,

$$x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi}{2}(2k + 1),$$

где n и k — любые целые числа.

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

1. $a = -4$, $b = 3$; $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$. Указание. Подставить число $1 + \sqrt{2}$ в данное уравнение и доказать, что должны одновременно выполняться равенства $3a + b + 9 = 0$, $2a + b + 5 = 0$.

2. Решение. Пусть OC — медиана треугольника OAB_1 (рис. 1). На продолжении отрезка OC за точку C возьмем точку D так,

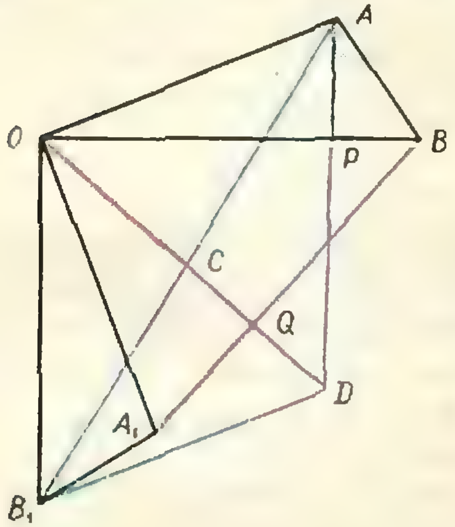


Рис. 1.

что $OC = CD$; тогда OB_1DA — параллелограмм. Поскольку $OA = OA_1$, $AD = OB_1 = OB$ и $\measuredangle OAD = \measuredangle A_1OB$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), то $\triangle AOD = \triangle A_1OB$. Далее, $\triangle OPA = \triangle OQA_1$, а $\measuredangle APO = 90^\circ$ (ибо $AD \parallel OB_1$, а $OB_1 \perp OB$); поэтому $OC \perp A_1B$. Аналогично доказывается и второе утверждение задачи

3. $x_1 = 3$, $y_1 = (2k + 1)\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $0 < x_2 < 1$, y_2 — любое вещественное число. Указание. Пусть $z = \log_3 x$; тогда предложенное неравенство записывается в виде

$$z + \frac{1}{z} \leqslant -2\cos y. \qquad (1)$$

Но при любом $z > 0$ имеем $z + \dfrac{1}{z} \geqslant 2$, а потому неравенство (1) может быть справедливым только для тех y, для которых $2 \leqslant -2\cos y$, то есть при $\cos y = -1$. Далее, из (1) получаем $z = 1$. Если же $z < 0$, то $z + \dfrac{1}{z} \leqslant -2$, а $-2 \leqslant -2\cos y$ при любом y, то есть неравенство (1) справедливо при всех $z < 0$.

4. Решение существует, если $b < -1$, а a — любое действительное число, или если $b \geqslant -1$, а

$$k\pi - \arcsin A + \varphi \leqslant a \leqslant k\pi + \arcsin A + \varphi,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (2)$$

где A и φ определяются равенствами

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b+1}{2},\quad A = \frac{|b-1|}{\sqrt{b^2 + 2b + 5}}. \qquad (3)$$

Указание. Так как $x \neq \dfrac{\pi}{2}(2k + 1)$, $y \neq \dfrac{\pi}{2}(2k + 1)$, то исходная система эквивалентна следующей (проверьте!):

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2\sin(x + y) - (b + 1)\cos(x + y) = \\ = (b - 1)\cos(x - y). \end{cases}$$

Следовательно, исходная система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(b - 1)\cos(x - y) = 2\sin a - (b + 1)\cos a. \qquad (4)$$

Если $b \neq 1$, то из (4) получаем, что параметры a и b должны удовлетворять условию

$$\left|\frac{2\sin a - (b + 1)\cos a}{b - 1}\right| \leqslant 1.$$

Вводя φ и A по формулам (3), это условие представим в виде $|\sin(a - \varphi)| \leqslant A$. Таким образом, либо $A > 1$ (то есть $b < -1$) и a — любое действительное число, либо $A \leqslant 1$ (то есть $b \geqslant -1$, $b \neq 1$), а для a получаются неравенства (2). В случае $b = 1$ соотношение (4) исследуется непосредственно.

Физический факультет

1. $\dfrac{q^{mn} - 1}{(q^n - 1)\, q^{(m-1)n}}$. Указание. Заметьте, что если v — средняя скорость на перегоне A_1A_2 после отправления, то на перегоне A_nA_1, завершающем первый круг, средняя скорость равна vq^{n-1}, а на перегоне A_1A_2, открывающем второй круг, она равна vq^n.

2. $r^2 \operatorname{cosec}\alpha \sin\beta \sin 2(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)$. Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда $\measuredangle ODB > \measuredangle MDB$ и $\measuredangle ODB < \measuredangle MDB$, где O — центр круга.

3. $x > 2$.

4. $\dfrac{1}{12} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$;

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{5a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2a} + k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Вариант I

1. 23. Решение. Искомое число запишем в виде $10x + y$, где x и y — целые числа, причем $1 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$. Так как по условию при делении двузначного числа на xy получили остаток, равный 5, то $xy \neq 0$; следовательно, $1 \leqslant y \leqslant 9$. Из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{10x + y}{x + y} = 4 + \dfrac{3}{x + y}, \\ \dfrac{10x + y}{xy} = 3 + \dfrac{5}{xy}. \end{cases}$$

Решая ее, находим: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 0$. Второе решение не удовлетворяет условию задачи.

2. $\frac{2ab}{a+b}$. Решение. По условию (см. рис. 2) $MN \parallel AD \parallel BC$; положим $AD = a$, $BC = b$. Согласно лемме о подобии треугольников $\triangle OCN \backsim \triangle ACD$, $\triangle MBO \backsim \triangle ABD$.

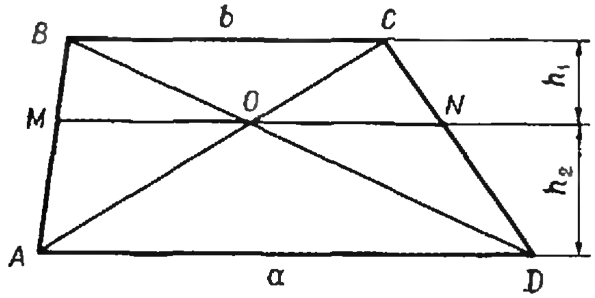


Рис. 2.

Из теоремы об отношении высот подобных треугольников следует

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{MO}{AD}, \quad \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{ON}{AD}.$$

Отсюда получаем $ON = OM$. Следовательно, $MN = 2OM$, а потому

$$MN = 2a\frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2a}{1 + \frac{h_2}{h_1}}. \qquad (1)$$

В треугольниках OBC и ODA углы BOC и DOA равны как вертикальные, $\angle OBC = \angle ODA$, $\angle BCO = \angle OAD$ как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых; поэтому $\triangle AOD \backsim \triangle COB$. Из теоремы об отношении высот подобных треугольников следует

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем ответ.

3. $0 \leqslant x < \frac{841}{144}$. Решение. ОДЗ: $x \geqslant 0$. Неравенство можно представить в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} + x + (x+7) < 42,$$

откуда

$$-7 < \sqrt{x} + \sqrt{x+7} < 6. \qquad (1)$$

Поскольку $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} > 0$. для всех $x \geqslant 0$, то при $x \geqslant 0$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} < 6. \qquad (2)$$

Обе части этого неравенства положительны, поэтому после возведения обеих частей этого неравенства в квадрат получим неравенство

$$2\sqrt{x(x+7)} < 29 - 2x, \qquad (3)$$

эквивалентное неравенству (2). Так как левая часть этого неравенства неотрицательна, то ясно, что ему могут удовлетворять лишь $x < \frac{29}{2}$, входящие в ОДЗ, то есть

$$0 \leqslant x < \frac{29}{2}.$$

Для таких значений x обе части неравенства (3) не отрицательны. Поэтому после возведения обеих частей (3) в квадрат приходим к эквивалентному рациональному неравенству, из которого находим: $0 \leqslant x < \frac{841}{144}$.

4. Решение. ОДЗ уравнения: $x \geqslant 4$. Равенство $\cos\pi\sqrt{x-4}\,\cos\pi\sqrt{x} = 1$ может иметь место лишь в двух случаях:

$$1^\circ. \begin{cases} \cos\pi\sqrt{x-4} = 1, \\ \cos\pi\sqrt{x} = 1; \end{cases}$$

$$2^\circ. \begin{cases} \cos\pi\sqrt{x-4} = -1, \\ \cos\pi\sqrt{x} = -1. \end{cases}$$

Решим первую систему. Из первого уравнения этой системы следует

$$\pi\sqrt{x-4} = 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$x_1 = 4(k^2 + 1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из второго уравнения находим

$$\pi\sqrt{x} = 2n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

откуда

$$x_2 = 4n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Нужно найти значения $x_1 = x_2$, то есть те значения x, которые удовлетворяют обоим уравнениям системы 1°. Приходим к уравнению $k^2 + 1 = n^2$, или

$$(n - k)(n + k) = 1,$$

где n, k — целые неотрицательные числа. Число $n + k$ не может быть отрицательным, оно не может быть и нулем; поэтому $n - k > 0$, то есть $n + k$ и $n - k$ — натуральные числа. А так как их произведение равно 1, то

$$\begin{cases} n + k = 1, \\ n - k = 1. \end{cases}$$

Отсюда $n = 1$, $k = 0$; следовательно, $x = 4$.

Аналогично рассматриваем вторую систему и убеждаемся, что она не имеет решений.

Вариант 2

1. 3535. Решение. Пусть N — число марок в коллекции, из которых m седьмых содержится во втором альбоме. Согласно условию задачи $\frac{2N}{10} + \frac{mN}{7} + 303 = N$,

откуда

$$N=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot101}{28-5m}. \qquad (1)$$

Знаменатель дроби (1) должен быть положительным числом и делителем числителя дроби (1) и, следовательно, нечетным числом. Имеем три возможных случая: $m_1=1$, $m_2=3$, $m_3=5$, из которых подходит только $m_3=5$.

2. $\arccos\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$. Указание. Пусть α — искомый угол, r — радиус вписанного шара, R — радиус основания конуса и ρ — радиус окружности, по которой плоскость, проходящая через центр шара и параллельная основанию, пересекает поверхность конуса. По условию задачи

$$\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}\pi\rho^3\operatorname{tg}\alpha.$$

Далее, $r=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а

$$\rho=\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{R}{1+\cos\alpha},$$

откуда $(1+\cos\alpha)^3=2$.

3. (10,4); (4,10); (—10, —4); (—4, —10). Указание. Представить систему в виде

$$\begin{cases}\lg|y|\lg|x|=\lg 4,\\ \lg|x|+\lg|y|=\lg 40.\end{cases}$$

4. $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}(4a-3)\right\}+$$

$$+\frac{k\pi}{2},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Указание. Привести уравнение к виду $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(4a-3)$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Специальности: математика, физика, экономика

1. 48 *см*, 40 *см*, 40 *см*; $8\sqrt{21}$ *см²*; $20\sqrt{21}$ *см*, $20\sqrt{21}$ *см*.

2. 0,35 *a*. Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и рассмотреть треугольник, дополняющий трапецию до полученного треугольника.

3. 6 решений: $x_{1-4}=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k=-3,\ -1,\ 0,\ 2$; $x_{5,6}=\pm\frac{2\pi}{3}$.

4. $n\sqrt{6}$.

Специальности: химия, биология, геология

1. $x_1=7$, $x_2=11$.

2. 4 решения: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=-1$, $-2,\ 0,\ 1$.

3. $R-r$.

4. $S=r\cos\frac{l}{2r}\sqrt{h^2+4r^2\sin^2\frac{l}{2r}}$.

МОСКОВСКИЙ ТЕКСТИЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Вариант 1

1. n^2+2n+2.

2. $0<x<3$ при $a>1$, $x>3$ при $0<a<1$.

3. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

4. $S=4\pi$.

Вариант 2

1. $4-\sqrt[4]{4x}$.

2. $x\leqslant-2$, $x>7\frac{4}{5}$.

3. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4. $R=\sqrt{\dfrac{4S}{3\sqrt{3}+9\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}$,

К статье «Экзамен по физике в Московском инженерно-физическом институте»

1. Искомое ускорение определяется из уравнения

$$ma=pS-p_1S, \qquad (1)$$

где p и p_1 — давления воздуха под поршнем в исходном состоянии и после передвижения поршня соответственно. Условие равновесия поршня в исходном состоянии:

$$p_0S+mg\sin\alpha=pS. \qquad (2)$$

Считая процесс перемещения поршня изотермическим, на основании закона Бойля-Мариотта находим

$$p=2p_1. \qquad (3)$$

Уравнения (1)—(3) дают

$$a=\frac{g}{2}\left(\sin\alpha+\frac{\rho h_0S}{m}\right)\approx36\ \textit{м/сек}^2,$$

здесь

$$\rho=13{,}6\ \textit{г/см}^3,\ h_0=760\ \textit{мм}.$$

2. Тело движется по окружности под действием силы тяжести mg и силы T натяжения штанги. Предположим, что штанга в верхней точке траектории A растянута (рис. 1). Тогда уравнения движения тела

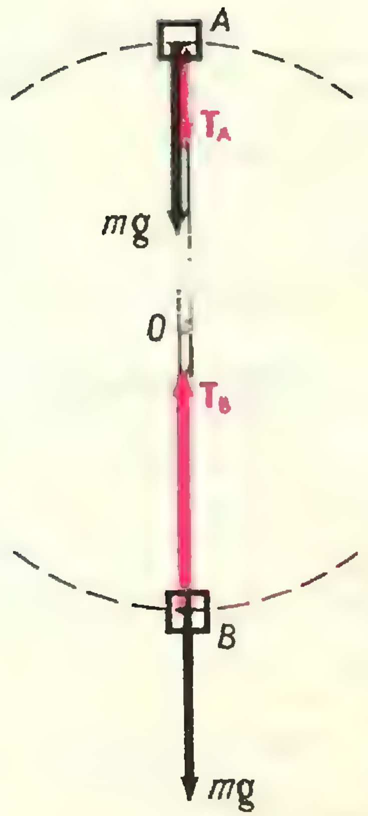


Рис. 1.

имеют вид:
в точке A

$$m\omega^2 R = mg + T_A, \qquad (1)$$

в точке B

$$m\omega^2 R = T_B - mg, \qquad (2)$$

где $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость вращения, n — число оборотов в секунду. Из этих равенств находим

$$T_A = mg\left(\frac{4\pi^2 n^2 R}{g} - 1\right) \approx -2{,}7\ н;$$

$$T_B = mg\left(\frac{4\pi^2 n^2 R}{g} + 1\right) \approx 7{,}1\ н.$$

Так как $T_A < 0$, то в действительности штанга сжата, когда тело находится в точке A. При $n > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$ штанга была бы растянута и в точке A.

3. При вращении проводника OC в нем возникает э. д. с. индукции (рис. 2)

$$|E_{инд}| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|,$$

где $\Phi = B\cdot S = B\frac{r^2\varphi}{2}$ — магнитный поток через контур AOC, S — площадь заштрихованного сектора.

$$E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{Br^2}{2}\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{Br^2}{2}\,\omega.$$

Сопротивление контура складывается из сопротивлений двух прямолинейных участков и дуги окружности:

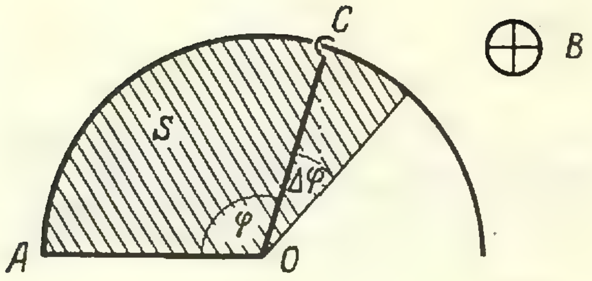


Рис. 2.

$$R = (\varphi + 2)\,r\rho.$$

Ток в контуре в момент, когда $\varphi = \pi$, равен

$$I_{инд} = \frac{|E_{инд}|}{R} = \frac{Br\omega}{2\rho(\pi + 2)} \approx 1{,}5\cdot 10^{-2}\ а.$$

По правилу Ленца легко определить также направление индукционного тока.

4. При установившемся движении ускорение сосуда и жидкости в нем равно $a = g\sin\theta$. Поверхность жидкости в движущемся сосуде параллельна наклонной плоскости. Определим ход луча в сосуде (рис. 3).

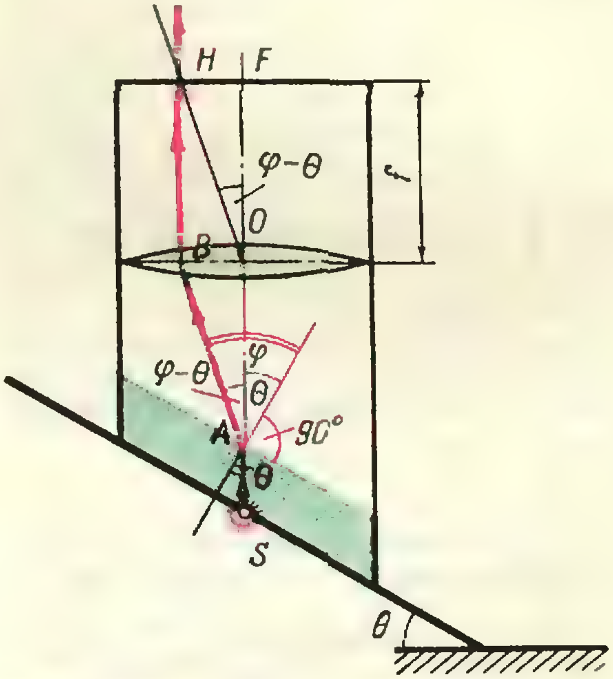


Рис. 3.

На основании закона преломления света $n\sin\theta = \sin\varphi$ получаем $\varphi = 60°$ и $\varphi - \theta = 30°$. Проведем луч OH параллельно лучу AB. Лучи OH и BH собираются в одной точке фокальной плоскости. Смещение HF луча AB равно $f\cdot\mathrm{tg}(\varphi - \theta) = 5{,}8\ см.$

К статье «Решение задач по электростатике»

1. Напряженность поля перпендикулярна эквипотенциальной поверхности и

направлена в сторону убывания потенциала, то есть вверх.

2. Энергия заряженного шара $\Pi = \frac{c\varphi^2}{2} = \frac{R\varphi^2}{2}$ (C — емкость, R — радиус шара). При разряде эта энергия выделяется в виде тепла. Выражая энергию в калориях, получим: $\Pi \simeq 0{,}13$ *кал*.

3. При увеличении радиуса оболочки на малую величину Δx электростатические силы совершают работу $\Delta A = 4\pi R^2 f \Delta x$, где f — сила, приходящаяся на единицу площади. Работа совершается за счет убыли электростатической энергии:

$$\frac{Q^2}{2R} - \frac{Q^2}{2(R+\Delta x)} = \frac{Q^2 \Delta x}{2R(R+\Delta x)}.$$

Согласно закону сохранения энергии: $4\pi R^2 f \Delta x = \frac{Q^2\Delta x}{2R(R+\Delta x)}$. Учитывая, что $\Delta x \ll R$, получим $f = \frac{Q^2}{8\pi R^4} = 2\pi\sigma^2$, где $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ — поверхностная плотность заряда.

4. Потенциал капельки $\varphi_1 = \frac{q}{r}$, где q — заряд, а r — радиус капельки. Потенциал большой капли $\varphi = \frac{Nq}{R} = \frac{N\varphi_1 r}{R}$. Очевидно, что $\frac{4\pi}{3} r^3 N = \frac{4\pi}{3} R^3$. Следовательно, $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ и $\varphi = \frac{N\varphi_1}{\sqrt[3]{N}} = N^{2/3}\varphi_1$.

5. $A = q_2(\varphi_2 - \varphi_1) =$

$$= q_1 q_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 25 \text{ эрг}.$$

К статье «Закон Ома для неоднородного участка цепи»

1. 0. Результат не зависит от числа элементов в батарее.

2. 0.

3. Потенциалы диаметрально противоположных точек кольца (см. рис. 1) не равны.

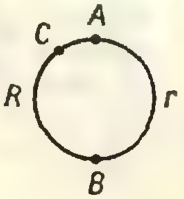


Рис. 1.

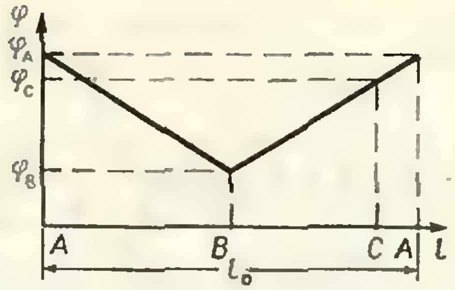


Рис. 2.

Соотношение между ними определяется соотношением между R и r и направлением возникающей в кольце э. д. с. индукции. В том случае, когда $\varphi_A > \varphi_B$, график распределения потенциала вдоль кольца имеет вид, показанный на рисунке 2 (l_0 — длина окружности кольца).

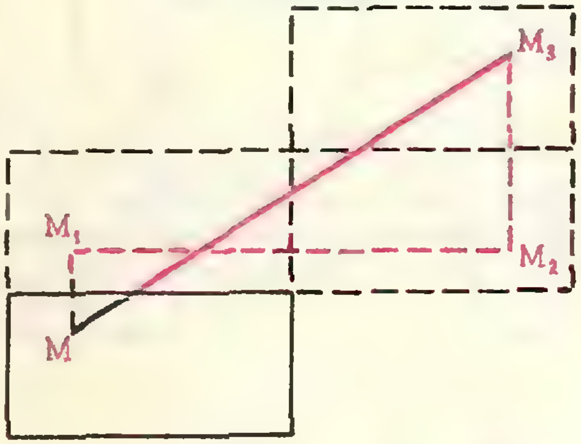
К «Задачам на осевую симметрию»

(*см. стр. 69*)

1. 100°.

2. Отразите квадрат относительно стороны AB и используйте точки его пересечения с окружностью.

5. Рассмотрите следующий рисунок, на котором изображена последовательность отражений шара в бортах биллиарда.



6. Нет. Рассмотрите вертикальную (на рисунке в тексте) составляющую вектора скорости шарика.

7. Сравните движение шарика внутри куба с движением горизонтально брошенного тела.

а) $v \approx 10{,}4$ *м/сек*;

б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

К заметке «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5, 1972 г.)

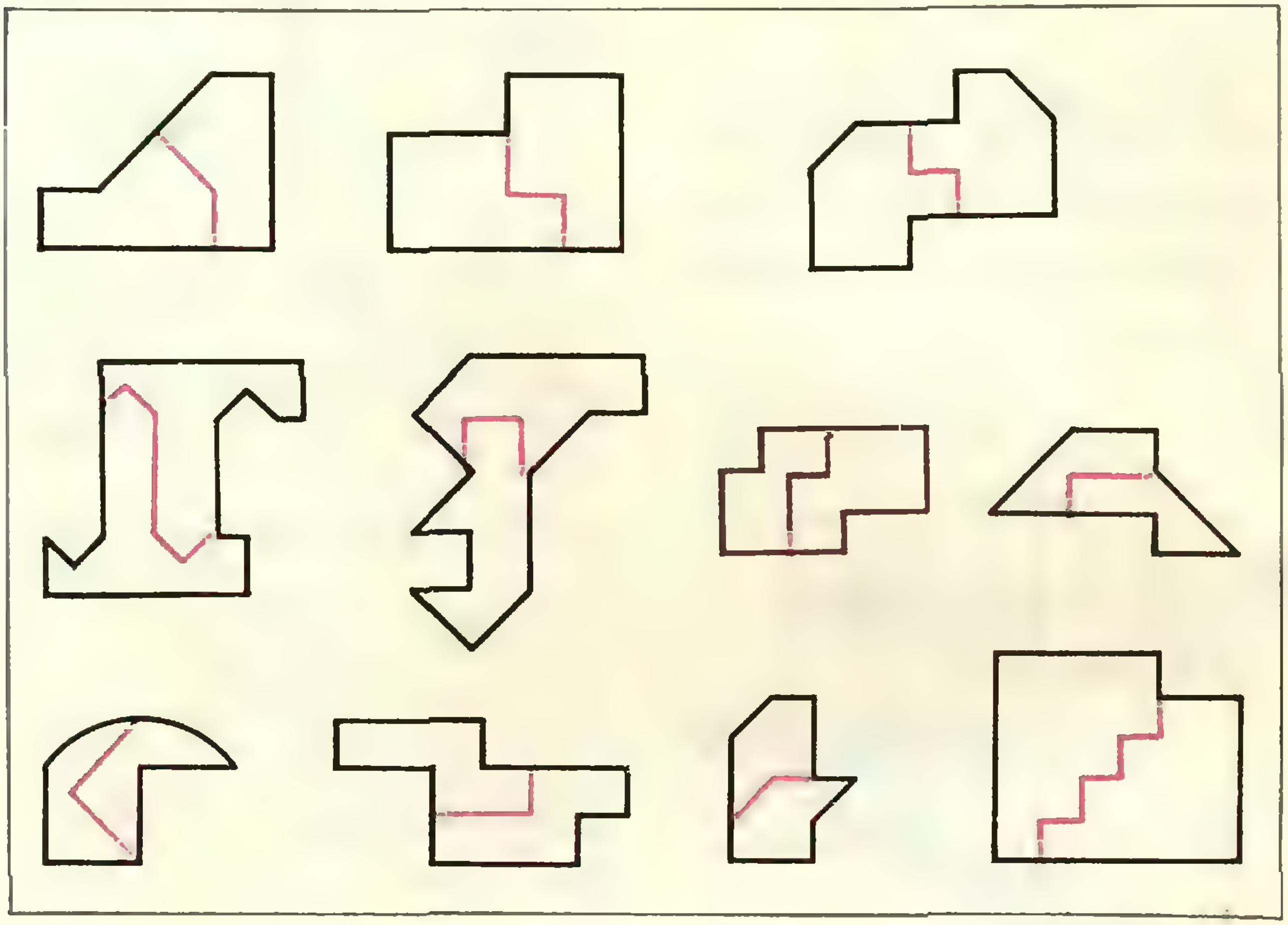
1. Искомым геометрическим местом точек является дуга «внутренней окружности» обруча от «северного полюса» до точки, диаметрально противоположной той точке на стенке, куда вбит гвоздь.

2. Сначала определим, какой из значков соответствует знаку =. Этот знак встречается по одному разу в каждой строчке, при этом он не может стоять ни в начале, ни в конце строки. Отсюда легко определить, что это II. Сравнивая число значков слева и справа от него, легко определить, что знаку + соответствует значок ◌, а знаку — соответствует значок <.
Подставив найденные значки, получим:

>] ⊖ = V ⊕ ⊖ — □ □ ⊔
V Λ ⊖ + > V = □ ⊔ □ Λ
◌ Λ ⊔ ⊖ = ⊕ □ V V + E
□ ⊔ [[— > V = V ⊖ O

Очевидно, что □ это 1, а V — 9, далее легко находятся цифры, соответствующие остальным значкам: Λ — 2, 0 — 3, [— 4, 0 — 5,] — 6, ◌ — 7, > — 8.

3. См. рисунок.



КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

КВАНТ
для
младших
школьников

1. Вписать в пустые клетки на рисунке недостающие числа.

7	10	13
22		30
4	9	

2. Около каждой вершины треугольника поставьте какое-нибудь число. Напишите возле каждой стороны этого треугольника число, равное сумме чисел, стоящих у ее концов. Теперь каждое число, стоящее около вершины, сложите с числом, стоящим около противоположной стороны. Почему равны все три получившиеся суммы?

3. Найдите нечетное четырехзначное число, две средние цифры которого образуют число, в пять раз большее числа тысяч и в три раза большее числа единиц этого числа.

4. Может ли выражение $\frac{a+9}{a+6}$ (а — целое) быть целым числом? Если да, то при каких значениях а?

5. В двух комнатах было 76 человек. Когда из одной комнаты вышло 30, а из второй 40 человек, то людей в комнатах осталось поровну. Сколько человек было в каждой комнате первоначально?

В. М. Розентуллер

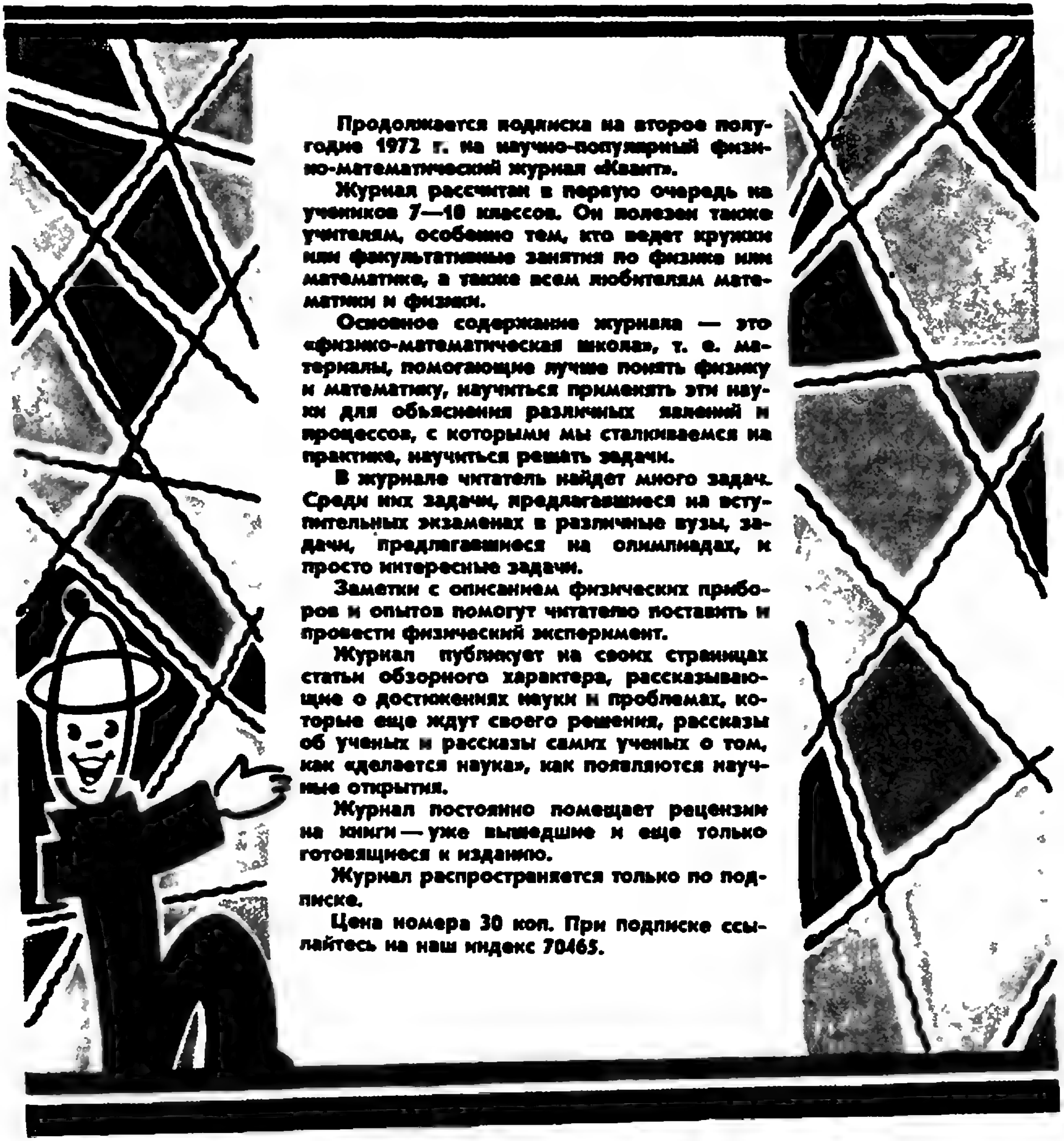
6. Представьте себе, что вы машинист. Машинист ведет поезд из Москвы во Владивосток. В составе 64 вагона, 14 вагонов с мебелью, 30 вагонов с бурым углем, 20 вагонов с солью. Делаете 3 остановки по 15 минут. До первой остановки поезд шел со скоростью 60 км/час. Сколько лет машинисту?

Г. И. Курлыкин

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 6

К нашим читателям!



Продолжается подписка на второе полугодие 1972 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

НОМЕР
7

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

7
ИЮЛЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ

2 Ветви и границы — *Р. П. Шейнцвит*
6 Атом излучает кванты — *Б. С. Ратнер*
11 Так или не так действовал Ферма? — *Б. А. Кордемский*
14 Уравнения орнаментов — *М. И. Бржозовский*
20 Спор, длившийся полвека — *А. К. Кикоин*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

23 Фигуры Лиссажу — *Н. А. Силаева*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

29 Теорема косинусов и ее следствия — *Э. Г. Готман*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

33 Задачи **М151-М155; Ф163-Ф167**
35 Решения задач **М108-М109, Ф129-Ф130**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

40 Применение тригонометрии при решении геометрических задач. — *А. Г. Мордкович*
45 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года
48 Решение задач по электростатике — *Г. Я. Мякишев*
51 Электромагнитная индукция — *Л. Г. Асламазов*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

56 Сколько стоит грамм света? — *А. Б. Геллер*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

58 Атомная энергия на службе мира — *А. В. Алтыкис*
59 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
(3-я стр. обложки).
СМЕСЬ
(стр. 28, 50.)

ВЕТВИ И ГРАНИЦЫ

Р. П. Шейнцвит

Рассмотрим задачу:

На складе имеются предметы (каждый — по одному), вес и стоимость которых указаны в таблице.

Порядковый номер	Вес в центнерах	Стоимость (в рублях)
1	11	120
2	7	140
3	6	60
4	5	80
5	12	160
6	9	110
Всего	50	670

Грузоподъемность автомашины — 3200 кг. Требуется так загрузить автомашину, чтобы общая стоимость взятых предметов была как можно большей.

Очевидно, выгоднее брать предметы, имеющие при малом весе большую стоимость.

Введем понятие *удельной стоимости* предмета d_i, то есть стоимости одного центнера i-го предмета в рублях: $d_1=10{,}9$; $d_2=20$; $d_3=10$; $d_4=16$; $d_5=13{,}3$; $d_6=12{,}2$.

Если загрузить автомашину предметами с наибольшей удельной стоимостью — вторым, четвертым, пятым и шестым,— то сумма их весов окажется больше грузоподъемности автомашины $(7+15+12+9>32)$.

Если же взять только 2-й, 4-й и 5-й предметы, то машина окажется недогруженной на 8 *ц*. Можно тогда погрузить еще только один 3-й предмет, причем суммарная стоимость получится равной 440 руб., а машина будет недогружена на 2 *ц*. Можем ли мы быть уверены, что не существует лучшего способа загрузки машины?

Может быть, выгоднее оставить какой-либо из предметов с большей удельной стоимостью, но зато увеличить общую стоимость путем полного использования грузоподъемности машины?

Как видим, «в лоб» задачу решить трудно. А в реальных условиях, когда речь зачастую идет не о шести, а о шестидесяти предметах, и браться за нее нельзя, не вооружившись математическими методами. Переведем задачу на язык математики (как говорят, математизируем ситуацию). Пусть $x_i=1$, если i-й предмет погружается на автомашину, и $x_i=0$ в противном случае ($i=1, \ldots, 6$). Тогда общая стоимость погруженных предметов в рублях равна $120\,x_1+140\,x_2+60\,x_3+80\,x_4+160\,x_5+110\,x_6$, а их общий вес в центнерах равен $11\,x_1+7\,x_2+6\,x_3+5\,x_4+12\,x_5+9\,x_6$.

Итак, отвлекаясь от «жизненной» ситуации, мы получаем чисто математическую задачу: найти значения переменных $x_1, \ldots, x_6$ (каждое из которых может быть равно 0 или 1), при которых функция

$$f(x_1, \ldots, x_6) = 120x_1 + 140x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 160x_5 + 110x_6$$

достигает максимума, если выполнено условие (ограничение)

$$11x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 12x_5 + 9x_6 \leqslant 32. \qquad (1)$$

Функцию f называют *целевой функцией* задачи; она определена на множестве всех упорядоченных шестерок из нулей и единиц (*шестимерных векторов*, каждая компонента которых равна 0 или 1).

Всего, очевидно, имеется $2^6=64$ таких векторов, причем каждый из них дает некоторый способ загрузки автомашины. Но не каждый из этих 64 способов загрузки допустим: вектор (1,0,1,0,1,1) соответствует погрузке на машину 1-го, 3-го, 5-го и 6-го предметов, однако их общий вес (38 *ц*) превышает допустимый.

Естественно назвать вектор *допустимым*, если для него выполняется условие (1). Итак, решением задачи является допустимый вектор, максимизирующий целевую функцию f.

Теперь допустим, что 1-й предмет погружен на автомашину. Тогда $x_1=1$, и мы получаем новую задачу:

Найти значения переменных $x_2, \ldots, x_6$ *), *при которых достигает максимума функция* $f_2(x_2, x_3, \ldots, x_6) = 140x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 160x_5 + 110x_6$ *при условии* $7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 12x_5 + 9x_6 \leqslant 21$.

Если же 1-й предмет не погружен, то $x_1=0$, и мы получаем такую задачу:

Найти значения переменных $x_2, \ldots, x_6$, *максимизирующих функцию*

$$f(x_2, \ldots, x_6) = 140x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 160x_5 + 110x_6$$

при условии

$$7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 12x_5 + 9x_6 \leqslant 32.$$

Таким образом, одну задачу с 6 переменными можно свести к двум задачам с 5 переменными; те в свою очередь сводятся к четырем задачам с 4 переменными и т. д., так что в конце концов мы получаем 64 задачи с одной переменной каждая. Но уж если надо решать такую систему, то проще непосредственно проверить условие (1) для каждого из 64 возможных векторов, для допустимых из них вычислить значение целевой функции и выбрать тот вектор, для которого значение максимально, то есть, как говорят, решить задачу «полным перебором».

А как же быть в тех случаях, когда число предметов (компонент векторов) велико? Ведь уже при 20 предметах число возможных вариантов превышает миллион! Ясно, что метод полного перебора в задачах такого рода в большинстве случаев непригоден.

Мы расскажем сейчас об одном методе, позволяющем, как правило, значительно уменьшить число сравниваемых вариантов, необходимое для получения решения. Метод этот, известный под названием «метод ветвей и границ», мы опишем в процессе его применения к нашей задаче.

Процесс отбора предметов для погрузки на автомашину можно изобразить в виде *графа* *). Начальный узел 0 соответствует множеству P всех 64 6-мерных векторов. От узла

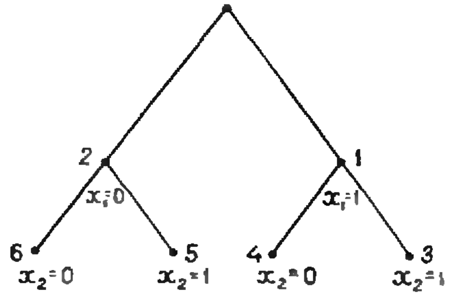


Рис. 1.

---

*) Условия $x_i=0$ или 1, предполагаемые на протяжении всей статьи, мы в дальнейшем специально не оговариваем.

*) См. статью М. И. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» в № 4 «Кванта» за 1970 год. Впрочем, дальнейшее будет понятно и тем, кто не читал этой статьи.

0 начинается *ветвление* к узлам 1 и 2 (рис. 1). Узел 1 находится правее и ниже узла 0. Он соответствует таким способам погрузки, при которых 1-й предмет обязательно погружается на автомашину. Очевидно, узел 1 соответствует подмножеству P_1 таких 32 векторов из P, у которых $x_1=1$. Узел 2 находится левее и ниже узла 0 и соответствует подмножеству P_2 таких 32 векторов из P, у которых $x_1 = 0$. Дальнейшее построение графа ясно. На рисунке 1 показан граф после двух шагов ветвления.

Каждый узел графа соответствует подмножеству векторов из P, у которых некоторые из компонент уже зафиксированы. Если построение множеств P_1 и P_2 рассматривать как первый шаг ветвления (первый уровень графа), то на k-м шаге (k-й уровень графа) мы получим 2^k узлов, каждый из которых соответствует множеству 2^{6-k} векторов (вариантов загрузки автомашины). Узлы, полученные на шестом шаге ветвления, представляют по одному вектору каждый, так что среди этих узлов находится решение задачи. Итак, если провести ветвление полностью, то придется построить граф с числом узлов $1 + 2 + 4 + \ldots + 64 = 127$.

Но мы постараемся действовать таким образом, чтобы попутно обнаруживать «бесперспективные» узлы, из которых не могут выходить ветви, ведущие к решению. Чем раньше (выше) «отсечь» эти ветви, тем меньший перебор придется нам делать потом. С этой целью сопоставим каждому узлу 2 числа (которые будем записывать под узлом). Верхнее из них показывает *наибольшую возможную суммарную стоимость (границу стоимости) взятых предметов* при любом способе погрузки, описываемом векторами данного узла. Нижнее число показывает, какой *общий вес отбираемых предметов* допустим на данном шаге (это число равно разности между грузоподъемностью автомашины и весом всех уже погруженных предметов). Для примера найдем верхнее и нижнее числа для 1-го узла. Поскольку во всех соответствующих ему вариантах погрузки 1-й предмет обязательно берется, нижнее число на этом шаге равно $32 - 11 = 21$. Граница стоимости (верхнее число) равна сумме стоимостей всех предметов, так как мы еще не исключили возможности выбора ни одного из них. Поэтому верхнее число 1-го узла равно 670. Для второго узла верхнее число равно 550 (670—120), так как первый предмет не берется: нижнее же число равно здесь 32.

Пусть P_i — вес i-го предмета, C_i — его стоимость. Очевидно, что при переходе от любого узла, находящегося на i-м уровне графа, направо вниз верхнее число не меняется, а нижнее уменьшается на P_{i+1}, при переходе же от этого узла налево вниз нижнее число не меняется, а верхнее уменьшается на C_{i+1}. *Будем на каждом этапе ветвить тот узел, у которого верхнее число наибольшее. Если же у двух узлов верхние числа совпадают, то будем ветвить тот из них, у которого нижнее число меньше.* Если в процессе ветвления встретится узел с отрицательным нижним числом, это значит, что при соответствующих данному узлу способах погрузки автомашина будет перегружена, и ветвление такого узла не имеет смысла. Производя ветвление по указанному способу, мы придем к узлу, находящемуся на последнем, шестом уровне графа, с неотрицательным нижним числом.

Этот узел соответствует некоторому допустимому способу погрузки, при котором значение целевой функции равно верхнему числу. Все неветвленные узлы, у которых верхнее число меньше, чем у этого узла, незачем ветвить, так как при ветвлении верхнее число не может увеличиваться. Может оказаться, что верхнее число найденного узла больше, чем у любого другого узла. Тогда этот узел и дает решение задачи. На рисунке 2 показан окончательный граф.

Построение графа проходит по следующим этапам (числа означают номера узлов):

1) 0→1→3→5→7→9; 2) 6→11→13; 3) 8→15; 4) 2→17→19→21→23→25; 5) 12→27→29; 6) 4→31→33→35; 7) 10→37; 8) 20→39→41→43; 9) 22→45→47; 10) 32→49→51→53; 11) 14→55; 12) 34→57→59.

Дальнейшее ветвление бесполезно, так как узел 55 находится на последнем уровне графа и имеет наибольшее верхнее число. Этот узел и дает решение задачи. Он соответствует вектору (1,1,0,1,0,1): нужно погрузить на автомашину 1-й, 2-й, 4-й и 6-й предметы. При этом суммарная стоимость (максимум целевой функции) равна 450 руб.

В процессе построения графа было «отсечено» свыше 50% бесперспективных вариантов. При увеличении числа переменных процент таких вариантов обычно растет.

Кроме того, процесс можно ускорить, если сразу найти из каких-либо соображений «достаточно хорошее» решение. Так, в данном случае достаточно хорошее решение, соответствующее узлу 26, было найдено из соображений, связанных с удельной стоимостью.

Мы надеемся, что читатель ощутит общность описанного подхода к решению подобных задач. Конечно, наша задача достаточно проста: из каждого узла выходят лишь 2 ветви, и не составляет труда найти границы (верхнее и нижнее числа). В других задачах процессы ветвления и ограничения могут быть сложнее и зависеть от опытности и остроумия тех, кто ее решает. Что же касается трудоемкости самой реализации процесса, то здесь на помощь приходят электронно-вычислительные машины. Задачи, подобные рассматриваемой, часто называют «задачами о рюкзаке» (замените автомашину туристским рюкзаком, а ее грузоподъемность — предельными возможностями туриста, собирающегося в поход и совершающего трудный выбор среди «совершенно необходимых» предметов).

Конечно, задачи эти приходится решать далеко не только перед отпуском или каникулами. Ведь формирование годового плана предприятия во многих случаях — та же задача о рюкзаке. Неудивительно, что метод ветвей и границ «работает» во многих планово-экономических задачах, имеющих большое значение для народного хозяйства.

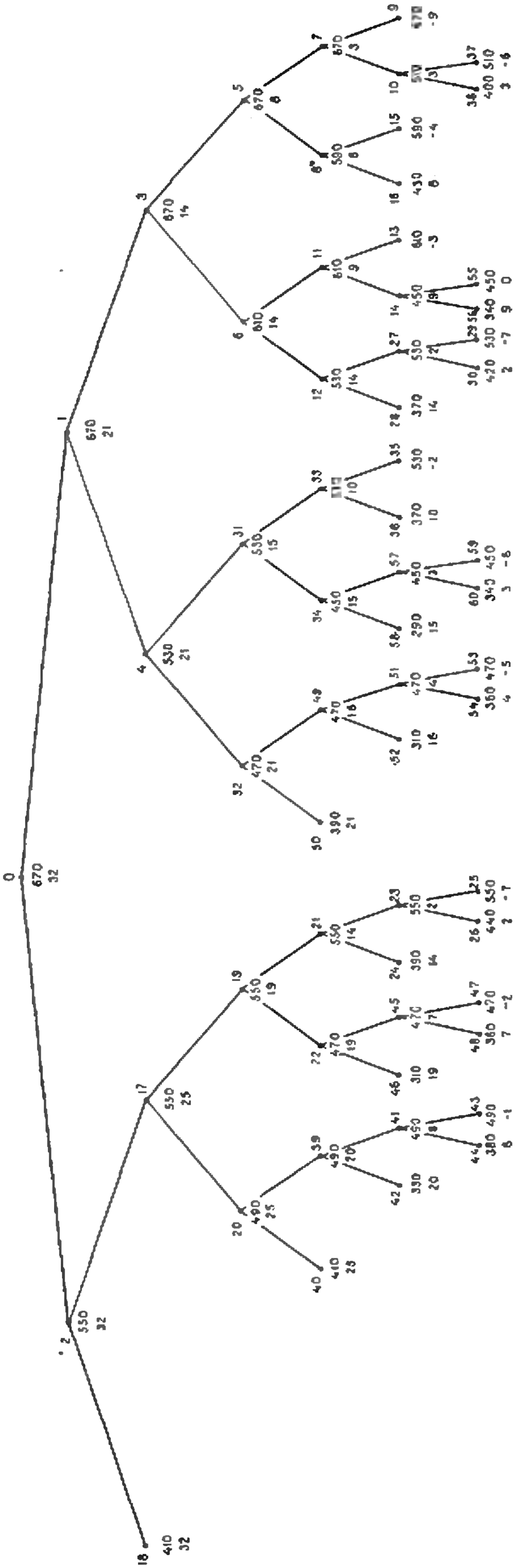


Рис. 2.

АТОМ ИЗЛУЧАЕТ КВАНТЫ

Б. С. Ратнер

В «Рассказе о кванте»*) были рассмотрены основные свойства электромагнитного излучения. Наименьшая порция энергии, которая может быть испущена или поглощена в виде излучения с частотой ν, называется квантом. Энергия кванта $E = 2\pi\hbar\nu$, где $\hbar = 1{,}05459 \cdot 10^{-34}$ *дж·с* — знаменитая постоянная Планка. (В старой литературе под постоянной Планка подразумевали величину $h = 2\pi\hbar = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ *дж·с*.)

Диапазон энергии квантов, встречающихся в природе, необычайно широк (см. рис. 1). Если энергия кванта, соответствующего длинным радиоволнам (например, волнам длиною 1000 *м*), составляет всего $E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1{,}2 \cdot 10^{-9}$ *эв* (то есть в миллиард раз меньше энергии светового кванта), то энергия жестких γ-квантов, возникающих при распаде падающих на Землю частиц космических лучей, достигает значений $\approx 10^{15}$ *эв* (1 *эв* $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*).

В этой статье мы расскажем о том, как образуются световые и рентгеновские кванты, а также гамма-кванты.

Возникновение света

Солнечный свет и пламя спички, свет неоновой рекламы и свечение раскаленного металла, несмотря на кажущееся различие, имеют одну природу. Возникновение света во всех источниках обусловлено изменениями, происходящими в атомах.

Согласно теории Бора атом любого элемента может находиться лишь в строго определенных дискретных состояниях. Каждому состоянию соответствует определенная внутренняя энергия атома E_n. Возможные значения энергии атома получили название энергетических уровней и обозначаются на схеме уровней горизонтальными прямыми (см. рис. 2, *а*). Расстояние между прямыми ΔE

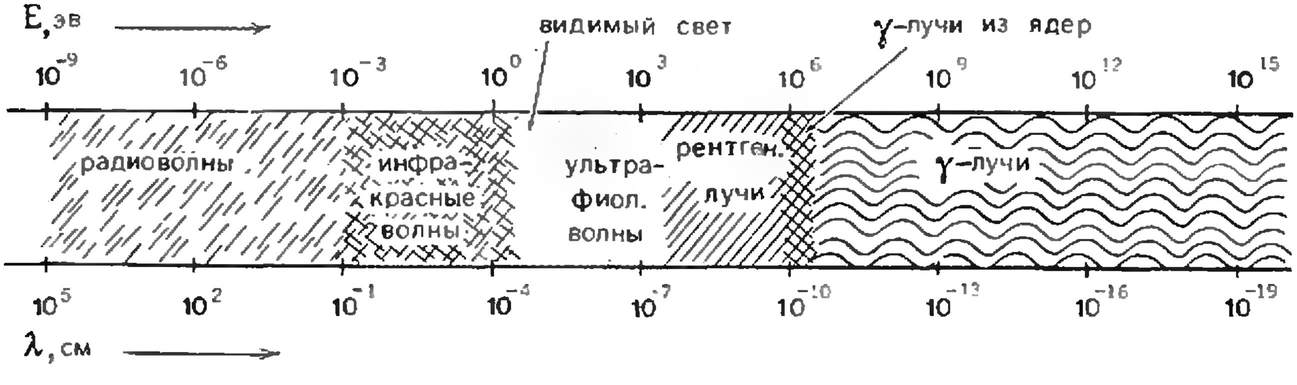


Рис. 1. Диапазон энергии квантов электромагнитного поля, встречающихся в природе.

---

*) См. «Квант» № 1, 1970 г., стр. 6.

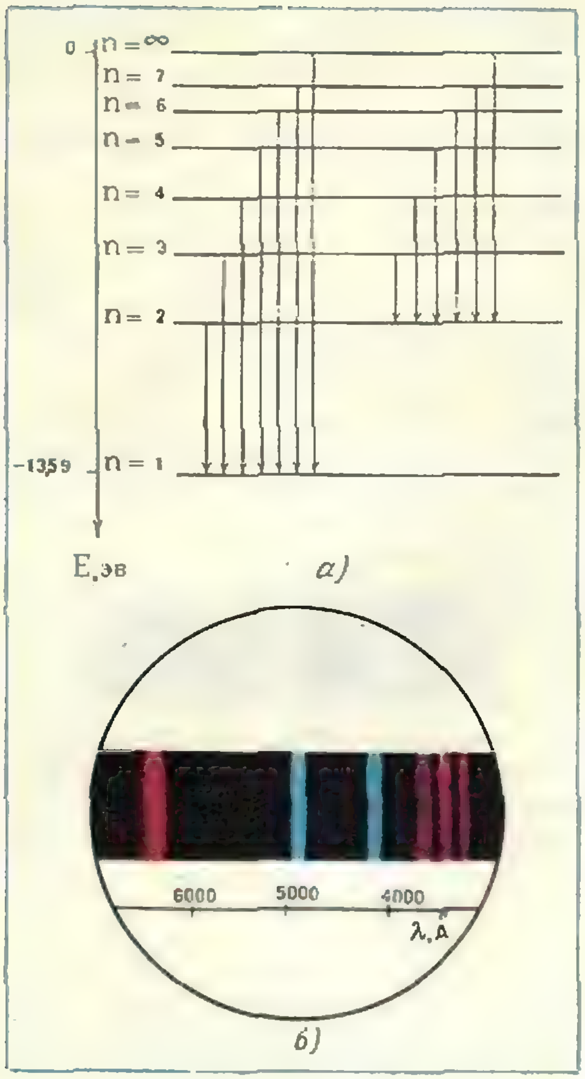


Рис. 2. а) Схема уровней атома водорода. Показаны переходы на уровни с $n=1$ и $n=2$. б) Спектр излучения атомарного водорода в видимой области — переходы на уровень с $n=2$. Такая картина наблюдается в спектрометре.

равно разности энергий соответствующих уровней атома. Низший энергетический уровень E_1 характеризует основное состояние атома. В этом устойчивом состоянии находятся в нормальных условиях все атомы. При поглощении энергии атом переходит в одно из возбужденных состояний E_2, E_3, E_4,... Способ возбуждения атома может быть самым различным: облучение быстрыми электронами, тепловое возбуждение, воздействие световых квантов или электрический разряд. Во всех случаях возбуждения энергия передается электронам атома, поэтому часто говорят не о переходах атома с одного уровня на другой, а о переходах электрона. Возбужденные состояния атома неустойчивы. За время $\tau \approx 10^{-8}$ *с* атом переходит в основное состояние, излучая энергию в виде квантов электромагнитного поля. Энергия кванта $E = 2\pi\hbar\nu = E_2 - E_1$.

Рассмотрим атом водорода, простейший из атомов, состоящий из протона и связанного с ним электрона. Энергия любого уровня может быть найдена из следующей формулы:

$$E_n = -\frac{13,59}{n^2}\ \text{эв},$$

где $n = 1, 2, \ldots$ — так называемое главное квантовое число, характеризующее энергию уровня. В невозбужденном состоянии атома электрон находится на уровне с $n = 1$. При возбуждении электрон может оказаться на уровне с $n = 2, 3, \ldots$ Из формулы видно, что с увеличением энергии возбуждения расстояние между соседними уровнями (то есть разность энергий) уменьшается. Отрицательным значениям энергии E_n соответствуют связанные состояния электрона. Следовательно, до тех пор, пока электрон удерживается в поле атома, спектр имеет прерывный (дискретный) характер. Сообщив атому водорода энергию, превышающую значение $E = 13,59$ *эв*, мы ионизуем его.

При переходе электрона с более высокого уровня на более низкий испускается квант света. Его энергия равна разности энергий уровней:

$$E_{n_i n_k} = E_{n_i} - E_{n_k} = 13,59\left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)(\text{эв}).$$

Зная энергию кванта, мы можем найти длину волны испущенного света, наблюдаемого в спектроскопе:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E}\ (\text{см}).$$

Схема энергетических уровней атома водорода показана на рисунке 2, *а*. Серия спектральных линий, соответствующих переходам на уровень с $n=2$ со всех вышележащих уровней (серия

Бальмера), находится в видимой области (рис. 2, *б*). Переходы в основное состояние дают излучение в ультрафиолетовой части спектра (серия Лаймана).

В атомах более сложных, чем водород, электроны группируются в оболочки, то есть группы уровней с близкой энергией, имеющих одно и то же главное квантовое число n. Различные оболочки обозначают буквами K, L, M и т. д. На ближайшей к ядру K-оболочке располагается не более 2-х электронов, на L-оболочке — 8, на M-оболочке — 8, на N-оболочке — 18 и т. д. Наружные электроны связаны с атомом слабее внутренних; объясняется это увеличением расстояния до ядра и частичным экранированием притяжения ядра со стороны внутренних электронов.

С увеличением заряда ядра энергия связи k-электронов быстро растет (пропорционально Z^2) и составляет в атоме натрия 1,1 *кэв*, а в атоме вольфрама — 70 *кэв*. Поэтому кванты видимого света, энергия которых составляет от 1,6 до 4,1 *эв*, испускаются сложными атомами при переходах электронов между уровнями внешней оболочки.

Широко известен опыт, в котором пламя газовой горелки вспыхивает желтым светом, когда в него бросают щепотку поваренной соли. Два очень близкие по энергии кванта, излученные атомами натрия в желтой части спектра, ответственны за этот эффект (см. рис. 3).

Испускание света в газосветных трубках, используемых для рекламы, также обусловлено переходами между определенными уровнями атомов газа, возбуждаемых с помощью электрического разряда. Однако чаще нам приходится сталкиваться с источниками света, обладающими сплошным (непрерывным) спектром. Именно к таким источникам света относятся солнце, лампы накаливания и лампы дневного света (люминесцентное освещение). В чем причина перехода от отдельных линий к сплошному спектру? Оказывается, только разреженные газы, в которых взаимодействие между атомами невелико, дают линейные спектры. Если же вследствие высокой температуры или большого давления атомы газа часто испытывают соударения, то линии излучения уширяются настолько, что образуют непрерывный спектр. (Любопытно, что хотя спектр солнечного света сплошной, спектр атмосферы Солнца, который удается измерить во время полного солнечного затмения, состоит из отдельных ярких линий).

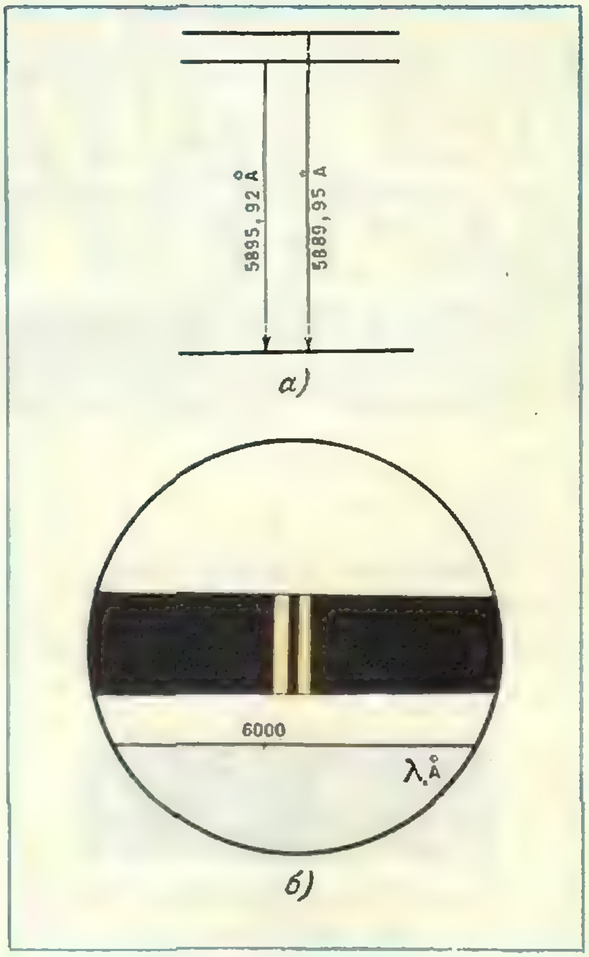


Рис. 3. а) Спектр излучения атома натрия в видимой области. б) В поле зрения спектрометра наблюдаются две желтые линии.

В твердом теле высокорасположенные уровни отдельных атомов, участвующие в образовании оптических спектров, из-за взаимодействия атомов превращаются в широкие энергетические зоны. Переходы между ними дают сплошной спектр, почти одинаковый для всех раскаленных твердых тел и зависящий, в основном, от температуры. Так, в раскаленном кузнечном горне почти не различаются куски угля, шлака и железа.

Возникновение рентгеновских квантов

По своей природе рентгеновские лучи тождественны со светом и отличаются от него лишь тем, что имеют меньшие длины волн.

Рентгеновские лучи образуются в вакуумной трубке. Между источником электронов (катод) и анодом поддерживается разность потенциалов до 50 *кв*. Попадание ускоренных электронов на анод вызывает испускание из анода пучка рентгеновских лучей. Какова физическая природа этого процесса? Если электрон с энергией E_0 проходит через электрическое поле ядра, то он претерпевает отклонение. Поскольку при этом электрон испытывает ускорение, он, согласно электродинамике, должен излучить энергию. Закон сохранения энергии запишется в виде

$$E_0 = E + 2\pi h\nu,$$

где E_0 — первоначальная энергия электрона, E — энергия электрона после испускания кванта частоты ν. Электрон при торможении может потерять любую часть своей кинетической энергии, поэтому спектр тормозного излучения будет сплошным.

Попробуем определить верхнюю границу рентгеновского спектра (по энергии) (или минимальную длину волны). Из закона сохранения энергии следует, что наибольшая энергия кванта равна кинетической энергии электрона:

$$2\pi h\nu_{\max} = \frac{2\pi hc}{\lambda_{\min}} = eU,$$

где U — величина ускоряющего напряжения. На рисунке 4 изображен рентгеновский спектр молибдена. Мы видим помимо непрерывного рентгеновского спектра отдельные узкие линии. Эти линии представляют характеристическое рентгеновское излучение, которое возникает в тех случаях, когда энергия возбуждающих электронов становится равной или большей некоторого критического значения (для каждого элемента свое определенное значение). Теперь, после ознакомления с атомными спектрами, можно понять его происхождение. В тяжелых атомах энергия ближайшей к ядру *K*-оболочки составляет десятки *кэв*. Ускоренный в рентгеновской трубке быстрый электрон может вырвать из атома один из *k*-электронов. Образующаяся дырка заполняется электроном из верхней *L*- или *M*-оболочки. Одновременно испускается квант характеристического излучения. Более редкое событие — наблюдение излучения, возникающего при выбивании электрона из *L*-оболочки.

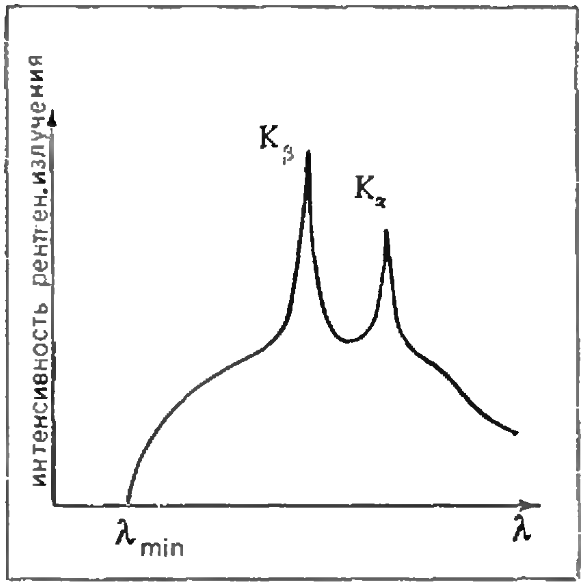


Рис. 4. Рентгеновский спектр излучения молибдена. (По оси ординат отложена интенсивность рентгеновского излучения, характеризующая количество испущенных квантов.) В области малых длин волн на сплошной спектр тормозного излучения накладываются линии *K*-серии характеристического излучения.

Спектральные линии характеристического излучения образуют закономерные последовательности, или серии, расположенные в различных частях рентгеновского спектра. Обозначают эти серии буквами *K*, *L*, *M*, *N*. Серия *K* — самая коротковолновая, состоит из линии K_α (переход из *L*-оболочки в *K*), K_β (переход из *M*-оболочки в *K*) и т. д. Следующая (в сторону длинных волн) — серия

L; далее идут серии *M* и *N*, которые наблюдаются только у тяжелых элементов. Длина волны рентгеновских лучей в тысячи раз меньше длин волн, испускаемых в видимой части спектра при переходах электронов внешней оболочки атомов.

Возникновение γ-квантов

Вскоре после открытия радиоактивного распада элементов Э. Резерфорд осуществил свой известный опыт по определению природы нового излучения. На одну из составляющих лучей, испускаемых препаратом радия, магнитное поле не оказывало никакого воздействия — это были γ-кванты.

С тех пор вот уже более полувека испускание γ-квантов ядрами является предметом тщательного изучения физиков.

Ядра, как и атомы, помимо основного состояния с минимальной энергией могут находиться в дискретных возбужденных энергетических состояниях. Расстояние между энергетическими уровнями колеблется в зависимости от массы ядра и энергии возбуждения от десятка *кэв* до нескольких *Мэв*. Время жизни ядра в возбужденных состояниях не превышает 10^{-13} — 10^{-14} *с*. Переход ядра из возбужденного состояния в основное чаще всего сопровождается испусканием γ-квантов.

Энергия γ-кванта равна разности энергии начального и конечного состояний. Иногда энергия возбуждения ядра может превратиться в кинетическую энергию электрона, который вследствие этого покидает атом. Этот процесс, называемый внутренней конверсией, чаще всего происходит на ближайшей к ядру электронной оболочке.

У некоторых ядер встречаются состояния, распад которых в основное состояние запрещен определенными правилами квантовой механики. Время жизни таких состояний, называемых изомерными, гораздо больше обычных времен жизни возбужденных состояний и достигает нескольких часов, дней и даже лет.

На рисунке 5 показана схема уровней ядра $^{83}_{36}$Kr.

Как образуются возбужденные состояния ядер? Радиоактивный распад элементов сопровождается испусканием α-частиц с образованием ядра *A*—4, *Z*—2, где *A* — массовое число и *Z* — заряд исходного ядра. При β-распаде ядро испускает две частицы — электрон и антинейтрино, образуя ядро *A*, *Z* — 1. В результате обоих типов распадов ядро обычно остается в возбужденном состоянии. Эти же состояния возникают в ходе различных ядерных реакций. Так например, после реакции захвата медленного нейтрона возникает новое ядро, возбужденное до энергии 8 *Мэв*. В ускорителях кольцевого типа (бетатроны и синхротроны) и в линейных ускорителях электроны приобретают энергию в несколько десятков, сотен и даже тысяч *Мэв*. При торможении электронов в мишени образуются мощные пучки γ-квантов.

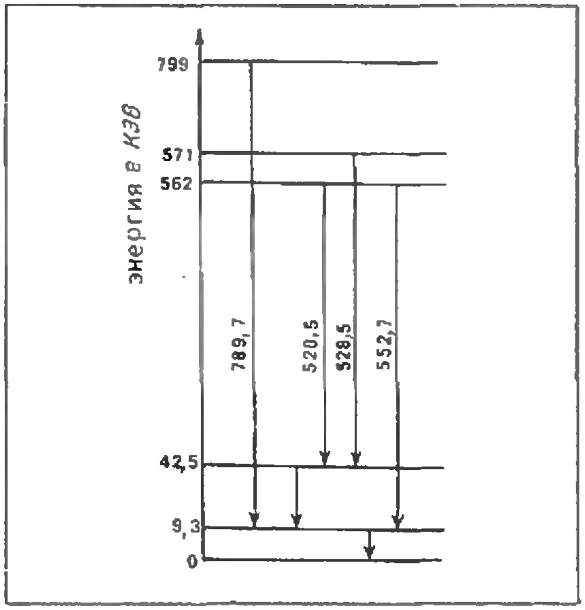


Рис. 5. Расположение уровней в ядре криптона $^{83}_{36}$Kr. Уровень с $E = 42,5$ кэв — изомерный, время жизни $T = 1,86$ года.

Так или не так действовал Ферма?

(о факторизации чисел)

Б. А. Кордемский

С именем знаменитого Пьера Ферма связано много тайн. Однажды он получил письмо с вопросом: «Является ли простым число 100895598169?» Ферма незамедлительно ответил, что это двенадцатизначное число является произведением двух простых чисел: 898423 и 112303.

Способ исследования числа он не раскрыл.

Отыскание простых множителей натурального числа называют для краткости «факторизацией» («фактор», значит — множитель, составная часть; в этом последнем смысле слово обычно и употребляется). Даже с такими помощниками, как электронные вычислительные машины, факторизация больших чисел — чрезвычайно трудоемкая задача, тем более трудно сделать это «ручным способом». Несколько первых простых чисел (2, 3, 5, 7, 11, . . .) легко проверяются на их пригодность в качестве возможных множителей испытуемого числа — по известным признакам делимости на эти числа. Упрощает вычисления и знание признаков делимости на какие-либо из последующих простых чисел *).

Ясно также, что для всякого заданного числа N достаточно испытать в качестве возможных множителей простые числа, меньшие, чем $\sqrt{N}$. Действительно, если у числа N есть множитель $m>\sqrt{N}$, то ему соответствует, как результат деления N на m, и некоторый множитель, меньший, чем $\sqrt{N}$.

Как прием факторизации можно использовать известный алгоритм Евклида для отыскания наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел. Состоит он, как вы, быть может, помните, в следующем *): находим остаток r_1 от деления большего числа на меньшее, затем находим остаток r_2 от деления предшествующего делителя на r_1, затем остаток r_3 от деления r_1 на r_2 и т. д. Последний не равный нулю остаток (он непременно существует, поскольку числа r_i убывают) и есть НОД заданных чисел (если он равен 1, то они взаимно просты).

Для примера применим этот алгоритм к числам 104 и 39:

$104 : 39 = 2$ (остаток 26);
$39 : 26$ (остаток 13);
$26 : 13 = 2$ (остаток 0).

Ответ: НОД $(104,39) = 13$.

Как же применить алгоритм Евклида к факторизации чисел?

Для выявления простых множителей числа N образуем другое число P — произведение всех простых чисел от наименьшего из «подозреваемых» множителей числа N до наибольшего среди всех простых, меньших, чем $\sqrt{N}$. К этим числам N и P мы и применим алгоритм Евклида.

Пусть, например, $N = 851$. Замечаем, что $\sqrt{N}<31$. Устанавливаем по признакам делимости, что N не делится на 3, 7, 11, 13. Кроме того, сразу видно, что 851 при делении на 17 дает в остатке 1. Остается испытать делимость N на 19, 23 и 29. Для такого небольшого числа, как 851, это легко сделать прямым делением на каждый из предполагаемых множителей. Но для уяснения метода поступим так, как было бы целесообразно действовать в случае большого числа.

---

*) См. например, заметку о признаках делимости на 19 и 7 в «Кванте» № 6, 1970, стр. 10.

*) Обоснование и примеры применения алгоритма Евклида приведены в статье А. Н. Виленкина «Сокращение алгебраических дробей» («Квант» № 11, 1970) и Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики» («Квант» № 6, 1972).

Образуем $P = 19 \cdot 23 \cdot 29 = 12673$. Далее, $12673 : 851 = 14$ (остаток 759), $851 : 759 = 1$ (остаток 92); $759 : 92 = 8$ (остаток 23); $92 : 23 = 4$ (остаток 0).

Число 23 есть НОД чисел N и P и, следовательно, один из множителей числа 851. Деля 851 на 23, получаем 37 — число простое.

Факторизация числа 851 окончена: $851 = 23 \cdot 37$.

Для числа, предложенного Ферма, аналогичные вычисления длились бы значительно дольше. (Попробуйте!) Похоже, что сам Ферма считал иначе. Но как?

На подступах к разгадке?

В одной из современных математических книг высказано предположение, что, по-видимому, «некоторые математики 17-го века, потратившие много усилий на разработку теории чисел, владели незнакомыми нам способами узнавать простые числа». Но так как мастера-вычислители 17-го века не раскрыли потомкам своих секретов факторизации чисел, то естественно, что способы, изобретенные позже, могли оказаться и переоткрытиями.

Ферма — один из создателей теории чисел — в своих вычислениях пользовался самыми разнообразными свойствами чисел. В частности, он, несомненно, знал, что всякое нечетное число N (равно как и всякое четное, кратное 4) можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел x и y:

$$N = a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = x^2 - y^2,$$

где a и b $(a > b)$ — какие-либо возможные нечетные сомножители нечетного числа N (тогда $a + b$ и $a - b$ — четные числа, а x и y — целые).

Если N — простое число, то $a = N$, $b = 1$, разложение $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ единственно и не дает иных сомножителей, кроме N и 1. Если же N — составное, то найдется разложение $(x + y)(x - y)$, которое дает хотя бы одну пару множителей, отличных от N и 1.

Например, простое число 17 имеет только одно представление в виде разности квадратов, а именно $17 = 9^2 - 8^2 = 17 \cdot 1$; составное же число 203 имеет два таких представления:

$$203 = 102^2 - 101^2 = 203 \cdot 1$$

и

$$203 = 18^2 - 11^2 = 29 \cdot 7.$$

Так в «лаборатории факторизации чисел» появляется еще один прием, который мы назовем «факторизацией по разности квадратов». При этом для подбора требующихся квадратных чисел x^2 и y^2 можно применить такую схему действий (алгоритм): 1) найти наименьший превосходящий заданное число N квадрат: x^2 (например, по таблице квадратов чисел или предварительно извлекая $\sqrt{N}$ с избытком); 2) из найденного x^2 вычесть N.

Если остаток сам является квадратным числом, то есть $x^2 - N = y^2$, то процесс подбора окончен; $N = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Если же остаток не есть квадрат, то надо повторить операцию вычитания N из следующего по старшинству квадратного числа и так продолжать до получения квадратного остатка.

Поясним этот алгоритм примером поиска множителей двух составных чисел: $N_1 = 153583$ и $N_2 = 689$.

Для числа N_1 : $\sqrt{153583} \approx 392$; $392^2 = 153664$; $153664 - 153583 = 81 = 9^2$; имеем $153583 = 392^2 - 9^2 = 401 \cdot 383$ — оба множителя — простые числа. Заметим, попутно, что оба они близки по величине один к другому и, следовательно, к $\sqrt{N}$. В этом — причина краткости пути к успеху.

Для числа $N_2 = 689$ ближайший избыточный квадрат $729 = 27^2$.

Вычисляем:

$$27^2-N_2 = 729-689=40;$$
$$28^2-N_2=784-689=95;$$
$$29^2-N_2=841-689=152;$$
$$30^2-N_2=900-689=211;$$

. . . .

$$33^2-N_2=1089-689=400=20^2.$$

Следовательно, $689 = 33^2-20^2 = 53\cdot 13$.

Успех достигнут только на седьмой попытке. Сравнивая множители числа 689, мы замечаем, что они сильно различаются по величине, что и вызвало удлинение нашей процедуры.

Возможная уловка

Начиная факторизацию какого-либо составного числа N, мы, разумеется, не знаем заранее, близки ли по величине его сомножители. Но если несколько последовательных шагов выполнения алгоритма не привели процесс подбора требующихся квадратных чисел к завершению,— ответ определился: искомые множители не близки по величине к $\sqrt{N}$.

В таком случае применим хитрость: начнем все снова, предварительно умножив заданное N, скажем на 3 (сохраняя тем самым нечетность). Это увеличит меньший из двух сомножителей числа N в 3 раза и сделает величины сомножителей числа $3N$ более близкими между собой, а, следовательно, и к $\sqrt{3N}$.

А если заранее предположить еще более значительное различие между сомножителями числа N, то можно умножить его сразу на 5, 7 или 8 (в последнем случае образуется число четное, но представимое разностью квадратов целых чисел). Умножение на 2 в любом случае было бы непригодным, а на 4 — бесполезным. Докажите это самостоятельно.

Вернемся к числу $N_2 = 689$ и применим в качестве «уловки» умножение на 5. Это дает $5\cdot N_2=3445$; $\sqrt{3445}\approx 59$; $59^2=3481$; $3481-3445=36=6^2$. Имеем $3445=59^2-6^2=65\times 53$; $5N_2=65\cdot 53$; $N_2=53\cdot 13$.

Успех с одной попытки, а не с семи, как прежде.

Может быть, так и действовал Ферма?

Намереваясь применить теперь прием «факторизации по разности квадратов» к числу $N=100895598169$, дерзнем на введение дополнительного множителя. Пусть интуиция навела нас на множитель 8 (проба меньших множителей, предположим, нас не воодушевила).

Имеем $8N = 807164785352$. Ищем наименьшее число, квадрат которого больше, чем $8N$:

$$\sqrt{807164785352}=898424 \text{ (с избытком)}$$

Далее: $898424^2-8N = 898424$.

Хотя получившаяся разность и не является квадратом, продолжать применение алгоритма излишне: дерзость вознаграждена неожиданным сюрпризом — общим множителем 898424! Разложение числа $8N$ обеспечивается теперь простым вынесением общего множителя за скобки: $8\cdot N=898424\times(898424-1)=8\cdot 112303\cdot 898423$.

Окончательно: $N=112303\cdot 898423$.

...Так ли все происходило в «лаборатории» Ферма или как-нибудь иначе — сведений нигде нет; но в любом случае наше совместное гипотетическое «путешествие» в прошлое с позиций настоящего, было, надеюсь, для читателя не бесполезным.

Упражнения

1. Найти НОД чисел 80 887 и 40 091.
2. Доказать, что $N=55\,637$ имеет только один простой множитель, меньший, чем 30. (Воспользоваться числом $p=17\cdot 19\cdot 23\cdot 29=215\,441$.)
3. Найти все множители числа N из задачи 2.
4. Применить «факторизацию по разности квадратов» к разложению числа 131 289 на простые множители.
5. Выполнить «факторизацию по разности квадратов» числа 500 207. (Применить «уловку» предварительного умножения на 3).
6. Применяя «факторизацию по разности квадратов» непосредственно к числу $N=20\,099$, убедитесь в том, что $20\,099=199\cdot 101$.

Сколько потребовалось шагов? Зная результат разложения N, объясните, почему самым лучшим множителем, ускоряющим процесс разложения N, оказалось бы число 8? Сколько потребуется шагов для разложения числа $8N$?

УРАВНЕНИЯ ОРНАМЕНТОВ

М.И.Бржозовский

Подбирая должным образом уравнения, можно получать самые разнообразные, подчас весьма причудливые картинки. Например, можно получить «рожицу», изображенную на рисунке А. Как это сделать? Предварительно нам придется вспомнить, что числовой плоскостью называется множество всех пар действительных чисел (см. статью А. Н. Колмогорова «Что такое график функции», «Квант» № 2, 1970 г.) Любое множество точек числовой плоскости условимся называть *геометрической фигурой*, расположенной на числовой плоскости.

Можно, в частности, рассмотреть множество всех таких пар действительных чисел (x, y), для которых $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — заданное выражение. В этом случае говорят, что получающаяся геометрическая фигура описывается уравнением $f(x, y)=0$.

Так, уравнение $x^2-y=0$ описывает параболу; уравнение $x^2-y^2=0$ — две прямые ($y=x$ и $y=-x$), пересекающиеся в точке (0, 0); уравнение $x^2+y^2=2$ — окружность с центром в точке (0,0) и радиусом $\sqrt{2}$; уравнение $|x|+|y|=1$ — квадрат с центром в точке (0, 0) и вершинами, лежащих на координатных осях.

Теперь рассмотрим следующие уравнения:

$$\left(x+y\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{32}\right)\sqrt{\frac{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}-1}{1-\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{81}}}=0 \qquad (1)$$

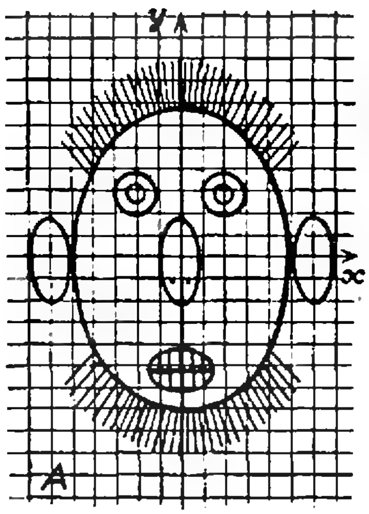


Рис. А.

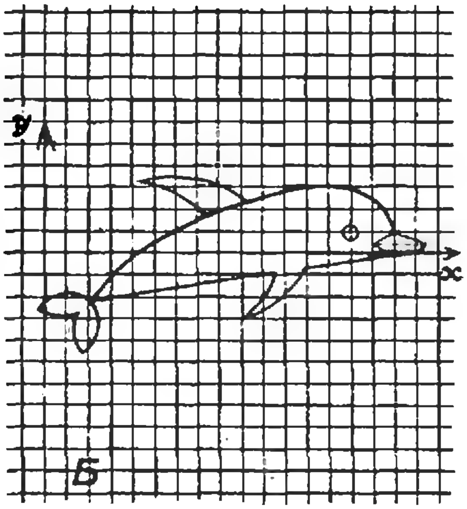


Рис. Б.

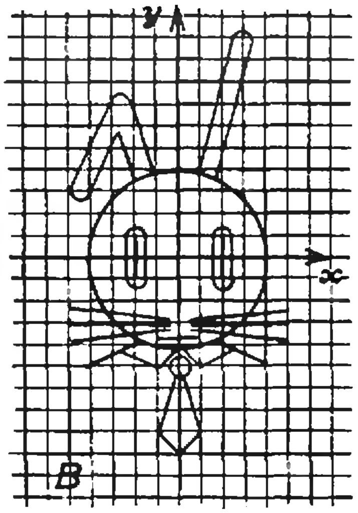


Рис. В.

(n — целое число, принимающее значения $8 \leqslant |n| \leqslant 16$);

$$(x \pm 2)^2 + (y-3)^2 = k \left(k=1 \text{ и } k=\frac{1}{4}\right); \qquad (2)$$

$$4(x+l)^2+y^2=4 \quad (l=0,\ l=-5,\ l=5); \qquad (3)$$

$$|2x^2-5|x|+2| + |3y-8|x|+7| = 0; \qquad (4)$$

$$(y+5)(2x+m)\sqrt{9-4x^2-9(y+5)^2} = 0 \qquad (5)$$

$$(m=0,\ m=\pm 1,\ m=\pm 2).$$

Уравнениям (1) соответствует овал лица, волосы и борода, уравнения (2) описывают глаза, уравнения (3) дают уши и нос, уравнению (4) соответствуют центры глаз и ноздри, уравнения (5) описывают рот и зубы рожицы, изображенной на рисунке А.

На рисунках Б и В изображены еще две фигуры, которые тоже можно описать уравнениями (их нам прислал ученик 10 класса Ленинградской школы № 239 Юрий Миньковский). В фигуре на рисунке В используется даже кусок графика логарифмической функции.

Помещаемая ниже статья рассказывает, как можно получать уравнения, описывающие различные орнаменты.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Эта функция четна ($\cos(-x) = \cos x$) и периодична ($\cos(2\pi + x) = \cos x$), поэтому ее график обладает зеркальной симметрией относительно оси ординат Oy и состоит из одинаковых периодически повторяющихся кусков.

Мы будем говорить, что график функции $y = \cos x$ (его уравнение можно записать так: $y - \cos x = 0$) является *линейным орнаментом.*

Таким образом, линейный орнамент получается с помощью переносов некоторой основной фигуры вдоль некоторого направления.

Если сам линейный орнамент считать основной фигурой и произвести над ним серию переносов вдоль нового направления, то мы получим *двумерный орнамент.*

Повороты основной фигуры на углы, кратные $\frac{360^\circ}{n}$, приводят к *круговым орнаментам.*

Рассмотрим сначала один простой пример.

На рисунке 1 в качестве основной фигуры F_0 взята окружность с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, ее уравнение в декартовой системе координат: $x^2 + y^2 = 1$. Заметим, что все точки окружности (кроме одной) лежат в полосе $-1 \leqslant x < 1$ (отмеченной красным цветом).

Перенесем фигуру F_0 вправо вдоль оси Ox на 2 единицы масштаба; она займет положение F_1, а красная область перейдет в синюю, определяемую неравенствами $1 \leqslant x < 3$ (см.

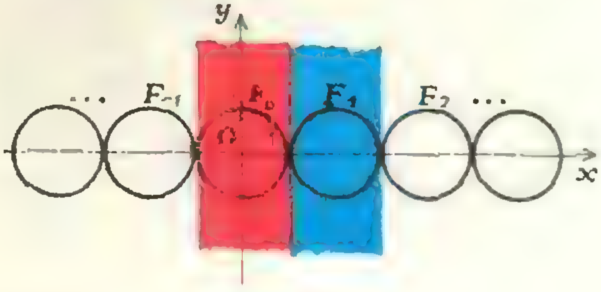


Рис. 1.

рис. 1). Уравнение окружности F_1 в той же системе координат записывается уже в виде

$$(x-2)^2+y^2=1.$$

Аналогично можно получить цепочку окружностей F_{-1}, F_2, F_{-2}, ..., F_k, F_{-k},... Они образуют линейный орнамент.

Всю эту цепочку окружностей можно описать одним уравнением, если ввести в рассмотрение функцию $[x]$ — целая часть x *).

Вот это уравнение:

$$\left(x-2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right)^2+y^2=1.$$

Если x находится в промежутке $[2k-1,\ 2k+1)$, то это уравнение, как нетрудно проверить, задает одну из окружностей:

$$(x-2k)^2+y^2=1.$$

Вообще, если $f(x, y)=0$ (при $a \leqslant x < a+T$)— уравнение некоторой геометрической фигуры, которую мы назовем основной фигурой F_0, то линейный орнамент, полученный из F_0 переносами на kT единиц по оси Ox (где $T>0$, $k=0, \pm 1, \pm 2,...$), описывается уравнением

$$f\left(x-T\left[\frac{x-a}{T}\right],\ y\right)=0. \qquad (6)$$

Пусть теперь основная фигура F_0, заданная в полосе ($b \leqslant y < b+S$) переносится (по диагонали) на kT единиц по оси Ox и на kS единиц по оси Oy. Тогда получается линейный орнамент со звеньями из фигур F_i, расположенный вдоль отрезка, соединяющего начало координат $(0, 0)$ с точкой $(T,\ S)$, а уравнение

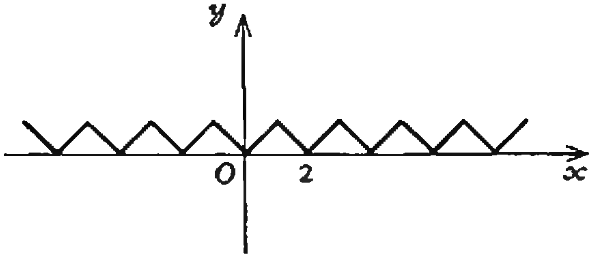


Рис. 2.

этого орнамента будет

$$f\left(x-T\left[\frac{y-b}{S}\right],\ y-S\left[\frac{y-b}{S}\right]\right)=0 \qquad (7)$$

(при $S \neq 0$). При $T=0$ получается линейный орнамент, расположенный вдоль оси Oy. Комбинацией переходов (6) и (7) получаются уравнения двумерных орнаментов.

Интересно отметить, что если функция $y=f(x)$ определена в интервале $a \leqslant x < a+T$, то функция

$$y=f\left(x-T\left[\frac{x-a}{T}\right]\right)$$

определена на всей вещественной оси $-\infty < x < \infty$, периодична с периодом T и совпадает с $f(x)$ в интервале $a \leqslant x < a+T$.

Функцию $f\left(x-T\left[\frac{x-a}{T}\right]\right)$ называют периодическим продолжением функции $f(x)$. Например, если $y=|x|$ в промежутке $(-1,\ 1)$, то

$$y=\left|x-2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|$$

— периодическая функция с периодом $T=2$, ее график приведен на рисунке 2.

На рисунке 3 изображен линейный орнамент, составленный из дуг окружностей радиуса $R=1$. Основу этого орнамента составляет фигура F_0 (красная часть рисунка 3), заданная уравнением

$$\left(x-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right)^2+\left(y-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right)^2=1.$$

---

*) Функция $[x]$, называемая «целой частью x», определяется равенством $[x]=k$, если $k \leqslant x < k+1$, где k — целое число (наибольшее целое число, не превосходящее x).

После серии переносов фигуры F_0 по оси Ox (при $T=4$, $a=-2$) мы получим сам орнамент, уравнение которого после некоторых упрощений примет вид

$$\left(x-2\left[\frac{x+2}{4}\right]-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right)^2+\left(y-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right)^2=1.$$

Будем считать теперь этот орнамент основной фигурой и произведем над ним серию переносов по оси Oy (при $S=4$). Мы получим двумерный орнамент, изображенный на рисунке 4. Предлагаем читателю самому написать соответствующее уравнение.

Интересный орнамент со сложной симметрией (если еще изменять цвета при преобразовании переноса в некоторых направлениях) изображен на рисунке 5. Основу белой части орнамента составляет фигура F_0 — белая часть квадрата $-2\leqslant x<2$, $-2\leqslant y<2$, ее уравнение

$$\left[\left|x-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|+\left|y-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right|\right]=0$$

по своей структуре напоминает уравнение основной фигуры, изображенной на рисунке 3. Производя над F_0 сначала серию переносов по оси Ox (при $T=4$, $a=-2$), а затем по оси Oy (при $S=4$, $b=-2$), мы получим всю белую часть орнамента, уравнение которой таково:

$$\left[\left|x-2\left[\frac{x+2}{4}\right]-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|+\left|y-2\left[\frac{y+2}{4}\right]-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right|\right]=0.$$

Уравнение черной части орнамента получается из этого уравнения заменой x на $x-2$ и y на $y-2$.

Теперь рассмотрим синюю, желтую и красную части трехцветного шестиугольного паркета, изображенного на рисунке 6. В основе синей части паркета лежит шестиугольник

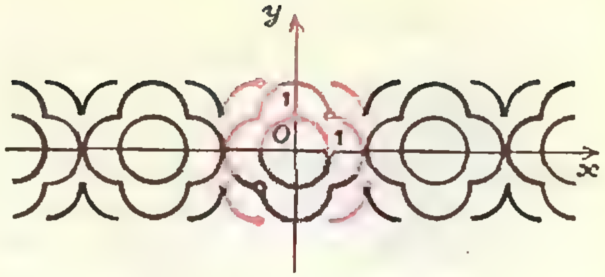


Рис. 3.

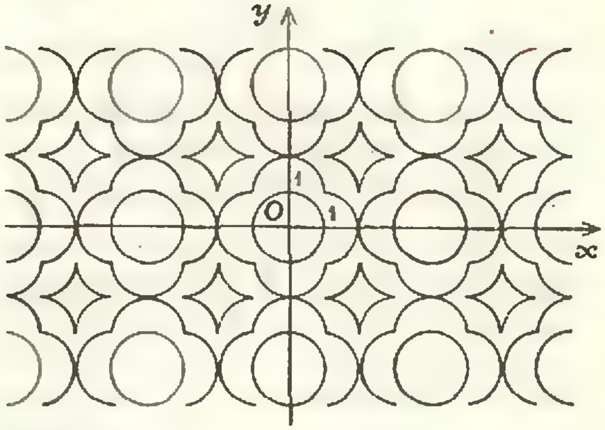


Рис. 4.

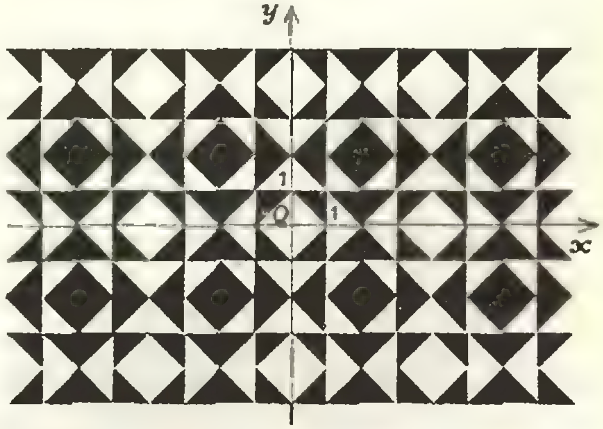


Рис. 5.

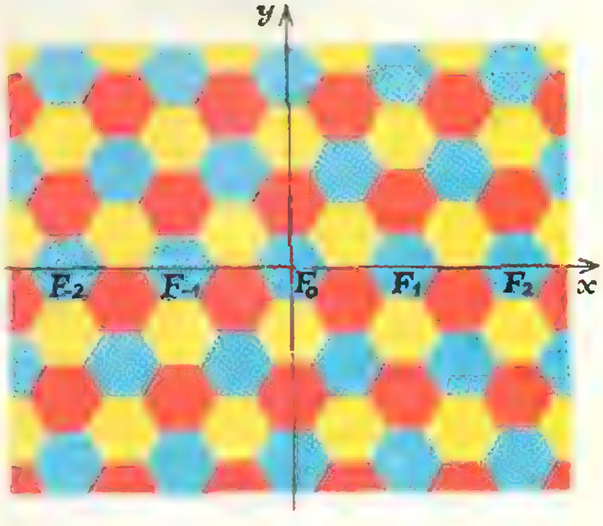


Рис. 6.

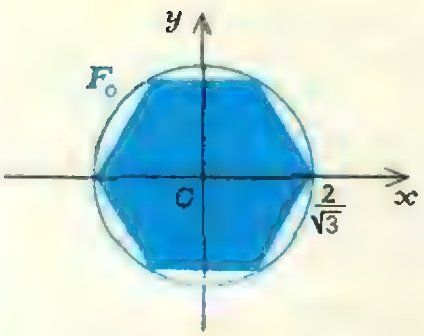


Рис. 7.

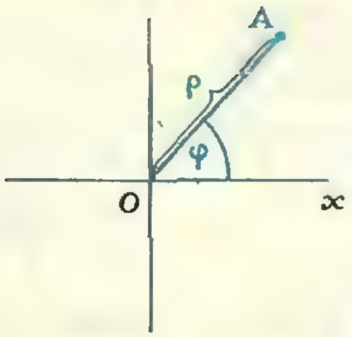


Рис. 8.

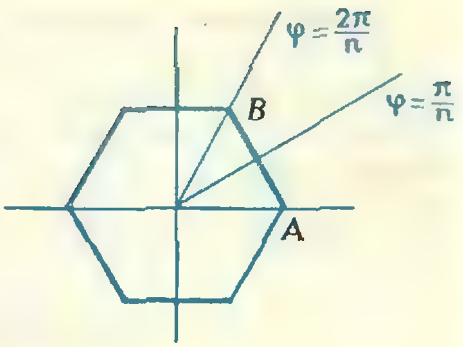


Рис. 9.

F_0 — множество всех внутренних точек шестиугольника с центром в начале координат, вписанного в окружность радиуса $R=\frac{2}{\sqrt3}$ (рис. 7). Уравнение этого шестиугольника можно записать в виде

$$\left[\left|y\right|+\left|\frac{x\sqrt3-1}{2}\right|+\left|\frac{x\sqrt3+1}{2}\right|\right]=1,$$

так как для этих и только этих точек выполняются неравенства

$$1\leqslant|y|+\left|\frac{x\sqrt3-1}{2}\right|+\left|\frac{x\sqrt3+1}{2}\right|<2.$$

Чтобы получить синюю часть паркета, можно сначала произвести над F_0 серию переносов по оси Ox $\left(\text{при } T_1=2\sqrt3,\quad a=-\frac{2}{\sqrt3}\right)$, а затем полосу из фигур F_i (на оси Ox) перенести по диагонали (при $T_2=\sqrt3$, $S=3$, $b=-1$). Уравнение красной части паркета получается из построенного уравнения заменой y на $y-2$, а желтой части — заменой y на $y+2$.

Интересные круговые орнаменты получаются, если воспользоваться полярными координатами.

В полярной системе координат каждая точка A имеет две координаты (рис. 8): расстояние ρ от этой точки до начала координат O и угол φ, который образует луч OA с фиксированной осью (на рисунке 8 — с осью Ox); отсчитывается этот угол в положительном направлении (против часовой стрелки) от оси Ox. «Начало координат» (точка O) имеет координаты $\rho=0$ и любой угол φ; любая другая точка имеет однозначно определенную положительную координату ρ и определенную с точностью до кратных 2π координату φ.

В полярной системе координат, как и в декартовой, можно описывать фигуры уравнениями. Например, уравнение окружности F_0 на рисунке 1 будет $\rho=1$ (как видим, оно гораздо проще уравнения в декартовой системе координат).

Если $f(\rho,\varphi)=0$ — уравнение основной фигуры, содержащейся в секторе $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{n}$, то по аналогии с формулой (6) уравнение

$$f\left(\rho,\ \varphi-\frac{2\pi}{n}\cdot\left[\frac{n\varphi}{2\pi}\right]\right)=0 \qquad (8)$$

задает круговой орнамент, составленный из фигур F_i.

Например, можно написать уравнение правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Уравнение $\rho\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)=R\cos\frac{\pi}{n}$ внутри сектора $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{n}$ задает сторону AB (рис. 9), а после серии поворотов отрезка AB на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$, получается и весь n-угольник. Его уравнение по формуле (8) может быть написано в виде

$$\rho\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n\varphi}{2\pi}\right]\right)=R\cos\frac{\pi}{n}.$$

При $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $n=6$ получается правильный шестиугольник, изображенный на рисунке 7.

На рисунке 10 изображен орнамент, составленный из системы замыкающихся круговых цепочек по шесть кругов в каждой. Основу этого орнамента составляет множество всех внутренних точек первого черного круга с радиусом $r=1$, вписанного в сектор $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{3}$. Уравнение этого круга будет

$$\left[\rho^2-4\rho\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)+4\right]=0.$$

После серии поворотов на углы, кратные $\frac{\pi}{3}$, получается первая круговая цепочка, состоящая из шести кругов радиуса $r=1$, центры которых расположены на окружности радиуса $R=2$. Уравнение этой цепочки легко находится по формуле (8):

$$\left[\rho^2-4\rho\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi+\frac{\pi}{3}\left[\frac{3\varphi}{\pi}\right]\right)+4\right]=0,$$

а следующие круговые цепочки получаются из первой растяжением полярных радиусов соответственно в 3, 9, . . ., 3^k, . . . раз. Уравнение всего орнамента получится из последнего уравнения заменой ρ на $\rho\cdot 3^{-\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]}$.

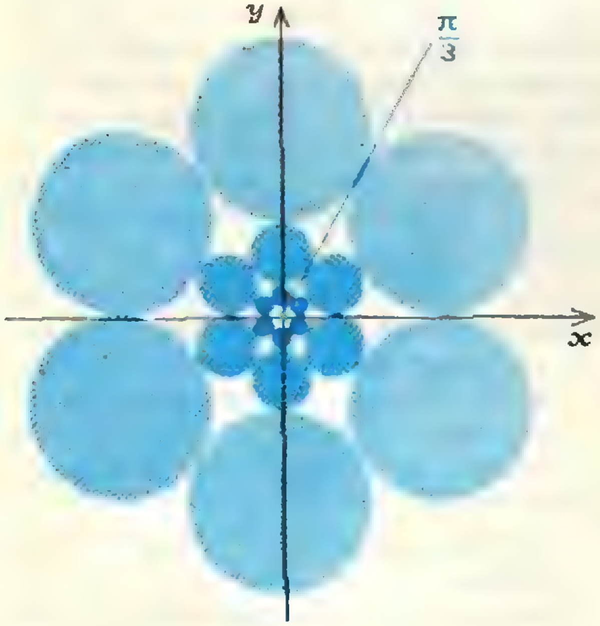


Рис. 10.

В самом деле, если угол φ меняется в пределах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то полярный радиус остается без изменения, так как $\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]=0$. Если φ меняется в пределах $2\pi \leqslant \varphi < 4\pi$, то $\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]=1$ и $\rho\cdot 3^{-\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]}=\frac{\rho}{3}$, а замена ρ на $\frac{\rho}{3}$ в последнем уравнении соответствует преобразованию растяжения всех полярных радиусов в 3 раза. При $4\pi \leqslant \varphi < 6\pi$ получаем $\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]=2$, что соответствует растяжению полярных радиусов в $3^2=9$ раз и т. д.

Окончательно уравнение орнамента записывается в виде

$$\left[3^{-2\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]}\rho^2-4\rho\cdot 3^{-\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi+\frac{\pi}{3}\left[\frac{3\varphi}{\pi}\right]\right)+4\right]=0.$$

Конструирование симметричных конфигураций связано, вообще говоря, с группами преобразований (на плоскости или в пространстве). Но об этом мы рассказывать пока не будем, а посоветуем читателям обратить внимание на следующие книги.

Литература

1. Герман Вейль. Симметрия. «Наука», 1968 г.
2. Мартин Гарднер. Этот правый левый мир. «Мир», 1967 г.
3. Г. Дисафоре и М. Орчин. Симметрия в химии. «Мир», 1967 г.
4. М. Хаммермеш. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. «Мир», 1966 г.

А. К. Кикоин

Спор, длившийся полвека

В 1686 году немецкий философ и естествоиспытатель Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) опубликовал маленькую в две страницы статью с очень длинным заглавием, таким длинным, что мы не станем приводить его здесь полностью. Но начиналось заглавие так: «Краткое доказательство примечательной ошибки Декарта и других относительно...».

Статья эта положила начало знаменитому научному спору между Лейбницем и его сторонниками, с одной стороны, и последователями Декарта (картезианцами, как их обычно называют) — с другой. Сам Рене Декарт (1596—1650) умер еще за 36 лет до появления статьи Лейбница. Этот спор длился более 50 лет.

Какую же ошибку знаменитый философ Лейбниц заметил у не менее знаменитого философа Декарта? О чем шел столь долгий спор?

У всех движущихся тел общим является, конечно, то, что они ...движутся. Но можно ли сказать, что у одних тел «больше движения», а у других меньше, что одни тела движутся «сильнее» других? К тому времени, когда возник спор Лейбниц — Декарт, ученые уже были убеждены в том, что можно и нужно говорить о «силе» движения, о «количестве движения». Не было только ясно, какая величина выражает «силу» или количество движения. Казалось бы, достаточной характеристикой движения является скорость: более «сильно», то есть с большим количеством движения, движется то тело, у которого скорость больше! Но будет ли правильно утверждать, что маленькая пуля, скорость которой равна, например, 700 *м/с*, движется «сильнее», чем крупный снаряд, движущийся со скоростью всего в 300 *м/с*? Очевидно, что важна не только скорость тела. Важно еще, велико или мало движущееся тело.

О величине, выражающей «силу» движения, количество движения, и шел упомянутый спор.

Философские взгляды Лейбница и Декарта были во многом противоположными, но как физики они сходились в том, что «силу» движения нужно характеризовать тем действием, которое движущееся тело оказывает на другое тело, когда оно с ним взаимодействует (например, при ударе). Сходились они и в том, что когда при взаимодействии тел движение передается от одного тела к другому, оно (движение) сохраняется. Это значит, что количество движения (или «сила» движения), потерянное одним из тел, приобретается другим. Значит, и выражается «сила» движения такой величиной, которая при движении тел и их взаимодействиях сохраняется.

В 1644 году Декарт в своей книге «Начала философии» доказывал, что свойством сохранения обладает произведение «величины тела» (то есть его массы) на абсолютное значение его скорости. Это произведение и выражает «силу» движения тела. Здесь Декарт допустил очень важную ошибку: свойством сохранения на самом деле обладает произведение массы тела на **вектор** скорости, а не на ее абсолютное значение. Но Декарт не считал нужным учитывать направление движения, считая, что «движение движению не противоположно».

Против предложенной Декартом величины «силы» движения («количества движения») и выступил в своей статье 1686 года Лейбниц, доказывавший, что «силу» движения должно выражать произведение «величины тела» (массы) на квадрат скорости, так как именно величина этого произведения не меняется в процессе движения. После этого и начался великий спор:

$$mv \text{ или } mv^2?$$

Если выразить сущность спора на современном языке механики, то она сводится к следующему.

Декарт считал, что большей «силой» движения или большим количеством движения обладает тело, у которого больше значение величины mv. И вот почему: если взять два покоящихся тела с массами m_1 и m_2 и подвергнуть их действию сил F_1 и F_2 в течение одного и того же промежутка времени t, то отношение сил F_1 и F_2 будет равно

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1a_1}{m_2a_2}.$$

Умножим и разделим правую часть этого уравнения на t. Тогда получим

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1a_1t}{m_2a_2t}.$$

Но $a_1t=v_1$, а $a_2t=v_2$. Поэтому

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1v_1}{m_2v_2}.$$

Так как отношение сил равно отношению величин mv, то mv и есть количество движения («сила» движения).

Лейбниц же рассуждал так: если взять два тела с массами m_1 и m_2 и подвергнуть их действию сил F_1 и F_2 так, чтобы под действием этих сил оба тела прошли одно и то же расстояние S, то отношение сил будет равно

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1a_1}{m_2a_2}.$$

Умножив и разделив правую часть этого равенства на S, получим

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1a_1S}{m_2a_2S}.$$

Но, как известно, $a_1S=\frac{v_1^2}{2}$, а $a_2S=\frac{v_2^2}{2}$. Поэтому

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2}=\frac{m_1v_1^2}{m_2v_2^2}.$$

Так как отношение сил равно отношению значений величины mv^2, то mv^2 и выражает «силу» движения, или количество движения.

Для картезианцев, таким образом, «силой» движения является величина mv, а для Лейбница и его сторонников — величина mv^2. В 1695 году в ходе спора Лейбниц предложил для величины mv^2 $\left(\text{точнее, для } \frac{mv^2}{2}\right)$ название «живая сила», и оно до сих пор не вышло из употребления. На языке современной механики $\frac{mv^2}{2}$ — это кинетическая энергия тела. Сила, приложенная к телу, изменяет кинетическую энергию, и это изменение равно работе силы, то есть равно FS. Величина же mv — это импульс тела. Он тоже изменяется под действием приложенной к телу силы, и его изменение равно импульсу силы, то есть равно Ft.

Кто же был прав в этом споре?

Как это ни странно, но в этом долгом споре нет ни победителя, ни побежденного. Обе стороны были и правы, и не правы. Правы потому, что обе величины — mv и mv^2 являются важными характеристиками движения. Значение величины mv определяет **время**, в течение которого первоначально покоившееся тело под действием данной силы изменяет свою скорость от нуля до v. Значение же mv^2 $\left(\text{точнее, значение } \frac{mv^2}{2}\right)$ определяет **расстояние**, которое тело должно пройти под действием данной силы, пока его скорость изменяется от нуля до v.

На это именно и указал в 1743 году французский ученый Даламбер. Так как каждая из предложенных участниками спора величин может считаться мерой «силы» движения, то спор, длившийся так долго, есть, по словам Даламбера «...бесплодный...спор о словах, недостойный философов». Спор, таким образом, пришел к естественному концу.

Но обе стороны были неправы потому, что ни величина $m|v|$, где $|v|$ — модуль скорости, ни величина $\frac{mv^2}{2}$ не обладают свойством сохранения при взаимодействиях. Свойством сохранения в действительности обладает величина $m\mathbf{v}$. Что касается $\frac{mv^2}{2}$, то во всех случаях, когда кинетическая энергия переходит в какой-либо другой вид энергии, например, в потенциальную энергию взаимодействия, в тепло, в энергию электрического тока и т. д., она вообще не сохраняется. Она, в сущности, не сохраняется и в том процессе, изучение которого и привело к идее о сохранении величины mv^2,— в процессе упругого удара шаров. Если, например, сталкиваются два шара одинаковой массы, движущиеся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v, то значения mv^2 до и после столкновения одинаковы. Но в самый момент удара величина mv^2 (точнее, кинетическая энергия $mv^2/2$) равна нулю! Сохраняется не mv^2, а то, что мы называем теперь полной энергией.

Может показаться странным, что спор, начавшийся в 1686 году, мог продолжаться так долго. Ведь в том же 1686 году Ньютон представил свой знаменитый труд «Математические начала натуральной философии», в котором была изложена механика Ньютона. А из нее как будто бы ясно видно, что спорить, собственно, и не о чем было. Но дело в том, что механика Ньютона далеко не сразу получила всеобщее признание, особенно за пределами Англии. Поэтому спорящие стороны не пользовались ни понятием массы, ни понятием силы в «ньютоновском» смысле. Слово «сила» означало у спорящих именно «силу» движения, а не причину ускорения тел. К тому же Ньютон не знал, конечно, о существовании закона сохранения энергии (ведь само понятие работы и энергии появилось лишь спустя сто с лишним лет) и, вообще, не придавал значения законам сохранения. И еще долго слово «сила» применялось одновременно и в ньютоновском смысле (сила — причина ускорения), и в смысле Лейбница, хотя то, что у Лейбница называется «силой», в действительности есть энергия. Отголоском тех далеких времен в какой-то мере являются такие современные выражения, как электродвижущая сила (энергия, приходящаяся на единицу электрического заряда), лошадиная сила (до недавнего времени — единица мощности) и т. д.

Любопытно, что когда в 1847 году появилась статья известного немецкого ученого Германа Гельмгольца, в которой был сформулирован один из самых важных законов природы — закон сохранения энергии, то в заголовке этой статьи стояли слова: «О сохранении силы»!

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

ФИГУРЫ ЛИССАЖУ

Н. А. Силаева

В «Кванте» № 1 за 1972 год мы уже рассказывали об опытах с одним из самых простых физических приборов — маятником *). В этой статье мы расскажем еще о нескольких опытах, которые вы можете провести у себя дома.

Самые простые колебания тела — это колебания, при которых отклонение x тела от положения равновесия изменяется по закону

$$x = a \sin(\omega t + \varphi),$$

где a — амплитуда, ω — частота, φ — начальная фаза колебаний.

Такие колебания называются гармоническими. Гармонические колебания совершают математический маятник, грузик на пружине, напряжение в электрическом контуре.

В этой статье мы рассмотрим случай, когда тело участвует одновременно в двух гармонических колебаниях. Если оба колебания происходят вдоль одной прямой, то уравнение движения тела будет представлено суммой уравнений двух движений:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Нетрудно построить график смещения тела от положения равновесия в зависимости от времени. Для этого нужно сложить ординаты кривых, соответствующих первому и второму движениям. На рисунке 1 показан пример сложения двух гармонических колебаний (черные синусоиды). Красная линия соответствует результирующему колебанию. Оно уже не является гармоническим.

Более сложные траектории получаются при сложении колебаний в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Примером такого колебания может служить движение тела, изображенного на рисунке 2. В этом случае вид траекторий зависит от соотношения частот, амплитуд и фаз взаимно перпендикулярных колебаний. Эти траектории называют фигурами Лиссажу, по имени французского физика Лиссажу, который в 1863 году впервые описал их. Установка, использованная Лиссажу,

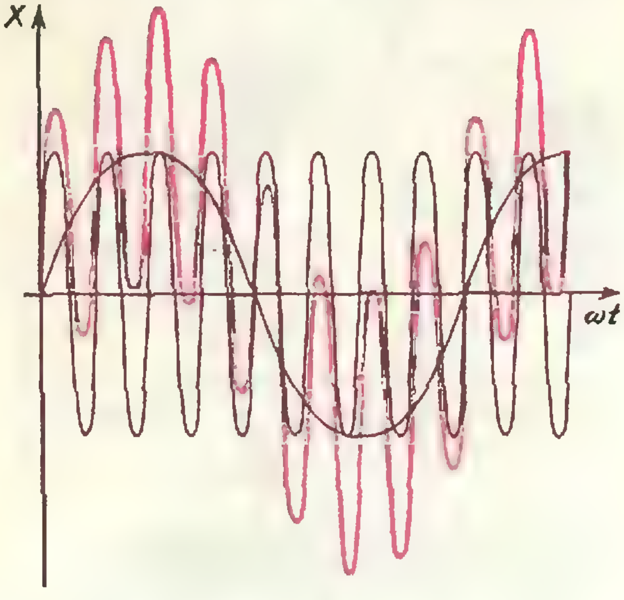


Рис. 1. Колебания, описываемые черными кривыми, имеют одинаковые начальные фазы и амплитуды, но различные частоты.

---

*) Г. Л. Коткин, Опыты с маятниками, «Квант» № 1, 1972 г.

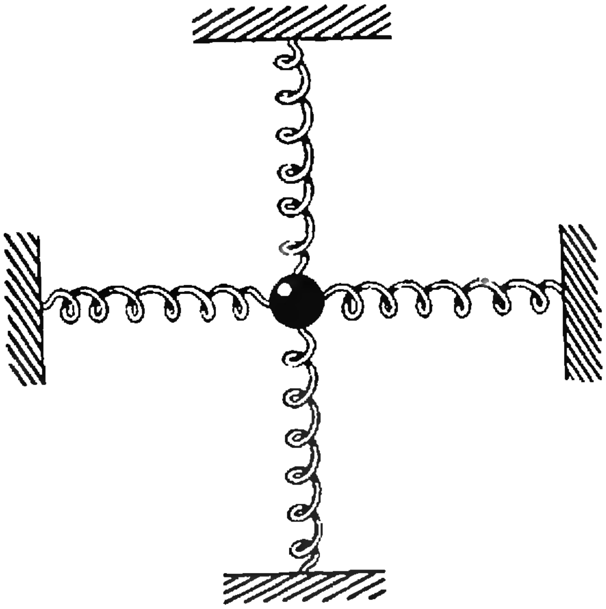


Рис. 2.

показана на рисунке 3. Камертон T' колеблется в горизонтальной плоскости, камертон T — в вертикальной. Луч света проходит через линзу и попадает на зеркальце, прикрепленное к камертону T', отражается им, попадает на зеркальце, прикрепленное к камертону T, и после вторичного отражения попадает на экран. При колебании только одного камертона светлое пятно на экране колеблется вдоль прямой линии. Если колеблются оба камертона, пятно может описывать замысловатые траектории.

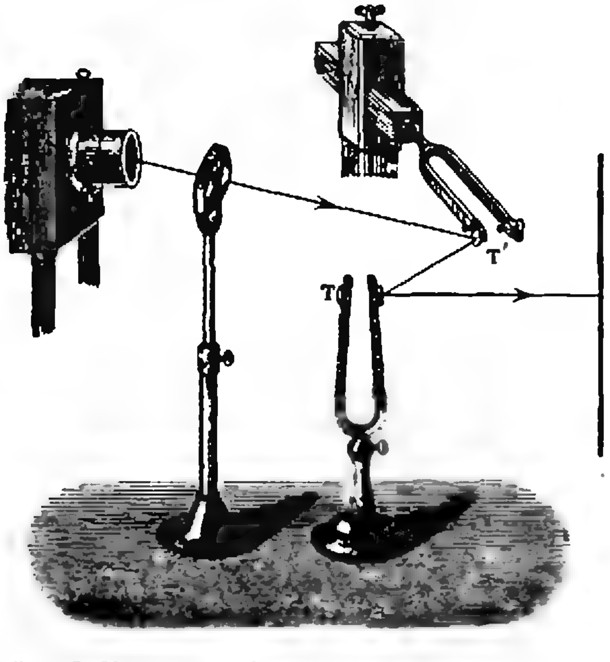


Рис. 3. Установка Лиссажу.

Траектория движения тела в том случае, когда оно одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описывается системой уравнений

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),\quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad (1)$$

где x и y — проекции смещения тела на оси X и Y.

Допустим для простоты, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда

$$x = A_1 \sin \omega t,\quad y = A_2 \sin \omega t. \qquad (2)$$

Это означает, что $y = \frac{A_2}{A_1} x$; следовательно, соотношения (2) описывают отрезок прямой. Угол наклона α к оси X определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1}.$$

Пусть теперь $\varphi_1 = \varphi_1' + \frac{3\pi}{2}$. Тогда

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1'),\quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (3)$$

Разберем сначала самый простой случай, когда $A_1 = A_2$, $\varphi_1' = \varphi_2 = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то есть

$$x = A \cos \omega t,\quad y = A \sin \omega t. \qquad (4)$$

Точка с координатами x и y, определяемыми этими уравнениями, описывает окружность радиуса A. Действительно, $x^2 + y^2 = A^2 \cos^2 = \omega t + A^2 \sin^2 \omega t = A^2$. А это и означает, что траектория движения — окружность.

Пусть теперь $A_1 \neq A_2$. Построим траекторию движения для случая $A_1 = 1$, $A_2 = 2$. В момент максимального отклонения $x = A_1 = 1$, то есть $\cos \omega t = 1$, $\omega t = 0$ и, следовательно, $y = 2 \sin \omega t = 0$. Аналогично, при $x = 0$ $y = 2$, при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $y = \sqrt{2}$ и так далее.

Построив по этим координатам график, мы получим эллипс, большая полуось которого равна A_2, а малая — A_1, то есть эллипс вытянут по оси Y (рис. 4, *а*) *). Нетрудно показать, что при $A_1 = 2$ и $A_2 = 1$ мы получим эллипс, вытянутый по оси X (рис. 4,*б*).

Таким образом, ясно, что, меняя соотношение амплитуд, можно получать различные эллипсы.

Пусть теперь $\omega_1 = 2\omega$, $\omega_2 = \omega$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$. Тогда система уравнений (3) приобретает вид

$$x = A_1 \cos 2\omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Преобразуем уравнение для x следующим образом:

$$x = A_1 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)$$
$$= A_1 (1 - 2\sin^2 \omega t) = A_1 \left(1 - 2\frac{y^2}{A_2^2}\right).$$

Эта кривая — часть параболы с осью вдоль оси X и вершиной в точке $x = A_1$ (рис. 5). Таким образом, мы получили незамкнутую кривую.

Рассмотрим теперь влияние частот на форму траектории, а амплитуды поперечного и продольного колебаний, описываемых системой уравнений (3), возьмем одинаковыми. Построим, например, кривые, соответствующие уравнениям

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t, \\ y = A\sin 2\omega t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = A\cos\omega t, \\ y = A\sin 4\omega t. \end{cases}$$

Сделать это проще всего так. Возьмем окружность радиуса A (рис. 6), отметим на ней точки, соответствующие углам ωt, равным 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{8}$, π, . . . , 2π.

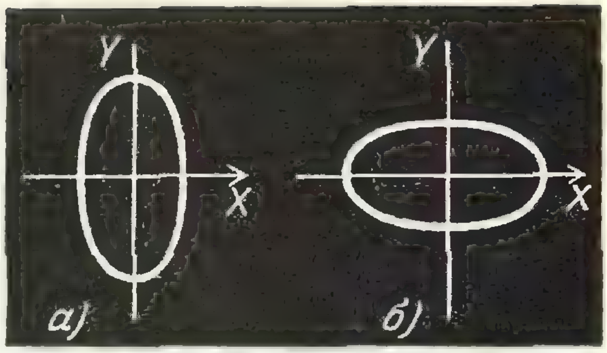


Рис. 4.

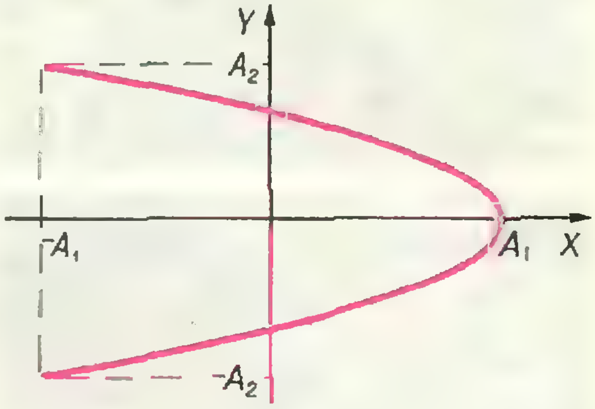


Рис. 5.

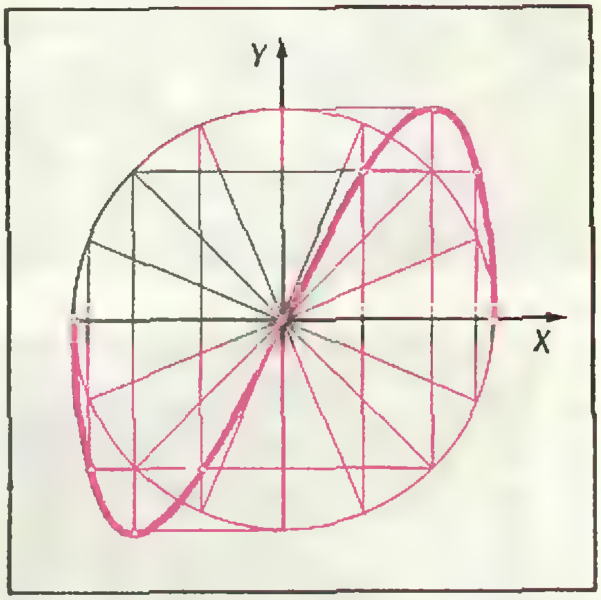


Рис. 6. Построение кривой, соответствующей системе $x = A\cos\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$.

Чтобы найти точки с координатами $x = A\cos\omega t$ и $y = A\sin 2\omega t$, вспомним, что в случае окружности единичного радиуса ($r = 1$) $\cos\omega t$ численно равен проекции радиуса-вектора $r(\omega t)$ на ось X, а $\sin\omega t$ — проекции на ось Y. Так как мы

---

*) То, что система уравнений

$$\begin{cases} x = A_1\cos\omega t, \\ y = A_2\sin\omega t \end{cases}$$

описывает эллипс, можно показать и аналитически:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1,$$

то есть точка с координатами x и y лежит на эллипсе. (См. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс», опубликованную в «Кванте» № 9, 1970 г.)

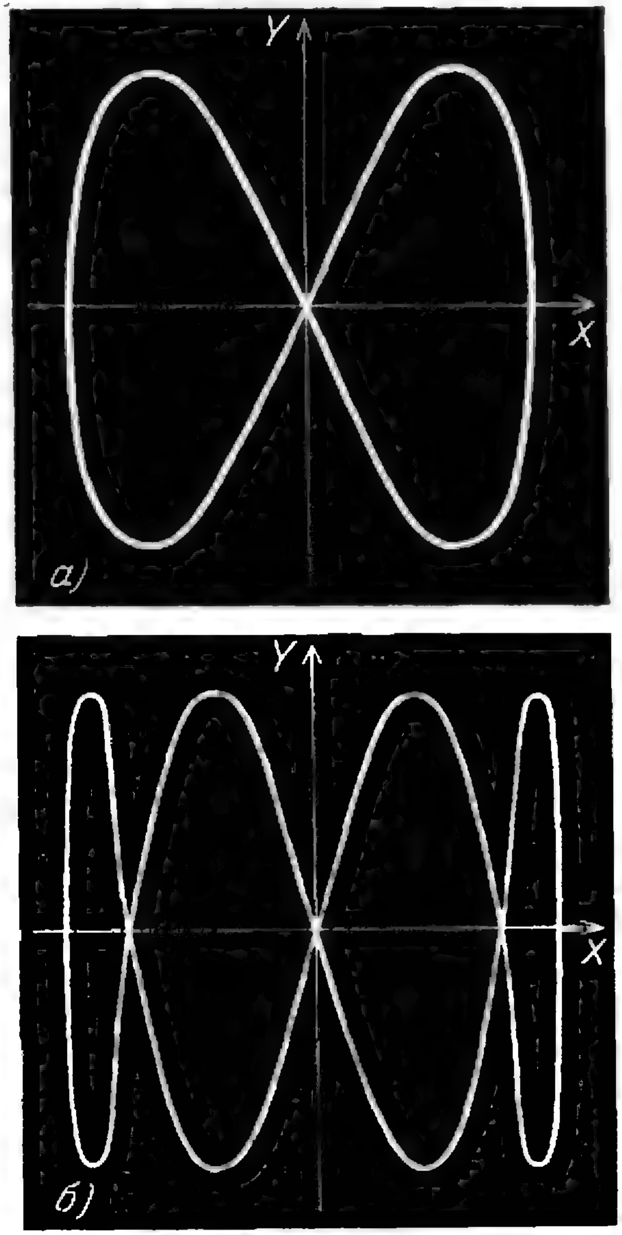


Рис. 7.

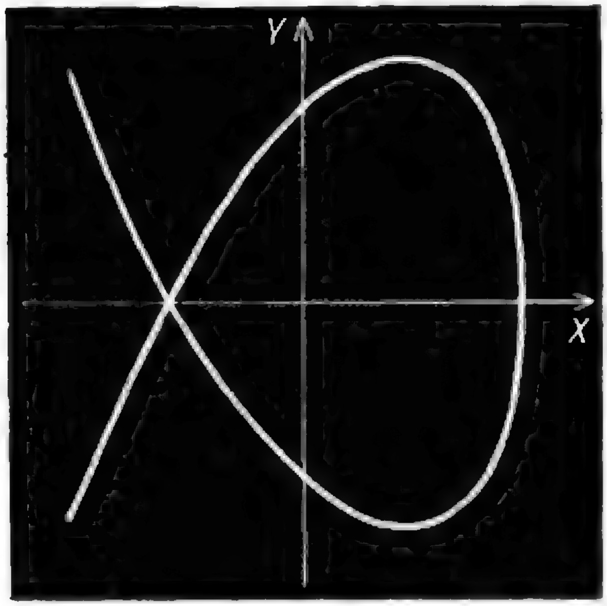


Рис. 8.

взяли окружность радиуса A, то координаты x и y каждой точки окружности — это проекции радиусов-векторов этих точек на оси X и Y.

Для обоих случаев получаются замкнутые кривые, число петель которых соответствует отношению $n = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ (рис. 7, *а*, *б*).

Фигура, приведенная на рисунке 8, незамкнута. Она соответствует системе уравнений

$$x = \cos 2\,\omega t,$$
$$y = \sin 3\,\omega t.$$

В каком же случае получаются незамкнутые фигуры? Можно ли найти общие закономерности? Рассмотрим уравнения в виде

$$x = A_1 \cos p\omega t,$$
$$y = A_2 \sin q\omega t.$$

Прежде всего заметим, что в той точке, где кривая поворачивает обратно по той же траектории, скорости тела вдоль осей X и Y одновременно обращаются в нуль. Ведь именно в этом случае тело, двигаясь вдоль кривой, останавливается, а затем начинает двигаться обратно. Если $x = A_1 \cos p\omega t$, то

$$v_x = \frac{A_1 \cos p\omega t_2 - A_1 \cos p\omega t_1}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{-2A_1 \sin\frac{p\omega t_2 + p\omega t_1}{2}\,\sin\frac{p\omega t_2 - p\omega t_1}{2}}{t_2 - t_1}.$$

Когда $t_2 \approx t_1 = t$ (разность $t_2 - t_1$ мала), $\sin\frac{p\omega t_2 - p\omega t_1}{2} \approx \frac{p\omega t_2 - p\omega t_1}{2}$.

В результате

$$v_x = -A_1 p\omega \sin p\omega t.$$

Аналогично для v_y получаем

$$v_y = A_2 q\omega \cos q\omega t.$$

Посмотрим, когда скорости v_x и v_y обращаются в нуль.

$$v_x = 0, \text{ если } p\omega t = k\pi,$$

$$v_y = 0, \text{ если } q\omega t = \frac{\pi}{2} + m\pi.$$

Из этих условий ясно, что фигура Лиссажу получается незамкнутой в

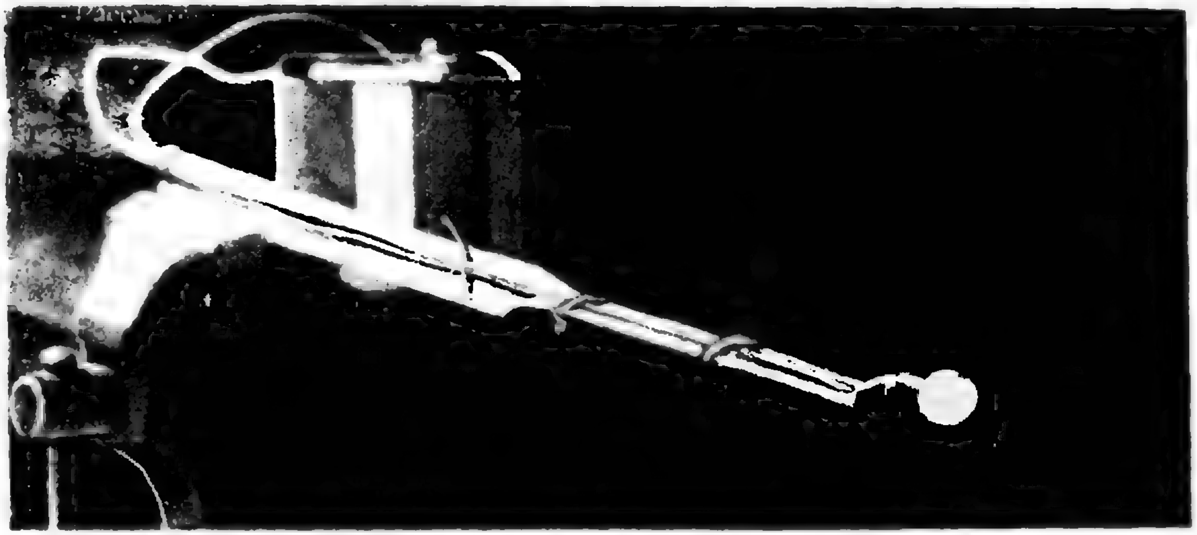


Рис. 9.

тех случаях, когда

$$\frac{p}{q} = \frac{2k}{2m+1}.$$

В частности, кривая на рисунке 8 удовлетворяет этому условию.

Фигуры Лиссажу можно наблюдать на экране осциллографа. На вертикальную развертку подается одно гармоническое колебание, на горизонтальную — другое. Их сумма может принимать разнообразные формы. Для этого достаточно менять частоту переменного напряжения на обкладках осциллографа.

Каждый из вас может сам сделать очень простое устройство для наблюдения и фотографирования фигур Лиссажу. Возьмите обыкновенную металлическую линейку и изогните ее так, чтобы плоскость одной половины линейки была перпендикулярна плоскости второй ее половины (см. рис. 9).

Один из концов линейки зажмите в тиски. Если теперь качнуть свободный конец линейки, он будет описывать в воздухе замысловатые фигуры. Это и будут фигуры Лиссажу.

Движение свободного конца линейки складывается из независимых колебаний двух частей линейки. Одна — от тисков до перегиба и вторая — от перегиба до конца. Колебания каждой части перпендикулярны плоскости линейки на этом отрезке. Поскольку угол перегиба линейки равен $\frac{\pi}{2}$, колебания взаимно перпендикулярны. Вид траектории конца линейки зависит от длины и ширины линейки и от того, в каком месте ее перегнуть.

Для получения разных фигур можно использовать одну и ту же линейку. Чтобы изменять соотношение частот вертикального и горизонтального колебаний, достаточно зажимать линейку в тиски в разных местах.

Так как частота колебаний зависит от длины линейки, то, меняя соотношения между длинами частей линейки, вы будете менять соотношения между частотами взаимно перпендикулярных колебаний конца линейки. При этом вы будете получать различные траектории конца линейки.

Чтобы сфотографировать получающиеся фигуры, к свободному концу надо прикрепить маленькую лампочку от карманного фонарика. Лампочка проводами, протянутыми вдоль линейки, соединяется с батарейкой (рис. 9). Поместив наш сложный маятник в темной комнате, можно сфотографировать колебания линейки. Время экспозиции должно быть достаточно велико. Его вы можете определить, проведя несколько опытов с разной экспозицией. На

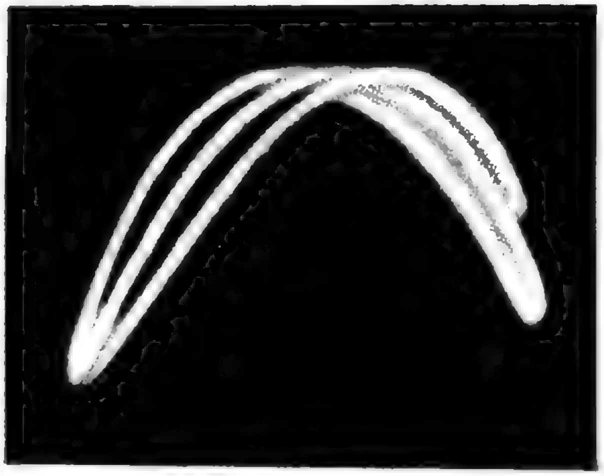


Рис. 10. а.

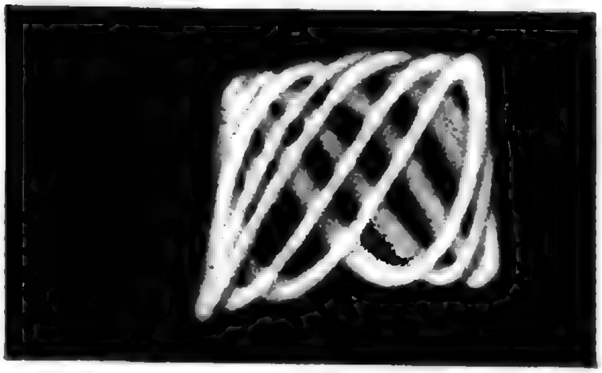


Рис. 10. б.

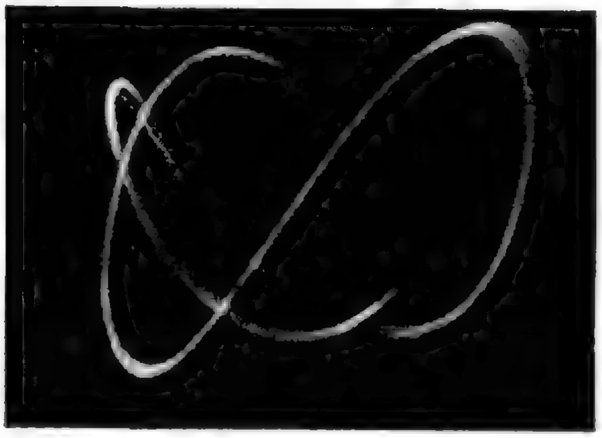


Рис. 10. в.

рисунке 10 приведены фотографии, полученные именно таким способом.

Попробуйте провести подобные опыты самостоятельно.

Упражнения

1. Докажите, что все кривые, описываемые системой уравнений

$$x = A_1 \cos p\omega t,\quad y = A_2 \cos q\omega t,$$

незамкнуты.

2. Получите уравнение кривой

$$x = A_1 \cos \omega t,$$
$$y = A_2 \cos 2\omega t.$$

НЕСКОЛЬКО ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Правда и ложь

Некто всегда говорит правду, а некто другой всегда лжет. Какой вопрос надо им задать, чтобы они дали на него одинаковый ответ?

2. Только правда

Некто всегда говорит правду, но когда ему дважды задали один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Какой это вопрос?

3. Переправа через реку

К реке подошли три туриста. На берегу стояла одна двухместная лодка, и не было никаких других средств переправы. Пользуясь этой лодкой, каждый из туристов переправился на противоположный берег, причем было сделано четное число рейсов. Сколько именно? (Найти наименьшее четное число рейсов.)

4. Лотерейный билет

Я купил лотерейный билет, у которого сумма цифр его пятизначного номера равна возрасту моего соседа. Каков номер этого билета?.

Примечание. Мой сосед без труда решил эту задачу.

Б. Ю. Коган

(Ответы смотрите на стр. 50.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Э. Г. Готман

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

В этой статье рассказывается о том, как с помощью теоремы косинусов решать разнообразные геометрические задачи. Сама теорема косинусов не доказывается.

Для вычисления элементов треугольника по двум сторонам и углу между ними или по трем сторонам применяется соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\cos A, \quad (\cdot)$$

называемое «теоремой косинусов».

Теорему косинусов можно использовать и при решении более трудных задач.

Пример 1. *Найти площадь параллелограмма, если известны его стороны a и b и острый угол α между диагоналями.*

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем $AB = a$ и $BC = b$ (рис. 1). Будем считать, что $a > b$ *). Тогда угол BOC между диагоналями — острый, и согласно условию задачи $\measuredangle\ BOC = \alpha$.

Если обозначить длину диагонали AC через $2x$, а длину диагонали BD через $2y$, то площадь параллелограмма S равна $2xy\sin\alpha$. Из треугольников AOB и BOC, используя теорему косинусов, найдем стороны a и b:

$$a^2 = x^2 + y^2 + 2\ xy\cos\alpha,$$
$$b^2 = x^2 + y^2 - 2\ xy\cos\alpha.$$

Поэтому

$$a^2 - b^2 = 4xy\cos\alpha,$$

откуда

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{4\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{(a^2 - b^2)\sin\alpha}{2\cos\alpha}$$

или

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Примечание. Если A — угол параллелограмма, то $S = ab\sin A$, откуда следует, что $0 < S \leqslant ab$. Поэтому

$$\frac{a^2 - b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha \leqslant ab \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Таким образом, чтобы задача имела решение, необходимо параметры a, b и α выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$a > b > 0, \quad \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

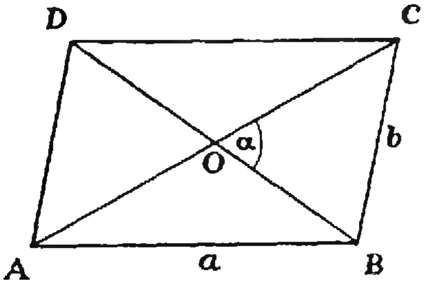


Рис. 1.

---

*) Если $a = b$, то параллелограмм является ромбом, а угол между диагоналями — прямой.

С помощью известных формул геометрии и тригонометрии из теоремы косинусов можно вывести некоторые соотношения, связывающие элементы любого треугольника.

Пример 2. *Доказать, что стороны, углы и площадь S треугольника ABC удовлетворяет соотношению*

$$\mathrm{ctg}\,A + \mathrm{ctg}\,B + \mathrm{ctg}\,C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Решение. Из формулы $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ находим, что $bc = \frac{2S}{\sin A}$ Подставив в формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\,A$ вместо $2bc$ выражение $\frac{4S}{\sin A}$, получим соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4\,S\,\mathrm{ctg}\,A. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\mathrm{ctg}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}.$$

Если в соответствии с этой формулой выразить через стороны треугольника $\mathrm{ctg}\,B$ и $\mathrm{ctg}\,C$ и полученные выражения сложить, то мы получим тождество

$$\mathrm{ctg}\,A + \mathrm{ctg}\,B + \mathrm{ctg}\,C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Пример 3. *Доказать, что для любого треугольника справедливы неравенства*

$$\text{а)}\ \sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}},$$

$$\text{б)}\ \mathrm{tg}\,\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2h_a},$$

где a, b, c — стороны треугольника ABC и h_a — высота, проведенная из вершины A.

Решение. а) Формулу (•) можно записать так:

$$a^2 = (b - c)^2 + 2bc\,(1 - \cos A).$$

Если $1 - \cos\,A$ заменить теперь $2\sin^2\frac{A}{2}$, то мы придем к такой формуле

$$a^2 = (b - c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Поэтому

$$a^2 \geqslant 4bc\sin^2\frac{A}{2},$$

или

$$\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}},$$

причем равенство достигается только при $b = c$.

б) Формулу (2) легко привести к такому виду:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}. \qquad (3)$$

Для этого достаточно выполнить следующие преобразования:

$$bc\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2S}{\sin A}\sin^2\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{2S\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = S\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}.$$

Из формулы (3) вытекает неравенство $a^2 \geqslant 4S\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$, откуда $\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} \leqslant \frac{a^2}{4S}$.

Учитывая, что $S = \frac{1}{2}\,ah_a$, получим неравенство $\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2h_a}$.

Из приведенных примеров видно, что формулу

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\,A$$

с помощью несложных преобразований можно привести к одному из видов 1—3. Аналогично выводятся следующие соотношения:

$$a^2 = (b + c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}, \qquad (4)$$

$$a^2 = (b + c)^2 - 4S\,\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь несколько задач, решающихся с помощью формул (1) — (5).

Пример 4. *Вычислить площадь треугольника, если даны его стороны.*

Решение. Перепишем соотношения (3) и (5) следующим образом:

$$4S\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}=a^2-(b-c)^2,$$

$$4S\,\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2.$$

Если периметр треугольника обозначить через $2p$, то

$a^2-(b-c)^2=(a+b-c)\times$
$\times(a+c-b)=4\,(p-b)\times(p-c)$,
$(b+c)^2-a^2=(a+b+c)\times$
$\times\,(b+c-a)=4p\,(p-a)$.

Следовательно,

$$S\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}=(p-b)(p-c),$$

$$S\,\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}=p\,(p-a).$$

Перемножив эти равенства почленно, получим известную формулу Герона для вычисления площади треугольника

$$S^2=p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c).$$

Пример 5. *Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Через точку M, лежащую на стороне AB, параллельно сторонам AC и BC треугольника проведены прямые, пересекающие эти стороны соответственно в точках K и L. Вычислить площадь треугольника KLM, если* $KL=d$ (рис. 2).

Решение. Обозначим отрезки KM и LM соответственно через x и y. Треугольники AKM и BLM равносторонние, следовательно, $AM=x$, $BM=y$, $x+y=a$ и $\angle KML=60°$. Для вычисления площади S треугольника KLM воспользуемся формулой (5):

$$d^2=(x+y)^2-4\,S\,\mathrm{ctg}\,30°.$$

Получим

$$d^2=a^2-4S\sqrt{3},$$

откуда

$$S=\frac{(a^2-d^2)\sqrt{3}}{12}.$$

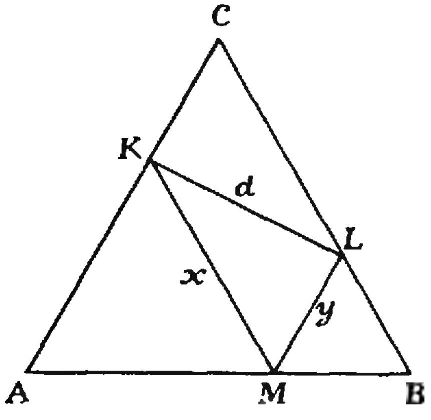


Рис. 2.

Примечание. Из полученной формулы видно, что $d<a$. Можно показать, что одного этого условия, налагаемого на параметры a и d, еще недостаточно, чтобы задача имела решение. В самом деле, применим теорему косинусов к треугольнику KLM:

$d^2=x^2+(a-x)^2-2\,x\,(a-x)\times$
$\times\cos 60°$

или

$$d^2=3\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4},$$

где $0<x<a$.

Отсюда следует, что при $x=\frac{a}{2}$ отрезок KL имеет наименьшее значение $d_{\min}=\frac{a}{2}$ и также, что $d<a$.

Таким образом, множество допустимых значений параметра d определяется неравенством $\frac{a}{2}\leqslant d<a$.

Пример 6. *Данный треугольник разделить на две равновеликие части отрезком наименьшей длины.*

Решение. Пусть отрезок MN делит площадь треугольника ABC пополам (рис. 3). Если точки M и N лежат на сторонах угла BAC и S — площадь треугольника ABC, то площадь треугольника AMN равна $\frac{1}{2}S$, и по формуле (3)

$$MN^2=(AM-AN)^2+2S\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}.$$

Отсюда сразу находим, что при $AM=AN$ отрезок MN имеет наименьшую длину, равную $\sqrt{2S\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}}$.

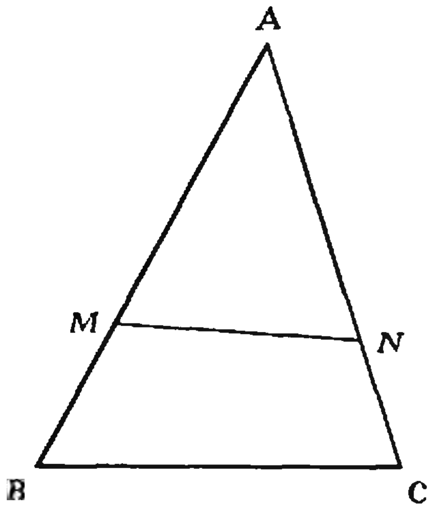


Рис. 3.

Длину отрезка AM легко вычислить, поскольку

$$S = AM^2 \sin A = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

откуда

$$AM = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

Ясно, что если концы отрезка MN лежат на сторонах угла B треугольника, то наименьшая длина этого отрезка равна $\sqrt{2S \operatorname{tg}\frac{B}{2}}$.

Пусть $a < b < c$, тогда

$$\sqrt{2S \operatorname{tg}\frac{A}{2}} < \sqrt{2S \operatorname{tg}\frac{B}{2}} < \sqrt{2S \operatorname{tg}\frac{C}{2}}.$$

Поэтому длина минимального отрезка MN равна $\sqrt{2S \operatorname{tg}\frac{A}{2}}$. При этом $AM = AN = \sqrt{\frac{bc}{2}}$.

Построение отрезка MN всегда возможно; так как $c < a + b < 2b$, то $\sqrt{\frac{bc}{2}} < b$ и подавно $\sqrt{\frac{bc}{2}} < c$.

В заключение приведем несколько задач, которые предлагаем читателю решить самостоятельно.

1. На сторонах треугольника с углом 60° вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что сумма площадей данного треугольника и треугольника, построенного на стороне, противолежащей углу в 60°, равна сумме площадей двух других треугольников.

2. На сторонах треугольника ABC, угол C которого равен 135°, вне его построены квадраты $ABMN$, $BCKL$ и $CAPQ$. Докажите, что площадь шестиугольника $KLMNPQ$ равна удвоенной площади квадрата $ABMN$.

3. Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB=5$, $BC=2$ и угол между его диагоналями составляет 45°.

4. Выразите тригонометрические функции половинных углов треугольника через его стороны.

5. Докажите, что стороны треугольника ABC удовлетворяют равенству $a^2+b^2=2c^2$ тогда и только тогда, когда углы треугольника связаны соотношением

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} C.$$

6. Стороны треугольника ABC связаны зависимостью $a^2 + b^2 = nc^2$, где $n > 1$. Докажите, что $\cos C \geqslant \frac{n-1}{n}$.

7. Докажите, что углы любого треугольника удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \leqslant \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

8. В окружность вписан равносторонний треугольник со стороной a. Докажите, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2,$$

где x, y, z — расстояния от произвольной точки окружности до вершин треугольника.

9. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и AC в точках M и N. Определите угол A треугольника, если $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{6}$ и $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{7}$.

10. Найдите площадь треугольника ABC, зная угол A и отрезки m и n, на которые точка касания вписанной окружности делит сторону BC.

11. Даны прямая l и две точки A и B, не лежащие на ней. Найдите на прямой l точку M, для которой отношение $\frac{AM}{BM}$ принимает а) наибольшее значение; б) наименьшее значение.

12. Докажите, что углы любого треугольника удовлетворяют неравенству

$$\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

13. Около окружности радиуса r описана трапеция с основаниями a и b ($a > b$). Вычислить угол между ее боковыми сторонами.

14*). Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливо такое соотношение:

$$16S^2 = (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2).$$

---

*) Эту задачу прислал наш читатель В. П. Гаспарян.

ЗАДАЧНИК Кванта

ЗАДАЧИ

В этом номере мы помещаем задачи, предлагавшиеся на заключительных турах Всесоюзной математической и физической олимпиад в апреле этого года.

Решения задач этого номера можно присылать не позднее 15 сентября по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант».

После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете (например: «Задачник «Кванта», М151, Ф153.)

Решения задач по математике и физике, а также новые задачи по каждому предмету посылайте в отдельных конвертах. В начале писем укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь).

М151. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Доказать, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку. (8, 10 кл.).

Б. М. Ивлев

М152. Пусть a, b, m, n — натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a>1$. Доказать, что если a^m+b^m делится на a^n+b^n, то m делится на n (9*), 10 кл.).

Д. Ю. Григорьев.

М153. Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее по своему усмотрению вместо одной из звездочек в следующей разности:

$$\begin{array}{r} *\;*\;*\;* \\ -\;*\;*\;*\;* \\ \hline \end{array}$$

Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Доказать, что

а) второй может расставлять цифры так, чтобы получившаяся при этом разность стала не больше 4000, независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000, независимо от того, куда расставляет цифры второй (8 кл.).

Ю. И. Ионин.

М154. На прямой дано 50 отрезков. Доказать, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;

б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки (8, 9 кл.).

А. Г. Харазишвили.

М155. Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1.

---

*) В 9 классе эта задача предлагалась для частного случая $b=1$

Доказать, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2 (9, 10 кл.).

Г. А. Гальперин.

Ф163. Согласно одной из первых моделей атома водорода (модель Томсона), он представляет собой равномерно заряженный положительным электричеством шар, в центре которого находится электрон. В целом атом нейтрален. Найти радиус такого атома, если известно, что минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону для удаления его из атома на большое расстояние, равна W. Заряд электрона e. (10 кл.)

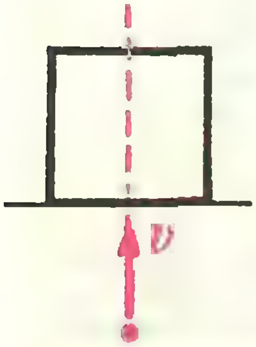


Рис. 1.

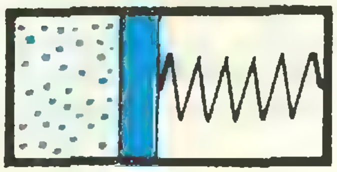


Рис. 2.

Ф164. Кубик из пенопласта массой $M=100$ *г* лежит на горизонтальной подставке. Высота кубика равна $a=10$ *см*. Снизу кубик пробивает вертикально летящая пуля, массой $m=10$ *г* (см. рис. 1). Скорость пули при входе в кубик $v_1=100$ *м/с*, при вылете $v_2=95$ *м/с*. Подпрыгнет ли кубик? (8, 9 кл.)

А. Р. Зильберман

Ф165. Определить, во сколько раз изменится освещенность изображения Солнца, полученного плосковыпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами. (10 кл.)

В. Н. Листвин

Ф166. В расположенном горизонтально цилиндре с одной стороны от закрепленного поршня находится 1 *моль* идеального газа. В другой части цилиндра вакуум. Пружина, расположенная между поршнем и стенкой цилиндра, находится в недеформированном состоянии (рис. 2). Цилиндр теплоизолирован от окружающей среды. Поршень освобождают и после установления равновесия объем, занимаемый газом, увеличивается вдвое. Как изменится температура газа и его давление? Теплоемкости цилиндра, поршня и пружины пренебрежимо малы. (9 кл.)

Е. И. Бутиков, А. А. Быков,
А. С. Кондратьев

Ф167. К выходу «черного ящика» подключен идеальный амперметр. Если ко входу подключена батарея с э.д.с. E и внутренним сопротивлением r, то ток через амперметр ровно в 2 раза меньше, чем в том случае, когда ко входу ящика подключены две такие батареи, соединенные последовательно. Нарисовать простейшую возможную схему внутреннего устройства «черного ящика». (8, 9 кл.)

А. Р. Зильберман

ЗАДАЧНИК КВАНТА

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М108—М109.

М108

а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

Решим сразу задачу. б). Пусть некоторая прямая пересекает контур многоугольника, описанного около окружности с центром O, в точках P и Q, которые делят периметр многоугольника пополам. Тогда отрезки OP и OQ разбивают этот многоугольник на два равновеликих многоугольника (чтобы убедиться в этом, достаточно соединить точку O со всеми вершинами многоугольника и заметить, что высоты у всех получившихся треугольников с вершиной O равны радиусу окружности). Но если и прямая PQ делит площадь многоугольника на две равные части, то точка O должна лежать на отрезке PQ (иначе образуется «лишний» треугольник OPQ (см. рис. 1)).

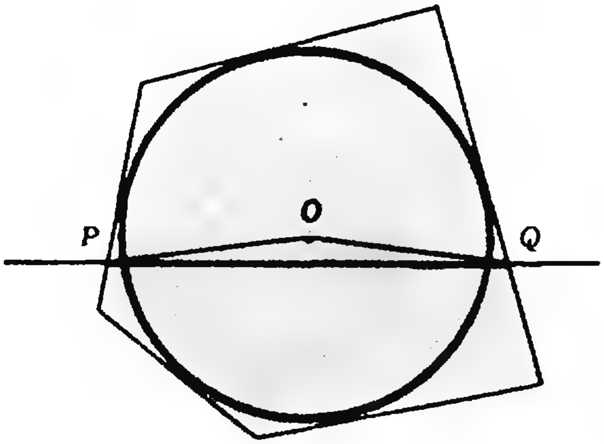


Рис. 1.

То же рассуждение позволяет доказать чуть более общий факт (для треугольника он приведен в книге «Задачи и теоремы по геометрии» З. А. Скопеца и В. А. Жарова, Учпедгиз, 1962, задача 565): *прямая, пересекающая описанный многоугольник, делит его площадь и периметр в одинаковых отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр окружности.*

Любителям геометрических неравенств предоставляется исследовать вопрос: сколько существует прямых, делящих пополам площадь и периметр треугольника со сторонами a, b и c? Ответ и указание даны на стр. 60. Максимальное количество таких прямых — три, и они, по доказанному, всегда пересекаются в одной точке.

Что же касается n-угольника при $n>3$, то здесь таких прямых может быть даже бесконечно много, причем если многоугольник не описанный, то они могут и не проходить через одну точку (например, в равнобочной трапеции с основаниями a и b можно подобрать длину боковой стороны так, что будет существовать прямая, параллельная основаниям, которая делит пополам и площадь, и периметр; кроме нее этим свойством обладают и все прямые, проходящие через середину средней линии и пересекающие основания трапеции).

Можно доказать, основываясь на соображениях «непрерывности», что по крайней мере одна прямая, делящая пополам и площадь, и периметр, существует для любого выпуклого многоугольника (и вообще для любой ограниченной выпуклой фигуры). Прежде всего, ясно, что если двигать прямую, перпендикулярную фиксированному направлению Ox, то наступит такой момент (единственный), когда она разделит пополам площадь, и такой момент, когда она разделит пополам периметр. Пусть x_S и x_P — координаты соответствующих точек на оси Ox. Теперь зафиксируем точку O и повернем ось Ox вокруг нее на угол φ $(0 < \varphi \leqslant \pi)$ (рис. 2). Для каждого угла φ, то есть для каждого положения оси Ox, мы сможем аналогично определить числа $x_S(\varphi)$ и $x_P(\varphi)$. Ясно, что каждая из функций x_S и x_P зависит от φ «непрерывно», причем при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ каждая из них принимает значения, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку (ведь ось Ox смотрит при этом в противоположные стороны). Следовательно, при каком-то промежуточном значении $\varphi = \varphi_0$ значения x_S и x_P должны равняться другу другу (рис. 3). Это и есть основное свойство «непрерывности», которым мы пользуемся.

Как оформлять подобные доказательства строго, подробно рассказывается в книге Н. Стинрода и У. Чинна «Первые понятия топологии», одной из лучших книг популярной серии «Современная математика» («Мир», 1967).

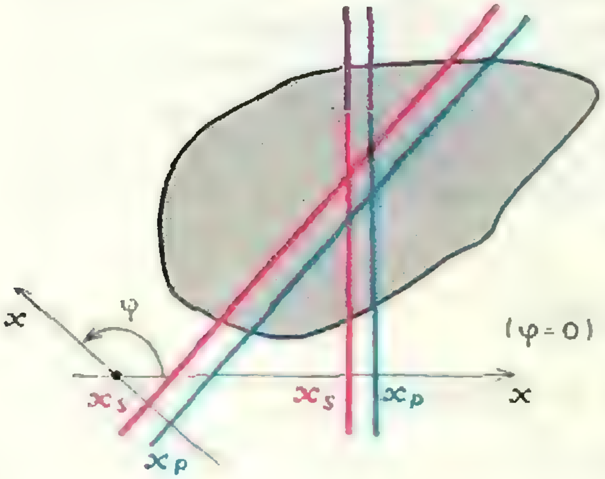


Рис. 2. Красные прямые делят пополам площадь, синие — периметр.

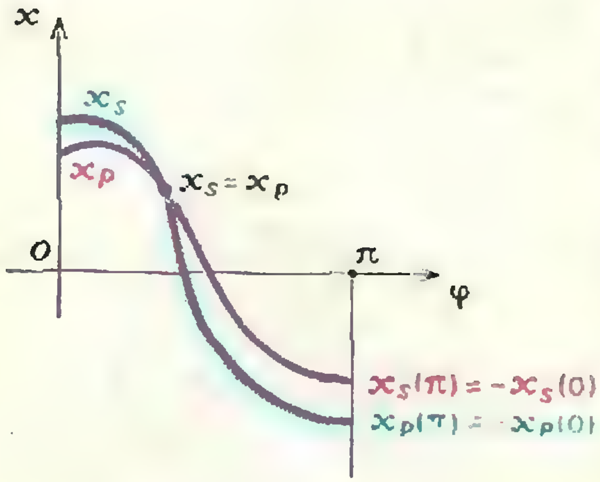


Рис. 3. Две непрерывные кривые — красная и синяя — должны пересекаться.

М109

а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.

б) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

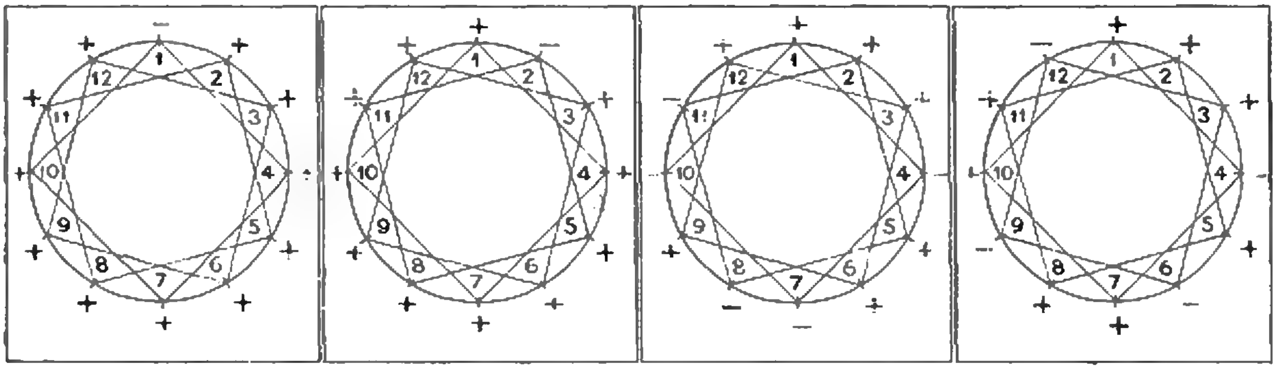
в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки в трех последовательных вершинах многоугольника.

Начнем с задачи в). Разобьем все 12 вершин на три группы по четыре вершины в каждой: первая группа — вершины с номерами 1, 4, 7, 10, вторая — 2, 5, 8, 11, третья — 3, 6, 9, 12 (рис. 4, вершины каждой группы составляют квадрат). Ясно, что какие бы три последовательные вершины 12-угольника мы ни выбрали, в каждую из трех наших групп попадет ровно одна из выбранных вершин. Таким образом, смена знака у трех последовательных вершин вызовет изменение количества минусов (и плюсов) в каждой группе ровно на единицу.

Теперь докажем, что от расположения *А* знаков на рисунке 4 нельзя перейти к расположению *Б*. У расположения *А* и во второй, и в третьей группе количество минусов равно нулю. После первой смены знаков, где бы она не произошла, во второй и в третьей группе будет по одному минусу; потом, после второй смены знаков в каждой из этих двух групп станет 0 или 2 минуса, затем — 1 или 3 минуса, потом — 0,2 или 4 минуса, затем снова 1 или 3 минуса в каждой и т. д. Таким образом, в этих двух группах будет одновременно либо четное число минусов, либо нечетное. Но у расположения *Б* во второй группе 1 минус, в третьей — 0. Поэтому мы его заведомо не сможем получить из *А*.

Аналогично можно решить задачи а) и б). Подумайте, какие группы вершин удобно рассмотреть в этих случаях. Мы не будем отдельно записывать решения этих задач, а сразу попытаемся выяснить более общий вопрос.

Пусть в вершинах правильного n-угольника расставлены плюсы и минусы, и разрешается изменять знак одновременно в любых k вершинах, стоящих подряд (n и k — данные натуральные числа, $k<n$); какие расположения знаков можно получить из данного, а какие — нет?



А Б В Г

Рис. 4.

Рассмотрим сначала частный случай, непосредственно обобщающий задачи а)—в) n — делится на k.

Пусть $n=kn_1$. Разобьем все n вершин на k групп так, что в каждую группу включаются n_1 вершин правильного n_1-угольника. Каждому расположению плюсов и минусов поставим в соответствие набор $y = (y_1, y_2, \dots, y\ )$, где

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если в } i\text{-й группе четное число минусов,} \\ 1, & \text{если в } i\text{-й группе нечетное число минусов.} \end{cases}$$

Ясно, что смена знаков в любых k последовательных вершинах вызывает изменение количества минусов в каждой группе на единицу, то есть из расположения, которому соответствовал набор y, получается расположение, которому соответствовал *противоположный* набор $\bar{y}$, получающихся из y заменой всех нулей на единицы и единиц — на нули: Назовем два расположения x, x' плюсов и минусов *эквивалентными* ($x \sim x'$), если их наборы y, y' либо равны, либо противоположны [*]. (Например, на рисунке 4, где $n=12$, $k=3$ расположение B эквивалентно A, а $Г \sim Б$.

Докажем, что одно из расположений можно перевести в другое тогда и только тогда, когда они эквивалентны. В одну сторону это уже, по существу, доказано: из расположения X с набором y при сменах знаков будут последовательно получаться расположения с наборами $\bar{y}$, y, $\bar{y}$, y и т. д., то есть, если из X можно получить X', то $X \sim X'$. Докажем обратное: если $X \sim X'$, то из начального расположения знаков X можно получить расположение X'. Ясно, что можно получить в вершинах с номерами 1, 2,..., $(n-k+1)$ те знаки, которые нам хочется, последовательно меняя (если нужно) знаки у вершин с 1-й по k-ю, затем со 2-й по $(k+1)$-ю,... с $(n-k+1)$-й по n-ю. Таким образом, мы можем получить расположение X'', которое, во-первых, совпадает с X' во всех вершинах, кроме, быть может, $(k-1)$ вершин с $(n-k+2)$-й по n=ю, и во-вторых, эквивалентно X' ($X'' \sim X'$ потому, что оба они эквивалентны X). Но тогда расположения X'' и X' должны совпадать полностью. Действительно, поскольку $y_1'' = y_1'$ (знаки у всех вершин 1-й группы расположений X'' и X' совпадают) и $X'' \sim X'$, то $y_i'' = y_i'$ для всех $i=2, 3, \dots, k$, следовательно, в вершинах с номерами от $(n-k+2)$ до n у X'' должны стоять те же знаки, что у X'.

Наше утверждение доказано (для $n=kn_1$). Из доказательства видно, что все множество возможных расположений знаков разбивается на 2^{k-1} классов по 2^{n-k+1} элементов в каждом.

---

[*] Легко проверить, что это действительно отношение эквивалентности на множестве всех наборов. (Об этом понятии см. статью М. М. Глухова «Отношение эквивалентности и разбиения множеств» в «Кванте» № 2, 1972).

Если вы разобрались в этом доказательстве, то построить переход от A к B и от $Б$ к $Г$ на рисунке не составит для вас никакого труда.

Прежде чем исследовать общий случай, полезно прочитать статью В. Н. Вагутена *), особенно лемму на стр. 33 и рассмотреть некоторые примеры, скажем $n=12$, $k=8$; $n=12$, $k=9$ или даже более простые $n=3$, $k=2$; $n=4$, $k=3$. Окончание решения вы найдете на стр. 60, но прежде попробуйте найти его самостоятельно.

Наиболее полные и оригинальные решения задач **М108—М109** прислали *Г. Гринченко, В. Кореняко* и *М. Илларионов* из Воронежа, *Э. Туркевич* из Черновцов, *А. Черняк* из Минска, *Н. Чернов* из Кривого Рога, *А. Шерстюк* из Николаева, *М. Прегер* из Томска, *Л. Ханин* из Ленинграда.

Н. Б. Васильев.

В этом номере мы публикуем решения задач Ф129—Ф130.

Ф129

Тело находится в точке A внутри неподвижной полой сферы (рис. 5). В каком случае тело скорее достигнет нижней точки B сферы: если оно будет скользить по поверхности сферы? если оно будет скользить вдоль прямой AB? Трение в обоих случаях пренебрежимо мало, начальная скорость тела равна нулю и расстояние AB много меньше радиуса сферы.

Движение тела по поверхности сферы совершенно аналогично движению математического маятника с длиной подвеса, равной радиусу сферы R. Так как $AB \ll R$, то отклонение тела от положения равновесия (точки B) мало. Поэтому для периода колебаний маятника можно воспользоваться формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Время движения тела от точки A до точки B равно четверти периода колебаний, то есть

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

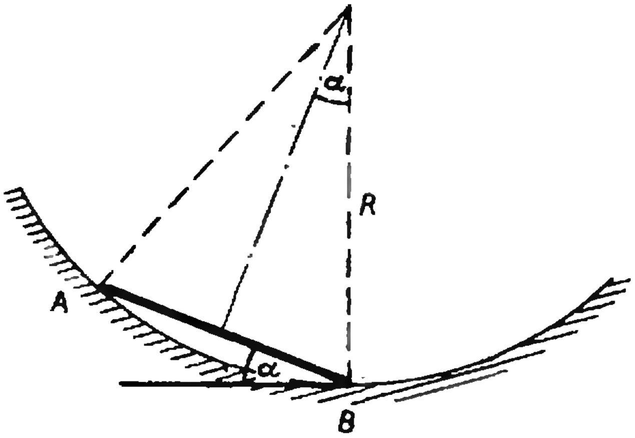


Рис. 5.

Движение тела по наклонной плоскости — равноускоренное. Ускорение a ему сообщает составляющая силы тяжести, параллельная наклонной плоскости. Если угол наклона плоскости к горизонту равен α, эта составляющая равна $mg\sin\alpha$. Так как $AB = \frac{at_2^2}{2}$ (t_2 — время движения тела по наклонной плоскости) и $AB = 2R\sin\alpha$, то

$$t_2 = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = \sqrt{\frac{4R\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Мы получили $t_2 > t_1$, то есть тело достигнет точки быстрее в том случае, если оно будет двигаться по поверхности сферы.

Ф130

Внутри гладкой сферы находится маленький заряженный шарик. Какой величины заряд нужно поместить в нижней точке сферы для того, чтобы шарик удерживался в ее верхней точке? Диаметр сферы равен d, заряд шарика q, его масса m.

Заряд Q, который нужно поместить в нижней точке сферы, должен быть таким, чтобы электрическая сила, действующая на верхний заряд, была не меньше силы тяжести шарика mg.

---

*) Смотри «Квант» № 6, 1972.

То есть $\frac{qQ}{d^2} \geqslant mg$. Отсюда $Q \geqslant \frac{mgd^2}{q}$.

Однако нам нужно еще проверить, будет ли равновесие шарика устойчивым. Рассмотрим малое отклонение шарика от положения равновесия (рис. 6).

Равновесие шарика устойчиво, если проекция силы F электрического взаимодействия зарядов на касательную к сфере больше или равна проекции силы тяжести на ту же касательную.

$$\frac{qQ}{d^2}\sin\alpha \geqslant mg\sin 2\alpha.$$

(Сила N реакции перпендикулярна поверхности сферы.)

Так как угол α отклонения шарика от положения равновесия мал, то $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ и $l \approx d$. Поэтому

$$2mg\,\alpha \leqslant \frac{qQ}{d^2}\alpha.$$

Следовательно, для устойчивого равновесия шарика в верхней точке сферы в нижнюю точку сферы должен быть помещен заряд $Q \geqslant \frac{2mgd^2}{q}$.

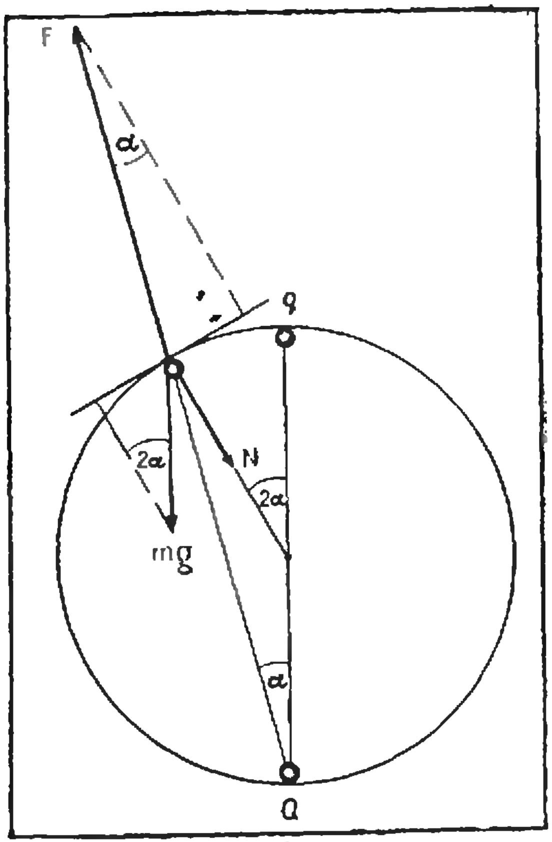


Рис. 6.

Редакция получила 150 писем с решениями задач **Ф123—Ф130**. Наиболее трудной оказалась задача **Ф123**, самой легкой — задача **Ф124**.

Правильные решения задач прислали: *А. Айзиковский* (Кременчуг) **Ф124, Ф125, Ф126**; *А. Александров* (Глазов УАССР) **Ф129**; *Т. Аманбаев* (ст. Ново-Казалинск Кзыл-Ординской обл. Каз. ССР) **Ф125**; *П. Анненков* (с. Тоцкое Оренбургской обл.) **Ф124, Ф125**; *С. Арасланова* (с. Н.-Ивкино Кировской обл.) **Ф125, Ф129**; *Д. Архипов* (Рязань) **Ф127**; *Э. Ахмедов* (Баку) **Ф128**; *А. Боевский* (Гомель) **Ф123, Ф124, Ф125, Ф126, Ф129, Ф130**; *В. Белов* (Вологда) **Ф124, Ф125, Ф126, Ф128, Ф129**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **Ф125, Ф126, Ф128, Ф129**; *И. Ваксер* (Минск) **Ф128, Ф129**; *В. Воронцов* (п. Ивня Белгородской обл.) **Ф129**; *С. Галахваридзе* (Тбилиси) **Ф124, Ф125, Ф126, Ф127**; *А. Григорян* (Баку) **Ф129**; *Б. Дариняное* (с. Киншнга Бур. АССР) **Ф125**; *А. Довжиков* (Ленинград) **Ф129**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф124, Ф125, Ф126, Ф129, Ф130**; *В. Долматов* (Ташкент) **Ф125, Ф126**; *А. Едренкин* (Горький) **Ф129**; *А. Ельков* (Москва), **Ф128**; *В. Зайцев* (Острогожск Воронежской обл.) **Ф129**; *К. Зарембо* (Харьков) **Ф128, Ф129**; *Н. Зыков* (Саратов) **Ф128, Ф129**; *А. Истомин* (Подольск Московской обл.) **Ф125, Ф126**; *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.) **Ф125, Ф127**; *А. Каримов* (Уфа) **Ф128, Ф129**; *М. Кауль* (Фрунзе) **Ф125**; *М. Кацнельсон* (Магнитогорск) **Ф124**; *Л. Книжнерман* (Москва) **Ф128, Ф129, Ф130**; *В. Кокосуй* (Гомель) **Ф129**; *А. Кохман* (Москва) **Ф129**; *В. Коротких* (Новокузнецк) **Ф125**; *С. Котко* (Воронеж) **Ф129**; *Г. Левин* (Куйбышев) **Ф128**; *О. Лимонов* (Тимошевск Краснодарского края) **Ф123**; *В. Логозинский* (Ртищево Саратовской обл.) **Ф128, Ф129**; *А. Лучевой* (Грозный) **Ф127**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф128, Ф129**; *С. Лягушкин* (Днепропетровск) **Ф128, Ф129, Ф130**; *А. Мамула* (с. Дыбинцы Богуславского р-на Киевской обл.) **Ф128**; *В. Михнев* (Пятигорск) **Ф129**; *Р. Мухамедов* (п. Старая Кулатка) **Ф127**; *А. Набатов* (Евпатория) **Ф128**; *С. Поташев* (Ульяновск) **Ф129**; *М. Прегер* (Томск) **Ф130**; *Л. Рудицер* (Харьков) **Ф125, Ф129**; *О. Саакян* (Ереван) **Ф125, Ф126, Ф127**; *Л. Сафиулин* (с. Б. Сабы Сабинского р-на Татарской АССР) **Ф124**; *А. Сбоев* (п. Медведок Нолинского р-на Кировской обл.) **Ф124, Ф126**; *П. Сергеев* Грозный) **Ф123, Ф124, Ф126, Ф128, Ф129, Ф130**; *И. Сидоров* (Москва) **Ф125, Ф126**; *Г. Симоненков* (Каунас) **Ф126, Ф127**; *Л. Смушкевич* (Магнитогорск) **Ф123, Ф124, Ф125**; *М. Темкин* (Минск) **Ф129**; *В. Терентьев* (Павлово Горьковской обл.) **Ф126**; *О. Трупов* (Джалал-Абад Кирг. ССР) **Ф125, Ф127**; *Ф. Тахватулин* (Ташкент) **Ф129, Ф130**; *Н. Федин* (Омск) **Ф124, Ф125, Ф128, Ф129**; *М. Флеров* (Москва) **Ф125, Ф130**; *Д. Фушман* (Черновцы) **Ф125, Ф126, Ф127**; *Л. Циферблат* (Львов) **Ф123** ; *С. Черников* (Семипалатинск) **Ф125, Ф127**; *Ю. Шашков* (Щигры Курской обл.) **Ф129**; *И. Юрченко* (Киев) **Ф129**.

И. Ш. Слободецкий

Применение тригонометрии при решении геометрических задач

А. Г. Мордкович

При решении геометрических задач довольно часто приходится обращаться за помощью к тригонометрии. Иногда это обращение обязательно — когда задан какой-либо угол и для вычисления линейных элементов используются тригонометрические функции угла, иногда это обращение желательно — когда мы сами вводим в рассмотрение вспомогательные углы, чтобы, используя затем тригонометрические функции, вычислить нужные нам линейные элементы или установить некоторое соотношение между линейными элементами. Если же говорить о формах применения тригонометрии при решении геометрических задач, то к числу основных следует отнести обычные тригонометрические преобразования, теорему косинусов и, в большей степени, теорему синусов, тригонометрические тождества и тригонометрические уравнения, использование обратных тригонометрических функций.

А теперь перейдем к рассмотрению задач.

Задача 1. *Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании α. В пирамиду вписан шар, к шару проведена касательная плоскость, параллельная основанию пирамиды. Определить боковую поверхность полученной усеченной пирамиды.*

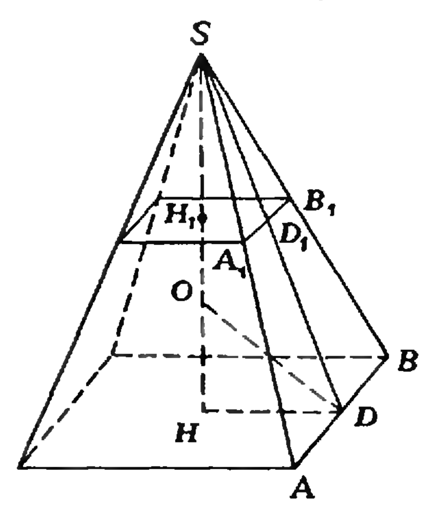


Рис. 1.

Решение. Нет необходимости изображать на рисунке вписанный шар. Вполне достаточно показать центр шара (рис. 1) — это точка O пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла SDH — и учесть, что высота HH_1 усеченной пирамиды равна диаметру шара.

Имеем: $OH = r = HD \cdot \mathrm{tg}\,\angle ODH = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$,

$$HH_1 = 2r = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$S_{бок} = 4\cdot\frac{AB + A_1B_1}{2}\cdot DD_1 = 2\,(a + A_1B_1)\cdot DD_1.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится вспомогательный рисунок 2:

$$A_1B_1=2H_1D_1=2HE=2(HD-DE)=2\left(\frac{a}{2}-D_1E\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right)=$$

$$=a-2HH_1\operatorname{ctg}\alpha=a-2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha,\quad DD_1=\frac{D_1E}{\sin\alpha}=\frac{HH_1}{\sin\alpha}=\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha},$$

$$S_{\text{бок}}=2\left(a+a-2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)\cdot\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{4a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}.$$

Задача 2. *Определить радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами a и b опирается на дугу α.*

Решение. Вписанный угол равен $\frac{\alpha}{2}$. Обозначим хорду, соединяющую концы вписанного угла, через x (рис. 3); тогда по теореме косинусов $x^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\alpha}{2}$. Далее, по теореме синусов $\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2R$, откуда

$$R=\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 3. *Плоские углы трехгранного угла равны соответственно α, β, γ. Найти его двугранные углы.*

Решение. Пусть S — вершина трехгранного угла (рис. 4), SM — общая сторона плоских углов α и β. Найдем величину двугранного угла при ребре SM. Отложим отрезок $SC=1$, через точку C проведем плоскость, перпендикулярную прямой SM, и обозначим через A и B точки пересечения этой плоскости с лучами SN и SP. Тогда $\measuredangle ACB$ — линейный угол интересующего нас двугранного угла.

Пусть $\measuredangle ACB=x$, тогда $AC=\operatorname{tg}\alpha$, $BC=\operatorname{tg}\beta$, $AS=\sec\alpha$, $BS=\sec\beta$. Из треугольника ABS по теореме косинусов имеем

$$AB^2=AS^2+BS^2-2AS\cdot BS\cdot\cos\gamma,$$

то есть

$$AB^2=\sec^2\alpha+\sec^2\beta-2\sec\alpha\cdot\sec\beta\cdot\cos\gamma.$$

С другой стороны, из треугольника ABC по теореме косинусов имеем

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos x,$$

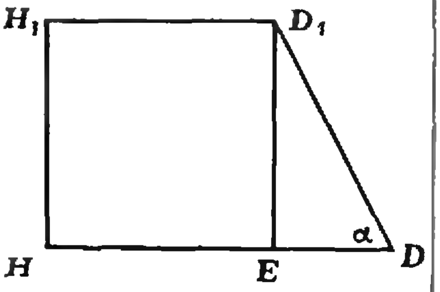


Рис. 2.

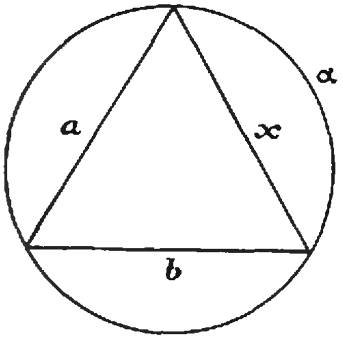


Рис. 3.

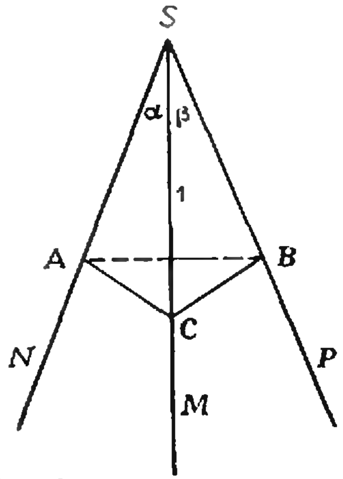


Рис. 4.

то есть

$$AB^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cdot\cos x.$$

Таким образом,

$$\sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Значит, двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ, равен $\arccos\left(\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)$. Аналогично находятся остальные двугранные углы.

Если три плоских и три двугранных угла считать основными элементами трехгранного угла, то рассмотренная задача позволяет сделать вывод о том, что по любым трем основным элементам трехгранного угла можно найти остальные три.

Задача. 4. *Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противолежащую боковую сторону и составляющая с основанием угол β ($\beta < \alpha$). В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?*

Решение. Пусть $AB = BC = a$, $DC = x$, $BD = a - x$ (рис. 5). Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как основания, то есть как стороны BD и CD:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1.$$

Таким образом, для решения задачи нам достаточно найти отношение $\frac{a}{x}$.

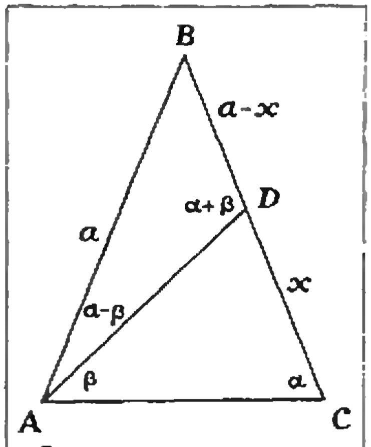


Рис. 5.

Применим к треугольнику ABD теорему синусов

$$\frac{a-x}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Отсюда

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

В итоге

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{a}{x} - 1 =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} - 1 = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}.$$

Задача 5. *Все боковые грани правильной четырехугольной пирамиды наклонены к основанию под углом α, а апофема боковой грани равна a. Через одну из сторон основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол β ($\beta < \alpha$). Вычислить площадь сечения.*

Решение. Выясним прежде всего, что представляет собой сечение (рис. 6). Оно параллельно стороне AB, а боковая грань, проходящая через AB, пересекает сечение по прямой EF. Но если через прямую, параллельную некоторой плоскости, проведена плоскость, пересекающая первую плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой, а значит, и прямой CD. Итак, сечение — трапеция.

А теперь проведем вычисления. Имеем

$$KH = SK\cdot\cos\alpha = a\cos\alpha,$$

$$KL = CD = 2a\cos\alpha.$$

Применим к треугольнику MKL теорему синусов:

$$\frac{ML}{\sin\alpha} = \frac{KL}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]},$$

откуда

$$ML = \frac{KL\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Применим к треугольнику MSL теорему синусов:

$$\frac{SL}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{MS}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$MS = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из подобия треугольников SEF и ABS получаем: $\frac{MS}{KS} = \frac{EF}{AB}$. Отсюда получаем

$$EF = \frac{AB\cdot MS}{KS} = \frac{2a\cos\alpha\cdot a\sin(\alpha-\beta)}{a\cdot\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

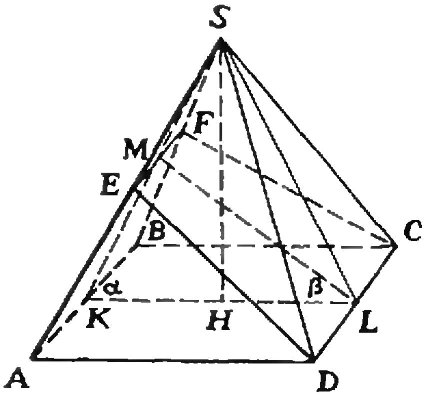


Рис. 6.

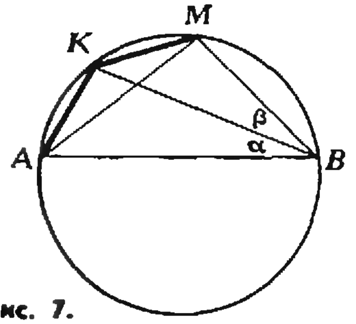


Рис. 7.

Теперь у нас есть все необходимое для вычисления площади сечения. Имеем

$$S = \frac{1}{2}(CD + EF)\cdot ML = \frac{1}{2}\left[2a\cos\alpha + \frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right]\times\frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2\sin^2 2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Задача 6. *На одной из дуг AB окружности даны произвольная точка K и точка M — середина дуги. Эти точки соединены хордами с точками A и B. Доказать, что $AK\cdot KB = AM^2 - KM^2$.*

Решение. Обозначим угол KBA через α, а угол KBM — через β (рис. 7). Применим к треугольнику AKB теорему синусов: $\frac{AK}{\sin\alpha} = 2R$, $AK = 2R\sin\alpha$. Аналогично из треугольника AMB находим $AM = 2R\sin(\alpha+\beta)$, а из треугольника KBM — $KM = 2R\sin\beta$.

Рассмотрим теперь треугольник KMB. Имеем $\angle KBM = \beta$, $\angle MKB = \angle MAB = \angle ABM = \alpha + \beta$, $\angle KMB = 180^\circ - \beta - (\alpha+\beta) = 180^\circ - (\alpha + 2\beta)$, $KB = 2R\sin[180^\circ - (\alpha+2\beta)] = 2R\sin(\alpha+2\beta)$. Нам нужно доказать, что $AK\cdot KB = AM^2 - KM^2$, то есть что

$$2R\sin\alpha\cdot 2R\sin(\alpha+2\beta) = 4R^2\sin^2(\alpha+\beta) - 4R^2\sin^2\beta$$

или

$$\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta) = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\beta.$$

Задача свелась к доказательству тригонометрического тождества. Доказывается оно несложно, и мы предоставляем это сделать читателю.

Задача 7. *В треугольнике один угол вдвое больше другого, а стороны, противолежащие этим углам, отличаются друг от друга на 2 см. Найти эти стороны, если известно, что третья сторона треугольника равна 5 см.*

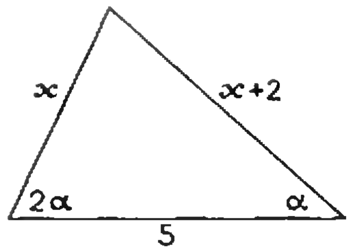


Рис. 8.

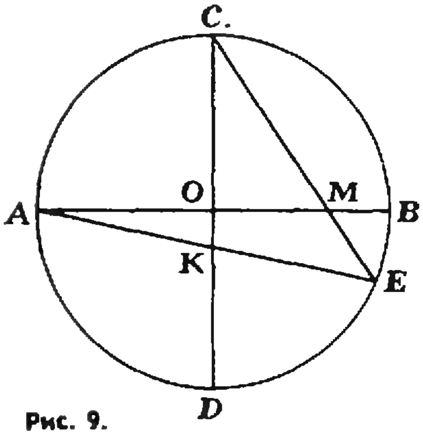


Рис. 9.

Решение. Эту задачу можно решить средствами планиметрии, но мы, будучи верны взятой теме, разберем решение этой задачи с помощью тригонометрии (рекомендуем читателю попробовать найти планиметрическое решение). Обозначим через α один из углов треугольника, 2α — другой угол, а противолежащие стороны соответственно x и $x+2$ (рис. 8).

По теореме синусов $\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{5}{\sin(180^\circ-3\alpha)}=\frac{x+2}{\sin 2\alpha}$; отсюда $x=\frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$, $x+2=\frac{5\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Теперь задача сводится к решению тригонометрического уравнения $\frac{5\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}-\frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}=2$. Применив формулу $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, получим $\frac{10\cos\alpha}{3-4\sin^2\alpha}-\frac{5}{3-4\sin^2\alpha}=2$ и далее $8\cos^2\alpha-10\cos\alpha+3=0$; $(\cos\alpha)_1=\frac{3}{4}$, $(\cos\alpha)_2=\frac{1}{2}$. Но по смыслу задачи $\alpha<60^\circ$, следовательно, $\cos\alpha>\frac{1}{2}$. Поэтому из найденных значений подходит только $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. Имеем далее $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $x=\frac{5}{3-4\sin^2\alpha}=4$, $x+2=6$.

Упражнения

1. В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a. Найти длину биссектрисы AD, если угол между AD и высотой AE равен β.

2. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

3. Образующая конуса равна l и составляет с высотой угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра вписанного в конус шара.

4. Высота треугольника, равная 6 *см*, делит угол треугольника в отношении 2 : 1, а сторону на отрезки, меньший из которых равен 3 *см*. Определить стороны треугольника.

5. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге BC взята произвольная точка M и соединена хордами с вершинами треугольника. Доказать, что $MA=MB+MC$.

6. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна удвоенному произведению ее оснований, сложенному с суммой квадратов боковых сторон.

7. Плоские углы трехгранного угла равны соответственно α, β, γ. Найти угол между плоскостью, в которой лежит угол α, и противолежащим ребром трехгранного угла.

8. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE:EC=a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD:DB=b$. Проведены отрезки CD и BE. Найти отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника (МИЭТ, 1970).

9. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Хорда AE пересекает CD в точке K так, что $CK:KD=2:1$. Хорда EC пересекает AB в точке M. Доказать, что $AM:MB=3:1$ (рис. 9).

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА.

Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина

Вариант 1

1. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, у которой все ребра равны a. Через вершину A основания проведена плоскость, параллельная диагонали BD и образующая с плоскостью основания угол $30°$. Найти площадь сечения.

2. Две точки движутся равномерно по двум окружностям, радиусы которых относятся как $1:6$. Определить скорость движения каждой точки, если известно, что за 10 *сек* точка, движущаяся по большой окружности, прошла на 2 *м* больше и совершила при этом в 5 раз меньше оборотов.

3. Решить неравенство

$$\frac{x+1}{x-1}+1>\frac{x-1}{x}.$$

4. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2.$$

Вариант 2

1. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB=AC=b$, $BC=a$. Определить площадь сечения, проходящего через ребро SA и перпендикулярного к плоскости основания, если боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы α.

2. Из пункта A в пункт B выехали одновременно два автомобиля. Скорость второго автомобиля больше скорости первого на 10 *км/час*. Через полчаса из A в B выехал третий автомобиль со скоростью 60 *км/час*, который догнал первый автомобиль и через полтора часа после этого догнал второй автомобиль. Найти скорости автомобилей.

3. Решить уравнение:

$$\frac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}.$$

4. Решить уравнение:

$$\sin x\,(1+\cos x)=1+\cos x+\cos^2 x.$$

Ленинградский государственный педагогический институт имени А. И. Герцена

Математический факультет

1. Упростить выражение:

$$\left[\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^{3/2}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b^{3/2}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}\right]^{-2}.$$

2. Найти все значения α, при которых выражение

$$\lg\,[(6\alpha-5)\,x^2-5\,(\alpha-1)\,x+2\alpha-6]$$

имеет смысл при любом x.

3. Решить уравнение:

$$\lg x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$$

4. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а двугранный угол при основании равен α. Определить объем пирамиды.

Физический факультет

1. Упростить выражение:

$$\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\frac{x-a}{4x^{1/2}+4a^{1/2}}.$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{x}\,(\lg 1-\lg 243)+\lg 3^{x-4}=0.$$

3. Упростить выражение:

$$\frac{2\,(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}.$$

4. Высота конуса равна h. Плоские углы при вершине правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в этот конус, равны α. Определить объем конуса.

Ленинградский горный институт

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2, \\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7. \end{cases}$$

2. Доказать тождество:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=\sin^2\beta.$$

3. Решить уравнение:

$$x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6.$$

4. При каких значениях b имеет смысл выражение:

$$\lg\left(1+\frac{6b+5}{3+2b}\right)?$$

5. Непараллельные боковые стороны трапеции перпендикулярны друг к другу. Одна из них составляет с основанием угол α, другая составляет такой же угол с диагональю. Вычислить площадь трапеции, если ее высота равна h.

Ленинградский технологический институт имени Ленсовета

1. Доказать тождество:

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Все боковые грани четырехугольной пирамиды — правильные треугольники. Найти ее двугранные углы.

3. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y=ax-1$ и $y=\dfrac{1}{x-1}$ пересекаются только в одной точке. Построить для найденных значений a чертежи.

4. Найти область определения функции

$$y=\log_x\left(\cos\frac{3\pi}{1+x^2}\right).$$

5. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_{(a+x)}x(a-x)<\log_{(a+x)}x$$

имеет хотя бы одно решение.

Ленинградский инженерно-строительный институт

1. Вычислить:

$$(1,5)^3\cdot(2,25)^{1,5}\cdot 0,75^{-3}:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-(2^{-1})^{-1}-\left(2\frac{3}{7}\right)^0\right].$$

2. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-1.$$

3. Основанием пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого равна d, а острый угол равен α. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом β. Найти объем пирамиды.

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{2}\cdot(0,5)^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-\sqrt[(\sqrt{x}+1)]{4}=0.$$

5. Упростить:

$$\sqrt[\log_b a]{a^2}-2\sqrt[\log_b a]{a}\cdot\sqrt[\log_a b]{b}+\sqrt[\frac{1}{2}\log_a b]{b}.$$

Ленинградский институт точной механики и оптики

1. Упростить при $y>-1$

$$\left[\frac{xy+x}{(y+1)^{2/3}}+\frac{x^2-(y+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y+1}}\right]:\left(x+\sqrt[6]{x^3+x^3y^2+2yx^3}\right)-\frac{(1+y^{-1})^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{y^{-1}}}.$$

2. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0.$$

3. Решить уравнение:

$$\cos 7x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x.$$

Ленинградский гидрометеорологический институт

1. Упростить

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{4+(a^{4x}-a^{-4x})^2}}{a^{2x}+a^{-2x}}+2-}$$

$$-\left(a^{-\frac{x}{2}}\right)^2.$$

2. Решить уравнение:

$$\log_3^2 4x-\log_3 12x=1.$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0, \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0. \end{cases}$$

4. Решить уравнение: $\sec^4 x-\operatorname{tg}^4 x=7$

Ленинградский технологический институт холодильной промышленности

1. Ромб, у которого меньшая диагональ равна его стороне a, вращается около прямой, проходящей через конец большой диагонали перпендикулярно к последней. Вычислить объем V и поверхность S полученного тела вращения.

2. Решить уравнение:

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=4 \quad (\sin x\neq 0,\ \cos x\neq 0).$$

3. Решить систему:

$$\begin{cases} \log_y x-\log_x y=\frac{8}{3}, \\ xy=16. \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$$

4. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta).$$

5. Решить уравнение:

$$5^{\lg x}-3^{-1+\lg x}=3^{1+\lg x}-5^{-1+\lg x}.$$

Ленинградская лесотехническая академия имени С. М. Кирова

1. Найти первый член и знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, в которой $a_5-a_1=10$, $a_4-a_2=4$.

2. Решить уравнение:

$$\frac{\lg x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lg 5-1}{\frac{1}{4}\lg(x-1)}=\lg 0{,}01.$$

3. Решить уравнение.

$$\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+1=\cos x.$$

4. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе через его вершину проведена плоскость под углом φ к высоте конуса. Определить площадь проведенного сечения.

Ленинградский технологический институт целлюлозно-бумажной промышленности

1. Решить уравнение:

$$3\sin x+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-3\sin x\cos x.$$

2. Решить уравнение:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{x-1}=\frac{8\lg 9}{25\lg 27}\cdot\log_3\sqrt[5]{9}.$$

3. Доказать тождество:

$$(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)=8\sqrt{3}.$$

4. Упростить:

$$1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:$$

$$:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$$

Решение задач по электростатике

(электроемкость)

Г. Я. Мякишев

Электроемкость — последняя тема раздела «Электростатика». При решении задач на эту тему могут потребоваться все сведения, полученные при изучении электростатики: сохранение электрического заряда, понятия напряженности поля и потенциала, поведение проводников в электростатическом поле, изменение напряженности поля в диэлектриках, закон сохранения энергии. Поэтому и задачи очень разнообразны. Однако если предыдущие понятия хорошо усвоены, то особых трудностей при решении задач на электроемкость не должно встретиться.

Введение понятия электроемкости основано на том, что все точки проводника при сообщении ему заряда Q приобретают один и тот же потенциал φ. Отношение заряда к потенциалу при этом не зависит от величины заряда и называется электроемкостью уединенного проводника:

$$C=\frac{Q}{\varphi}.$$

Емкость уединенного проводящего шара (в вакууме) в системе СГСЭ равна его радиусу:

$$C=R.$$

Емкость шара в диэлектрике в системе СИ равна

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Наиболее интересна емкость системы двух проводников, заряды которых одинаковы по величине и имеют противоположные знаки. Такая система называется конденсатором, и ее емкость равна:

$$C=\frac{Q}{\Delta\varphi},$$

где Q — заряд одной из обкладок конденсатора, а $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками. Емкость конденсатора практически не зависит от окружающих тел.

Для плоского конденсатора

$$C=\frac{\varepsilon S}{4\pi d}\ (\text{СГСЭ});\quad C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\ (\text{СИ}).$$

Здесь S — площадь пластин, а d — расстояние между ними.

Энергия конденсатора может быть вычислена по одной из трех формул

$$П=\frac{Q\Delta\varphi}{2}=\frac{Q^2}{2C}=\frac{C(\Delta\varphi)^2}{2},$$

то есть для любой пары значений из трех величин Q, C, $\Delta\varphi$. При параллельном соединении конденсаторов их емкости складываются:

$$C=\sum_i C_i.$$

При последовательном соединении величина, обратная емкости батареи, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов:

$$\frac{1}{C}=\sum_i\frac{1}{C_i}.$$

Напомнив основные понятия и формулы, перейдем теперь к решению конкретных задач.

Задача 1. Пластины заряженного плоского конденсатора попеременно заземляются. Будет ли при этом конденсатор разряжаться?

Решение. Будет. Каждая из пластин обладает определенной,

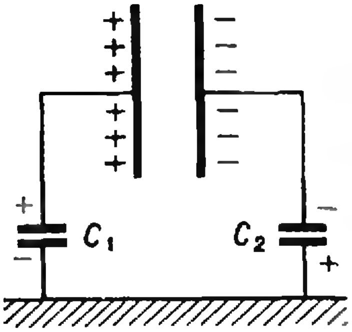


Рис. 1.

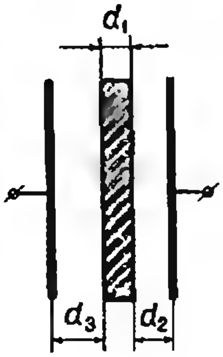


Рис. 2.

обычно небольшой, емкостью относительно земли. (Это происходит из-за того, что вблизи краев пластин силовые линии искривляются и достигают земли). Эквивалентная схема показана на рисунке 1. Емкость пластин относительно земли изображена в виде конденсаторов C_1 и C_2.

При замыкании левой пластины нейтрализуется часть заряда, находящегося на ней. Это же произойдет при замыкании правой пластины. Конденсатор будет разряжаться тем медленнее, чем больше емкость конденсатора по сравнению с емкостью каждой пластины относительно земли.

Задача 2. В плоский воздушный конденсатор с расстоянием d между обкладками вводится диэлектрическая пластина, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость конденсатора с диэлектрической пластиной. Диэлектрическая проницаемость материала пластины ε. Площадь пластины и каждой обкладки S.

Решение. Если в плоский конденсатор внести очень тонкую проводящую пластину, параллельную обкладкам, то на ее поверхностях появятся заряды противоположных знаков, равные по величине. При этом электрическое поле в конденсаторе не изменится, а значит, не изменится и его емкость. (Ведь заряды обкладок остаются неизменными и разность потенциалов между ними не меняется.) Поэтому можно считать, что на поверхностях диэлектрической пластины нанесены тонкие проводящие слои. В этом случае образуются три последовательно соединенных конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1},\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}\quad \text{и}\quad C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_3},$$

где d_2 и d_3 — расстояния между поверхностями диэлектрической пластины и обкладками, причем $d_2 + d_3 = d - d_1$ (рис. 2). Емкость C батареи трех конденсаторов определяется по формуле:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon} + d_2 + d_3\right).$$

Отсюда

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{\varepsilon d + d_1(1 - \varepsilon)}.$$

Задача. 3. Найти емкость батареи конденсаторов, изображенной на рисунке 3. Емкость каждого конденсатора равна C.

Решение. Данная схема соединения конденсаторов эквивалентна схеме, изображенной на рисунке 4. В этом можно убедиться, проверив, что каждый из конденсаторов соединен с источником и с другими конденсаторами точно так же, как в исходной схеме. Вследствие равенства емкостей всех конденсаторов разность потенциалов между точками A и B равна нулю. Поэтому конденсатор

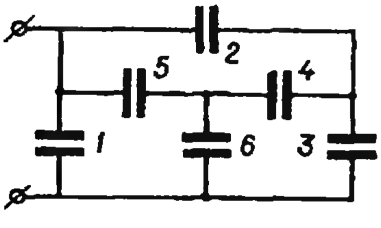


Рис. 3.

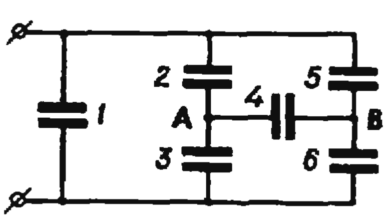


Рис. 4.

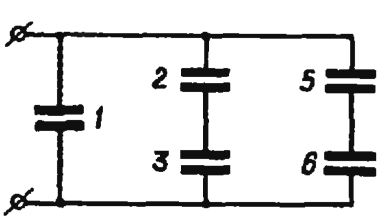


Рис. 5.

C_4 не заряжен и его емкость можно не учитывать. Упрощенная эквивалентная схема приведена на рисунке 5. В результате получаем схему из трех параллельных ветвей, две из которых содержат по два последовательно включенных конденсатора. Общая емкость системы

$$C = C_1 + \frac{C_2C_3}{C_2+C_3} + \frac{C_5C_6}{C_5+C_6} = 2C.$$

Задача 4. Два конденсатора емкостью C_1 и C_2 заряжены до разностей потенциалов $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ ($\Delta\varphi_1 \neq \Delta\varphi_2$). Доказать, что при параллельном соединении этих конденсаторов их общая электростатическая энергия уменьшается. Объяснить, почему происходит уменьшение энергии.

Решение. Энергия конденсаторов до соединения была равна $П_0 = \frac{1}{2}\left(C_1\Delta\varphi_1^2 + C_2\Delta\varphi_2^2\right)$. После соединения заряд батареи конденсаторов будет $Q = Q_1 + Q_2$, а энергия, запасенная в батарее, $П = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1+C_2} = \frac{1}{2}\frac{(C_1\Delta\varphi_1 + C_2\Delta\varphi_2)^2}{C_1+C_2}$. Разность энергий $П_0 - П = \frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)} \times$
$\times \left(\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2 - 2\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2\right) > 0.$

Электростатическая энергия уменьшилась вследствие того, что при соединении конденсаторов проводниками заряды перетекали с одного конденсатора на другой. В проводниках, соединяющих конденсаторы, выделялось при этом тепло. Количество выделенного тепла не зависит от сопротивления соединительных проводов. При малом сопротивлении проводов в них будут протекать большие токи, и наоборот.

Упражнения

1. Заряженная положительно пылинка массы $m = 10^{-8}$ г находится в равновесии внутри плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. Между пластинами создана разность потенциалов $\Delta\varphi_1 = 6000$ *в*. Как нужно изменить разность потенциалов, чтобы пылинка осталась в равновесии, если ее заряд уменьшился на 1000 электронов? Расстояние между пластинами $d = 5$ *см*, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

2. Изменятся ли показания электрометра, соединенного с гальваническим элементом, если параллельно с ним включить конденсатор?

3. Найти разность потенциалов между точками A и B схемы, изображенной на рисунке 6. Емкости конденсаторов $C_1 = 0{,}5$ *мкф* и $C_2 = 1$ *мкф*, э. д. с. источников $E_1 = 2$ *в* и $E_2 = 3$ *в*.

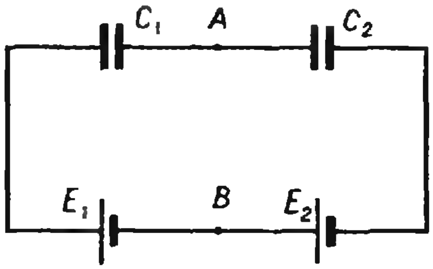


Рис. 6.

4. Конденсаторы емкостью $C_1 = 1$ *мкф* и $C_2 = 2$ *мкф* заряжены до разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 10$ *в* и $\Delta\varphi_2 = 50$ *в* соответственно. После зарядки конденсаторы соединены одноименными полюсами. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсаторов после их соединения.

К логическим задачам

(*см. стр.* 28)

1. Например, можно спросить: «Лжец ли ты?», и они ответят одинаково. Можно также спросить: «Говоришь ли ты правду?», и они тоже ответят одинаково.

2. На вопрос «Спрашивал ли я Вас сегодня о чем-нибудь?» в первый раз правдивый ответ — «нет», а во второй раз — «да». Есть и другие вопросы.

3. Если туристы подошли к одному берегу, то перебраться на противоположный берег за четное число рейсов, очевидно, невозможно. Значит, туристы подошли к противоположным берегам реки: двое к одному берегу, а третий — к другому. В этом случае переправу можно осуществить за два рейса.

4. Так как сумма цифр пятизначного числа не превосходит 45, то моему соседу не больше 45 лет. Но ему не может быть и меньше 45 лет, ибо тогда можно было бы назвать несколько пятизначных чисел, у которых сумма цифр равна возрасту соседа. Значит, ему 45 лет, а мой лотерейный билет имеет номер 99 999.

Электромагнитная индукция

Л. Г. Асламазов

Решение задач на электромагнитную индукцию основывается на использовании закона Фарадея: если магнитный поток, пронизывающий некоторый контур, за время Δt изменяется на величину $\Delta\Phi$, то в контуре наводится электродвижущая сила $E_{\text{инд}} = k\,\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (k — численный коэффициент, зависящий от выбора системы единиц). В этой формуле через $\Delta\Phi$ мы обозначили абсолютную величину изменения магнитного потока, считая $E_{\text{инд}}$ всегда положительной.

Направление индуцируемого в контуре тока находится по правилу Ленца: ток направлен так, чтобы его магнитное поле противодействовало изменению магнитного потока.

Магнитный поток равен произведению составляющей индукции магнитного поля B_1, перпендикулярной плоскости контура, на площадь контура S (рис. 1): $\Phi = B_1 S = BS\cos\alpha$. Следовательно, изменение магнитного потока может происходить из-за изменения индукции магнитного поля, площади контура или его ориентации.

Перейдем теперь к решению задач.

Задача 1. Проволочная рамка пронизывается магнитным полем, перпендикулярным плоскости рамки и равномерно растущим со временем по закону: $B = at$. Каков характер тока, текущего по рамке?

Скорость изменения магнитного потока в этом случае постоянна: $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \dfrac{a(t_2 - t_1)}{\Delta t}\,S = aS$ где S — площадь рамки. Поэтому э. д. с., наводимая в рамке, а, следовательно, и ток будут постоянными.

Задача 2. Проволочная рамка находится в постоянном магнитном поле, направление индукции которого составляет угол $\alpha = 60°$ с перпендикуляром к плоскости рамки. Чему равно среднее значение э. д. с. индукции, возникающей в рамке при выключении поля в течение времени $\Delta t = 0{,}001$ *сек*? Площадь рамки $S = 50$ *см*^{2}, индукция поля $B = 1000$ *гс*.

Изменение магнитного потока в данном случае равно начальному его значению, так как конечное значение равно нулю (магнитное поле выключается): $\Delta\Phi = \Phi_0 = BS\cos\alpha$. Величина э. д. с. индукции $E_{\text{инд}} = kBS\cos\alpha/\Delta t$. Вычисления будем производить в системе СИ, в которой $k = 1$, магнитный поток измеряется в веберах (1 *вб* $= 1$ *тл*$\cdot$*м*$^2 = 10^8$ *гс*$\cdot$*см*^{2}), время —

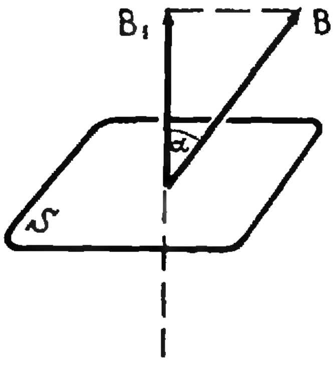


Рис. 1.

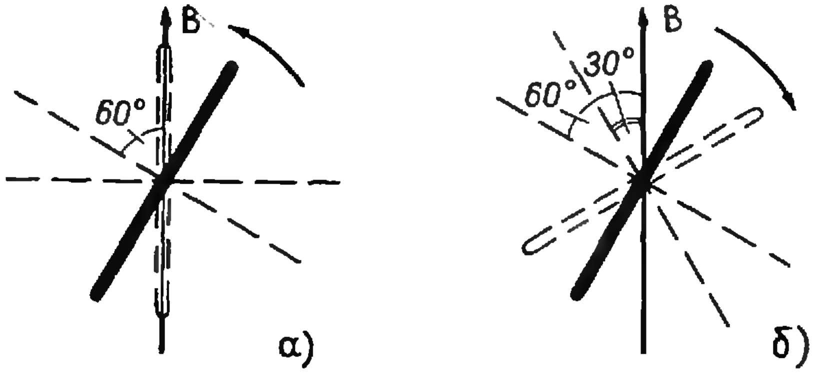


Рис. 2.

в секундах, а э. д. с. — в вольтах. Подставляя данные задачи, находим $E_{\text{инд}} = 0,25$ *в*.

Задача 3. Исходные данные те же, что и в задаче 2. Чему будет равна э. д. с. индукции, если поле оставить неизменным, а рамку повернуть на угол $\beta = 30^\circ$ вокруг оси, перпендикулярной полю, за время $\Delta t = 1$ *сек*.

При повороте рамки на угол 30° возможны два варианта: либо поле окажется лежащим в плоскости рамки (рис. 2, *а*), либо будет составлять с перпендикуляром к плоскости рамки угол 30° (рис. 2, *б*). В первом случае конечное значение магнитного потока равно нулю ($\cos 90^\circ = 0$) и $E_{\text{инд}} = 0,25$ *в*. Во втором случае $\Delta\Phi = BS(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) = 1,8 \times \times 10^{-4}$ *вб*, а $E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ *в*.

В рассмотренных задачах изменялся магнитный поток через контур (на рисунках мы изображали контур в виде прямоугольной рамки, хотя форма его несущественна). В результате в контуре наводилась э. д. с. индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока. Интересно, что количество электричества, переносимое по контуру под действием этой э. д. с., уже не зависит от скорости изменения магнитного потока и определяется только разностью его начального и конечного значений.

В самом деле, под действием $E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ в контуре появляется ток, величина которого определяется по закону Ома $I = \frac{E_{\text{инд}}}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}$, где R — сопротивление контура. Следовательно, по контуру переносится заряд $Q = I \cdot \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R}$.

Посмотрим, какой заряд протекал по рамке в задачах 2 и 3, если сопротивление рамки $R = 1$ *ом*.

Изменение магнитного потока при выключении поля (задача 2) $\Delta\Phi = BS\cos\alpha = 2,5 \cdot 10^{-4}$ *вб*. Поэтому заряд, протекший по рамке, равен $Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = 2,5 \cdot 10^{-4}$*к*.

В задаче 3 в первом случае, очевидно, протечет такой же заряд. Во втором случае $q = = 1,8 \cdot 10^{-4}$ *вб/ом* $= 1,8 \cdot 10^{-4}$ *к*.

Задача 4. Квадратная рамка со стороной a помещается в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее плоскости (рис. 3, *а*). При этом по рамке протекает заряд Q. Какой заряд протечет по рамке, если ей при неизменном поле придать форму двух равных квадратов без пересечения (рис. 3, *б*) и с пересечением (рис. 3, *в*). Сопротивление рамки равно R.

Индукция магнитного поля B легко находится по данному заряду Q. Изменение потока при внесении рамки в магнитное поле равно $\Delta\Phi_0 = Ba^2$, и следовательно, $Q = = \Delta\Phi_0/R = Ba^2/R$, откуда $B = = QR/a^2$.

Изменение магнитного потока при изгибе рамки в два квадрата без

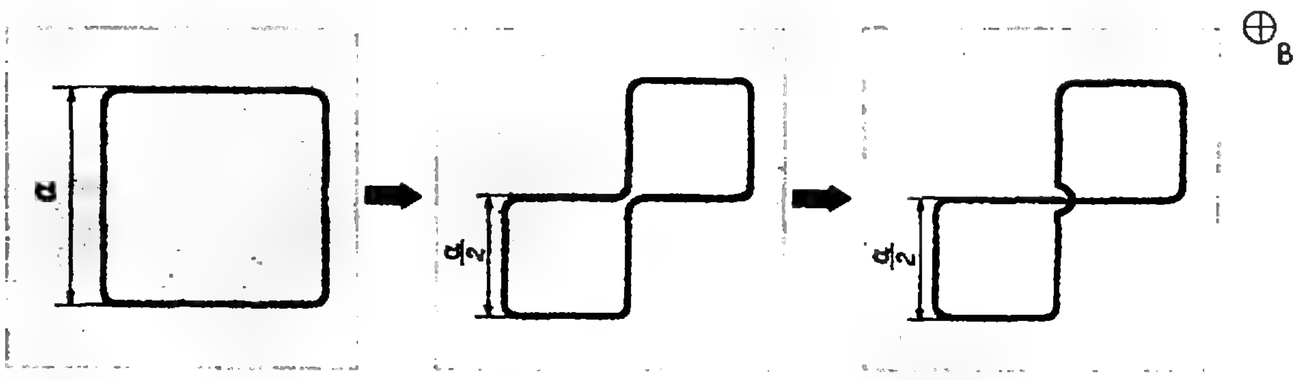


Рис. 3.

а) б) в)

пересечения (рис. 3, *б*):

$$\Delta\Phi_1 = B\left(a^2 - 2\frac{a^2}{4}\right) = \frac{Ba^2}{2}$$

Поэтому заряд, протекающий в этом случае по рамке,

$$q_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{R} = \frac{Ba^2}{2R}.$$

При повороте одного из квадратов на 180° вокруг диагонали (рис. 3, *в*) общая площадь контура не меняется. Однако в конечном положении магнитные потоки, пронизывающие отдельные квадраты, вычитаются друг из друга так, что общий поток через контур равен нулю. Поэтому при повороте квадрата изменение магнитного потока $\Delta\Phi_2 = \frac{2Ba^2}{4} - 0 = \frac{Ba^2}{2}$. При этом, по рамке протекает заряд $q_2 = \frac{Ba^2}{2R}$. Полный заряд, протекший по рамке при ее изгибе и повороте, равен $q_3 = \frac{Ba^2}{R}$.

Перенос электричества по контуру сопровождается выделением джоулева тепла. Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача 5. По горизонтальным рельсам, расположенным в вертикальном магнитном поле с индукцией B, скользит проводник длины l (рис. 4). Концы рельсов замкнуты на сопротивление R. Определить мощность тепловых потерь на сопротивлении, если проводник движется с постоянной скоростью v. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

Найдем изменение магнитного потока через контур, образованный движущимся проводником, рельсами и сопротивлением за время Δt. При движении проводника площадь контура увеличивается на величину $\Delta S = lv\cdot\Delta t$. Изменение потока $\Delta\Phi = B\cdot\Delta S = Blv\cdot\Delta t$. Поэтому

$$E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv$$

Под действием этой э. д. с. в контуре течет ток

$$I = \frac{E_{\text{инд}}}{R} = Blv/R$$

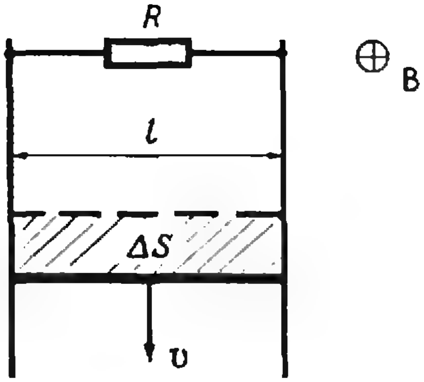


Рис. 4.

Выделяющееся при этом на сопротивлении R тепло определяется по закону Джоуля — Ленца: $Q = I^2Rt$. Мощность тепловых потерь

$$W = \frac{Q}{t} = I^2R = B^2l^2v^2/R.$$

Полезно разобрать, за счет какой энергии выделяется тепло на сопротивлении.

Как известно, на проводник с током в магнитном поле действует сила (закон Ампера). В нашем случае (магнитное поле перпендикулярно проводнику) эта сила равна BIl и направлена противоположно скорости. По условию задачи проводник движется с постоянной скоростью. Это означает, что к нему приложена сила F, уравновешивающая тормозящую силу со стороны магнитного поля. Работа силы F и переходит в тепло, которое выделяется на сопротивлении. Мощность этой силы равна мощности тепловых потерь:

$$N = F\cdot v = BIlv = B^2l^2v^2/R = W.$$

Из полученных формул следует, что при увеличении сопротивления R ток в контуре будет уменьшаться ($I = Blv/R$). Однако падение напряжения на сопротивлении, равное разности потенциалов на концах проводника, останется неизменным ($U = IR = Blv$).

Теперь легко найти величину разности потенциалов, возникающей на концах проводника, движущегося в магнитном поле, перпендикулярном направлению его движения. Можно считать, что проводник скользит по воображаемым рельсам, замкнутым на бесконечно большое сопротивление. Тогда разность потенциалов на концах проводника равна Blv.

В том случае, когда индукция магнитного поля имеет составляющую в плоскости движения проводника, при вычислении разности потенциалов ее можно не учитывать (она не дает вклада в магнитный поток), то есть существенна только перпендикулярная плоскости составляющая магнитной индукции.

Задача 6. Определить разность потенциалов, возникающую между концами крыльев самолета, летящего горизонтально со скоростью $v = 800$ *км/час*. Расстояние между концами крыльев $l = 30$ *м*. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 0{,}5$ *гс*.

Воспользовавшись формулой $U = Blv$ и перейдя в систему СИ: $v = 800$ *км/час* ≈ 222 *м/с*, $B = 0{,}5$ *гс* $= 5 \cdot 10^{-5}$ *тл*, найдем $U = 0{,}33$ *в*. Горизонтальную составляющую магнитного поля Земли можно не учитывать, так как она лежит в плоскости движения самолета.

Заметим, что возникающую разность потенциалов нельзя измерить вольтметром, находящимся в самолете, подсоединив его к концам крыльев. Магнитный поток через контур, образуемый крыльями самолета и вольтметром с проводами, при движении самолета не изменяется, и ток через вольтметр равен нулю.

Задача 7. Горизонтальный проводник длины $l = 1$ *м* движется в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 1000$ *гс*. Скорость проводника $v = 100$ *м/с* образует угол $\alpha = 60^\circ$ с самим проводником (рис. 5).

Определить разность потенциалов на концах проводника.

Такой проводник мы опять можем представлять себе скользящим по горизонтальным рельсам, замкнутым на бесконечно большое сопротивление. Определим изменение магнитного потока за время Δt через контур, образованный проводником, сопротивлением и рельсами. Площадь контура изменяется на величину $\Delta S = lv \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha$, следовательно, $\Delta\Phi = Blv \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha$.

Изменение магнитного потока вызывает появление в контуре э. д. с. индукции $E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv\sin\alpha$, которая и равна разности потенциалов U на концах проводника. Подставляя численные данные, находим $U = 8{,}65$ *в*.

При изменении магнитного потока через контур, содержащий конденсатор, на конденсаторе появляется заряд.

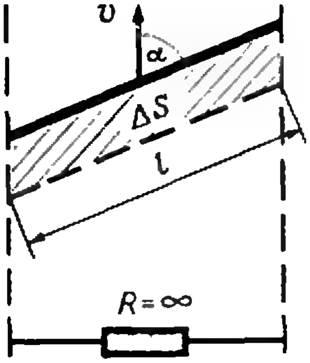


Рис. 5.

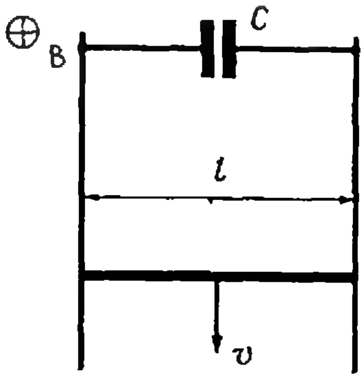


Рис. 6.

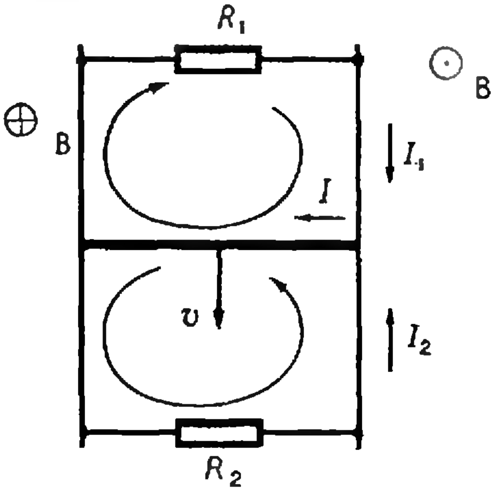


Рис. 7.

Задача 8. Проводник длины $l = 1$ *м* скользит по горизонтальным рельсам в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 1000$ *гс*. Концы рельсов замкнуты на конденсатор емкостью $C = 1$ *мкф* (рис. 6). Определить заряд на конденсаторе, если скорость проводника $v = 100$ *м/сек*.

Напряжение на конденсаторе U равно разности потенциалов на концах движущегося проводника: $U = Blv$. Значит, заряд на конденсаторе $Q = CU = BlvC = 10^{-5}$ *к*.

Заметим, что при движении проводника с постоянной скоростью заряд на конденсаторе остается неизменным и ток по проводнику не течет.

Рассмотрим более сложную задачу, в которой э. д. с. индукции наводится в двух связанных между собой контурах.

Задача 9. Проводник длины $l = 1$ *м* скользит по горизонтальным рельсам в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ *тл*. Концы рельсов замкнуты на сопротивления $R_1 = 1$ *ом* и $R_2 = 2$ *ом* (рис. 7). Определить ток, текущий через проводник, если скорость проводника $v = 10$ *м/с*. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

Проводник, рельсы и сопротивления образуют два контура. Э. д. с. индукции, наводимые в этих контурах, одинаковы по величине и равны Blv (см. задачу 5). Однако направлены они в разные стороны. Площадь контура с сопротивлением R_1 при движении проводника увеличивается. В контуре возникает ток, магнитное поле которого ослабляет внешнее поле. Площадь контура с сопротивлением R_2 уменьшается; магнитное поле возникающего в нем тока должно складываться с внешним полем.

Ток через движущийся проводник равен сумме токов, текущих в отдельных контурах: $I = I_1 + I_2$; $I_1 = E_{\text{инд}}/R_1 = Blv/R_1$; $I_2 = E_{\text{инд}}/R_2 = Blv/R_2$. Поэтому $I = Blv(R_1 + R_2)/R_1R_2 = 0{,}15$ *а*. Направление тока I показано на рисунке 7. Если изменить направление движения проводника, то направления всех токов также изменятся.

Упражнения

1. Возникает ли индукционный ток, если контур

а) движется поступательно в однородном магнитном поле;

б) вращается вокруг оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной индукции однородного поля;

в) вращается вокруг оси, лежащей в плоскости контура и направленной по вектору индукции однородного поля;

г) движется поступательно мимо полюса прямого магнита (плоскость контура перпендикулярна прямой, соединяющей полюса магнита)?

2. В замкнутую накоротко катушку из медной проволоки вводят магнит, создающий внутри нее поле $B = 100$ *гс*. Какой заряд протекает при этом по катушке? Радиус витка катушки $r = 10$ *см*, площадь сечения проволоки $S = 0{,}1$ *мм*^{2}, удельное сопротивление меди $1{,}75 \cdot 10^{-8}$ *ом·м*.

3. Катушка, содержащая $n = 1000$ витков изолированного провода, находится в магнитном поле, индукция которого равномерно меняется со скоростью $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 1 \frac{\text{тл}}{\text{с}}$. Концы катушки подсоединяют: а) к сопротивлению $R = 10$ *ом*, значительно превосходящему сопротивление катушки; б) к конденсатору емкостью $C = 10$ *мкф*. Определить: а) мощность тепловых потерь на сопротивлении; б) заряд на конденсаторе. Радиус витка катушки $r = 10$ *см*.

4. Одно время считалось, что голубь определяет свое местонахождение по величине магнитного поля Земли, которое ощущает по напряжению, индуцируемому в нем при полете. Оцените величину напряжения между концами крыльев голубя при полете со скоростью $v = 20$ *км/час*, считая, что расстояние между концами крыльев $l = 30$ *см*, а индукция магнитного поля Земли $B = 0{,}5$ *гс*.

Может ли голубь использовать это напряжение для определения своего местонахождения, если в атмосфере существуют случайные электрические поля напряженностью до 10^{-2} *в/см*?

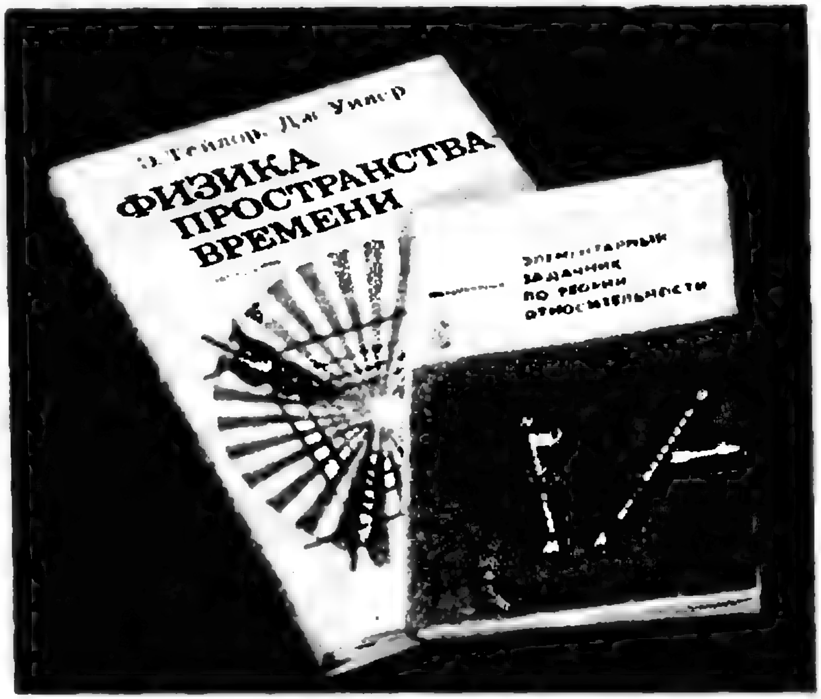
5. По вертикальным рельсам, расположенным в горизонтальном магнитном поле с индукцией B на расстоянии l друг от друга, скользит проводник. Какой максимальной скорости он может достигнуть, если накоротко замкнуть: а) только верхние концы рельсов; б) и верхние, и нижние концы. Масса проводника m, сопротивление его R. Сопротивлением рельсов пренебречь.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Сколько стоит грамм света?

Еще совсем недавно специальная теория относительности была уделом узкого круга специалистов. Всего лет пятнадцать тому назад ее специально изучали только физики. Постепенно она начала проникать в программы технических вузов. А теперь с основами теории Эйнштейна знакомятся на факультативных занятиях тысячи старшеклассников. Еще больше ребят читает популярную литературу по этому вопросу, в изобилии появившуюся за последние несколько лет.

Но если вы хотите по-настоящему изучить теорию относительности, просто читать даже очень хорошие книжки мало. Критерием того, все ли вы осознали, действительно ли поняли, может служить только маленькое самостоятельное исследование — решение задач.


Э. Тейлор, Дж. Уилер
ФИЗИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ
Элементарный задачник по теории относительности

Мы коротко расскажем здесь о двух книгах, которые помогают научиться решать задачи по теории относительности. В одной из них излагается и сама теория относительности, очень ярко и серьезно, но в то же время доступно сильному школьнику старших классов. Речь идет об изданной вторым изданием в 1971 году книге Э. Тейлора и Дж. Уилера «Физика пространства — времени»*). Авторы этой книги — известные американские физики и выдающиеся педагоги. Вторая книга—«Элементарный задачник по теории относительности» Ю. И. Соколовского *). Эта книга издана в серии «Библиотечка физико-математической школы», выпускаемой издательством «Наука». Фамилия автора задачника известна многим читателям в связи с его много раз издававшимися популярными книгами по теории относительности. Книги Э. Тейлора и Дж. Уилера и Ю. И. Соколовского совершенно разные, и такая не совсем обычная рецензия — сразу про две книги — пишется для того, чтобы подчеркнуть то, что их объединяет. Объединяют же эти книги помещенные в них задачи.

Для старшеклассников, решивших изучать теорию относительности, нужны школьные задачи: по крайней мере необходимо, чтобы математический аппарат не выходил за рамки школьной программы. Вообще говоря, таких задач существует не так уж мало, но они разбросаны по разным недоступным для школьников книгам. Теперь старшеклассники и учителя получили хороший подарок — школьные сборники задач по теории относительности. Каждая из указанных нами книг содержит около сотни задач. Есть среди них легкие, доступные начинающему, есть трудные, которые потребуют довольно глубоких знаний. Задачи заставляют задумываться над многими казавшимися очевидными вещами. Иногда читатель должен будет перечитать уже прочитанное в других книгах и, быть может, прочитать новые.

---

*) Э. Тейлор, Дж. Уилер, Физика пространства — времени, «Мир», 1971 г.

*) Ю. И. Соколовский, Элементарный задачник по теории относительности (с решениями), «Наука», 1971 г.

Книгу Э. Тейлора и Дж. Уилера можно, конечно, использовать одновременно и как учебник. Научить теории относительности — основная цель ее авторов, и с ней они справились блестяще. Задачник Соколовского требует, чтобы читатель держал вместе с ним на своем столе какую-нибудь из учебных или научно-популярных книг по теории относительности. Уровень книг тоже разный; вполне возможно, что начинающему читателю «Физика пространства—времени» покажется сложной, и тогда следует прежде прочитать какую-нибудь другую книгу, попроще.

Формулировки задач в книге Э. Тейлора и Дж. Уилера иногда неожиданны, но всегда интересны. Загадки и парадоксы теории относительности часто смущают и совсем не просты. «Когда Эйнштейн был ребенком, — пишут Тейлор и Уилер,—он ломал голову над такой загадкой: пусть бегун смотрит на себя в зеркало, которое он держит перед собой в вытянутой руке; если он бежит почти со скоростью света, сможет ли он увидеть себя в зеркале?» Необычные правила сложения скоростей, зависимость времени от системы отсчета, постоянство скорости света во всех инерциальных (то есть движущихся равномерно и прямолинейно друг относительно друга) системах отсчета — разве все это не удивительно? Вопрос, который стоит в заголовке этой рецензии, тоже оказывается не бессмысленным.

В задачнике Ю. И. Соколовского эта задача сформулирована так: «Сколько стоит один грамм света при тарифе на электроэнергию 4 копейки за киловатт-час и коэффициенте полезного действия электрического источника света 10%?» Как вы думаете — сколько? Цифра в ответе поражает — оказывается, 10 миллионов рублей. Проверьте, если не верите *).

Вот еще простая задача из этого же задачника: «Писатели-фантасты (С. Лем в «Астронавтах», Г. Мартынов в «Каллистянах» и др.) рассказывают о необычных ощущениях космонавтов при равномерном и прямолинейном полете межзвездного корабля с околосветовой скоростью. Авторы видят причину болезненного состояния космонавтов в увеличении их масс «в соответствии с теорией относительности Эйнштейна». Выскажите суждение о правдоподобности такого влияния околосветовой скорости полета на самочувствие космонавтов».

Основное правило Уилера, которое приводится перед задачами к первой главе книги «Физика пространства — времени», заслуживает того, чтобы его процитировать. Звучит оно так: «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет; привлеки простые физические соображения (симметрию! инвариантность! сохранение!) до того, как начинать подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее, ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску». Постарайтесь следовать этому полезному правилу при решении всяких задач.

Во втором издании «Физики пространства — времени» приводятся решения задач, но не спешите заглядывать в них! Все задачи, конечно, вряд ли можно решить. Быть может, это и не нужно, хотя решенная задача — это ответ на еще один каверзный вопрос, знакомство с новым физическим явлением или разрешение старого парадокса.

В целом довольно удачен подбор задач и в книге Ю. И. Соколовского. Иногда, впрочем, хорошие задачи страдают от употребленной терминологии. Довольно тяжеловесно и малопонятно звучат, например, слова: «альфацентрически одновременных событий» (задача №14) или «события *M* и *N*, альфацентрически и бетацентрически одноместные событию *A*» (задача № 15).

Может быть, в задачнике следовало бы уделить больше внимания вопросу об инвариантных величинах. Решения многих трудных задач Ю. И. Соколовский излагает чересчур кратко. Хочется пожелать, чтобы при переиздании задачника они были написаны подробнее.

Обе книжки, о которых здесь рассказано, написаны людьми, имеющими большой педагогический опыт и не один год преподающими теорию относительности. Они, без сомнения, принесут пользу и удовлетворение тем, кто решится их серьезно изучать.

А. Б. Геллер

---

*) Эта же задача рассматривается в книге Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румера «Что такое теория относительности?».

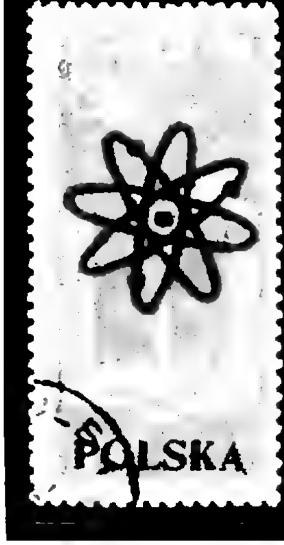
25
ПОЧТА СССР

ЛЕНИН
ПОЧТА СССР

30 h
ČESKOSLOVENSKO

АТОМ МИРУ
6к
ПОЧТА СССР 1963

JUGOSLAVIJA



REPUBLIK INDONESIA
1,50

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

АТОМНАЯ ЭНЕРГИЯ НА СЛУЖБЕ МИРА

Использование атомной энергии в мирных целях началось в июле 1954 г., когда в Советском Союзе вошла в строй атомная электростанция Академии Наук СССР в Обнинске. Этому событию посвящена серия из трех марок, выпущенных в январе 1956 г. Одну из этих марок, на которой показан внешний вид этой электростанции, вы видите на фото.

Особую выгоду дает установка атомных реакторов на судах. Так, немногим более 80 кг атомного горючего достаточно ледоколу «Ленин», чтобы плавать круглый год, не заходя в порт для заправки. На фото приведена марка с изображением атомного ледокола «Ленин».

В 1962 г. в Советском Союзе была выпущена серия из двух марок «Атомная энергия на службе мира». Эти марки вы видите на фото. На одной из них в центре — силуэт высотного здания университета, а по краям — условные изображения, символизирующие применение атома в металлургии, медицине, сельском хозяйстве и других областях. На второй марке — контурная карта СССР с условным изображением атома.

В 1963 г. у нас в стране вышла марка, посвященная теме «Атом — миру», с условным изображением атома на фоне линии электропередач. Эта марка приведена на фото. Марки, символизирующие использование атомной энергии в мирных целях, выпускались во многих странах мира. Так, например, интересна марка Чехословакии (см. фото в правом верхнем углу), выпущенная в 1954 г. в серии «Чехословацкое машиностроение». На ней изображены заводские корпуса, а на переднем плане — паровая машина и схема строения атома. Текст на марке гласит: «От паровой машины до атомной электростанции».

На фото также приведены марки Индонезии, Польши, Югославии и марка Организации объединенных наций с символическим изображением атома.

А. В. Алтикис

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

К статье «Фигуры Лиссажу»

1. $v_x = -A_1 p\omega \sin p\omega t,$
$v_y = -A_2 q\omega \sin q\omega t.$

Кривая незамкнута, когда v_x и v_y обращаются в нуль.

$$v_x = 0, \text{ если } p\omega t = k\pi,$$
$$v_y = 0, \text{ если } q\omega t = m\pi$$

Следовательно, $\frac{p}{q} = \frac{k}{m}$ выражается отношением целых чисел.

2. $y = A_2(2\cos^2\omega t - 1) =$
$$= A_2\left(2\frac{x^2}{A_1^2} - 1\right).$$

Это — часть параболы с вершиной в точке $y = -A_2$ и осью вдоль оси Y (см. рис. 1).

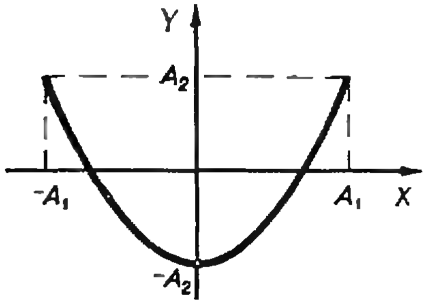


Рис. 1.

К статье «Теорема косинусов и ее следствия»

3. Задача решения не имеет, так как неравенство $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ при $a = 5$, $b = 2$ и $\alpha = 45°$ не выполняется (см. пример 1)

4. $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

5. Показать, что для всякого треугольника имеет место соотношение

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B - 2\operatorname{ctg} C = \frac{2c^2 - a^2 - b^2}{2S}.$$

6. Установить, что

$$\cos C = \frac{(n-1)(a^2+b^2)}{2nab},$$

и применить неравенство $\frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant 2$

7. Воспользоваться неравенством $\operatorname{tg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{a^2}{4S}$, и соотношением $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

9. 120°.

10. Пусть $BC = a$, $AB = c$ и $CA = b$. Тогда $|b-c| = |m-n|$ и $a = m + n$. Поэтому по формуле $a^2 = (b-c)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ имеем $(m+n)^2 = (m-n)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Отсюда $S = mn\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. В частности, если $\angle A = 90°$, то $S = mn$.

11. Пусть перпендикуляр к отрезку AB, проведенный через его середину, пересекает прямую l в точке O. Тогда $OM = x$, $OA = OB = r$, $\angle AOM = \alpha$, $\angle BOM = \beta$ и

$$\left(\frac{AM}{BM}\right)^2 = \frac{(r-x)^2 + 4rx\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(r-x)^2 + 4rx\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Затем воспользоваться известным неравенством $\frac{a+m}{b+m} \geqslant \frac{a}{b}$ (при $0<a<b$ и $m \geqslant 0$).

12. Воспользуйтесь результатом а) примера 3.

13. Перенесем боковую сторону AB трапеции $ABCD$ на вектор $\overline{BC}$ в положение CF (рис. 2). Получим треугольник CDF. Требуется определить угол $\alpha = \angle FCD$.

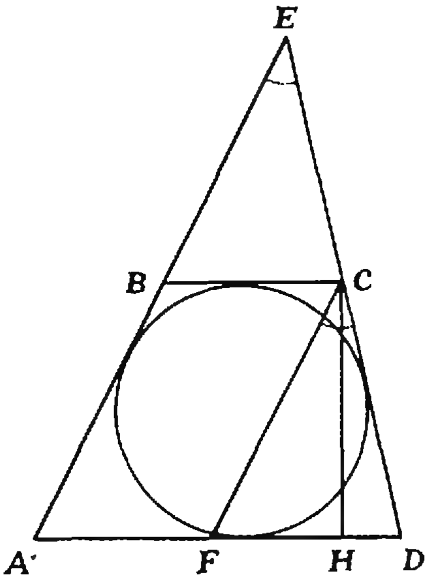


Рис. 2.

На основании свойства сторон описанного четырехугольника имеем: $AB + CD = a + b$, так что $CF + CD = a + b$. Кроме того, $DF = a - b$.

Применим к треугольнику CDF формулу (5) (из статьи):

$$DF^2 = (CF + CD)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

где $2S = DF \cdot CH$, а $CH = 2r$. Подставив данные, получим

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4(a - b)\, r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{(a - b)\, r}{ab}$$

Примечание. Можно доказать, что задача имеет решение тогда и только тогда, когда параметры a, b и r удовлетворяют условию $2r \leqslant \sqrt{ab}$.

14. Воспользуйтесь формулой (1) и тем, что если $A + B + C = \pi$, то $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

К задаче М108

Ответ. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$, $a + b + c = 2p$. Тогда при $2ab > p^2$ существует одна прямая, делящая периметр и площадь треугольника пополам, при $2ab = p^2$ — две и при $2ab < p^2$ — три.

Указание. Проведем через центр O вписанной окружности прямую, будем поворачивать ее вокруг точки O и следить за тем, по какую сторону от нее лежит больше половины площади (или, что то же самое, периметра); на рисунке 1 для шести положений прямой — по биссектрисам и перпендикулярно к ним — стрелка указывает, где лежит большая часть треугольника *). Для нас важны именно эти положения, поскольку в промежутках между ними величина площади (периметра), лежащей в одной стороне (полуплоскости) — а значит, и в другой — меняется монотонно. После этого уже легко понять, что в розовом секторе лежит ровно одна нужная нам прямая (при любых $a \geqslant b \geqslant c$), в каждом из голубых — еще по одной, если только $2ab < p^2$.

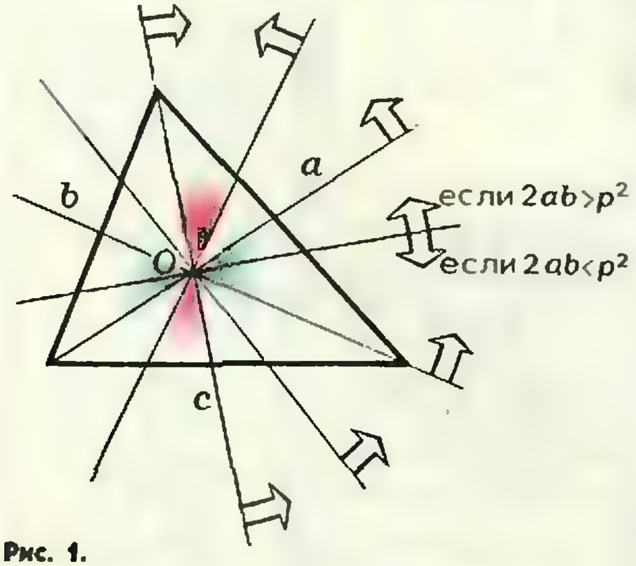


Рис. 1.

К задаче М109

Пусть d НОД (n, k), $n = dn_1$, $k = dk_1$. Тогда (см. пункт 5 «Линейное уравнение» в статье В. Н. Вагутена, стр. 33) существуют такие целые x и y, что $kx - ny = d$. Изменив знак у x, y, можно считать, что $x \geqslant 0$, а $kx - ny$ равно d или $-d$.

Пусть k_1 нечетно. Тогда y можно считать четным (иначе можно заменить x на $x + n_1$, а y на $y + k_1$). Тогда, если заменить знаки в первых k вершинах, затем в следующих за ними k вершинах и т. д. x раз, то в результате изменится знак только у d вершин, стоящих подряд. После этого задача становится, очевидно, эквивалентной той, где разрешается изменять знак у d вершин, стоящих подряд.

Пусть k_1 четно. Тогда y нечетно (ведь $k_1x - n_1y = 1$). Используя то, что $kx - ny = \pm d$, мы можем поменять знак у всех вершин, кроме d, стоящих подряд. Следовательно, мы можем оставить неизменным знак у всех вершин, кроме двух, отстоящих на d друг от друга. Таким образом, мы сможем получить любую комбинацию знаков, у которой в вершинах каждого правильного n_1-угольника та же четность количества минусов, что у первоначального расположения. Легко видеть, что другие получить нельзя.

Ответ. Пусть каждому расположению знаков соответствует набор $(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha)$, где x_i равно 0 или 1 в зависимости от того, четное или нечетное количество минусов стоит в вершинах с номерами $i + d_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$. Тогда при k_1 четном два расположения знаков можно перевести одно в другое в том и только в том случае, если соответствующие им наборы одинаковы, при k_1 нечетном — если они одинаковы или противоположны.

К статье «Применение тригонометрии при решении геометрических задач»

1. $$AD = \frac{a \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

2. $$V = \frac{S\sqrt{S}}{6} \cdot \operatorname{tg}\beta : \sqrt{\sin \alpha}.$$

---

*) Прежде чем проверить это, докажите, что биссектрисы всегда делят полный угол при точке O на шесть острых углов.

3. $\dfrac{l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\beta}{2}}\times$

$$\times\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

4. $3\sqrt{5}$ *см*, 10 *см*, 11 *см*.

7. $\arcsin(\mathrm{cosec}\,\alpha\times$

$\times\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma]\cdot[\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)]})$.

8. $\dfrac{S_\square}{S_\triangle}=\dfrac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}$.

К статье «Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

Вариант 1

1. $\dfrac{2a^3(2\sqrt{3}-3)}{3}$. Указание. Заметив (и доказав), что $\angle ASC=\angle BSD=90^\circ$ и что диагонали сечения взаимно перпендикулярны, находим диагонали и площадь четырехугольника.

2. 1 *м/сек*; 1,2 *м/сек*.

3. $x<-1-\sqrt{2}$; $0<x<\sqrt{2}-1$; $x>1$.

4. $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$. Указание. ОДЗ исходного уравнения определяется условиями: 1) $\cos x+1>0$; 2) $\sin x>0$; 3) $\sin x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Перейдя к уравнению

$$1+\cos x=2\sin^2 x$$

и выразив $\sin^2 x$ через $1-\cos^2 x$, получим совокупность уравнений: 1) $\cos x+1=0$, 2) $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Из решений выбираем только те, которые входят в ОДЗ исходного уравнения, то есть $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$.

Замечание. Если $2\sin^2 x$ заменить на $1-\cos 2x$, то получим уравнение $\cos x=-\cos 2x$, откуда $x_1=\pi+2\pi n$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$; $\sin x_1=0$ и потому x_1 не входит в ОДЗ, а из решений серии $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$ надо отобрать те, которые входят в ОДЗ. Для этого разбиваем серию $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$ на 3, как говорят, элементарные серии:

$$x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad x_3=\pi+2\pi n,$$

из которых только $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ входит в ОДЗ.

Вариант 2

1. $\dfrac{1}{8}(a^2+2ab)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Замечание. Напомним, что центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения биссектрис.

2. 40 *км/ч*; 50 *км/ч*.

3. $x=5$.

4. $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$. Указание. Заменив $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$ и разложив уравнение на множители, получим совокупность уравнений: 1) $\sin x=1$ и 2) $\sin x+\cos x=2$. Второе уравнение решений не имеет.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ А. И. ГЕРЦЕНА

Математический факультет

1. 1/9. 2. $\alpha>5$.

3. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, где $k=0, \pm1, \pm2\ldots$

4. $\dfrac{S^{3/2}\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}}{6(1+\cos\alpha)^{3/2}}$.

Физический факультет

1. $1-\sqrt{a/x}$. 2. $x_1=-1$, $x_2=5$.

3. $1/\sin\alpha$. 4. $\dfrac{\pi h^3(1-\cos\alpha)}{3\cos\alpha}$

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

1. $x=1$, $y=0$. Указание. Введите новые неизвестные

$$u=\frac{1}{x+y},\quad v=\frac{1}{x-y}.$$

2. Указание. Заметьте, что

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta).$$

3. $x=1$. Указание. Внесите x под знак логарифма и придите к уравнению $10^x+20^x=6\cdot5^x$. Заметьте, что $5^x>0$, а следовательно, это уравнение можно сократить на 5^x, получив квадратное уравнение относительно неизвестного $y=2^x$.

4. $b < -\frac{3}{2}$ или $b > -1$. Указание. Выражение имеет смысл тогда, когда

$$1 + \frac{6b+5}{2b+3} \geq 0.$$

Решите это неравенство, приведя правую часть к общему знаменателю, например, методом интервалов.

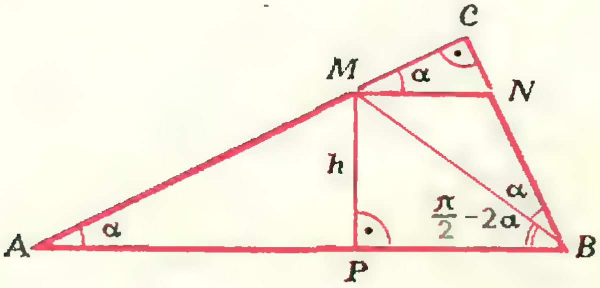


Рис. 1.

5. $\frac{2h^2}{\sin 4\alpha}$. Указание. Достройте трапецию $AMNB$ до прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 1). Тогда AB можно выразить через $MP = h$ и углы CAB и MBA:

$$AB = h \operatorname{ctg} \alpha + h \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right).$$

MN найдите из $\triangle MCN$, предварительно вычислив MC как разность AC и AM.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ ЛЕНСОВЕТА

1. Указание. Разложите $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ по формуле разности квадратов.

2. Углы между боковыми гранями и плоскостью основания равны $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$, а углы между соседними боковыми гранями равны $2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. Указание. Докажите, что пирамида — правильная. Обозначьте боковое ребро пирамиды через x и выразите через него стороны треугольников, содержащих рассматриваемые углы.

3. $a = 0$ или $a = -1$. См. также рисунок 2. Указание. Данные графики всегда проходят через точку $(0, -1)$. Поэтому достаточно потребовать, чтобы уравнение

$$ax - 1 = \frac{1}{x-1}$$

не имело решений, отличных от $x = 0$.

4. $x > \sqrt{5}$ или $\frac{1}{\sqrt{5}} < x < 1$. Указание. Функция определена, если выполняются условия: $x > 0$, $x \neq 1$, $\cos\frac{3\pi}{1+x^2} > 0$. Последнее условие приведите к виду $-\frac{1}{2} + 2k < \frac{3}{1+x^2} < \frac{1}{2} + 2k$. Убедитесь, что решения существуют только при $k = 0$ или $k = 1$ (проще всего это сделать с помощью рисунка 3, рассматривая график функции $y = \frac{3}{1+x^2}$ и полосы $-\frac{1}{2} + 2k < y < \frac{1}{2} + 2k$).

5. $a > \frac{1}{2}$. Указание. Рассмотрите отдельно случаи $0 < a + x < 1$ и $a + x > 1$. В первом из них получится система неравенств $x < a - 1$, $x < 1 - a$, $x > 0$; докажите ее несовместность при любых значениях a. Во втором случае получится система $x > 0$, $x > a - 1$, $x > 1 - a$, $x < a$. Установите, что при $1 - a \geq 0$, эта система совместна, когда $\frac{1}{2} < a \leq 1$, а при $a - 1 > 0$ эта система всегда совместна.

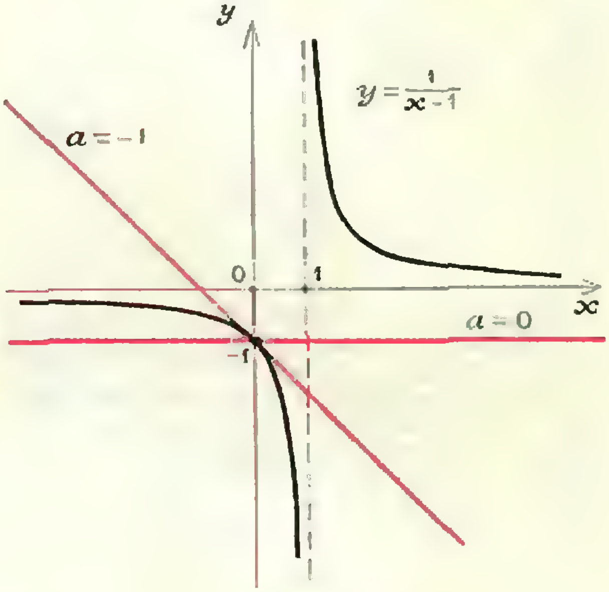


Рис. 2.

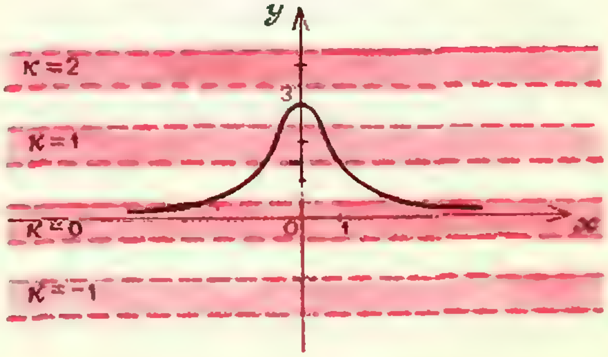


Рис. 3.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

1. -27.

2. $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. Указание. Воспользуйтесь формулами приведения и соотношением

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1=-\cos\alpha.$$

3. $\frac{d^3}{12}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. Указание. Рассмотрите какой-либо прямоугольный треугольник, образованный стороной ромба и его диагоналями. Выразите через d и α его площадь и высоту, опущенную на гипотенузу.

4. $x=25$. Указание. Представьте каждое слагаемое в виде степеней двойки.

5. $(b-a)^2$. Указание. Заметьте, что $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ИНСТИТУТ ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

1. $\sqrt{x}$.

2. $x=-2$. Указание. Один из самых красивых методов решения этого уравнения заключается в «угадывании» корня $x=-2$. После этого докажите, что уравнение не имеет других корней, так как в левой части уравнения стоит строго возрастающая функция.

3. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$ или $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$ (k, n — любые целые числа). Указание. Замените $\cos 7x+\cos x$ и $\cos^2 2x-\sin^2 2x$, используя известные соотношения.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

1. a^x. Указание. Представьте последовательно все подкоренные выражения в виде квадратов.

2. $x=\frac{1}{12}$ или $x=\frac{9}{4}$. Указание. Перейдите к новому неизвестному $y=\log_3 4x$.

3. $\begin{cases}x=0,\\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ или $\begin{cases}x=1,\\ y=1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}$

Указание. Освободитесь от членов, не содержащих неизвестные, и придите к уравнению относительно xy.

4. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ (k — любое целое число). Указание. Приведите выражение в левой части уравнения к общему знаменателю и разложите $1-\sin^4 x$ по формуле разности квадратов.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ХОЛОДИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

1. $V=\frac{3}{2}\pi a^3$; $S=4\sqrt{3}\pi a^2$.

Указание. Продолжите стороны ромба до пересечения с осью вращения. Заметьте, что объем данного тела вращения равен сумме объемов двух равных больших конусов минус сумма объемов четырех равных маленьких конусов. Заметьте также, что поверхность тела вращения равна сумме боковых поверхностей больших конусов.

2. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ (k — любое целое число). Указание. Приведите уравнение к общему знаменателю, после чего разложите выражение в левой части по формуле разности квадратов. Представьте левую часть в виде произведения и сократите обе части на общий ненулевой множитель.

3. $\begin{cases}x=8,\\ y=2\end{cases}$ или $\begin{cases}x=\frac{1}{4},\\ y=64.\end{cases}$

Указание. Заметьте, что $\log_x y=\frac{1}{\log_y x}$. Решите первое уравнение относительно $\log_y x$.

4. $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

5. $x=100$. Указание. Сгруппируйте слагаемые с одинаковыми основаниями в разных частях уравнения, после чего приведите подобные члены.

ЛЕНИНГРАДСКАЯ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ С. М. КИРОВА

1. $a_1=\frac{2}{3}$; $q=2$. Указание. Перейдите к неизвестным a_1 и q, где через q обозначен знаменатель прогрессии. Разделите первое уравнение на второе и полученное уравнение относительно q решите, используя разложение многочлена на множители.

2. $x=5$. Указание. Приведите уравнение к общему знаменателю, после чего воспользуйтесь формулами логарифма степени и произведения.

3. $x=2k\pi$ или $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (k — любое целое число). Указание. Воспользуйтесь формулой $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$.

4. $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$. Указание. Проведите плоскость через ось конуса и радиус, перпендикулярный хорде. Рассмотрите получившиеся прямоугольные треугольники.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

1. $x = \pi(2n+1)$ или

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + k\pi$$

(n, k — любые целые числа). Указание. Воспользуйтесь формулами приведения, после чего разложите обе части уравнения на множители, предварительно сгруппировав их подходящим образом.

2. $x = 4$. Указание. Упростите выражение в правой части уравнения.

3. Указание. Воспользуйтесь формулами приведения и формулами, выражающими тангенс половинного аргумента через косинус основного аргумента.

4. $\sqrt{a^2-1}$.

К статье «Решение задач по электростатике»

1. Разность потенциалов нужно уменьшить на 980 *в*.

2. Электрометр будет показывать э. д. с. гальванического элемента независимо от величины емкости конденсатора.

3. Разность потенциалов $\Delta\varphi_{AB} = E_1 - \Delta\varphi_1 = -E_2 + \Delta\varphi_2$, где $\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1}$ и $\Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2}$ разности потенциалов между пластинами конденсаторов. Исключая из этих уравнений заряд q, получим:

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{C_1E_1 - C_2E_2}{C_1+C_2} = -1{,}3\ в\cdot$$

4. Заряды конденсаторов до соединения: $q_1 = C_1\Delta\varphi_1$ и $q_2 = C_2\Delta\varphi_2$. Общий заряд на обкладках после соединения $q = q_1 + q_2$. Общая емкость конденсаторов после соединения $C = C_1 + C_2$. Искомая разность потенциалов $\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{C_1\Delta\varphi_1 + C_2\Delta\varphi_2}{C_1+C_2} = 40\ в.$

К статье «Электромагнитная индукция»

1. а) Не возникает, так как при движении не меняются ни величина магнитной индукции, ни угол, который она составляет с плоскостью контура, ни площадь контура.

б) Возникает, так как при вращении меняется угол между вектором магнитной индукции и плоскостью контура.

в) Не возникает, так как линии магнитной индукции лежат в плоскости контура и магнитный поток через контур всегда равен нулю.

г) Возникает, так как вследствие неоднородности магнитного поля прямого магнита меняется величина вектора магнитной индукции.

2. Заряд, протекающий по катушке при введении магнита, равен

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{n\pi r^2 BS}{\rho 2\pi r n} = \frac{rSB}{2\rho} \approx 3\cdot 10^{-3}\,к.$$

3. а) В контуре, образуемом катушкой и сопротивлением, действует э. д. с. индукции

$$E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = n\pi r^2\frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 31\ в.$$

Под действием этой э. д. с. в контуре течет постоянный ток $I = E_{инд}/R \approx 3{,}1\ а$ и на сопротивлении R выделяется $W = I^2R = 96\ вт$. Заряд на конденсаторе

$$Q = CU = Cn\pi r^2\frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 3\cdot 10^{-4}\,к.$$

4. Разность потенциалов, возникающая на концах проводника длины l, движущегося в перпендикулярном магнитном поле индукции B со скоростью v: $U = Blv \approx 10^{-4}\ в$. Соответствующая этой разности потенциалов напряженность электрического поля $E \approx U/l \approx 10^{-5} - 10^{-6}\ в/см$, что значительно меньше напряженности случайных электрических полей в атмосфере. Ориентироваться таким образом голубь не может.

5. В первом случае ток через проводник равен $I = E_{инд}/R = Blv/R$. Тормозящая сила пропорциональна I, а следовательно, и скорости проводника v. Скорость проводника будет расти до тех пор, пока сила F не уравновесит силу тяжести P: $mg = BIl = B^2l^2v/R$. Отсюда максимальная скорость проводника

$$v = mgR/B^2l^2.$$

Во втором случае имеется два контура, образованных движущимся проводником, рельсами и каждой перемычкой. Э. д. с. индукции в них одинаковы по величине $E_{инд} = Blv$ и равны IR, где I — ток через движущийся проводник. Отсюда ток через движущийся проводник $I = Blv/R$. В этом случае максимальная скорость проводника та же.

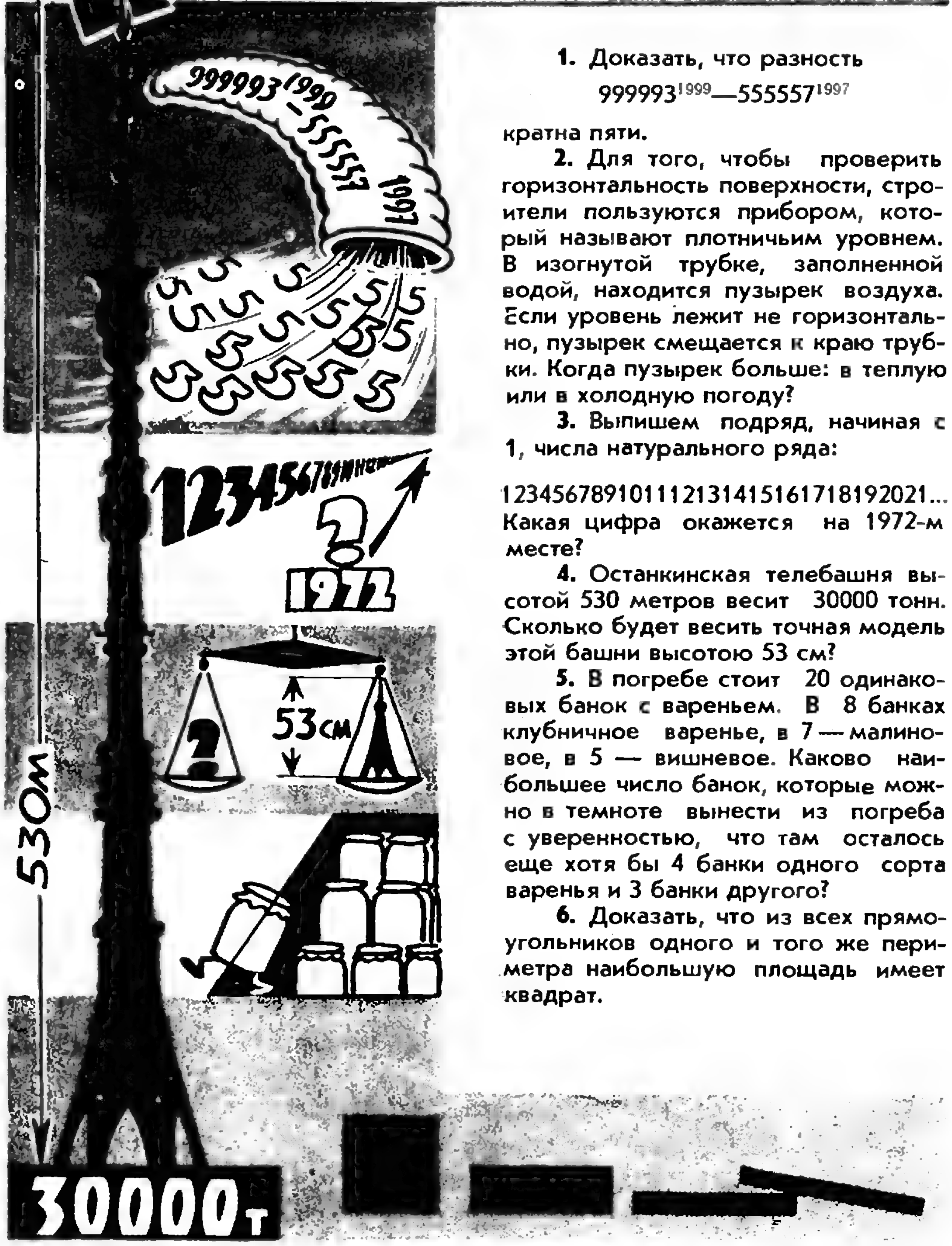
К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 6, 3-я стр. обложки)

1. 26, 14.
2. Каждая сумма равна сумме чисел, стоящих у вершин треугольника.
3. 3155.
4. —3, —5, —7, —9.
5. 33, 43.
6. А сколько вам лет?

КВАНТ

ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ



1. Доказать, что разность

$$999993^{1999}-555557^{1997}$$

кратна пяти.

2. Для того, чтобы проверить горизонтальность поверхности, строители пользуются прибором, который называют плотничьим уровнем. В изогнутой трубке, заполненной водой, находится пузырек воздуха. Если уровень лежит не горизонтально, пузырек смещается к краю трубки. Когда пузырек больше: в теплую или в холодную погоду?

3. Выпишем подряд, начиная с 1, числа натурального ряда:

123456789101112131415161718192021...

Какая цифра окажется на 1972-м месте?

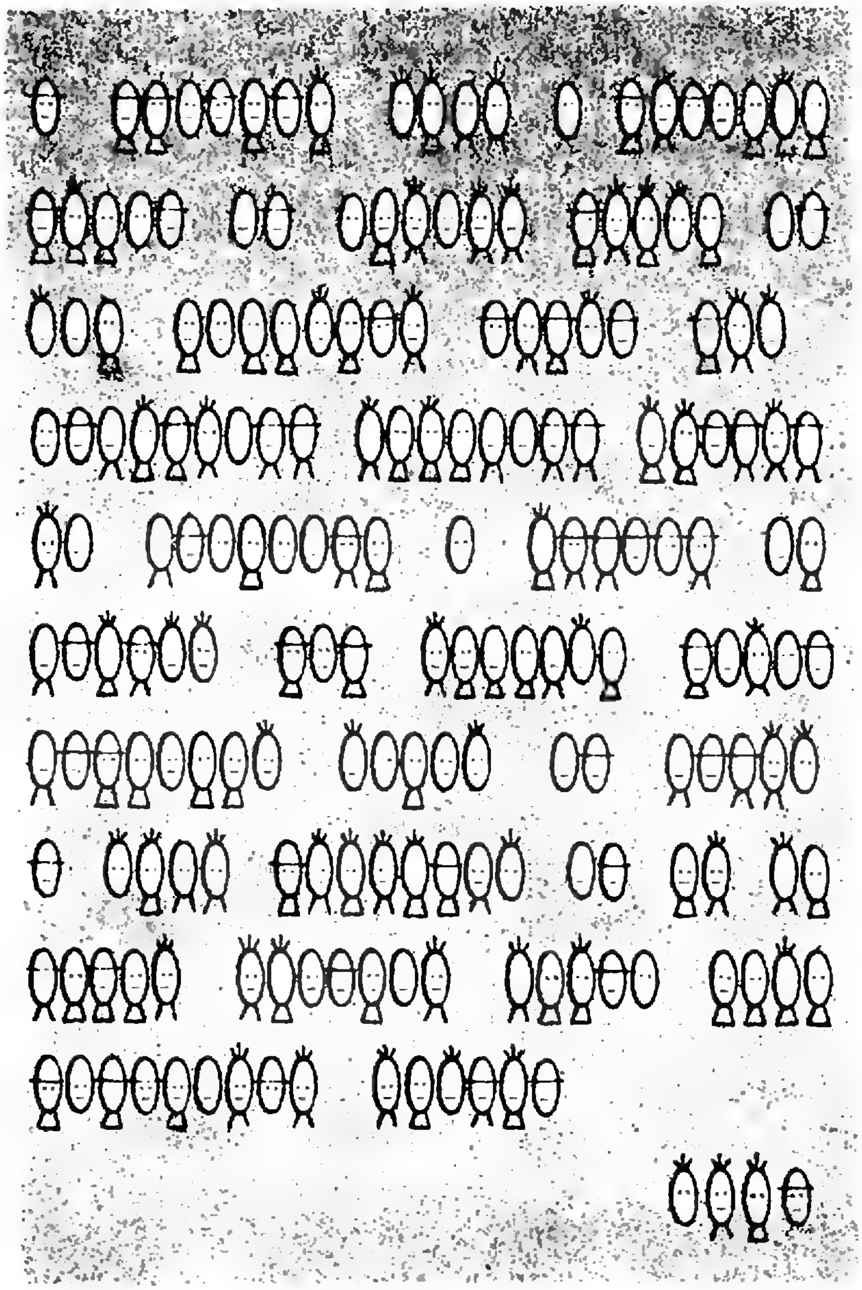
4. Останкинская телебашня высотой 530 метров весит 30000 тонн. Сколько будет весить точная модель этой башни высотою 53 см?

5. В погребе стоит 20 одинаковых банок с вареньем. В 8 банках клубничное варенье, в 7 — малиновое, в 5 — вишневое. Каково наибольшее число банок, которые можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там осталось еще хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

6. Доказать, что из всех прямоугольников одного и того же периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 7



НЕ ПРОПАДАЕТ ЛИ В ВАС ШЕРЛОК ХОЛМС!

Федя договорился с бывшим одноклассником, живущим в деревне, что проведет у него отпуск. Его товарищ собирался ехать в тренировочный лагерь, и весь его дом должен был остаться в распоряжении Феди. Федя на целые сутки задержался в городе, и когда он с вещами наконец выбрался в деревню, товарища уже не было, а дверь была на замке. Однако в щели Федя нашел адресованное ему письмо, содержание которого передано на рисунке.

Федя сразу узнал тайнопись, которой они пользовались в школьные годы, но к несчастью он успел за прошедшие годы забыть шифр. Он помнил лишь то, что каждой рожице соответствовала определенная буква; причем буквы Е и Ё не различались.

Однако после некоторого раздумья Феде все же удалось расшифровать тайнопись, найти ключ от двери и попасть в дом.

Как звали школьного товарища Феди, и что он писал в этом письме?

НОМЕР
8

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

8
АВГУСТ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 Кто поедет в Рио? — Г. М. Адельсон-Вельский, И. Н. Бернштейн, М. Л. Гервер
9 Высокое давление — создание и измерение — Ф. Ф. Воронов
17 Саймон Флэгг и дьявол — Артур Порджес
23 Несколько слов о Великой теореме Ферма — Ю. А. Гастев, М. Л. Смолянский
26 Возможности оптических телескопов — А. Д. Марленский
32 О механике Аристотеля — М. И. Каганов, Л. Я. Любарский
39 Конкурс Эдисона — Б. И. Алейников, М. С. Дубсон

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

41 Калейдоскопы — А. Н. Виленкин

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

50 Отверстие — линза — В. В. Майер

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

56 Задачи **М156—М160, Ф168—Ф172**
58 Решения задач **М110—М122, Ф131—Ф137**

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

74 Почему мы не проваливаемся сквозь пол? — М. П. Шаскольская

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

76 Марки, посвященные Международному году спокойного Солнца — В. А. Лешковцев
78 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ (3-я стр. обложки)
СМЕСЬ (стр. *16, 25, 38, 49*)

Кто поедет в Рио?

Г. М. Адельсон-Вельский,
И. Н. Бернштейн,
М. Л. Гервер

Задача, о которой идет речь в этой статье, вовсе не носит специфически шахматного — да и вообще спортивного — характера. Ее можно было бы, например, сформулировать так: из n попарно не равных по весу камней отобрать и расположить в порядке убывания k самых тяжелых, пользуясь лишь двухчашечными весами без гирь, с помощью минимального числа взвешиваний. А вот формулировка, имеющая совершенно реальный математический смысл: составить программу для вычислительной машины, которая за минимальное число сравнений отбирала бы из n попарно неравных чисел k самых больших и располагала бы их в порядке убывания *).

Оговорка о попарном неравенстве чисел (или камней) автоматически обеспечивает выполнение условия: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Не нужно быть опытным болельщиком, чтобы понять, что в спорте на самом деле ничего подобного нет и что, скажем, проигрыш Фишера Петросяну на турнире претендентов в Кюрасао и выигрыш Спасского в решающей партии матча на первенство мира с Петросяном отнюдь не предрешают исхода матча Спасский — Фишер.

Отметим, впрочем, что олимпийская система (проигравший выбывает) основана именно на допущениях, сформулированных в начале статьи. Кстати, «обычная» олимпийская схема, по которой проигравший в финале сразу объявляется вторым призером (а победитель встречи проигравших полуфиналистов — третьим), есть лишь ухудшенный вариант «Правил ВОМИ»!

Задача, о которой рассказывают авторы, как уже говорилось, носит вполне серьезный характер. (Между прочим, ее решение, при всей его видимой «элементарности», удалось получить лишь совсем недавно, что, безусловно, представляет особый интерес для нашего журнала). Излагать же ее показалось авторам приятнее и веселее на «шахматном» языке...

Глава I. Правила ВОМИ

Свершилось! Шахматисты города Васюки, наконец, допущены на Всемирную Олимпиаду в Рио-де-Жанейро. Выяснилось это, как обычно, в последний момент, и теперь нужно в считанные дни провести отборочный турнир и выбрать из 128 шахматистов-любителей трех сильнейших. Двое из них (чемпион и второй призер) будут играть за команду Васюков на первой и второй доске; третий призер поедет в Рио в качестве запасного участника.

---

*) В статье разбирается лишь случай $k=3$ (об общем случае говорится в задаче № 3).

Долго не утихали жестокие споры — как получше организовать турнир, и когда времени почти совсем не осталось, приняли, наконец, следующие предложения:

1°. Отборочные игры проводить последовательно, одну за другой*). Участников каждой партии назначать в зависимости от результатов предыдущих игр.

2°. Ничьи отменить (в случае ничейного исхода победителя определять по жребию).

3°. Если *A* выиграет у *B*, считать, что *A* сильнее *B*.

4°. Если *A* сильнее *B*, а *B* сильнее *C*, считать, что *A* сильнее *C*.

5°. Если уже установлено, кто из двух шахматистов сильнее, партию между ними не проводить.

6°. Поручить ВОМИ**) срочно разработать точные правила для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров за *минимальное* число партий.

Вот какие правила были составлены ВОМИ.

§ 1. Определение чемпиона

Игры проводятся по олимпийской системе. На 1-м этапе все 128 участников разбиваются на 64 пары, в каждой паре определяется победитель (64 партии). На 2-м этапе 64 победителя 1-го этапа разбиваются на 32 пары, в каждой из них определяется победитель (еще 32 партии) и т. д.: на 3-м этапе проводится 16 партий, на 4-м — восемь, на 5-м — четыре, на 6-м — две, на 7-м — одна. Всего — 127 партий.

Победителю финальной партии присваивается титул «чемпион» и предоставляется право играть на первой доске.

§ 2. Определение второго призера

Ясно, что на это место вправе претендовать лишь те шахматисты, которые проиграли только чемпиону. Их семеро. Присвоим им номера от 1 до 7 (№ 1 проиграл чемпиону на 1-м этапе, № 2 — на 2-м, и т. д.).

Определение второго призера проводится так: № 1 играет с № 2, выигравший играет с № 3, выигравший эту партию — с № 4 и т. д. (всего 6 партий).

Победитель последней партии объявляется «вторым призером» и играет за команду на второй доске.

§ 3. Определение запасного участника (третьего призера)

На это место претендуют шахматисты, не проигравшие никому, кроме чемпиона и второго призера. Второму призеру они непременно проиграли*).

Второй призер выиграл не больше семи партий. Действительно, пусть вторым призером стал № i (i — одно из чисел от 1 до 7, см. § 2). Тогда при игре по олимпийской системе (см. § 1) он выиграл $i-1$ партию (на 1-м, 2-м . . . $(i-1)$-м этапах). Затем (см. § 2) он победил максимум одного шахматиста с номером, меньшим, чем i**), и $(7-i)$ шахматистов с номерами, большими, чем i, то есть сыграл еще $(8-i)$ или $(7-i)$ партий. Складывая это число с $(i-1)$, получим, что всего второй призер выиграл 7 или 6 партий.

Таким образом, на место третьего призера претендуют не более семи шахматистов. Сильнейшего из них можно определить за 6 партий. Этот шахматист и будет запасным участником команды.

§ 4. Выводы

Для того, чтобы найти среди 128 шахматистов чемпиона и второго и третьего призеров, достаточно провести

---

*) После знаменитого сеанса гроссмейстера О. Бендера при словах «одновременная игра» Васюкинские любители впадают в мрачное оцепенение.

**) Васюкинскому отделению Математического института.

*) Иначе они оставались бы кандидатами на вторую доску.

**) Если $i=1$, то таких шахматистов, разумеется, нет; если же $i>1$, то такие шахматисты имеются, и № i выиграл у сильнейшего из них.

$$127+6+6=139$$

партий.

Глава II. Нельзя ли короче?

Хороши ли правила ВОМИ? Нельзя ли определить 1-го, 2-го и 3-го призеров за меньшее число партий?

§ 1. Мнение руководства, случай и рок

Пусть еще до соревнований у руководства Клуба Четырех Коней сложилось мнение, что сильнейший шахматист — A, второй по силе — B и третий — C. И пусть цель соревнований — проверить, что это действительно так.

Меньше, чем за 127 партий, такую проверку осуществить нельзя, так как все шахматисты, кроме чемпиона, должны проиграть хотя бы по одной партии. А за 127 партий — можно: 125 «аутсайдеров» (все, кроме A, B и C) играют 124 партии «на вылет» (после каждой партии проигравший выбывает), затем победитель играет с C и проигрывает*), C проигрывает*) B и B проигрывает*) A. Собственно говоря, не обязательно даже знать призеров заранее: их можно угадать случайно, так что иногда («если повезет») три призера определяются за 127 партий.

Мы будем, однако, считать, что про силу шахматистов ничего заранее не известно и что нам «не везет». Более того, представим себе, что Злой Рок (или агент соперников — как хотите) влияет на исход каждой партии так, чтобы соревнования тянулись как можно дольше. Мы покажем, что в этом случае выбрать 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 128 шахматистов меньше, чем за 139 партий, нельзя, как бы**) ни проводились отборочные соревнования.

§ 2. Формулировка теоремы

Исследуем сразу общий случай, когда в соревнованиях участвует не обязательно 128, а любое число шахматистов. Обозначим его через n. Введем также следующее обозначение. Пусть N — произвольное число; для некоторых целых чисел l выполняется неравенство $2^l\geqslant N$. Обозначим через $l\,[N]$ наименьшее из этих целых чисел.

Примеры.

1. Так как $2^3<10<2^4$, то $l\,[10]=4$.

2. Если $2^{k-1}<N\leqslant 2^k$, то $l\,[N]=k$.

3. Вскоре нам понадобится знать, чему равно $l\,[N]$, если $N=128\cdot127$. Так как $128=2^7$ и $2^6<127<2^7$, то $2^{13}<128\cdot127<2^{14}$, откуда $l\,[128\cdot127]=14$.

Теорема. *Для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов нужно сыграть не менее, чем*

$$P(n)=l\,[n(n-1)]+n-3$$

партий.

Пояснение. По-другому эту теорему можно сформулировать так.

Пусть разрешено провести максимум R партий, где

$$R<l\,[n(n-1)]+n-3.$$

Тогда (по каким бы правилам ни проводились отборочные соревнования) результаты партий могут оказаться такими, что после R партий определить 1-го, 2-го и 3-го призеров еще не удастся.

Если $n=128$, то $l\,[n(n-1)]=l\,[128\cdot127]=14$ (см. пример 3). Значит, $P(128)=14+128-3=139$. Тем самым из сформулированной теоремы следует, что для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 128 шахматистов нужно не менее, чем 139 партий. За 139 партий их определить можно по правилам ВОМИ — так что правила ВОМИ хороши!

§ 3. В бухгалтерии Злого Рока

В § 1 этой главы мы предупредили, что Злой Рок старается затянуть отборочные соревнования. Сейчас мы укажем стратегию, придерживаясь которой, он добьется, чтобы для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов понадобилось как минимум

---

*) Если он выиграет, то, значит, руководство ошибалось, и что делать дальше — неясно.

**) Разумеется, в соответствии с предложениями 1—5 главы I.

$$P(n) = l\,[n(n-1)] + n-3$$

партий.

Определение 1. Будем называть *командой* любую пару шахматистов (A, B)*). Подчеркнем, что команды (A, B) и (B, A) — разные; A играет в команде (A, B) на первой доске, а в команде (B, A) — на второй.

До начала соревнований на участие в Олимпиаде претендуют все команды. Сколько их?

До турнира каждый из n шахматистов имеет шансы играть на первой доске. При этом он может возглавить $n-1$ команду (вторым к нему может попасть любой шахматист, кроме него самого). Таким образом, число всех команд равно $n(n-1)$.

В ходе соревнований число команд, претендующих на поездку в Рио, постепенно уменьшается (пока не останется ровно одна такая команда).

Пусть в турнире уже сыграно несколько партий. По их результатам разделим всех участников на 3 группы. К первой отнесем всех, кто не проиграл ни одной партии. Ко второй — тех, кто проиграл ровно одну партию, причем обязательно шахматисту первой группы. К третьей — всех остальных (тех, кто проиграл более одной партии или одну партию — по игроку не из первой группы).

Упражнение. Проверьте, что в этой ситуации на поездку в Рио претендуют следующие команды:

1) все команды (A, B), в которых A — из первой группы, а B — из второй, причем единственную партию, которую B проиграл, он проиграл именно A;

2) все команды (C, D), такие, что и C, и D — из первой группы.

Проверьте, что никакие другие команды на участие в Олимпиаде не претендуют.

(Указание. Пусть B проиграл A, тогда B уже заведомо не станет чемпионом, а вторым призером сможет стать только при том условии, что чемпионом окажется A. Тем самым B уже не сможет возглавить никакую команду и только в одну команду — в (A, B) — может попасть в качестве второго участника.)

Определение 2. Если к какому-то моменту соревнований шахматист A выиграл a партий, а шахматист B — b партий, то мы будем говорить, что в *активе* команды (A, B) имеется $a+b$ очков. Число 2^{a+b} назовем *характеристикой* команды (A, B).

После каждой новой партии актив любой команды либо увеличивается на 1 (если победитель партии входит в эту команду), либо не меняется. Соответственно характеристика любой команды либо удваивается, либо остается неизменной.

Определение 3. Пусть проведено некоторое число партий. Сложившуюся ситуацию удобно характеризовать числом M, которое равно сумме характеристик всех команд, еще претендующих на участие в Олимпиаде.

Чему равно M в начальной ситуации (до проведения соревнований)? Никто не выиграл еще ни одной партии, в активе каждой команды 0 очков, характеристика любой команды равна $2^0=1$. Таким образом, M начальное — это просто общее число команд, то есть $M_{\text{начальное}}=n(n-1)$.

Лемма. Пусть в некоторой ситуации, характеризуемой числом M, проводится партия между шахматистами A и B. Обозначим через M_A число, характеризующее ситуацию, которая возникнет, если выиграет A, а через M_B — характеристику ситуации в случае выигрыша B. Тогда

$$M_A + M_B = 2M,$$

так что хоть одно из чисел M_A и M_B не меньше M.

Доказательство. До игры между A и B все команды, претендующие на участие в Олимпиаде, естественно разбить на 3 группы.

---

*) «Команда» состоит именно из двух, а не из трех человек: запасной игрок в состав команд не включается (так удобнее для изложения).

I группа. Команды, в которые A входит, а B либо не входит, либо входит после A *).

II группа. Команды, в которые B входит, а A либо не входит, либо входит после B.

III группа. Команды, в которые не входят ни A, ни B.

Обозначим через M_{I}, M_{II}, M_{III} суммы характеристик команд I, II и III группы (так что $M=M_{\text{I}}+M_{\text{II}}+M_{\text{III}}$).

Докажем, что $M_A=2M_{\text{I}}+M_{\text{III}}$. Действительно, после победы A на поездку в Рио претендуют только команды I и III группы; при этом в III группе характеристики команд не меняются, а в I группе удваиваются.

Аналогично доказывается, что

$$M_B = 2M_{\text{II}} + M_{\text{III}}.$$

Итак,

$$M_A + M_B = 2\,(M_{\text{I}} + M_{\text{II}} + M_{\text{III}}) = 2M.$$

Стратегия Злого Рока. Как идет отборочный турнир? Как мы знаем, все партии проводятся последовательно (одна за другой). Участники каждой новой партии назначаются в зависимости от результатов всех предыдущих игр.

Пусть уже проведено некоторое число партий, и очередная игра назначена между шахматистами A и B. Злой Рок подсчитывает характеристики M, M_A и M_B (см. лемму); затем если $M_A>M_B$, он устраивает так, чтобы победил A, а если $M_B>M_A$ — так, чтобы победил B; если же $M_A=M_B$, то он не вмешивается. Так как большее из чисел M_A и M_B заведомо не меньше M (по лемме), то при такой стратегии характеристика M после каждой партии не уменьшается.

Подчеркнем, что Року достаточно быть Всемогущим и не нужно быть Всеведущим: не вникая в планы устроителей турнира, он применяет одну и ту же стратегию при любом расписании игр.

Далее мы покажем, что при этой стратегии определение 1-го, 2-го и 3-го призеров потребует как минимум

$$P\,(n) = l\,[n\,(n-1)] + n-3$$

партий.

§ 4. Доказательство теоремы

До соревнований $M_{\text{начальное}} = n\,(n-1)$. Чему равно M, когда соревнования закончены и определены 1-й, 2-й и 3-й призеры X, Y и Z? Для поездки на Олимпиаду отобрана одна команда (XY). Обозначим через v число очков в активе этой команды. Тогда $M_{\text{конечное}}=2^v$.

Если Злой Рок придерживался описанной выше стратегии, то после каждой партии характеристика M не уменьшалась, так что $M_{\text{конечное}}$ не меньше, чем $M_{\text{начальное}}$. Отсюда $2^v \geqslant n\,(n-1)$, то есть $v \geqslant l\,[n\,(n-1)]$. Таким образом, первые два призера X и Y участвовали не меньше, чем в $l\,[n\,(n-1)]$ партиях.

Кроме того, было проведено как минимум $(n-3)$ партии без их участия. Действительно, каждый из $(n-3)$ шахматистов, не вошедших в призовую тройку, должен был проиграть кому-то, кроме X и Y, — иначе он претендовал бы на третье место.

Таким образом, всего в турнире было сыграно не менее, чем

$$P\,(n) = l\,[n\,(n-1)] + n-3$$

партии. Теорема доказана.

Глава III. Как определить трех призеров среди n шахматистов?

В главе I были приведены правила, по которым можно определить трех призеров среди 128 шахматистов. Приведем аналогичные правила для случая n шахматистов. Пусть $l\,[n]=k$, то есть

$$2^{k-1} < n \leqslant 2^k.$$

---

*) B входит после A только в одну команду (A, B); эта команда включается в I группу, разумеется, только при том условии, что она еще претендует на поездку в Рио.

§ 1. Определение чемпиона

Игры проводятся по олимпийской системе. На 1-м этапе всех участников разбивают на две группы: в одной 2^k-n, в другой — остальные $2n-2^k$ человек; члены второй группы разбиваются на $(n-2^{k-1})$ пар; в каждой паре определяется победитель, которого допускают ко 2-му этапу; члены первой группы начинают борьбу сразу со 2-го этапа. Всего ко 2-му этапу допущено

$$(n-2^{k-1})+(2^k-n)=2^{k-1}$$

участников. Все этапы, начиная со 2-го, «стандартные» *): участники этапа разбиваются на пары, в каждой из пар определяется победитель, которого допускают к следующему этапу. Чемпион определяется в финальной игре на k-м этапе. Так как каждый из n участников, кроме чемпиона, проигрывает при такой системе ровно одну партию, то всего на k этапах будет сыграна $(n-1)$ партия.

§ 2. Определение второго призера

На это место претендуют шахматисты, проигравшие только чемпиону. Их не более чем k; присвоим им номера $1, \ldots, k$ (№ i — это тот, кто проиграл чемпиону на i-м этапе **).

Проводим игры так: № 1 играет с № 2 ***), затем победитель—с № 3, и т. д. (всего не более чем $k-1$ партия). Победитель последней партии — второй призер.

§ 3. Определение третьего призера

Легко проверить (см. § 3 главы I), что второй призер выиграл не более k партий и поэтому на третье место претендуют не более k человек. Сильнейший из них заведомо определяется за $k-1$ партию. Это и есть третий призер.

§ 4. Выводы

Чтобы найти среди n шахматистов 1-го, 2-го и 3-го призеров, достаточно провести

$$(n-1)+(k-1)+(k-1)=$$
$$=2k+n-3=2l\,[n]+n-3$$

партий. Это число мы обозначим через $Q\,(n)$.

Глава IV. Обсуждение результатов

Пусть n — целое число, $n\geqslant 3$. Обозначим через $I\,(n)$ число, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) за $I\,(n)$ партий наверняка можно определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов.

2) если $R<I\,(n)$, то результаты партий могут оказаться такими, что за R партий определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов не удастся.

Тогда результаты, полученные в главах II и III, можно записать в виде формулы

$$P\,(n)\leqslant I\,(n)\leqslant Q\,(n).$$

Напомним, что

$$P\,(n)=l\,[n\,(n-1)]+n-3,$$
$$Q\,(n)=2l\,[n]+n-3,$$

где $l\,[n]=k$ при $2^k\geqslant n>2^{k-1}$.

Можно показать, что $Q\,(n)$ равно либо $P\,(n)$, либо $P\,(n)+1$. В первом случае $I\,(n)=P\,(n)=Q\,(n)$. Во втором случае для $I\,(n)$ имеются две возможности: либо $I\,(n)=P\,(n)$, либо $I\,(n)=Q\,(n)$. Обе возможности

---

*) 1-й этап в отличие от случая, разобранного в правилах ВОМИ, является «нестандартным» (то есть требует указанного в этом параграфе дополнительного разбиения участников на группы), если n не есть точная степень двойки.

**) Отметим, что № 1 может не достаться никому (если чемпион начал игры со 2-го этапа).

***) Иногда эта игра не проводится (см. предыдущую сноску), и все начинается с партии между № 2 и № 3.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P(n)$	3	5	7	8	10	11	13	14	15	17	18	19	20	21	23	24	25	26
$I(n)$	3	5	7	9	10	11	13	14	16	17	18	19	20	21	23	24	25	26
$Q(n)$	4	5	8	9	10	11	14	15	16	17	18	19	20	21	24	25	26	27

могут осуществляться, как видно из приведенной таблицы.

Как именно ведет себя $I(n)$, мы расскажем подробнее в другой раз. А пока попытайтесь разобраться в этом самостоятельно. Попробуйте решить также следующие задачи.

1. Проверить приведенную выше таблицу.

Указание. Наметим путь решения этой задачи для $n=20$. В этом случае $P[n] = P[20] = 26$.

Разделим 20 шахматистов на две группы: в первой группе 16 человек, во второй — четыре. В первой группе определим стандартным способом (см. § 1 и § 2 главы III) 1-го призера A и 2-го призера B. На это уйдет $15 + 3 = 18$ партий. При этом B выиграет не больше, чем у четырех человек (см. § 3).

Во второй группе определим сильнейшего C по олимпийской системе (3 партии). При этом C выиграет у двоих

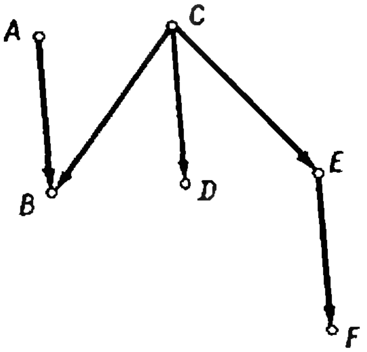


Рис. 1.

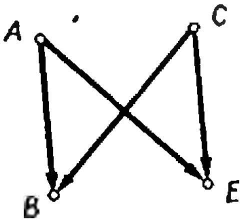


Рис. 2.

Следующую (22-ю) партию проведем между B и C. Если победит B, то ясно, что A — чемпион, B — второй призер, а на третье место претендуют пятеро, проигравших B. За оставшиеся 4 партии можно найти среди них третьего призера.

Пусть, наоборот, победит C. Тогда возникнет следующая ситуация (см. рис. 1): на призовые места претендуют шахматисты A, B, C, D, E и F (стрелки ведут от победителей к побежденным). Проведем 23-ю партию между D и E; пусть в этой партии победит E (случай, когда победит D, проще и рассматривается аналогично).

24-ю партию проведем между A и E. Если выиграет E, то C — чемпион, E — второй призер, а на третье место претендуют A, D и F. За оставшиеся 2 партии найдем среди них третьего призера.

Если 24-ю партию выиграет A, то (см. рис. 2) на первые два места претендуют A и C, на третье — B и E. Проведя две партии (между A и C и между B и E), мы определим 1-го, 2-го и 3-го призеров. Итак, $I(20) = 26 = P(20)$.

Только что приведенные правила резко отличаются от стандартных правил из главы III. По стандартным правилам шахматисты, проигравшие хоть одну партию, не участвуют в следующих играх до тех пор, пока не определится чемпион. Только отказавшись от этого, нам удалось определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 20 шахматистов за 26 (а не за 27) партий.

2. Доказать, что 1-го и 2-го призеров среди n шахматистов наверняка можно определить за $I[n] + n - 2$ партий и может не удаться определить за меньшее число партий.

3. Пусть мы хотим определить среди n шахматистов k сильнейших (1-го, 2-го, .., k-го призеров). Докажите, что

а) это наверняка можно сделать за $(k-1)\, I[n] + n-k$ партий;

б) если

$$R < I\,[n\,(n-1)\ldots(n-k+2)] + n-k,$$

то результаты партий могут оказаться такими, что это не удастся сделать за R партий.

Указание. В задаче б) мы рекомендуем рассуждать так же, как в главе II, рассматривая «команды» A_1, $A_2, \ldots$, A_{k-1}, состоящие из $k-1$ участника. Общее число таких команд равно $n(n-1)\ldots(n-k+2)$.

Ф. Ф. Воронов

Высокое давление — создание и измерение

Свойства вещества зависят от расстояний между его атомами. При уменьшении межатомных расстояний увеличивается плотность вещества, изменяются электрические, оптические, механические свойства, кристаллическая структура. Изучая свойства сжатых веществ, мы глубже узнаем природу и характер сил, действующих между атомами.

Как сблизить атомы в веществе?

Возьмем кубик из вещества и начнем сжимать его под прессом. В результате сжатия вдоль одной оси мы вызовем в этом кубике деформацию, расстояние между его атомами будет уменьшаться. Однако значительных деформаций мы не получим. После достижения предела прочности наступит разрушение.

Как же сблизить атомы в веществе еще сильнее? Для этого нужно сжимать вещество со всех сторон, то есть прикладывать одинаковые силы одновременно ко всем сторонам нашего кубика, подвергнуть его всестороннему высокому давлению. В этом случае нам удастся сблизить атомы в веществе без разрушения, изменить его физические свойства, заставить протекать по-другому химические процессы.

Диапазон давлений в природе огромен. На дне воздушного океана мы живем при давлении в одну атмосферу. На барабанные перепонки ныряльщика давит столб воды и для глубоководного погружения нужны специальные скафандры. По расчетам ученых-геофизиков давление в центре Земли около 4 миллионов атмосфер.

Утром вы открываете водопроводный кран, и вода сильной струей льется в умывальник. Давление воды в водопроводе 1,5—2 атмосферы. Завтрак приготовлен на плите, к которой подведен газ под давлением 1,01 *атм*.

На улице мимо вас проносятся троллейбусы, автобусы. В их шинах воздух сжат до 2,5—4 *атм*. В цилиндрах мотора стремительной «Волги» давление достигает 30—50 *атм*. Турбины электростанций приводятся в действие паром при давлении 200—500 *атм*. На заводах химической промышленности получают полиэтилен, сжимая газ этилен до давления 1000 *атм*, синтезируют аммиак из азота и водорода при давлении 1500 *атм*. При превращении графита в алмаз давление достигает 100 000 *атм*, а температура 2000 градусов.

Определим давление как силу, с которой газ или жидкость, заключенные в резервуар, действуют на единицу площади стенки этого резервуара:

$$P = \frac{F}{S}.$$

По этой простой формуле можно установить единицы для измерения давления. Положив силу равной одной дине, а площадь — одному квадратному сантиметру, мы получим единицу давления в системе СГС — $1\,\frac{дин}{см^2}$, которую называют *барией*. Однако эта единица слишком мала для измерения высоких давлений, и чаще используют в миллион раз большую: $1\ бар = 10^6\,\frac{дин}{см^2}$, и производные от нее: *килобар*, равный 10^3 *бар* или $10^9\,\frac{дин}{см^2}$; *мегабар*, равный 10^6 *бар*. В международной системе единиц СИ принята другая единица — сила в 1 *ньютон*, действующая равномерно на площадь в $1\ м^2$, создает давление в 1 *паскаль* (1 *Па*); $1\ Па=10\ \frac{дин}{см^2}$; $1\ бар=10^5\ Па$.

Определим, чему соответствует в этих единицах давление в одну физическую атмосферу. Как видно из названия, эта единица связана с давлением атмосферного воздуха. Пусть на поверхность площадью S давит столб жидкости или газа (в нашем случае воздуха) высоты h и плотности ρ. Тогда объем этого столба $V=h\cdot S$, а его вес $G=h\cdot S\cdot\rho\cdot g$ (при ускорении силы тяжести g), и давление $P=\frac{G}{S}=h\cdot\rho\cdot g$. Приняв высоту воздушной атмосферы равной 200 *км* ($2\cdot10^7$ *см*) и ее среднюю по высоте плотность $\rho=5{,}16\cdot10^{-5}\ г/см^3$, получим, что при $g=980\ \frac{см}{с^2}$ $P=1\ атм=1{,}01\cdot10^6\ \frac{дин}{см^2}$.

Воздушный океан нашей планеты неспокоен. Воздушные течения и циклоны меняют высоту и плотность атмосферы. Атмосферное давление колеблется в широких пределах и, безусловно, не может быть принято за эталон. Условились за «физическую атмосферу» принимать давление, которое производит на горизонтальную плоскость столб ртути (эквивалент воздушной атмосферы) плотностью $13{,}595\ г/см^3$ высотой 760 *мм* при 0° С и ускорении силы тяжести $980{,}665\ см/с^2$. Тогда $1\ атм=76\times13{,}595\cdot980{,}665=1{,}0132\cdot10^6\ \frac{дин}{см^2}$ или $1\ атм\approx1\ бар=10^5\ Па$.

Создание высоких давлений

Каждому знакомо устройство для создания «высокого» давления — велосипедный насос. Если подсоединить его к волейбольной камере и добавить еще измеритель давления (например, автомобильный манометр), то перед нами будет модель установки высокого давления (рис. 1), состоящая из трех основных узлов: генератора давления (насос), сосуда высокого давления (камера) и манометра, измеряющего созданное давление.

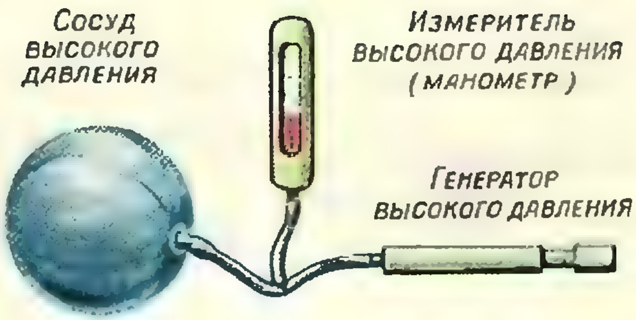

Сосуд высокого давления
Измеритель высокого давления (манометр)
Генератор высокого давления

Рис. 1.

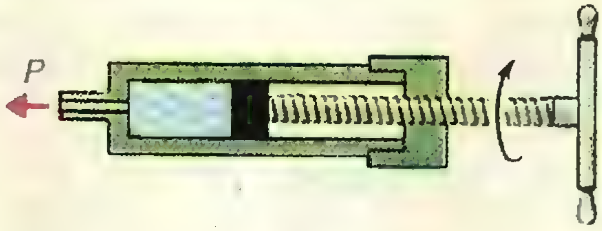


Рис. 2. Механический пресс.

Вдвигая руками поршень в цилиндр насоса, мы создаем сравнительно небольшое давление: 2—3 атмосферы. Естественно, что для создания более высоких давлений нужны и бóльшие усилия при перемещении поршня той же площади ($F=P\cdot S$, где S — площадь поршня). В механическом прессе для получения высокого давления используется винт (рис. 2). Таким образом получают значительный выигрыш в силе.

Еще бóльшие усилия можно приложить к поршню, а значит, и получить бóльшие давления (десятки тысяч атмосфер) с помощью гидравлического пресса. Такой генератор давления — мультипликатор — изображен на рисунке 3. Под большой поршень диаметра D с помощью насоса нагнетают жидкость при сравнительно низком давлении ($P_н=100\div500$ атмо-

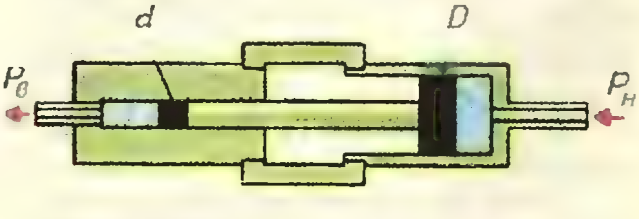


Рис. 3. Мультипликатор.

сфер). Этот поршень с силой $F = P_н \cdot S_н = P_н \frac{\pi D^2}{4}$ вдвигает поршень меньшего диаметра d в цилиндр высокого давления и сжимает находящуюся в нем жидкость до давления $P_в$. Если пренебречь силами трения, то сила, развиваемая большим поршнем, будет всегда равна силе, с которой малый поршень выталкивается высоким давлением: $F = P_в \frac{\pi d^2}{4}$. Приравняем эти выражения $P_н \frac{\pi D^2}{4} = P_в \frac{\pi d^2}{4}$. Отсюда получим зависимость величины высокого давления от величины низкого давления: $P_в = \frac{D^2}{d^2} P_н = k P_н$. Здесь k — коэффициент мультипликации установки. Необходимое давление, как правило, получают за один ход поршня, то есть в результате одного сжатия. Если надо повысить давление в большом сосуде, то мультипликаторы снабжаются всасывающим и нагнетающим клапанами и поршень перемещают несколько раз, как в велосипедном насосе. Мультипликаторы — «тихоходные» машины, их производительность (количество сжатой жидкости в минуту) мала.

Для создания высоких давлений в больших объемах используются компрессоры. Компрессор можно представить себе как насос, поршень которого перемещается мощным электромотором через кривошипно-шатунный механизм. Общий вид компрессора показан на рисунке 4. В Советском Союзе созданы уникальные компрессоры, дающие десятки литров жидкости в час при давлении 10—16 тысяч атмосфер. Их отличительная особенность — большое число ходов поршня в минуту и высокая степень сжатия. За один ход поршня давление в цилиндре поднимается с 30 до 16 000 атмосфер.

При сжатии газов их объем вначале уменьшается приблизительно пропорционально давлению. При высоких давлениях плотность газов становится близкой к плотности жидкостей ($\rho \approx 1$ г/см^3), их сжимаемость падает и наблюдаются большие отклонения от закона Бойля — Мариотта. Сжатый газ обладает огромным запасом энергии. При выстреле максимальное давление пороховых газов в орудийном стволе достигает 5—6 тысяч атмосфер. Один литр газа при таком давлении обладает огромной энергией.

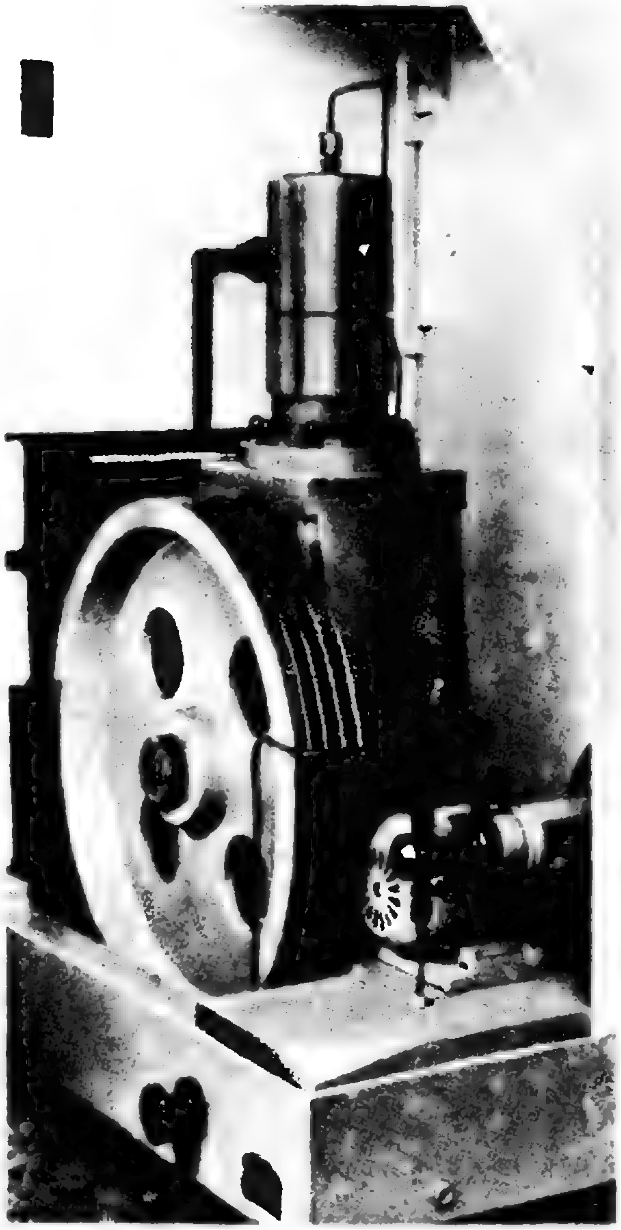


Рис. 4. Компрессор.

Работать с газами, сжатыми до давлений 20—30 тысяч атмосфер, крайне трудно и опасно. Представьте себе, что вам нужно проводить исследования с орудием, которое выстрелило, но снаряд не вылетел из ствола (вы вовремя заткнули ствол).

Сжатые жидкости обладают меньшим запасом энергии, у них меньшая сжимаемость. Однако при высоких давлениях сильно возрастает вязкость жидкостей, что затрудняет работу клапанов компрессоров и передачу давления по соединительным трубам — капиллярам. При давлениях порядка 30—40 тысяч атмосфер жидкости затвердевают. Поэтому для создания давления в 50 тысяч атмосфер и выше в качестве рабочей среды используют пластические твердые тела.

Простейшей установкой для получения высоких давлений в твердых телах является пьезометр, изображенный на рисунке 5. Цилиндрические поршни из твердого сплава вдвигаются с помощью гидравлического пресса в сосуд высокого давления, называемый матрицей. В матрице находится мягкое пластичное вещество (индий, свинец или хлористое серебро), внутрь которого помещают исследуемый образец. Давление в таком пьезометре определяют по величине приложенной силы на единицу площади поперечного сечения канала пьезометра. Максимальное давление, которое можно получить в таком аппарате, определяется пределом прочности поршней при сжатии и обычно не превосходит 40—50 тысяч атмосфер.

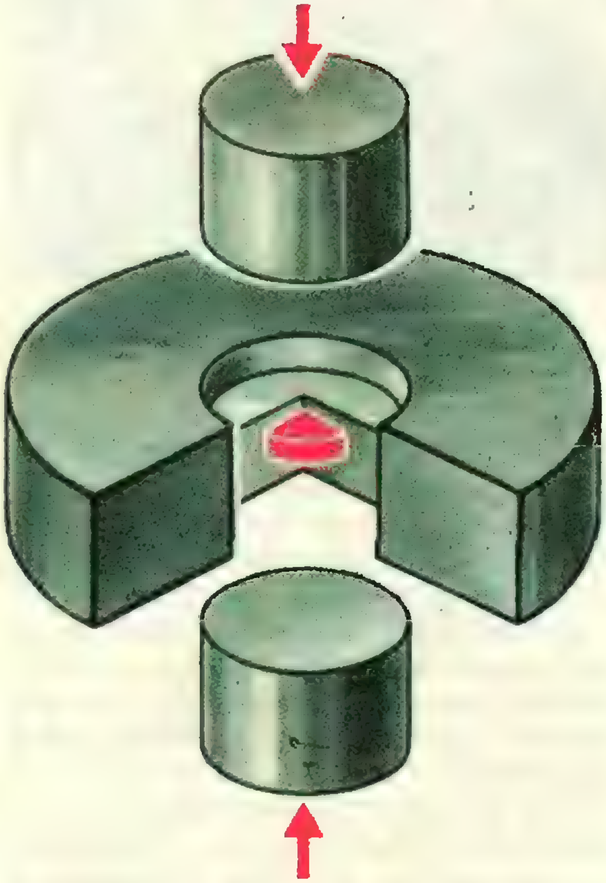


Рис. 5. Пьезометр.

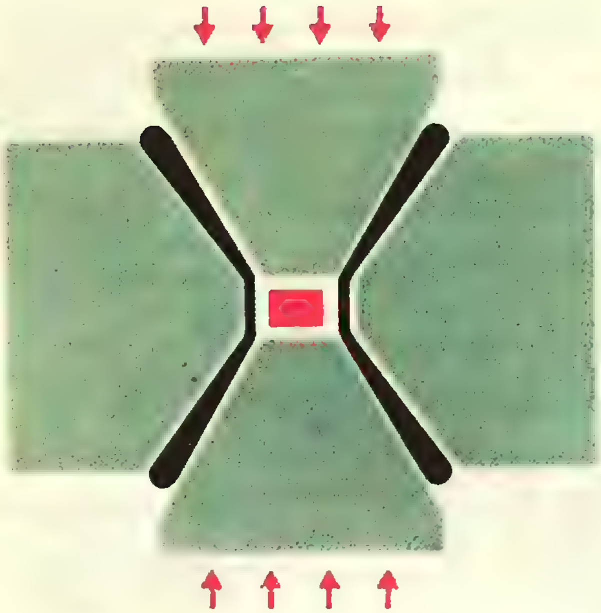


Рис. 6. Конический аппарат.

Для предохранения поршней от разрушения необходимо их «поддержать»: создать на их боковой поверхности поддерживающее давление. Это легко достигается в коническом аппарате (рис. 6). При вдвигании прессом конических поршней в матрицу сжимаются не только рабочая среда и образец в матрице, но и прокладка между коническим входом в матрицу и поршнем (на рисунке она изображена черным цветом). Возникающие при этом силы оказывают поддерживающее давление на боковую поверхность поршня.

Такие аппараты позволяют получить давление до 70—100 тысяч атмосфер. Слабым местом в этой конструкции оказалась матрица, которая испытывает нагрузку как от высокого давления внутри, так и от кони-

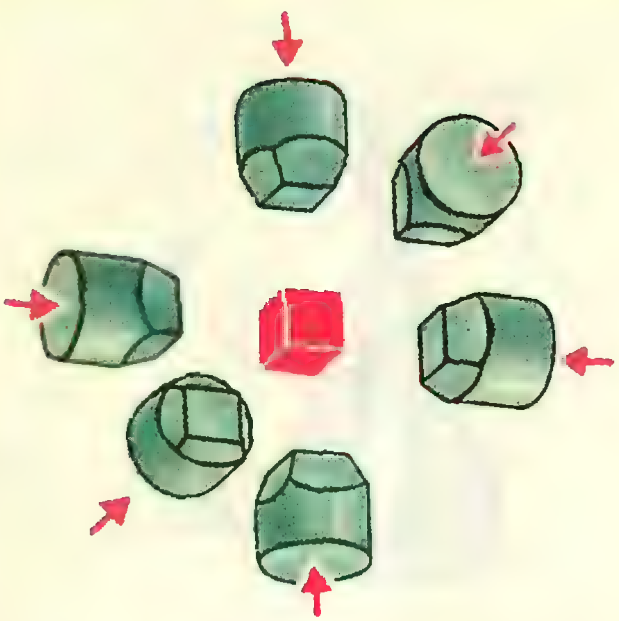


Рис. 7. Кубический аппарат.

ческих поршней, которые также стремятся растянуть матрицу. Ученые и конструкторы нашли оригинальный выход из создавшегося затруднения. Если матрица не выдерживает — выбросить ее и заменить тем, что выдерживает такие давления — аналогичными поршнями, которые следует также сдвигать гидравлическими прессами. Так была создана шестиосная установка (рис. 7). Кубик из пластического материала, внутри которого расположен исследуемый образец, сжимался поршнями — пуансонами, каждый из которых давил на одну грань куба.

Между поршнями — пуансонами, как и в коническом аппарате, помещались прокладки, при сжатии которых возникало поддерживающее давление на боковые поверхности пуансонов. В такой установке предел достижимых давлений возникает из-за разрушения материала, из которого сделан аппарат.

Более высокие давления можно, очевидно, получить, применяя каскадный принцип или вставляя аппарат в аппарат по принципу «матрешки». Так, если коническую камеру, работающую до давлений в 100 000 атмосфер, поместить в такую же коническую камеру, также на 100 000 атмосфер, но большего размера, то во внутренней камере можно, очевидно, получить 200 тысяч атмосфер. Благодаря тому, что прочность материалов под давлением увеличивается, можно ожидать еще большего выигрыша.

Еще бóльшие давления можно получить в тонких слоях вещества, сжимая его между наковальнями (рис. 8). Исследуемый образец в виде тонкого диска помещают в кольцо из известняка — катлинита. Известняк обладает большим коэффициентом трения и не позволяет сжимаемому веществу вытечь из аппарата. В таких аппаратах, изготовленных из самых прочных материалов, ученые получают давления в 0,5 миллиона атмосфер. Еще бóльшие давления — до 10—15 миллионов атмосфер получают динамическими методами: сжимая вещество взрывом. Если ампулу с исследуемым веществом окружить со всех сторон взрывчатым веществом, например, толом, и подорвать это устройство с поверхности, то фронт взрыва будет распространяться к центру и взрывная волна со всех сторон сожмет ампулу на доли секунды до огромных давлений.

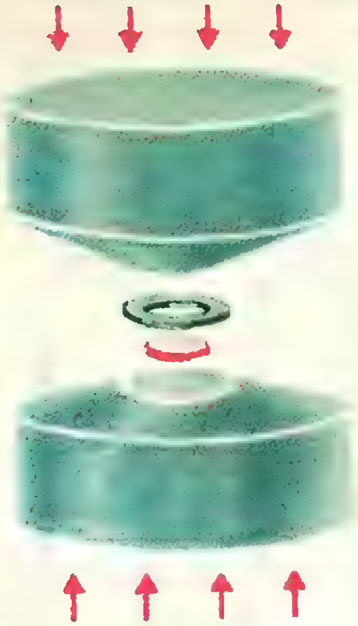


Рис. 8. Сжатие между наковальнями.

Измерение давления

Простейший способ измерения давления состоит в уравновешивании измеряемого давления весом столба жидкости. Чем тяжелее жидкость, тем меньшая высота столба будет необходима для уравновешивания одного и того же давления. Однако даже применение самой тяжелой жидкости — ртути (плотность 13,6 $г/см^3$) для измерения давления в сотни атмосфер привело бы к высоте столба в сотни метров (вспомним, что 0,76 *м рт. ст.* $=1$ атмосфере). Оригинальное решение этой проблемы было предложено Д. И. Менделеевым в 1872 году. Его манометр состоит из нескольких колен, заполненных ртутью и водой (рис. 9). Измеряемое давление будет равно сумме высот столбов ртути $(H_1+H_2+H_3)$, умноженной на плотность ртути, минус сумма высот столбов воды (h_1+h_2), умноженная на плотность воды. Но несмотря на существенный выигрыш в размерах, точный манометр такой конструкции на 200 атмосфер представляет собой внушительное сооружение из 9 колен по 18 метров высотой.

Другим типом прибора для измерения давления является манометр со свободным поршнем, схематически изображенный на рисунке 10. Сжатое вещество стремится вытолкнуть поршень, свободно движущийся в стальном цилиндре. Это давление уравновешивается весом груза G и, зная площадь поршня S, можно определить измеряемое давление $P=\frac{G}{S}$. Это соотношение справедливо при не слишком больших давлениях. При измерении давлений в 10—25 тысяч атмосфер приходится учитывать сжатие поршня, увеличение диаметра отверстия цилиндра, возрастание вязкости жидкости, вытекающей в зазор, и ряд других эффектов. Расчетная формула усложняется, усложняется и конструкция манометра.

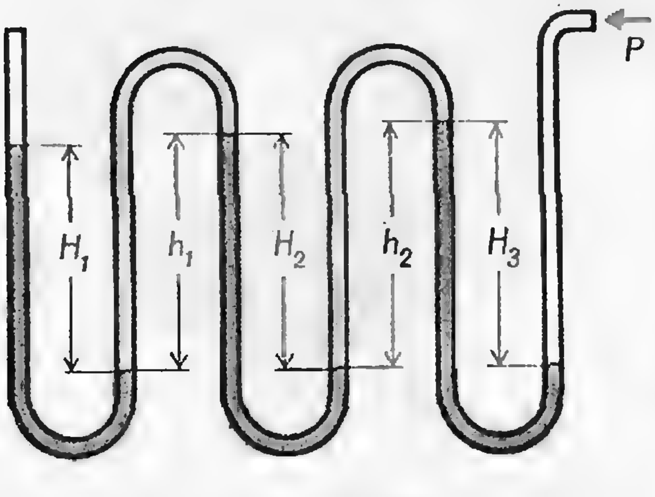


Рис. 9. Манометр Менделеева.

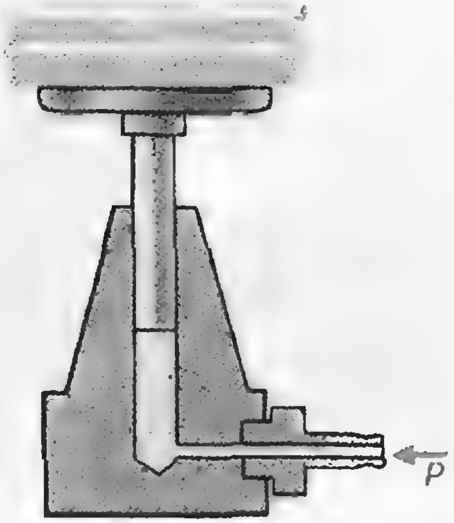


Рис. 10. Манометр со свободным поршнем.

Рекорд в измерении высоких давлений таким способом принадлежит советским физикам во главе с академиком Л. Ф. Верещагиным. Ими была создана оригинальная конструкция манометра со свободным поршнем на диапазон давлений до 100 000 атмосфер.

Для измерений высоких давлений в заводских установках и лабораториях применяют более простые, но и менее точные манометры, которые калибруют и проверяют по абсолютным приборам. Наибольшее распространение получили манометры с трубчатой пружиной. Если создать давление в изогнутой трубке, сечение которой показано на рисунке 11, то такая трубка будет разгибаться на величину, пропорциональную давлению. Конец трубки, перемещаясь,

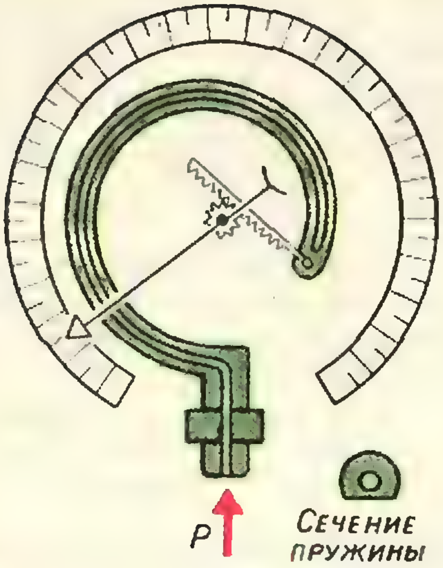


Рис. 11. Пружинный манометр.

потянет зубчатую рейку и повернет ось, на которую насажена стрелка. Такие манометры применяются до 10—16 тысяч атмосфер.

Удобным для дистанционных измерений является электрический манометр, в котором используется свойство манганиновой проволоки *) линейно увеличивать свое сопротивление с давлением. Если сопротивление катушки манганиновой проволоки при атмосферном давлении было R_0, а при P_x стало равно R_x, то

$$P_x = k\frac{R_x - R_0}{R_0},$$

где k — коэффициент ($k \approx 0{,}5 \times 10^6$ *бар*), известный из предварительных калибровок по абсолютному манометру. Манганиновый манометр применяют для измерения давлений в интервале 1000—100 000 атмосфер. А как измерить давление свыше 100 000 атмосфер? При таких давлениях поршни манометров деформируются очень сильно: лучшие стали и твердые сплавы становятся пластичными, и говорить о точных размерах невозможно. В таких случаях величину давления определяют по изменению физических свойств сжатых веществ.

Допустим, что мы изучили физические свойства кристалла хлористого натрия и знаем, на каком расстоянии друг от друга находятся ионы натрия и ионы хлора в кристаллической решетке при атмосферном давлении, какими силами связаны они между собой.

Для простоты рассуждений выделим из кристалла цепочку ионов, находящихся при атмосферном давлении на расстоянии a_0 друг от друга, и представим их взаимодействие в виде пружин между ними (рис. 12). Поместим кристалл хлористого натрия в стальной сосуд и создадим давление P. Это давление сожмет кристалл, его ионы сблизятся, и расстояние между ними станет a_P, причем $a_P < a_0$. Так же сблизятся ионы

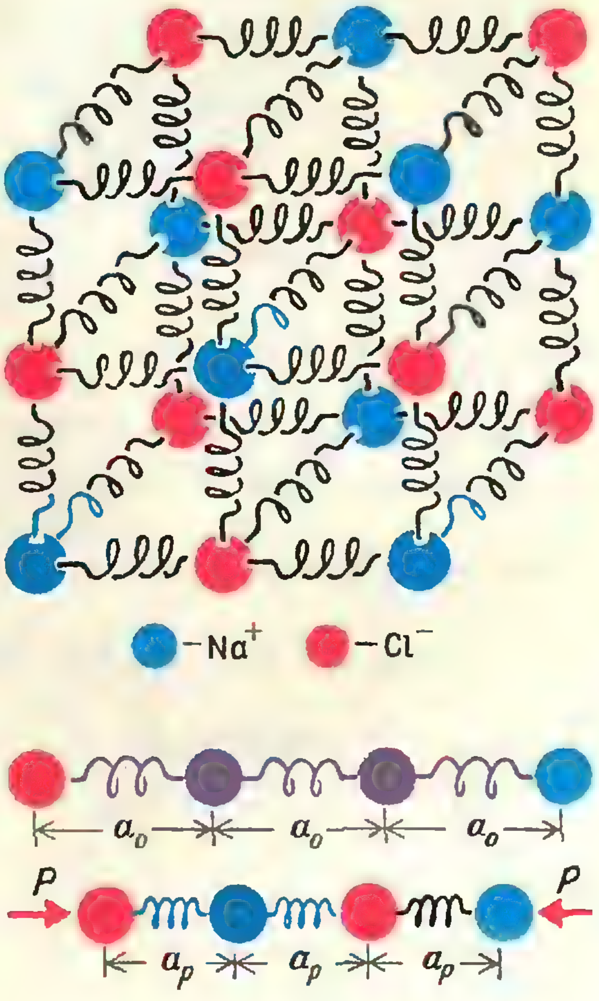


Рис. 12. Кристалл NaCl и цепочка ионов.

---

*) Манганин — сплав 86% Cu, 11% Mn, 3% Ni.

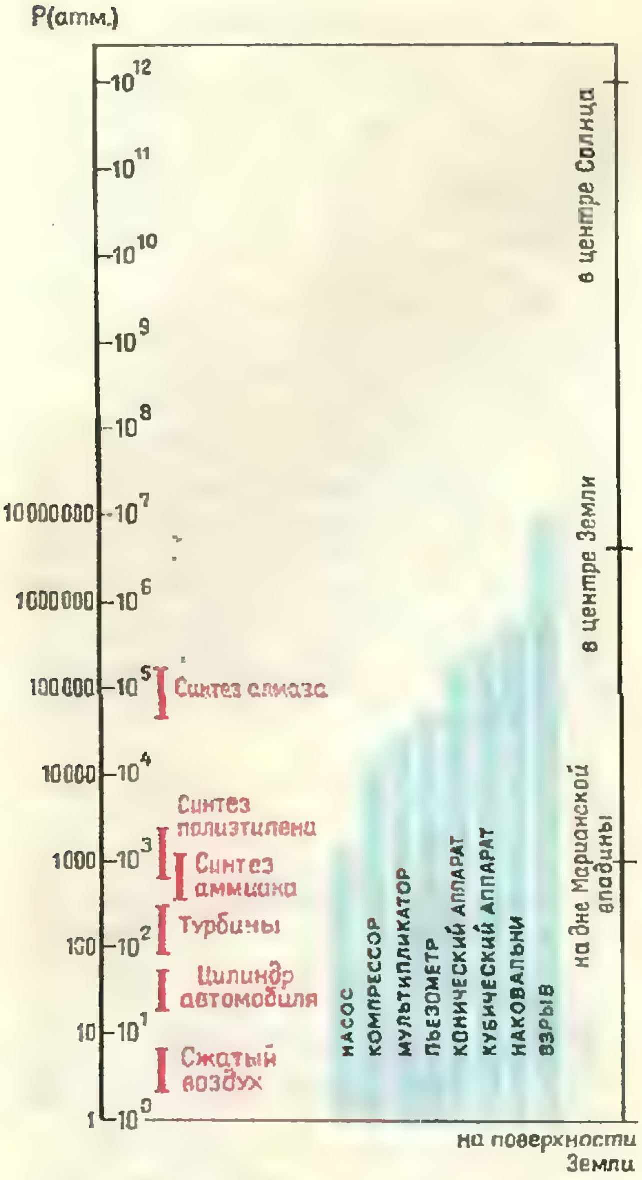


Рис. 13.

и в нашей цепочке. Сжатие $x = \frac{a_P}{a_0}$ будет зависеть от приложенного давления и «жесткости» пружин, представляющих в нашей модели силы межатомного взаимодействия: $\frac{a_P}{a_0} = \frac{P}{E}$.

Отсюда можно определить давление $P = E \cdot \frac{a_P}{a_0}$.

Жесткость — характеристика межионного взаимодействия — известна из физических свойств кристалла, а межионное расстояние можно определить с помощью рентгеновских лучей и таким способом найти величину давления, сжимающего кристалл.

Уравнение, связывающее давление с изменением межионного расстояния, в действительности значительно сложнее. Для хлористого натрия оно точно рассчитано и используется при измерении давлений выше 100 000 атмосфер.

Для ученых важно не только создать высокое давление. Главная задача — исследование свойств вещества в сжатом состоянии.

Исследователи помещают в камеры высокого давления измерительные устройства, снабжают аппараты окнами, прозрачными для оптических или рентгеновских лучей. Это, конечно, усложняет аппаратуру, делает эксперимент при высоком давлении трудным и увлекательным.

Диапазон давлений, существующих в природе, а также создаваемых и используемых человеком, показан на рисунке 13.

ЗАДАЧИ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Доказать неравенство

$$\sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \sqrt{x_3^2 + (1 - x_4)^2} + \ldots + \sqrt{x_{2n}^2 + (1 - x_1)^2} \geqslant \sqrt{2} \cdot n.$$

2. Определить, что больше:

$$\sqrt[3]{10} + \sqrt{8} \text{ или } 5?$$

3. Доказать, что

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}} > \frac{1}{4}$$

(в числителе n радикалов; в знаменателе $n-1$ радикал).

(Продолжение см. на стр. 25)

Рис. Е. Верлоцкого

Артур Порджес

После нескольких месяцев напряженной работы по изучению бесчисленных выцветших манускриптов Саймону Флэггу удалось вызвать дьявола. Жена Саймона, знаток средневековья, оказала ему неоценимую помощь. Сам он, будучи всего лишь математиком, не мог разбирать латинские тексты, особенно осложненные редкими терминами демонологии X века. Замечательное чутье миссис Флэгг пришлось тут как нельзя кстати.

После предварительных стычек Саймон и черт сели за стол для серьезных переговоров. Гость из ада был угрюм, так как Саймон презрительно отверг его самые заманчивые предложения, легко распознав смертельную опасность, скрытую в каждой соблазнительной приманке.

— А что если теперь вы для разнообразия выслушаете мое предложение? — сказал наконец Саймон. — Оно, во всяком случае, без подвохов.

Дьявол раздраженно покрутил раздвоенным кончиком хвоста, будто это была обыкновенная цепочка с ключами. Очевидно, он был обижен.

— Ну что ж, — сердито согласился он. — Вреда от этого не будет. Валяйте, мистер Саймон!

— Я задам вам только один вопрос, — начал Саймон, и дьявол повеселел. — Вы должны ответить на него в течение двадцати четырех часов. Если это вам не удастся, вы платите мне сто тысяч долларов. Это скромное требование — вы ведь привыкли к неизмеримо большим масштабам. Никаких миллиардов, никаких Елен троянских на тигровой шкуре. Конечно, если я выиграю, вы не должны мстить.

— Подумаешь! — фыркнул черт. — А какова ваша ставка?

— Если я проиграю, то на короткий срок стану вашим рабом. Но без всяких там мук, гибели души и тому подобного — это было бы многовато за такой пустяк, как сто тысяч долларов. Не желаю я вреда и моим родственникам или друзьям. Впрочем, — подумав, добавил он, — тут могут быть исключения.

Дьявол нахмурился, сердито дергая себя за кончик хвоста. Наконец он дернул так сильно, что даже скривился от боли, и решительно заявил:

— Очень жаль, но я занимаюсь только душами. Рабов у меня и так хватает. Если бы вы знали, сколько бесплатных и чистосердечных услуг оказывают мне люди, вы были бы поражены. Однако вот что я сделаю. Если в заданное время я не смогу ответить на ваш вопрос, вы получите не

ЗДОРОВЬЕ
И
СЧАСТЬЕ

жалкие сто тысяч, а любую — конечно, не слишком дикую — сумму. Кроме того, я предлагаю вам здоровье и счастье до конца вашей жизни. Если же я отвечу на ваш вопрос — ну, что ж, последствия вам известны. Вот все, что я могу вам предложить.

Он взял с воздуха зажженную сигару и задымил.

Воцарилось настороженное молчание.

Саймон смотрел перед собой, ничего не видя. Крупные капли пота выступили у него на лбу. Он отлично знал, какие условия может выставить черт. Мускулы его лица напряглись... Нет, он готов прозакладывать душу, что никто — ни человек, ни зверь, ни дьявол — не ответит за сутки на его вопрос.

— Включите в пункт о здоровье и счастье мою жену — и по рукам! — сказал он. — Давайте подпишем.

Черт кивнул. Он вынул изо рта окурок, с отвращением посмотрел на него и тронул когтистым пальцем. Окурок мгновенно превратился в розовую мятную лепешку, которую черт принялся сосать громко и с явным наслаждением.

— Что касается вашего вопроса,— продолжал он,— то на него должен быть ответ, иначе наш договор недействителен. В средние века люди любили задавать загадки. Нередко ко мне приходили с парадоксами. Например: в деревне жил только один цирюльник, который брил всех, кто не брился сам. Кто брил цирюльника? — спрашивали они. Но, как отметил Рассел, словечко «всех» делает такой вопрос бессмысленным, и ответа на него нет.

— Мой вопрос честный и не содержит парадокса, — заверил его Саймон.

— Отлично. Я на него отвечу. Что вы ухмыляетесь?

— Я... ничего, — ответил Саймон, согнав с лица усмешку.

— У вас крепкие нервы, — сказал черт мрачным, но одобрительным тоном, извлекая из воздуха пергамент. — Если бы я предстал перед вами в образе чудовища, сочетающего в себе миловидность ваших горилл с грациозностью монстра, обитающего на Венере, вы едва ли сохранили бы свой апломб, и я уверен...

— В этом нет никакой надобности, — поспешно сказал Саймон.

Он взял протянутый ему договор, убедился, что все в порядке, и открыл перочинный нож.

— Минуточку! — остановил его дьявол. — Дайте я его продезинфицирую. — Он поднес лезвие к губам, слегка подул, и сталь накалилась до вишнево-красного цвета. — Ну вот! Теперь прикоснитесь кончиком ножа ...гм... к чернилам, и это все... Прошу вас, вторая строчка снизу, последняя — моя.

Саймон помедлил, задумчиво глядя на раскаленный кончик ножа.

— Подписывайтесь,— поторопил черт, и Саймон, расправив плечи, поставил свое имя.

Поставив и свою подпись с пышным росчерком, дьявол потер руки, окинул Саймона откровенно собственническим взглядом и весело сказал:

— Ну, выкладывайте свой вопрос! Как только я на него отвечу, мы отправимся. Мне надо посетить сегодня еще одного клиента, а времени в обрез.

— Хорошо, — сказал Саймон и глубоко вздохнул. — Мой вопрос такой: верна или не верна Великая теорема Ферма?

Дьявол проглотил слюну. Впервые его самоуверенность поколебалась.

— Великая — чья? Что? — глухим голосом спросил он.

— Великая теорема Ферма. Это математическое предположение, которое Ферма, французский математик семнадцатого века, якобы доказал. Однако его доказательство не было записано, и до сего дня никто не знает, верна теорема или нет. — Когда Саймон увидел физиономию черта, у него дрогнули губы. — Ну вот, ступайте и займитесь!

— Математика! — в ужасе воскликнул хвостатый.— Вы думаете, у меня было время изучать такие штуки? Я проходил тривиум и квадривиум *), но что касается алгебры... Скажите, — возмущенно добавил он, — этично ли задавать мне такой вопрос?

Лицо Саймона окаменело, но глаза сияли.

— А вы предпочли бы сбегать за сто двадцать тысяч километров и принести какой-нибудь предмет величиной с гидростанцию Боулдер Дэм, — поддразнил он черта. — Время и пространство для вас легкое дело, правда? Что ж, сожалею, но я предпочитаю свой вопрос. Он очень прост,— успокаивающе добавил Саймон. Речь идет о положительных целых числах.

— А что такое положительное число? — взволновался черт. — И почему вы хотите, чтобы оно было целым?

— Выразимся точнее, — сказал Саймон, пропустив вопрос дьявола мимо ушей. — Теорема Ферма утверждает, что для любого положительного целого числа n больше двух уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решения в положительных целых числах.

— А что это значит?

— Помните, вы должны дать ответ.

— А кто будет судьей — вы?

— Нет, — ласково ответил Саймон. — Я не считаю себя достаточно компетентным, хотя бился над этой проблемой несколько лет. Если вы явитесь с ответом, мы представим его в солидный математический журнал. Отступить вы не можете, — проблема, очевидно, разрешима: теорема либо верна, либо ложна. И, пожалуйста, никаких фокусов с многозначной логикой. За двадцать четыре часа найдите ответ и докажите, что он правильный. В конце концов, человек... виноват, дух... с вашим развитием и огромным опытом может за это время немного подучить математику.

— Я вспоминаю, как туго мне приходилось с Евклидом, когда я изучал его в Кембридже, — печально заметил дьявол. — Мои доказательства никогда не были верны, а между тем истина лежала на поверхности: достаточно было взглянуть на чертеж. — Он стиснул зубы. — Но я справлюсь. Мне случалось делать и более трудные вещи, дорогой мистер Саймон. Однажды я слетал на отдаленную звезду и принес оттуда литр нейтрония ровно за шестнадцать...

— Знаю, — перебил его Саймон, — вы мастер на подобные фокусы.

— Какие там фокусы, — сердито пробурчал дьявол. — Были гигантские технические трудности. Но не стоит ворошить прошлое. Я — в библиотеку, а завтра в это время...

---

*) Два цикла средневекового образования. Тривиум — грамматика, риторика, диалектика; квадривиум (повышенный курс после тривиума) — арифметика, геометрия, астрономия, теория музыки. — *Прим. ред.*

— Нет, жестко перебил его Саймон. — Мы расписались полчаса назад. Возвращайтесь точно через двадцать три с половиной часа. Не буду торопить вас, — иронически добавил он, когда дьявол с тревогой взглянул на часы. — Выпейте рюмку вина и, прежде чем уйти, познакомьтесь с моей женой.

— На работе я никогда не пью, и у меня нет времени знакомиться с вашей женой... во всяком случае теперь.

Он исчез.

В тот же миг вошла жена Саймона.

— Опять подслушивала у дверей! — мягко упрекнул ее Саймон.

— Конечно, — сдавленным голосом проговорила она. — И я хочу знать, дорогой, действительно ли труден этот вопрос. Потому что, если это не так... Саймон, я просто в ужасе!

— Будь спокойна, вопрос труден, — беспечно ответил Саймон. — Не все это сразу понимают. Видишь ли, — тоном лектора продолжал он, — всякий легко найдет два целых числа, квадраты которых в сумме тоже дают квадрат. Например, $3^2+4^2=5^2$, то есть просто $9+16=25$. Ясно?

— Угу.

Она поправила мужу галстук.

— Но никто еще не мог найти два куба, которые при сложении тоже давали бы куб или более высокие степени, которые приводили бы к аналогичному результату, — по-видимому, их просто нет. И все же, — торжествующе закончил он, — до сих пор не доказано, что таких чисел не существует! Теперь поняла?

— Конечно. — Жена Саймона всегда понимала самые мудреные математические положения. А если попадался камень преткновения, муж терпеливо объяснял ей все по нескольку раз. Поэтому у миссис Флэгг оставалось мало времени для прочих дел.

— Сварю кофе, — сказала она и ушла.

Четыре часа спустя, когда они сидели и слушали третью симфонию Брамса, дьявол явился вновь.

— Я уже изучил основы алгебры, тригонометрии и планиметрии! — торжествующе объявил он.

— Быстро работаете! — похвалил его Саймон. — Я уверен, что сферическая, аналитическая, проективная, начертательная и неевклидова геометрии не представят для вас затруднений.

Дьявол поморщился.

— Их так много? — упавшим голосом спросил он.

— О, это далеко не все. — У Саймона был такой вид, словно он сообщил радостную весть. — Неевклидовы вам понравятся, — усмехнулся он. — Для этого вам не надо будет разбираться в чертежах. Чертежи ничего не скажут. И раз вы не в ладах с Евклидом...

Дьявол застонал, поблек, как старая кинопленка, и исчез. Жена Саймона хихикнула.

— Мой дорогой, — пропела она, — я начинаю думать, что ты возьмешь верх!

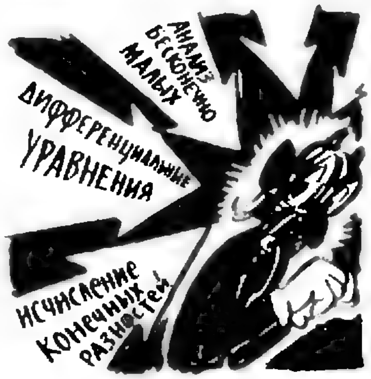
— Тсс! Последняя часть! Великолепно!

Еще через шесть часов что-то вспыхнуло, комнату заволокло дымом, и дьявол опять оказался тут как тут. У него появились мешки под глазами. Саймон Флэгг согнал с лица усмешку.

— Я прошел все эти геометрии, — с мрачным удовлетворением произнес черт. — Теперь будет легче. Я, пожалуй, готов заняться вашей маленькой головоломкой.

Саймон покачал головой.

— Вы слишком спешите. По-видимому, вы не заметили таких фундаментальных методов, как анализ бесконечно малых, дифференциальные уравнения и исчисление конечных разностей. Затем есть еще...



— Неужели все это нужно? — вздохнул дьявол.

Он сел и начал тереть кулаками опухшие веки. Бедняга не мог удержать зевоту.

— Не могу сказать наверное, — безразличным голосом ответил Саймон. — Но люди, трудясь над этой «маленькой головоломкой», испробовали все разделы математики, а задача еще не решена. Я предложил бы...

Но черт не был расположен выслушивать советы Саймона. На этот раз он исчез, даже не встав со стула. И сделал это довольно неуклюже.

— Мне кажется, он устал, — заметила миссис Флэгг. — Бедный чертяка!

Впрочем, в ее тоне трудно было уловить сочувствие.

— Я тоже устал, — отозвался Саймон, — Пойдем спать. Я думаю, до завтра он не появится.

— Возможно, — согласилась жена. — Но на всякий случай я надену сорочку с черными кружевами.

Наступило утро следующего дня. Теперь супругам казалось более подходящей музыка Баха. Поэтому они поставили пластинку с Ландовской *).

— Еще десять минут, и, если он не вернется с решением, мы выиграли, — сказал Саймон. — Я отдаю ему должное. Он мог бы окончить курс за один день, притом с отличием, и получить диплом доктора философии.

Раздалось шипение. Поднялось алое грибообразное облачко, распространяя запах серы. Перед супругами на коврике стоял дьявол и шумно дышал, выбрасывая клубы пара. Плечи его опустились. Глаза были налиты кровью. Когтистая лапа, все еще сжимавшая пачку исписанных листов, заметно дрожала. Вероятно, у него шалили нервы.

Молча он швырнул кипу бумаг на пол и принялся яростно топтать их раздвоенными копытами. Наконец, истощив весь заряд энергии, черт успокоился, и горькая усмешка скривила ему рот.

— Вы выиграли, Саймон, — прошептал черт, глядя на математика с беззлобным уважением. — Даже я не мог за это короткое время изучить математику настолько, чтобы одолеть такую трудную задачу. Чем больше я в нее

---

*) Ландовская Ванда (1879—1959) — замечательная пианистка, пользовавшаяся широкой известностью как исполнительница старинной музыки на фортепиано и клавесине.

углублялся, тем хуже шло дело. Неединственное разложение на множители, идеальные числа — о Ваал!.. Вы знаете, — доверительно сообщил он, — даже лучшие математики других планет, а они ушли далеко от вас, не добились решения. Эх, один молодчик на Сатурне — он немного напоминает гриб на ходулях — в уме решает дифференциальные уравнения в частных производных. Но и он спасовал.— Дьявол вздохнул. — Будьте здоровы!

Черт исчезал очень медленно. Видно, он-таки изрядно устал.

Саймон крепко поцеловал жену. Но она, с недовольной гримасой всматриваясь в лицо мужа, витавшего где-то в облаках, спросила:

— Дорогой, что еще неладно?

— Нет, ничего... Но, понимаешь, я хотел бы ознакомиться с его работой, узнать, насколько близко он подошел к решению. Я бился над той проблемой не менее...

Он не договорил и изумленно вытаращил глаза: дьявол вновь очутился в комнате. У него был очень смущенный вид.

— Я здесь забыл... — пробормотал он. — Мне нужно... ах!

Он нагнулся над разбросанными бумагами и начал их бережно собирать и разглаживать.— Эта штука захватывает, — сказал он, избегая взгляда Саймона. — Прямо не оторваться! Если бы только мне удалось доказать одну простенькую лемму! — Увидев, что на лице Саймона вспыхнул жгучий интерес, он потупил взор, как бы прося извинения.— Послушайте, профессор, — проворчал дьявол, — я не сомневаюсь, что и вы потрудились над этим. Пробовали ли вы непрерывные дроби? Ферма, несомненно, пользовался ими, и... Будьте добры, оставьте нас вдвоем.

Последние слова были обращены к миссис Флэгг. Черт сел рядом с Саймоном, подоткнув под себя хвост, и указал на листы, испещренные математическими знаками.

Миссис Флэгг вздохнула. Погруженный в раздумье дьявол вдруг показался ей очень знакомым: он почти не отличался от старого профессора Аткинса, коллеги ее мужа по университету. Стоит двум математикам углубиться в изучение какой-нибудь мучительной и заманчивой задачи, и они...

Она покорно вышла из комнаты с кофейником в руке. Несомненно, предстояло долгое, утомительное обсуждение. В этом миссис Флэгг была уверена. Ведь недаром она была женой известного математика.

Рассказ перепечатан из сборника научно-фантастических рассказов «Туннель под Миром», М., «Мир», 1965.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЕ ФЕРМА

Да, ничего не скажешь — зло подшутил Саймон Флэгг над дьяволом! Трудно, конечно, сказать, чем вся эта история еще кончится: существо (мы чуть было не сказали «человек»), способное за сутки пройти большую часть курса физмата, может оказаться и незаурядным математиком! Но все это — пока, во всяком случае — в области догадок и шуток. На сегодняшний день Великая теорема Ферма служит своего рода эталоном математической проблемы, сочетающей поразительную простоту формулировки с не менее поразительной трудностью решения — так и не найденного за более чем трехсотлетнюю свою историю.

Надо сказать, что «Великая теорема» — далеко не единственная проблема, завещанная Пьером Ферма (1601—1665) потомкам: как замечают Р. Курант и Г. Роббинс *), «он не затруднял себя тем, чтобы приводить тут же доказательства многих высказанных им теорем». В этом, конечно, ничего особенно удивительного нет. Достаточно вспомнить, что в XVII веке не было ни столь многочисленных в наши дни научных обществ, устраивающих всякого рода конференции, съезды, конгрессы, симпозиумы, семинары, коллоквиумы и прочие прекрасные начинания, ни еще более многочисленных научных журналов, редакционные портфели которых набиты статьями зачастую на пару лет вперед. Математические работы, конечно, печатались и тогда — но это были, главным образом, учебные руководства или монографии, посвященные целому разделу науки. Что же касается отдельных теорем или серий теорем, то, прежде чем найти себе достойное место в очередной монографии, они чаще всего приводились просто в частной переписке ученых, бывшей в то время основным (и почти единственным) видом научных контактов. В архивах ученых того времени сохранились сотни писем, которые по современным представлениям были (если не считать таких мелочей, как обращения и подписи) самыми настоящими научными статьями.

Но Ферма ведь к тому же и не был «профессиональным» математиком! Для этого тулузского юриста математика была не основным занятием, а, как сейчас принято говорить, «хобби». В научном наследстве Ферма, наряду с работами, в которых были заложены основы ряда новых математических дисциплин (все эти работы были напечатаны уже после смерти автора), и перепиской с современниками (особенно интенсивно переписывался он с Мераном Мерсенном) сохранилось большое число заметок, сделанных на полях книг, которые он читал. И, конечно, именно в таких заметках он подчас «не затруднял себя» подробными доказательствами — попросту из-за недостатка места. Впоследствии все сформулированные Ферма теоремы, доказательства которых до нас не дошли, были доказаны — все, кроме одной. Той самой, о которой идет речь в рассказе Порджеса.

Быть может, именно потому, что это исключение оказалось единственным, что все прочие утверждения Ферма удавалось рано или поздно доказать, жившие после него математики никак не могли смириться с мыслью, что на этот раз Ферма ошибся. Ведь этот блистательный «любитель», один из создателей аналитической геометрии и теории чисел, теории вероятностей и геометрической оптики, — нигде и никогда в других случаях не высказывал неверных утверждений. А «Великая теорема» к тому же так просто формулируется...

Формулировка эта будет особенно выразительной, если мы вначале напомним одну значительно более простую задачу. Назовем, как обычно, пифагоровой тройкой тройку целых чисел a, b, c, удовлетворяющих уравнению

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Разумеется, из любой пифагоровой тройки a, b, c можно получить бесконечное множество других пифагоровых троек, умножая ее члены на любое натуральное число: если $a^2 + b^2 = c^2$, то, конечно $(ar)^2 + (br)^2 = (cr)^2$. Поэтому разумной представляется задача отыскания всех примитивных пифагоровых троек, то есть таких пифагоровых троек, члены которых не имеют общих множителей.

Задача эта решается довольно просто. Пусть целые положительные числа a, b и c

---

*) «Что такое математика?», пер. с англ., 2-е изд., М., «Просвещение», 1967.

удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 = c^2$. Полагая $\frac{a}{c} = x$ и $\frac{b}{c} = y$, получим, что $x^2 + y^2 = 1$ (x и y — рациональные числа). Отсюда $y^2 = (1 - x)(1 + x)$ или $\frac{y}{1 + x} = \frac{1 - x}{y}$. Общее (рациональное) значение двух последних соотношений обозначим через $t = \frac{u}{v}$. Тогда $y = t(1 + x)$ и $(1 - x) = ty$, откуда $tx - y = -t$, $x + ty = 1$.

Из этих равенств в свою очередь следует, что

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2},$$

или, подставляя $\frac{a}{c}$ вместо x, $\frac{b}{c}$ вместо y и $\frac{u}{v}$ вместо t, получим

$$\frac{a}{c} = \frac{v^2 - u^2}{u^2 + v^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}.$$

Или: $a = (v^2 - u^2)r$, $b = 2uvr$, $c = (u^2 + v^2)r$, где r есть некоторый рациональный коэффициент пропорциональности. Если, далее, предположить, что a, b, c взаимно просты, то легко получается, что они удовлетворяют соотношениям $a = v^2 - u^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$, где u и v — целые положительные числа, взаимно простые и не являющиеся одновременно нечетными. (Формулы эти, известные еще математикам Древней Индии, часто называют *«формулами индусов»*.)

И уже совсем легко показать (сделайте это самостоятельно), что числа a, b и c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 = c^2$.

Более чем естественно попытаться обобщить задачу о разыскании пифагоровых троек, рассматривая уравнения $a^3 + b^3 = c^3$, $a^4 + b^4 = c^4$ и вообще $a^n + b^n = c^n$ и ставя вопрос о возможности решения их в целых положительных числах. Именно в связи с рассмотрением пифагоровых троек Ферма сделал в книге Диофанта Александрийского замечание, что

> при $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ неразрешимо в целых числах *);

но что найденное им остроумное доказательство этого факта слишком длинно для того, чтобы поместить его на полях этой книги...

Сейчас большинство математиков довольно-таки скептически относятся к этому заявлению Ферма. Во всяком случае, в последующих его работах для упоминаемого им «остроумного доказательства» места не нашлось, хотя самой задачей он продолжал заниматься и даже решил ее для частного случая $n = 4$, разработав для этого специальный метод — так называемый *метод спуска*.

Леонард Эйлер (1707—1783) доказал Великую теорему Ферма для случаев $n = 3, 4, 5, 7$.

Самый крупный вклад в решение проблемы Ферма связан с именем немецкого математика Эрнста Куммера (1810—1893).

Можно показать (при помощи элементарных рассуждений), что для доказательства теоремы Ферма достаточно рассматривать уравнения вида $a^p + b^p = c^p$, где p — простое число, а a, b, c — целые, но не обязательно положительные, числа.

Куммер доказал, что уравнение $a^p + b^p = c^p$ не допускает решения в целых (отличных от нуля) числах для всех простых показателей p, удовлетворяющих некоторому условию «регулярности», в частности, для всех $3 < p < 100$. До сих пор не известно, бесконечно ли множество всех регулярных чисел, но заведомо бесконечным является множество иррегулярных чисел, то есть чисел, для которых куммеровское доказательство не проходит.

Однако главное значение работ Куммера, посвященных Великой теореме Ферма, состоит в том, что Куммер «попутно» развил совершенно новую и важную отрасль теории чисел — так называемую теорию алгебраических чисел. Упоминаемые в рассказе Порджеса «идеальные числа», так же как и результаты о неединственности разложения на простые множители, свидетельствуют о том, что дотошный Саймон Флэгг заставил-таки дьявола проштудировать как следует работы Куммера.

В самые последние годы получил развитие геометрический подход к проблематике, связанной с Великой теоремой Ферма. Исходными здесь являются следующие соображения. Если уравнение $x^p + y^p = z^p$ имеет целочисленное решение, причем $z \neq 0$, то уравнение $\left(\frac{x}{z}\right)^p + \left(\frac{y}{z}\right)^p = 1$ имеет решение в рациональных числах, и наоборот. Об уравнении $x^p + y^p = 1$ можно говорить как об уравнении некоторой кривой на плоскости xOy (подобно тому, как уравнение $x + y = 1$ задает прямую, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ — окружность и т. п.), а о его решении в рациональных числах — как о точке кривой с рациональными координатами (короче: рациональной точке). Следует сразу отметить, что на кривой $x^p + y^p = 1$ есть рациональные точки; простой пример — точка (0, 1); это соответствует очевидным решениям уравнения Ферма. Но здесь напрашивается следующее ослабление теоремы Ферма: является ли множество рациональных точек кривой $x^p + y^p = 1$ конечным? Конечно, такой вопрос можно поставить не только для «кривых Ферма», но и для любых других кривых. Окружность содержит бесконечное множество рациональных точек, причем их описание как раз и дается «формулами индусов». Бесконечны множества рациональных точек на некоторых так называемых эллиптических кривых, определяемых уравнениями третьей степени, например, на кривых $y^2 = x^3 + 1$, $x^3 + y^3 = 7$.

---

*) Именно это предложение и вошло в историю математики под названием Великой теоремы Ферма.

Что же касается уравнений степени выше четвертой, то на определяемых ими кривых до сих пор удавалось обнаружить лишь конечные множества рациональных точек, что и дало Л. Дж. Морделлу повод высказать гипотезу о том, что так обстоит дело для всех кривых выше четвертой степени *). Доказательство гипотезы Морделла (пока упорно не поддающейся решению) означало бы конечность числа решений уравнения Ферма $x^p + y^p = z^p$. Как и по отношению к куммеровским методам, о геометрическом подходе к теореме Ферма можно сказать, что, независимо от успеха в решении самих по себе исходных задач, все это направление в целом сулит интересные новые результаты в теории чисел.

Наконец, имеется и в корне отличный от всех предыдущих подход к гипотезе Ферма: ни из чего не следует, что положительное или отрицательное ее решение вообще может быть выведено из аксиом арифметики натуральных чисел! Иными словами, утверждение, содержащееся в Великой теореме Ферма, может оказаться алгорифмически неразрешимым, и успехи в доказательстве алгорифмической неразрешимости ряда теоретико-числовых задач**) заставляют все более серьезно задумываться и над такой возможностью (хотя прямых путей к ее выявлению также пока не видно)...

Как же обстоит дело с проблемой Ферма на сегодняшний день? *) Несмотря на то, что гипотеза Ферма доказана для большого числа частных случаев (например, для всех $n < 619$), в полном своем виде она также далека от решения, как и триста лет назад. Опыт развития математики с тех пор со всей очевидностью показал полную беспочвенность надежд на «элементарное» доказательство Великой теоремы Ферма — надежд, столь, увы, соблазнительных для людей, любящих не столько математику, сколько успех в математике. Правда, «ферматисты» успехом не избалованы; люди они, как правило, несчастные, и мы со всей серьезностью хотели бы предостеречь наших юных читателей от такой карьеры. Быть может, нелишним будет еще раз процитировать здесь книгу Куранта и Роббинса (стр. 67): «... Проблема вызвала большой интерес и в более широких кругах — отчасти благодаря премии размеров в 100 000 марок, предназначенной для лица, которое впервые даст решение, причем присуждение премии было поручено Гёттингенской Академии. Пока послевоенная инфляция в Германии не свела на нет денежную ценность этой премии, ежегодно представлялось громадное число «решений», содержащих ошибки... Со времени падения курса марки ажиотаж около проблемы Ферма несколько приутих; и все же время от времени пресса не перестает осведомлять нас о том, что «решение» найдено каким-нибудь новоявленным «гением».

Ю. А. Гастев,
М. Л. Смолянский

От редакции

Редакция «Кванта» со своей стороны считает необходимым известить читателей, что письма с проектами доказательств теоремы Ферма рассматриваться (и возвращаться) не будут.

---

*) Разумеется, здесь не идет речь о «вырожденных» кривых высших степеней, получающихся простым возведением в степень обоих частей уравнений вида $y = x + 1$, и т. п.

**) См., например, статью Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова «О решении десятой проблемы Гильберта» («Квант» № 7, 1970).

*) Для более серьезного ознакомления с проблемой Ферма мы можем порекомендовать следующие книги: А. Я. Хинчин, Великая теорема Ферма, М., Гостехиздат, 1932; З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, Теория чисел, М., «Наука», 1964.

ЗАДАЧИ НА НЕРАВЕНСТВА

(Продолжение, начало см. на стр. 16)

4. Доказать неравенство

$$\sqrt{5x + 15} + \sqrt{8 - 8x} \leqslant 7.$$

5. Определить, что больше:

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18} \text{ или } 4?$$

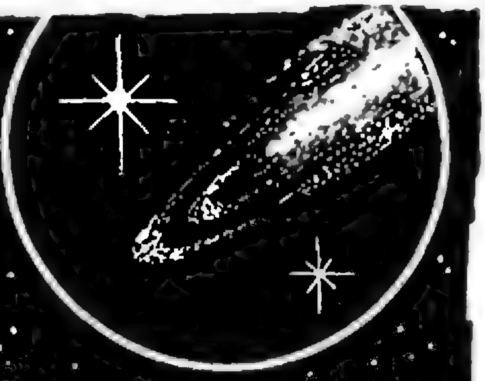
6. Доказать, что выражение:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \ldots - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}$$

меньше 1 для четного числа радикалов и больше 1 для нечетного числа радикалов.

С. Т. Берколайко

ВОЗМОЖНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ ТЕЛЕСКОПОВ



А. Д. МАРЛЕНСКИЙ

В апрельском номере нашего журнала была опубликована статья В. Е. Белонучкина и С. М. Козела «Оптический телескоп». В ней рассказывалось об устройстве телескопа, о принципе его действия, говорилось об основных оптических характеристиках этого прибора. В публикуемой ниже статье рассказывается о возможностях оптических телескопов, о том, какие небесные тела можно наблюдать в современные телескопы и какие недоступны для наблюдения с их помощью. Чтобы лучше понять эту статью, читателю нужно предварительно познакомиться со статьей «Оптический телескоп».

Бурный рост астрономических открытий за последние десятилетия во многом обусловлен совершенствованием телескопов и техники телескопических наблюдений. Где находятся границы возможного для современных оптических телескопов? Какие небесные тела можно на пределе наблюдать в самые большие современные телескопы и какие недоступны для них?

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, выясним предельные возможности невооруженного человеческого глаза при наблюдении небесных тел и затем рассмотрим, до каких пределов расширяют эти возможности современные оптические телескопы.

Из широкого спектра электромагнитных волн, которые излучаются небесными телами, человеческий глаз воспринимает сравнительно узкую полосу частот — от красных до фиолетовых лучей: $\nu_{\text{кр}} = 4{,}0\cdot 10^{14}$ *гц*, $\nu_{\text{ф}} = 7{,}7\cdot 10^{14}$ *гц*, что соответствует длинам волн $\lambda_{\text{кр}} = 7600$ Å, $\lambda_{\text{ф}} = 3900$ Å (этот промежуток длин волн и называют видимой частью спектра электромагнитных волн).

Все остальные виды электромагнитных излучений небесных тел: радиоволны различных диапазонов, инфракрасные, ультрафиолетовые, рентгеновские и гамма-лучи — человеческий глаз не воспринимает.

При интенсивном дневном свете человеческий глаз наиболее чувствителен к излучению с длиной волны $\lambda = 5550$ Å (зеленая область спектра). При очень слабом освещении, в том числе при наблюдении слабых небесных тел, максимум чувствительности глаза смещается в сторону более коротких волн ($\lambda = 5130$ Å).

Определяя границы, в пределах которых возможны наблюдения небесных тел невооруженным глазом, астрономы обычно опираются на шкалу звездных величин.

Еще в древности Гиппарх разбил все видимые звезды на 6 звездных величин (разумеется, это были звезды, видимые невооруженным глазом). Наиболее яркие звезды он отнес к звездам 1-й звездной величины, а наиболее слабые — к звездам 6-й величины.

Для уточнения шкалы звездных величин в прошлом веке приняли считать, что звезды 6-й величины по сравнению со звездами 1-й величины (разность в 5 звездных величин) дают освещенность в 100 раз меньшую. Таким образом, в основу шкалы звездных величин было положено число $\sqrt[5]{100} = 2{,}512$. Это значит, что звезда 1-й величины посылает к нам световой поток в 2,512 раза больший, чем звезда 2-й величины, и в $2{,}512^2 = 6{,}31$ раза больший, чем звезда 3-й величины, и т. д.

Следовательно, отношение освещенностей E_1 и E_2 от двух звезд, одна из которых имеет звездную величину m_1, а вторая m_2, определяется следующей формулой:

$$\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1}. \tag{1}$$

Человеческий глаз при продолжительной адаптации в особенно темные ночи и при хорошей прозрачности атмосферы способен видеть звезды 8-й звездной величины. Это — порог зрительных ощущений среднего человеческого глаза. Выразим величину порогового раздражения глаза в физических единицах. Опытами установлено, что от находящейся в зените звезды 1-й величины на поверхность в 1 $м^2$, перпендикулярную лучам, падает световой поток $0{,}85 \cdot 10^{-6}$ люмена (*лм*).

Нетрудно рассчитать, что в глаз с диаметром зрачка 6 *мм* от звезды 8-й звездной величины попадает световой поток

$$F = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}003^2 \cdot 0{,}85 \cdot 10^{-6}}{2{,}512^7} \approx$$

$$\approx 3{,}8 \cdot 10^{-14} \ (лм).$$

Оценим теперь, скольким квантам, попадающим в зрачок за 1 *сек*, соответствует этот пороговый поток. Будем считать, что поток состоит из лучей с длиной волны $\lambda = 5130$ Å ($\nu = 5{,}85 \cdot 10^{14}$ *гц*), по отношению к которым глаз максимально чувствителен при наблюдении очень слабых звезд. Опытами установлено, что световому потоку в 1 *лм*, образованному таким излучением, соответствует поток энергии в 0,00058 *вт*.

Следовательно, в зрачок глаза с диаметром 6 *мм* от звезды 8-й звездной величины попадает поток энергии

$$W = 3{,}8 \cdot 10^{-14} \cdot 0{,}00058 \approx$$

$$\approx 2{,}2 \cdot 10^{-17} \ (вт).$$

Один квант излучения с частотой $\nu = 5{,}85 \cdot 10^{14}$ *гц* несет энергию

$$\varepsilon = h\nu = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 5{,}85 \cdot 10^{14} =$$

$$= 3{,}87 \cdot 10^{-19} \ (дж).$$

Следовательно, за одну секунду от звезды 8-й величины в глаз попадает

$$N = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-17}}{3{,}87 \cdot 10^{-19}} \approx 60 \ (квантов).$$

Сразу же отметим, что на полученные результаты следует смотреть только как на оценочные, так как свет от звезд не является монохроматическим — то есть он не состоит из квантов одной частоты, а диаметры зрачков и чувствительность глаз у людей не одинаковы.

Применение биноклей и телескопов значительно расширяет возможности человеческого зрения: с их помощью становятся видимыми многие слабые звезды. Больше того, оказывается, что некоторые из этих «слабых» звезд на самом деле представляют собой системы, состоящие из двух, трех, а то и большего числа звезд (такие системы принято называть «кратными звездами»). При наблюдениях с телескопом световой поток, перехватываемый объективом, тем больше, чем больше диаметр объектива. Величина диаметра объектива определяет оптическую мощь или проницающую силу телескопа. Под этими терминами понимают звездные величины предельно слабых звезд, которые удается наблюдать с данным телескопом.

Если не принимать во внимание потери света в оптике телескопа и некоторые другие тонкости, то оптическую мощь телескопа при наблюдении звезд можно подсчитать приближенно: надо лишь определить, во

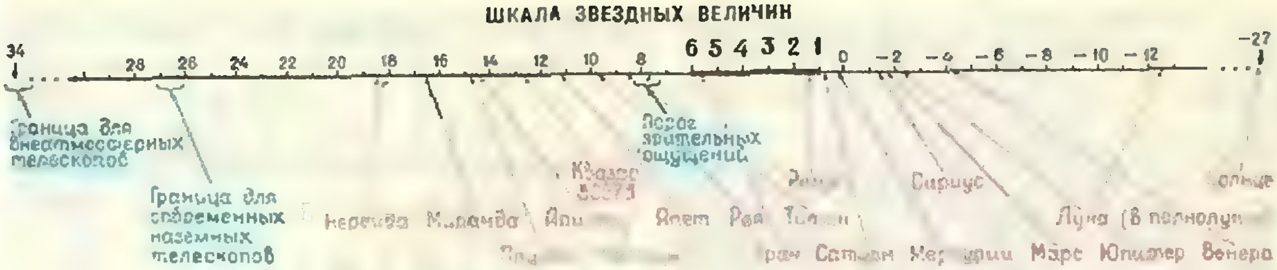

ШКАЛА ЗВЕЗДНЫХ ВЕЛИЧИН
34
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6 5 4 3 2 1
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−27
Граница для внеатмосферных телескопов
Граница для современных наземных телескопов
Порог зрительных ощущений
Квазар 3С273
Сириус
Нереида
Миранда
Япет
Рея
Титан
Луна (в полнолуние)
Сатурн
Меркурий
Марс
Юпитер
Венера

Рис. 1.

сколько раз площадь объектива больше площади зрачка человеческого глаза, и результат выразить в звездных величинах. Так, школьный телескоп с диаметром объектива 60 *мм* по сравнению с глазом (диаметр зрачка 6 *мм*) перехватывает в 100 раз большие световые потоки, что соответствует разнице в освещенностях, которые дают звезды, отличающиеся на 5 звездных величин. Поэтому, если невооруженный глаз видит, например, звезды 6-й величины, то в телескоп становятся заметными звезды до 6+5=11 звездной величины.

На рисунке 1 приведена шкала звездных величин с указанием звездных величин некоторых небесных объектов. Из рисунка видно, насколько расширяются возможности наблюдений при использовании телескопов.

В астрономической обсерватории, расположенной возле станицы Зеленчукская Ставропольского края, сейчас заканчивается монтаж самого большого в мире телескопа-рефлектора с диаметром зеркала в 6 *м* (рис. 2). Этот телескоп позволит визуально наблюдать звезды, посылающие к нам в $\left(\frac{6000}{6}\right)^2=10^6$ раз (15 звездных величин) меньше света, чем видимые невооруженным глазом звезды 6-й величины, то есть увидеть звезды 6+15=21-й величины.

Однако 21-я звездная величина — это не предел для проницающей силы шестиметрового телескопа. Применяя специальные фотоэмульсии, можно будет с этим телескопом фотографировать при экспозициях в несколько часов звезды на 2—3 величины более слабые, а при фотоэлектрических методах регистрации с применением накопителей, усилителей и телевизионных трубок можно будет повысить проницающую силу телескопа еще на 2—3 звездные величины.

Проницающая сила телескопа при наземных наблюдениях ограничена тем, что световые потоки от слабых звезд становятся неразличимыми на

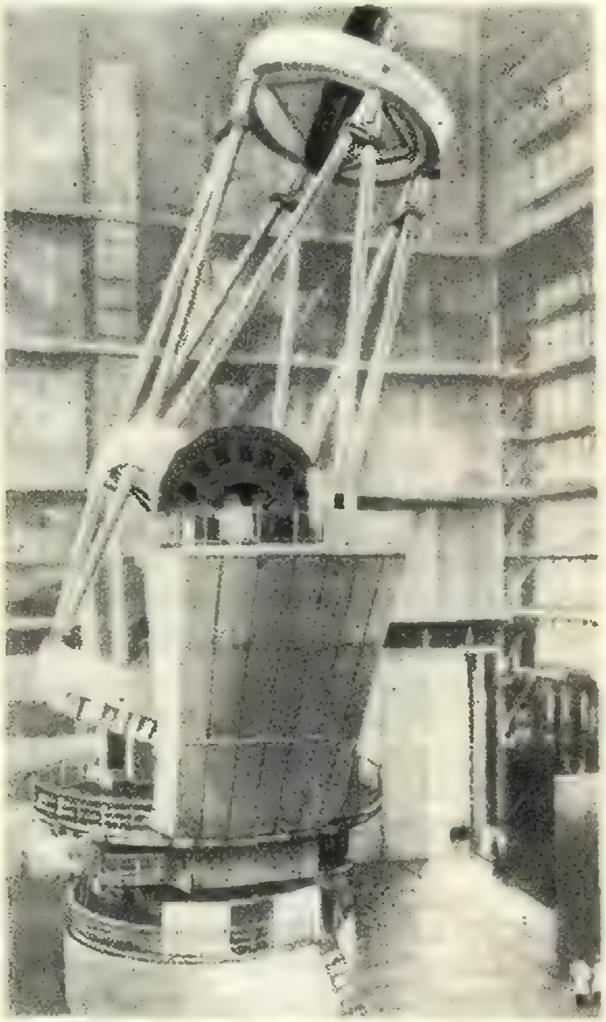


Рис. 2. Крупнейший в мире шестиметровый телескоп-рефлектор в цехе оптического завода.

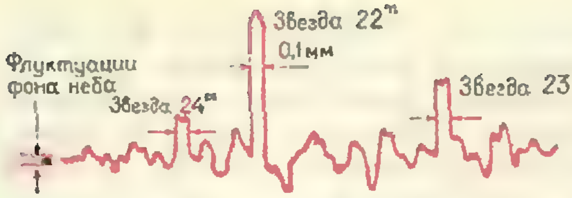


Рис. 3. Флуктуации фототока при прохождении звезд через диафрагму в 0,1 мм, установленную в фокусе 5-метрового телескопа.

фоне сплошного слабого свечения земной атмосферы. Даже в самую темную безоблачную ночь земная атмосфера посылает на поверхность Земли с каждой квадратной секунды небесной сферы потоки световой энергии, сравнимые с излучениями звезд 22,4 величины. Для иллюстрации трудностей измерений звездных величин при таких условиях приводим на рисунке 3 запись фототока, сделанную при наблюдениях на американском пятиметровом рефлекторе, установленном на горе Паломар.

Как показывают расчеты, в условиях светового фона атмосферы для шестиметрового телескопа теоретической границей проницающей силы являются звезды 27-й величины. Если же шестиметровый телескоп вынести за пределы земной атмосферы, то при отсутствии фона теоретическая граница его проницающей силы может быть отодвинута до звезд 34-й величины. Чтобы представить, каким требованиям должна при этом удовлетворять приемная аппаратура, укажем, что на шестиметровое зеркало телескопа от звезды 34-й величины в течение часа в среднем будет падать менее десяти квантов видимого света.

Дальнейшее повышение проницающей силы может быть достигнуто только за счет увеличения размеров зеркал телескопов.

С размерами объектива телескопа связана еще одна важная его характеристика — разрешающая способность.

Угловое увеличение телескопа прямо пропорционально фокусному расстоянию объектива и обратно пропорционально фокусному расстоянию окуляра. Казалось бы, подбирая окуляры с уменьшающимися фокусными расстояниями, можно получать сколь угодно большие увеличения и тем самым разрешать сколь угодно близкие пары звезд.

Однако это не так. Ввиду волновой природы света параллельные пучки лучей, идущие от звезд, собираются в фокальной плоскости объектива не в точки, а дают характерные дифракционные картины.

В центре каждой такой картины (рис. 4) находится светлый диск (неопытные наблюдатели принимают его иногда за диск звезды), окруженный кольцами ослабевающей интенсивности.

Для данного телескопа угловые размеры дифракционных дисков у всех звезд одинаковы и зависят только от диаметра его объектива. (Некоторые поправки вносятся в том случае, когда учитывается цвет звезд. Однако они очень незначительны.)

Напомним, что разрешающей способностью телескопа мы называем

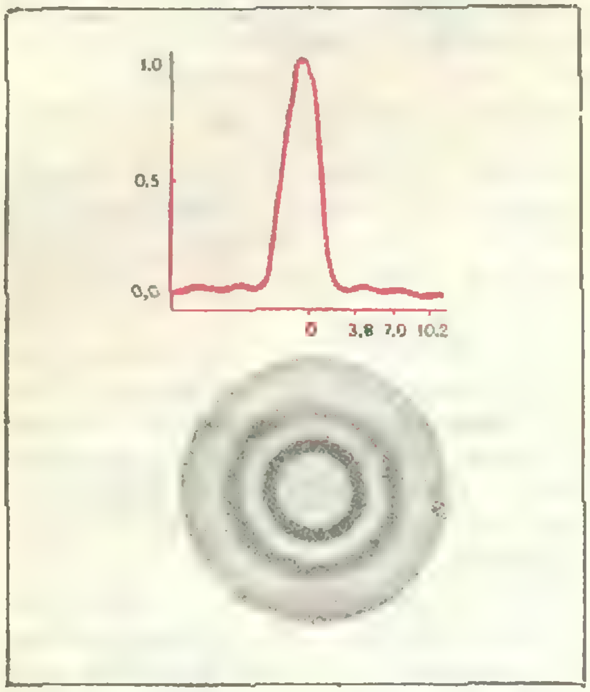


Рис. 4. Дифракционная картина точечного источника света в телескопе. Вверху показано распределение интенсивности по диаметру дифракционного изображения.

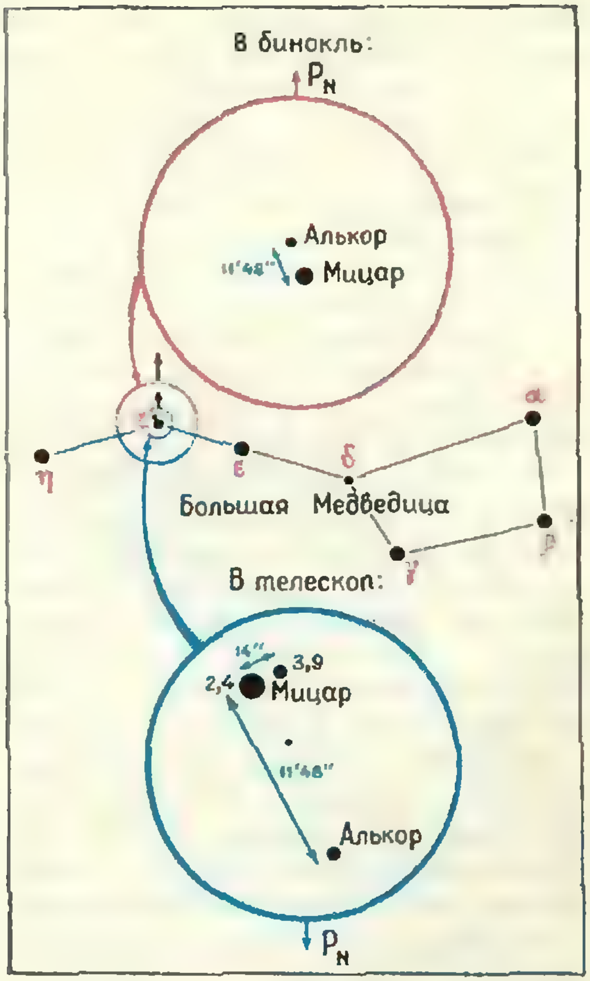


Рис. 5. Мицар и Алькор при наблюдении их невооруженным глазом, в бинокль и в телескоп. Стрелка указывает направление на северный полюс мира (P_N).

величину $R = \frac{1}{\psi}$, где ψ — минимальное угловое расстояние между двумя наблюдаемыми объектами, при котором они с помощью данного объектива еще различимы отдельно, то есть разрешены. Глаз как оптический прибор также характеризуется разрешающей способностью. Многочисленными опытами установлено, что минимальное угловое расстояние между двумя объектами, при котором они еще разрешаются глазом, составляет 1—2 угловых минуты. При наблюдении слабых звезд величина предельного угла увеличивается в несколько раз. Так, обладая нормальным зрением, можно заметить, что возле Мицара — средней звезды в ручке ковша Большой Медведицы — находится слабая звездочка Алькор*) (рис. 5). Установить же двойственность звезды ε Лиры (рис. 6) невооруженным глазом не удается. Угловое расстояние между Мицаром и Алькором составляет 11′48″, а между компонентами ε_1 и ε_2 Лиры — 3′28″. Применение телескопов значительно расширяет возможности обнаружения кратных звезд.

Угловые размеры дифракционных картин в целом небольшие; чтобы их увидеть, необходимо применять окуляры, дающие такие увеличения, при которых угловые размеры деталей обозреваемых картин были бы больше угла резрешения человеческого глаза.

Так, телескоп с идеальным объективом диаметром 6 *см* позволяет получить дифракционную картину с угловым размером радиуса центрального диска $\alpha = 14 : 6 = 2{,}3''$. Чтобы глаз мог видеть этот радиус под углом $3' = 180''$, необходимо применить окуляр, дающий увеличение $180'' : 2{,}3'' \approx 80$ раз. С повышением увеличения телескопа растут видимые угловые размеры дифракционных изображений звезд, но одновременно с этим уменьшаются яркости самих дифракционных картин, причем у слабых звезд настолько, что исчезают кольца — не хватает световой энергии для раздражения сетчатки глаза на увеличенной площади.

Опыт показывает, что для звезд одинакового блеска неразличимость наступает при угловом расстоянии между центрами компонентов двойной звезды, равном

$$\psi_0 = 0{,}85\alpha = \frac{12''}{D\,(см)}. \qquad (2)$$

Следовательно, угол ψ_0 характеризует разрешающую способность хорошего телескопа.

Когда фактическая разрешающая способность телескопа, определенная по двойным звездам, не достигает величины $\frac{1}{\psi_0}$, это может произойти

---

*) В переводе с арабского «Мицар» означает «Конь», «Алькор» — «Всадник».

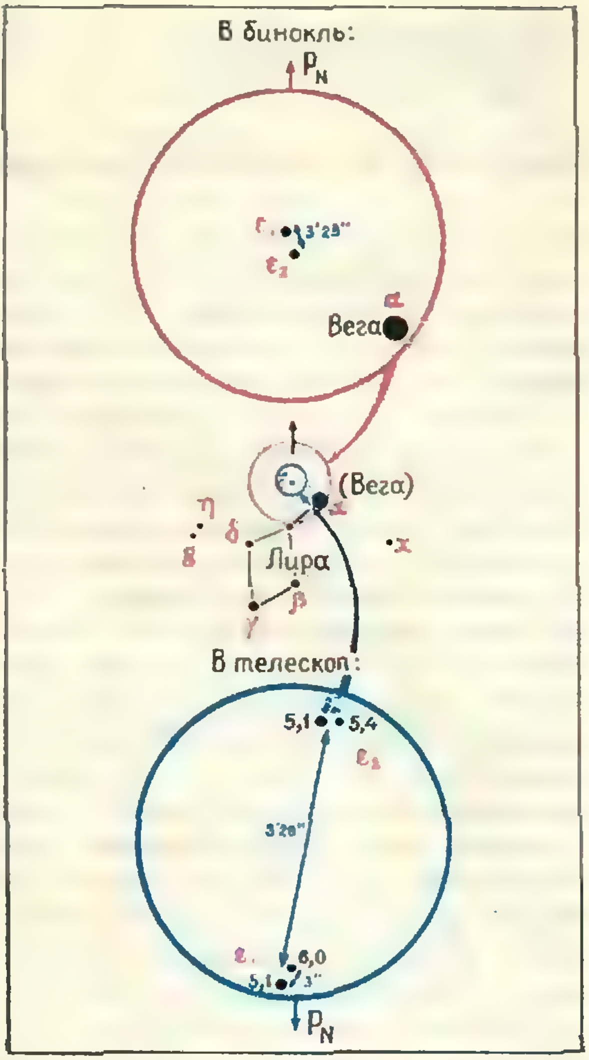


Рис. 6. ε_1 **и** ε_2 **Лиры при наблюдении невооруженным глазом, в бинокль и в телескоп.**

по двум причинам: от дефектов оптики и неспокойствия атмосферы.

В настоящее время конструкторам и инженерам обычно удается рассчитывать и создавать телескопы, оптика которых позволяет достичь границ разрешения согласно формуле (2), однако большие телескопы на практике не могут давать таких разрешений — мешает неспокойствие атмосферы. Состояние атмосферы считается хорошим, если с помощью большого телескопа удается достичь разрешения в 1''. И только в отдельные кратковременные промежутки при исключительно хорошем состоянии атмосферы разрешаются звездные пары с угловыми расстояниями между компонентами до 0,4''.

Если сравнить последние данные с теоретической разрешающей способностью шестиметрового телескопа (ψ_0 = 0,02''), то хорошо заметно, насколько атмосфера даже при хорошем состоянии портит изображения: без нее при рассматривании небесных светил, имеющих заметные угловые размеры, можно было бы различать в 20—50 раз более мелкие детали. Если при этом учесть, что истинные угловые размеры отдельных звезд больше угла разрешения 6-метрового телескопа (например, угловой диаметр Миры Кита — 0,056'', Бетельгейзе — — 0,047'', Антареса — 0,040''), то при отсутствии атмосферы можно было бы надеяться увидеть, наконец-то, диски самих звезд, пусть они были бы только в два-три раза больше дифракционных дисков. Но все-таки это были бы истинные диски звезд (хотя и с наложением дифракционной картины), а не только порождения волновой природы звездного света, проходящего через отверстие телескопа.

При отсутствии атмосферы становится возможным повысить проницающую силу телескопов и, кроме того, проводить с их помощью наблюдения в ультрафиолетовых и инфракрасных лучах. Поэтому астрономы мечтают о выносе телескопов за пределы земной атмосферы.

По современным представлениям будущие успехи астрономии во многом связаны с созданием астрономических обсерваторий на искусственных спутниках Земли и на лишенной атмосферы Луне.

Упражнения

1. Определите практически угловое увеличение телескопа следующими тремя способами: а) сравнивая угловые размеры объектов, наблюдаемых невооруженным глазом и в телескоп; б) установив отношение фокусных расстояний объектива и окуляра; в) определив отношение диаметра объектива и выходного диаметра зрачка.

2. Удается ли вам с находящимся в вашем распоряжении телескопом наблюдать кратность звезд, изображенных на рисунках 4 и 5?

Наблюдаете ли вы дифракционные картины звезд? Что вы можете сказать на основе этих наблюдений о качестве оптики используемого телескопа и о состоянии атмосферы?

О механике Аристотеля

М. И. Каганов, Л. Я. Любарский

Процесс познания природы не ограничивается спокойным накоплением фактов и формулировкой на их основе абсолютно точных утверждений — законов природы. По словам Альберта Эйнштейна, «идет драматическая борьба между старым и новым»*).

Не следует, однако, думать, что новые теории попросту отменяют (ниспровергают) старые. Как правило, новая теория указывает старой «ее место». Утверждения, ранее казавшиеся абсолютными, справедливыми всегда и везде, как показывает анализ с позиций новой теории, справедливы лишь в определенных рамках, ограниченных определенными условиями.

В области, где она справедлива, старая теория по-прежнему хороша. Иначе зачем ее было создавать?

Сравнивая механику Аристотеля с механикой Ньютона, мы покажем, в каких условиях механика Аристотеля — правильная теория. Этот пример поможет разобраться, как совершается переход от новой теории к старой.

Галилей и Аристотель

Одним из выдающихся образцов смелой научной критики и в то же время классическим примером «мысленного эксперимента» является рассуждение Галилея о падающем камне. Это рассуждение направлено против тезиса Аристотеля о пропорциональности силы и скорости и заключается в следующем.

Если взять два камня, один полегче, второй потяжелее, и сбросить их с башни, то согласно Аристотелю более тяжелый камень будет падать быстрее, чем легкий, так как на него действует большая сила. Что же, тут как будто ничего нелепого нет. Каждый из нас знает, что металлическая монета падает быстрей, чем пушинка.

Однако Галилей предлагает: соединим эти камни друг с другом. Что получится? Опять понятно. Более тяжелый камень будет ускорять более легкий, а тот в свою очередь будет тормозить своего компаньона. Так что соединенные вместе два камня будут падать несколько быстрее, чем падает свободный легкий камень, но медленней, чем падает тяжелый камень. Все это вытекает из тезиса Аристотеля и в то же время ... противоречит этому тезису. В самом деле, соединенные вместе два камня мы вправе рассматривать как один камень с весом, равным сумме весов легкого и тяжелого камней. Так как вес двойного камня больше веса тяжелого камня, то он (согласно Аристотелю) будет падать быстрее, чем тяжелый камень. Итак, следуя Аристотелю, мы пришли к двум взаимоисключающим выводам. Поэтому тезис Аристотеля неверен.

Думается, что живой Аристотель сумел бы возразить Галилею. Но Галилей боролся не против живого Аристотеля, а против мертвой окостеневшей догмы, в которую церковь превратила учение Аристотеля. И Галилею удалось победить эту догму.

Неправильные теории

«Всякое утверждение либо истинно, либо ложно». Это, конечно, верно. Однако это не лучший способ классификации утверждений. Поясним примером. Допустим, вы интересуетесь своим весом. Пусть весы показали 57 *кГ* 300 *Г*. Означает ли это, что ваш вес в точности равен

---

*) А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. IV, стр. 543, «Наука», 1967.

57 *кГ* 300 *Г* и ни одним миллиграммом больше? Вряд ли. Следовательно, утверждение «ваш вес равен 57 *кГ* 300 *Г*» является не истинным, а ложным. Точно так же являются ложными утверждения: «ваш вес равен 2 *кГ*» и «ваш вес равен 107 *кГ*». Поэтому, если вы признаете только одну классификацию утверждений (либо истина, либо ложь) и в соответствии с этим принимаете во внимание только истинные утверждения, а ложные игнорируете, то сойдя с весов, вы ровно ничего не узнаете о своем весе. Вообще, нужно сказать, что в соответствии с жесткой схемой «истина — ложь» почти вся поступающая к вам из внешнего (и внутреннего) мира информация будет вами отбраковываться, и вы практически ничего не будете знать о внешнем мире.

Вывод из этого таков: приближенно правильные утверждения играют в нашей жизни гораздо бóльшую роль, чем абсолютно истинные утверждения (последних слишком мало). Это относится и к наукам вообще, и к физическим теориям в частности. Именно поэтому, когда после работ А. Эйнштейна выяснилось, что механика Ньютона не абсолютно точна, а только приближенно правильна, ее полезная роль в жизни человечества и в науке возросла, так как стало понятно, когда ее можно и нужно применять. Приближенно правильные теории имеют преимущество по сравнению с абсолютно правильными: опыт не может доказать абсолютную правильность какой-либо теории. Ведь все измерения делаются лишь с некоторой степенью точности. Только с некоторой степенью точности можно установить экспериментально, что $F=ma$, что период колебаний математического маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ и т. п.}$$

Приближенная правильность теории доказывается опытом и притом окончательно.

Всякую теорию, которая при определенных условиях является приближенно правильной, называют правильной теорией. Правильной теорией является, в частности, механика Ньютона.

Мы покажем здесь, что механика Аристотеля — тоже правильная теория, и обсудим ее связи с механикой Ньютона.

Частица в вязкой жидкости

Начнем издалека. Рассмотрим с позиций механики Ньютона движение частицы в неподвижной вязкой среде в том случае, когда на частицу действует постоянная сила f. Для простоты ограничимся случаем, когда первоначальная скорость частицы параллельна силе f. Кроме силы f на частицу действует сила трения. Хотя мы говорим «частица», по сути дела, речь идет о макроскопическом теле. Термин «частица» применен, чтобы подчеркнуть: мы будем рассматривать только поступательное движение тела как целого. Макроскопическое тело в данном случае ведет себя как элементарная частица.

При малых скоростях сила трения, как известно, пропорциональна скорости:

$$F_{\text{тр}}=\alpha v.$$

Уравнение движения частицы будет иметь вид $Ma=f-F_{\text{тр}}=f-\alpha v$, где M — масса частицы, a — ее ускорение.

Скорость, при которой сила трения равна по величине силе f, играет особую роль. Это скорость равномерного движения частицы. Обозначим ее через v_0. Из равенства $f=\alpha v$ следует

$$v_0=\frac{f}{\alpha}.$$

При скоростях, меньших v_0, сила трения меньше силы f, и частица движется ускоренно.

Если сила f, действующая на тело, равна единице, скорость v_0 носит особое название — подвижность. Введем для нее специальную букву u. Ясно, что размерность u

$$\left[\frac{см}{с\cdot дин}\right]=\left[\frac{с}{г}\right].$$

Рассмотрим сначала случай, когда $f=0$, то есть единственной силой, действующей на частицу, является сила трения. Из повседневного опыта известно, что скорость такой частицы все время будет уменьшаться и в конце концов частица остановится. Первая часть этого утверждения вытекает и из механики Ньютона. В самом деле, поскольку сила (в данном случае сила трения) направлена против скорости, то в ту же сторону направлено и ускорение, а это и означает, что скорость частицы уменьшается.

Насколько быстро протекает этот процесс и сколько нужно ждать, пока частица остановится? Анализ движения частицы под воздействием силы трения приводит к парадоксальному (на первый взгляд) результату: частица вовсе не остановится. Правда, за время, равное $\frac{M}{\alpha}\ln 2$, ее скорость будет уменьшаться вдвое по сравнению с предыдущим значением.

Что значит «остановиться»?

В действительности никакого противоречия между теорией и опытом нет. Для опровержения теории экспериментом необходимо, чтобы расхождение между ними было меньше погрешности эксперимента. В данном случае это условие не выполняется, так как предсказываемая теорией скорость неограниченно убывает с течением времени и начиная с некоторого момента становится меньше погрешности эксперимента. Если состояние покоя фиксировать не визуально (на глаз), а пользоваться достаточно точными инструментами, то в случае микроскопического тела можно обнаружить хорошо известное броуновское движение. Это, действительно, будет опровержением теории, однако в таком опровержении нет ничего удивительного, так как с самого начала мы учитывали только среднее действие частиц окружающей среды — например, молекул газа. Естественно, что основанная на этом предположении картина не отражает случайных ударов отдельных молекул о частицу, которые все вместе (усредненные) являются, как мы знаем, причиной трения.

Следовательно, вопрос: «Сколько времени пройдет до остановки?» — поставлен неправильно. Его следует заменить вопросом: «Когда скорость частицы станет практически неотличимой от нуля?».

Понятие «практически неотличимая от нуля скорость» нуждается, разумеется, в дальнейшей расшифровке. В зависимости от цели, ради которой нужно остановить тело (например, катер у причала, с тем чтобы можно было набросить канат на кнехты), практически равная нулю скорость может составлять одну сотую, тысячную или, скажем, миллионную часть первоначальной скорости. Для определенности примем, что практически неотличимая от нуля скорость составляет одну тысячную долю первоначальной скорости. Мы уже говорили, что за время $\frac{M}{\alpha}\ln 2$ скорость частицы уменьшается вдвое. Назовем величину $\tau=\frac{M}{\alpha}\ln 2$ постоянной времени. (Эту величину называют временем свободного пробега, если речь идет не о макроскопическом теле, а об атомной частице... Ничего не поделаешь, часто одну и ту же величину в разных областях физики именуют по-разному.) По прошествии времени в 10τ скорость уменьшится более чем в $2^{10}=1024$ раза. Таким образом, время остановки равно удесятеренной постоянной времени. Если считать частицу остановившейся лишь тогда, когда ее первоначальная скорость уменьшится в миллион раз, то время остановки увеличится всего лишь вдвое, то есть станет равным 20τ.

Вернемся к основной задаче — к изучению движения тела в вязкой среде под действием постоянной силы f. В этом случае, как мы говорили, особую роль играет скорость v_0 тела, при которой сила трения уравновешивает силу $f\left(v_0 = \frac{1}{\alpha} f\right)$. Если $v > v_0$, частица тормозится, если меньше — ускоряется.

Анализ движения частицы в вязкой среде под действием постоянной силы f показывает, что через время, примерно равное 10τ, скорость частицы практически не будет отличаться от $v_0 = \frac{1}{\alpha} f$. (Если рассматривать движение частицы в системе координат, движущейся относительно среды со скоростью v_0, то это условие означает, что за время $\sim 10\tau$ частица останавливается).

Все движение удобно разделить на два этапа: первый (переходный режим, его длительность — несколько постоянных времени), во время которого скорость частицы увеличивается (в начальный момент частица покоилась), приближаясь к значению $v_0 = \frac{f}{\alpha}$; второй этап (установившийся режим) — скорость частицы практически равна $v_0 = \frac{f}{\alpha}$.

Механика Аристотеля как наука

Исследуя движение частицы с позиций механики Ньютона, мы пришли к подтверждению закона Аристотеля: скорость пропорциональна приложенной силе! Однако мы получили нечто большее, чем простое подтверждение закона Аристотеля. Мы увидели его приближенный характер: он не оправдывается в течение переходного режима. Длительность этого «неприятного» для сторонников механики Аристотеля режима определяется постоянной времени τ, равной $\frac{M}{\alpha} \ln 2$. Поэтому чем меньше постоянная времени, тем несущественней отклонения от закона Аристотеля. Можно сказать, что механика Аристотеля есть предельный случай механики Ньютона, когда постоянная времени стремится к нулю, или, иными словами, когда масса тела мала, а сила трения велика.

Что произойдет, если на частицу в вязкой среде будет действовать сила переменной величины? Мы уже говорили, что скорость частицы принимает соответствующее данной силе значение через время, примерно равное 10τ. Поэтому в каждый данный момент времени скорость частицы примерно равна $v(t) \approx \frac{1}{\alpha} f(t - 10\tau)$, то есть будет определяться значением силы в момент времени $(t - 10\tau)$. Отсюда вытекает второе условие, ограничивающее применимость механики Аристотеля: действующая на частицу сила, если она не постоянна, должна изменяться медленно, то есть ее изменения за время порядка 10τ должны быть достаточно малыми.

Соотношение наук

Мы видим, что механика Аристотеля обладает всеми свойствами правильной классической физической теории *); существует область явлений, где применима эта теория, и известны условия, ограничивающие ее применимость. Остановимся на этом вопросе более подробно. Каждая физическая теория оперирует своим набором физических понятий, каждая физическая теория объективно связана с определенными представлениями о пространстве и времени, о характере причинности, о полном описании состояния физической системы.

Одним из основных понятий механики Ньютона, несомненно, является понятие массы. Это понятие чуждо механике Аристотеля. Здесь основной характеристикой тела является его подвижность. Связанная с ней постоянная времени, по сути дела, уже вне механики Аристотеля: она характеризует условия неприменимости античной механики.

---

*) Прилагательное «классическая», если оно относится к физической теории, имеет тот же смысл, что и звучная приставка «экс» перед словом «чемпион»; оно означает, что уже существует более точная теория с более широкой областью применения, содержащая в себе «классическую» теорию.

Обратимся теперь к очень важному вопросу о соотношении классической теории и теории, ее обобщающей.

Все (и физики, и математики, и даже философы) сталкиваются с очень трудными задачами при изучении этого своеобразного вопроса. Естественно ожидать, что чем «проще» и привычней сравниваемые теории, тем легче усмотреть те связи, которые для них характерны. Поэтому заманчиво подробно рассмотреть самую простую пару теорий: механика Аристотеля — механика Ньютона.

Рассмотрим несколько фундаментальных физических понятий в рамках этих двух теорий.

Состояние системы

Понятие состояния системы не следует путать с описанием системы. Так, например, если мы скажем, что система состоит из двух шаров радиуса r и массы M, связанных друг с другом пружиной, естественная длина которой равна L, а жесткость — k, то из такого описания системы нельзя сделать вывод о положении и скорости каждого из шаров, о расстоянии между ними, об ускорении шаров, в общем, о всех тех величинах, которые меняются с течением времени. Подобные величины (будем их называть переменными параметрами) могут носить и гораздо более сложный характер. Так, если системой является атмосфера Земли, то к числу переменных параметров относится и температура как функция высоты и географических координат, и скорость ветра как функция от этих же переменных, и много других параметров.

Выберем некоторый набор x_i $(i=1, 2, \ldots)$ переменных параметров так, чтобы удовлетворить следующим двум условиям:

1. Любой набор значений параметров x_i может осуществиться, то есть систему можно привести в состояние, в котором каждый из параметров x_i принимает предписанное значение.

2. Зная в начальный момент $t=t_0$ значения всех параметров x_i, можно вычислить их значения в любой последующий момент времени.

Рассмотрим пример — электрон в постоянном электромагнитном поле. Для того чтобы описать эту систему в механиках Ньютона и Эйнштейна, нужно, помимо описания электромагнитного поля, указать массу и заряд электрона; в механике Аристотеля нужно задать его подвижность.

Попробуем задать состояние электрона, указав произвольно его координаты, скорость и ускорение. Сразу видно, что в рамках механики Ньютона совокупность этих величин не годится для задания состояния. В самом деле, положение и скорость электрона определяют силу, действующую на него со стороны электромагнитного поля. Согласно механике Ньютона сила определяет ускорение электрона. Поэтому ускорение нельзя задавать произвольно и его надо исключить из набора параметров, задающих состояние электрона. В механике Аристотеля из этого набора следует исключить и скорость, так как в рамках этой теории сила однозначно определяет скорость. Можно доказать математически, что, зная положение и скорость электрона в начальный момент времени, можно вычислить эти же величины в любой последующий момент времени, опираясь на второй закон Ньютона. Точно так же закон Аристотеля позволяет найти координаты точки в любой момент времени, если они известны в начальный момент.

Итак, в механике Ньютона состояние системы задается указанием положения всех точек системы и их скоростей.

В механике Аристотеля состояние системы известно, если известны положения всех ее точек.

Описание системы состоит из двух частей: описание внешних условий, в которых находится система, и собственно описания системы. Первая часть осуществляется путем задания сил, действующих на систему со стороны «внешнего мира». Здесь отличие механики Аристотеля от механики Ньютона состоит в том, что в последней учитываются силы трения, а в первой они не замечаются. Вторая часть описания системы состоит в задании сил, с которыми отдельные части системы взаимодействуют друг с другом, и в задании масс (в механике Ньютона) или подвижностей (в механике Аристотеля) каждой отдельной части системы.

Подытожим сказанное: каждое из двух понятий — описание системы и состояние системы — имеет различный смысл в механике Аристотеля и в механике Ньютона. Заметим, что при переходе к квантовой механике оба эти понятия испытывают очередное и очень серьезное изменение.

Законы сохранения

Хорошо известно, что в механике Ньютона имеют место законы сохранения. Проще всего они формулируются для замкнутой системы. Так называется система тел, которые взаимодействуют друг с другом и не взаимодействуют ни с какими другими телами. Строго говоря, замкнутых систем в природе не существует. Гравитационное и электромагнитное поля, потоки космических частиц не позволяют «замкнуться в себе» какой-либо системе тел. Существуют, однако, почти замкнутые системы. Силы, действующие на входящие в них тела со стороны посторонних тел, очень малы, и такие системы ведут себя почти неотличимо от замкнутых систем. Поэтому представляется важным познакомиться с основными свойствами замкнутых систем.

Оказывается, что семь величин: энергия системы, три компоненты ее импульса и три компоненты ее момента количества движения — не изменяются с течением времени («сохраняются»), если система замкнута.

Легко найти закон сохранения и в механике Аристотеля. Рассмотрим для этого какую-либо «замкнутую» систему тел. Слово замкнутая заключено в кавычки, так как с точки зрения механики Ньютона ни одна система тел в механике Аристотеля не является замкнутой — каждое тело взаимодействует со средой, ответственной за силу трения.

Пусть $r_1(t)$, $r_2(t)$,..., $r_n(t)$ — радиусы-векторы тел, образующих «замкнутую» систему. Построим вектор

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i \frac{1}{\alpha_i}\mathbf{r}_i(t)}{\sum_i \frac{1}{\alpha_i}}$$

и назовем его главным вектором системы. Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующие утверждения: 1) главный вектор «замкнутой» системы сохраняется — не изменяется со временем; 2) если на тела действуют внешние силы, то конец главного вектора системы (теперь уже незамкнутой) движется как тело с подвижностью

$$\alpha = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\alpha_i}}$$

под действием суммы внешних сил, приложенных к системе. Это утверждение нетрудно доказать, пользуясь «Законом Аристотеля» и определением главного вектора системы.

Наблюдая за дождевой каплей

Как определить экспериментально постоянную времени? Первое, что приходит в голову,— это измерить продолжительность переходного режима. Во многих случаях этот совет очень плох. Представьте себе, что нам нужно измерить постоянную времени дождевых капель. Для наблюдения переходного режима пришлось бы поднять наблюдателя на высоту дождевых туч и снабдить его тонкой аппаратурой, улавливающей момент образования дождевой капли и способной не потерять ее из виду, пока она не станет падать равномерно.

Гораздо проще измерить скорость капли вблизи поверхности Земли v_0.

$$v_0 = \frac{f}{\alpha} = \frac{Mg}{\alpha} = \frac{g}{\tau},$$

а отсюда найдем постоянную времени $\tau = \frac{g}{v_0}$.

Вы, конечно, обратили внимание: для силы мы воспользовались выражением для силы тяжести; кроме того, мы предположили, что вблизи Земли движение уже установившееся. Это предположение надлежит проверить. Очень простой способ узнать скорость дождевых капель состоит в наблюдении следов этих капель, оставляемых на окнах движущегося трамвая. Если скорость трамвая, скажем, равна $V = 20$ *км/ч*, а следы капель на стекле составляют с вертикалью угол 30°, то скорость капель равна

$$v_0 = \frac{V}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 20 \text{ км/ч} \approx 9{,}4 \text{ м/с}.$$

Отсюда следует, что постоянная времени примерно равна одной секунде. Путь, пройденный каплей в течение переходного режима, длительность которого можно принять равной 5—10 *с*, не превышает поэтому 50—100 *м* (мы учли, что скорость капли в переходном режиме не больше установившейся скорости). То, что длина пути в переходном режиме оказалась столь малой, подтверждает наше предположение: капля движется вблизи Земли с установившейся скоростью. Но к этому выводу можно прийти и без вычислений, наблюдая за дождем из открытого окна трамвая или, еще проще, за косым дождем.

РАДИОАКТИВНЫЕ ЧАСЫ ПОКАЗЫВАЮТ НЕВЕРНОЕ ВРЕМЯ

В статье В. И. Кузнецова «Радиоактивная память» (см. «Квант» № 2, 1972) было рассказано о методе определения возраста по концентрации радиоактивного углерода ^{14}C в исследуемых объектах. Произведенные недавно сравнения возраста деревьев, определенного по концентрации ^{14}C и путем счета годичных колец на срезах, показали хорошее согласие результатов, пока речь шла о временах не ранее чем 1000 лет до нашей эры. Но дальше возраст, определенный по ^{14}C, оказался меньше действительного, как это видно из таблицы.

Датировка по ^{14}C	Датировка по кольцам на срезах деревьев
до нашей эры	
1000 лет	1000 лет
1200	1500
1500	2000
2000	2500
2200	3000
2800	3500
3000	4000
4000	5000

Причины этого расхождения не ясны. По-видимому, интенсивность космических лучей в древние времена была больше. Это могло быть следствием изменения магнитного поля Земли, пропускавшего больше частиц из космоса. А быть может, это связано с изменением солнечной активности. Такие условия в околоземном пространстве могли привести к увеличению содержания изотопа ^{14}C в атмосфере, а, следовательно, и в растениях. Как бы то ни было, для тех времен радиоактивные часы показывают неверное время.

«ЧАСТИЦЫ ИЗ СОЛНЕЧНЫХ НЕДР»

В № 6 «Кванта» за 1972 год была напечатана заметка «Частицы из солнечных недр». К сожалению, новые эксперименты не подтвердили прежних результатов Поэтому вопрос о том, сколько солнечных нейтрино приходит на Землю, снова остается открытым

Кстати, заметим, что в упомянутой заметке слово «антинейтрино» и символ «$\tilde{\nu}$» надо заменить словом «нейтрино» и символом «ν»

КОНКУРС ЭДИСОНА

Б. И. Алейников,
М. С. Дубсон

— Никак не могу найти себе помощника,— пожаловался однажды Эдисон Эйнштейну.— Каждый день заходят молодые люди, но ни один не подходит.

— А как вы определяете их пригодность? — поинтересовался Эйнштейн.

Эдисон показал ему листок с вопросами:

— Кто на них ответит, тот и станет моим помощником.

«Сколько миль от Нью-Йорка до Чикаго?» — прочел Эйнштейн и ответил: «Нужно заглянуть в железнодорожный справочник».

«Из чего делают нержавеющую сталь?»— «Об этом можно узнать в справочнике по металловедению...»

Пробежав глазами остальные вопросы, Эйнштейн заключил: «Не дожидаясь отказа, снимаю свою кандидатуру».

Потеря столь ценного помощника не охладила, впрочем, намерений знаменитого американского изобретателя. С его именем связано первое в США крупное соревнование школьников — своеобразная всеамериканская олимпиада по естественным наукам. В 1929 году Эдисон решил поощрить крупной стипендией наиболее сметливого и знающего школьника своей страны. Специальные комиссии, возглавляемые губернаторами штатов, выбрали по одному юноше — победителю в своем штате. (Способности американских девушек к точным наукам в то время, по-видимому, котировались не очень высоко.)

Перед жюри, учрежденным Эдисоном, предстали 49 человек, которые должны были в письменном виде ответить на 57 вопросов. В это число входило по шесть вопросов из математики, физики и химии, а также 39 вопросов для выяснения «общего развития» испытуемых.

Эдисон так определил задачи конкурса:

— Цель соревнования — выбрать из лучших самого лучшего. Я отдаю себе отчет в том, что только будущее сможет показать, правилен ли наш выбор, так как многосторонность человеческой природы слишком велика, чтобы измеряться подобным масштабом. Жизнь и человеческие отношения чересчур разнообразны, чтобы быть сведены к одной формуле...

Эдисон явно предпочитал формальному образованию и знаниям эмпирические знания и здравый смысл, которые так необходимы для изобретательского труда. Это нашло свое отражение и при составлении вопросов конкурса. Попробуйте ответить на такие, например, вопросы:

В чем разница между шумом и музыкальными звуками?

Если церковный орган не снабжен подогревательным устройством, то он не будет играть, когда в церкви холодно. Почему?

Вот один из вопросов по химии:

Какие факты связываете вы в своем сознании с именами следующих ученых (отвечайте одним-двумя словами): Менделеев, Дэви, Фарадей, Кюри, Пристли, Гей-Люссак, Дальтон, Сольвей, Рамзей, Лавуазье?

Большинство же задач по физике и химии представляли собой обычные вопросы учебного характера. Например:

Дайте определение работы, энергии, силы; поясните каждое определение примером. Какая разница между *весом и массой? Какая разница между силой и энергией? Где тело весит больше: на Луне или на Земле? Почему? Где тела вовсе не имеют веса?*

Разве что закоренелого троечника в наше время могут затруднить и математические «задачи» конкурса Эдисона:

Упростить выражение

$$\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}}\left[(\sqrt{x+1}+1)\cdot\frac{1}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\sqrt{x+1})\cdot\frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}\right]$$

Решить систему

$$\begin{cases} x^2y^2=8, \\ xy=4. \end{cases}$$

Принимая, что мышиная колония каждые три месяца удваивает свою численность, найдите численность колонии, происшедшей от одной пары мышей после трех лет размножения.

Ускорение силы тяжести вне земного шара изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. Близ земной поверхности ускорение силы тяжести равно 32 футам. Как велико оно на высоте 50 миль над земной поверхностью? Радиус Земли равен 4000 миль.

Найти член разложения

$$\left(\sqrt{x}-2x\right)^{18},$$

содержащий x^{11}.

Равносторонний треугольник со стороною в 6 единиц разделен на три равновеликие части прямыми, параллельными его основанию. В каких точках эти прямые пересекают высоту треугольника?

Достаточно своеобразными (и не чрезмерно суровыми) были представления замечательного изобретателя об «общем развитии»:

Что сделаете вы, если в будущем году получите наследство в миллион долларов?

Чем предпочли бы вы пожертвовать ради достижения успеха: счастьем, комфортом, славой, гордостью, честью, здоровьем, деньгами или любовью?

Опишите, как вы представляете себе свой типичный день в возрасте 50 лет.

Когда, по вашему мнению, ложь позволительна?

Назовите четыре качества, которые вы считаете самыми необходимыми для достижения успеха на каком-либо поприще.

Назовите трех человек, которых вы считаете наиболее достойными уважения и изумления. Какие их качества вас более всего изумляют?

Если вы в конце жизни оглянетесь на пройденный путь, то по каким фактам вы будете судить о том, успешно ли прожита жизнь или нет?

Или вовсе:

Что такое мамонт?

Кто написал «Остров сокровищ»?

Что такое турникет?

При скольких градусах Цельсия кипит вода?

Что такое метеор?

Что сделал Джеймс Уатт?...

Победителем конкурса Эдисона оказался 16-летний Уилбур Хэстон из Детройта; 92% его ответов жюри сочло наилучшими. Он был удостоен Эдисоновской стипендии в Массачусетском технологическом институте — лучшем американском физико-техническом учебном заведении. Три участника, занявшие последующие места, стали получать стипендию Эдисона в других колледжах. Никто из них, однако, не оправдал надежд, которые на них возлагались и в истории американской науки и техники имена их не значатся. Как видно, критерии Эдисона оказались малопригодными не только для Альберта Эйнштейна. Хорошо еще, что самому Эдисону пришлось в свое время проходить совсем иной путь ...

КАЛЕЙДОСКОПЫ

А. Н. Виленкин

Наверное, в детстве каждый из вас разобрал хотя бы один калейдоскоп, и вы знаете, как он устроен. Все же напомним, что когда вы его разобрали, из него высыпались кусочки цветного стекла, а внутри остались три полоски из зеркала (или стекла), расположенные под углом 60° друг к другу, так что в сечении образуется правильный треугольник.

Почему калейдоскоп устроен именно так и как еще его можно сделать, мы и расскажем в этой статье. Задачи, помещенные в тексте (их результаты используются в рассуждениях), позволят вам не просто пассивно читать статью, но и самостоятельно «приложить руки» к построению теории. Впрочем, все задачи в статье начинаются словами «Докажите, что...», поэтому при первом чтении их можно заменить словами «Доказано, что...», а потом вернуться и взяться за доказательство. В конце номера есть указания ко всем задачам.

Устройство калейдоскопа

Для того, чтобы сделать калейдоскоп, вам потребуется несколько полосок стекла (лучше брать именно стеклянные полоски, а не зеркальные, потом мы объясним, почему), лист плотной бумаги, немного клея и две небольшие картонки. Калейдоскопы, которые продаются в магазинах, сделаны так, что у них невозможно изменить, скажем, угол между зеркалами. Мы сделаем несколько кустарный калейдоскоп, зато приспособленный для экспериментов.

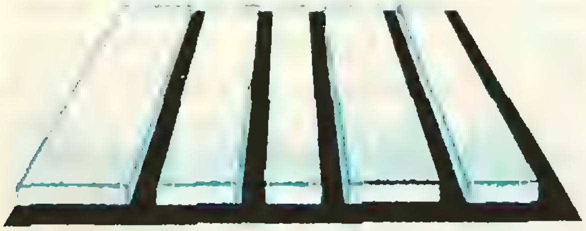


Рис. 1. Развертка калейдоскопа.

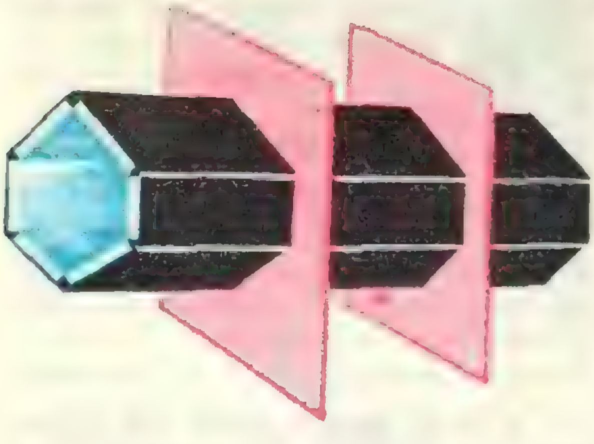


Рис. 2. Самодельный калейдоскоп.

Приклейте стеклянные полоски к листу бумаги, оставив между полосками небольшие промежутки (чтобы можно было согнуть лист в призму). Хорошо, если лист будет непрозрачным — не будет попадать лишний свет.

У вас получилась развертка призмы (рис. 1). Сверните из нее призму, а чтобы она не развернулась, вырежьте в картонках дырки по форме перпендикулярного сечения призмы и оденьте картонки на призму (рис. 2); меняя картонки, мы тем самым меняем форму призмы. Калейдоскоп готов! Теперь приставьте к одному концу калейдоскопа какую-нибудь фигурку (обычно в калейдоскопах на этом месте пересыпаются кусочки цветного стекла) и посмотрите в другой конец. Вы увидите картинку, похожую на рисунок на первой странице обложки. Как же возникает такая картинка?

Ход лучей в калейдоскопе

Прямо перед собой вы увидите ту фигурку, которую поместили у другого калейдоскопа. Рядом вы увидите ее еще раз, только зеркально отраженную. Это и понятно, ведь рядом с нею зеркало — вот и появилось зеркальное отражение. Роль зеркала играет стеклянная полоска.

Кстати, рисунок 3 объясняет, чем плоха зеркальная полоска. Она имеет две отражающие поверхности: переднюю, отполированную, и заднюю, покрытую амальгамой. Чтобы убедиться в этом, приставьте к зеркалу остро отточенный карандаш. Вы увидите два или даже три отражения. Дело в том, что луч, падающий на стекло, раздваивается. Одна его часть отражается от передней поверхности и дает первый отраженный луч, а вторая входит в стекло. Эта часть отражается в задней поверхности (почти полностью в случае зеркала и незначительно в случае стекла) и идет к передней поверхности. Через нее часть луча выходит и дает второй отраженный луч, а другая часть снова отражается (внутри зеркала) и начинает новое путешествие, кончающееся появлением третьего отраженного луча. Эти лучи ослабляются по мере увеличения их номера, так что третий отраженный луч уже незаметен.

Если в калейдоскоп поставить зеркало, то появится второй отраженный луч, который вызовет такие искажения, что ничего нельзя будет разобрать, особенно при многократных отражениях в зеркалах. Ведь первый и второй лучи смещены относительно друг друга и дают сдвинутые изображения. При отражении в стекле второго луча не появляется — он поглощается задней поверхностью. Больше всего нам подошло бы зеркало с передней отражающей поверхностью — такие зеркала стоят в телескопах-рефлекторах.

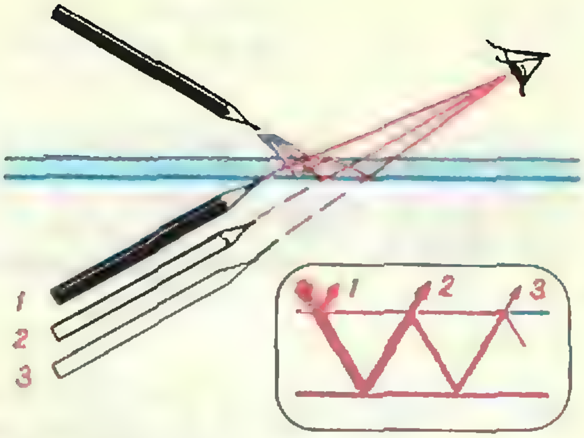


Рис. 3. При отражении в обыкновенном зеркале видны три карандаша.

Напомним, что отражение луча от зеркала происходит по закону «угол падения равен углу отражения», а именно, отраженный луч, падающий луч и перпендикуляр к плоскости зеркала в точке падения лежат в одной плоскости (рис. 4), причем $\angle\alpha = \angle\beta$.

Попробуем найти способ строить изображения, которые должны получаться в калейдоскопе. Предположим, что перед калейдоскопом находится плоская картинка (объемные изображения мы для простоты исключим),

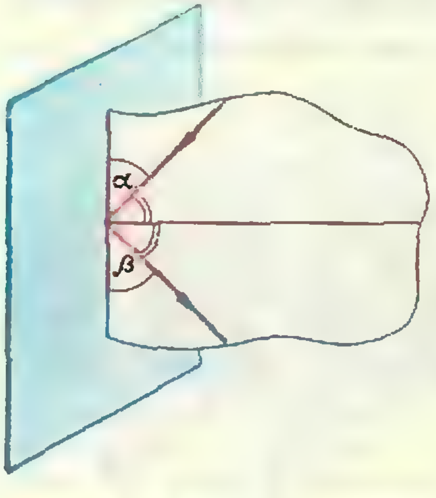


Рис. 4. «Угол падения равен углу отражения».

причем плоскость этой картинки является перпендикулярным сечением призмы; назовем ее *картинной плоскостью*.

Призма высекает в картинной плоскости выпуклый многоугольник; он будет играть основную роль во всех дальнейших рассуждениях — назовем его *фундаментальным многоугольником*. Итак, есть картинная плоскость K и в ней фундаментальный многоугольник M; как геометрически описать отражения в гранях призмы?

Начнем с однократного отражения. Если мы смотрим в калейдоскоп из точки T (рис. 5а), причем луч, вышедший из точки A, в точке O отразился от зеркала π и затем попал к нам в глаз, то нам кажется, что точка A расположена за зеркалом на продолжении прямой TO, и если обозначить через A_1 это изображение точки A, то $OA_1=OA$, потому что наш глаз умеет оценивать расстояние до объекта. Простое геометрическое рассуждение показывает, что точка A_1 лежит в той же картинной плоскости K и получается как геометрическое отражение точки A в ребре R; проведите это рассуждение самостоятельно.

Задача 1. *Возьмем точку A_1, получающуюся как геометрическое отражение точки A в ребре R (см. рис. 5а), $AP\perp R$, $AP=PA_1$. Докажите, что точка A_1 удовлетворяет физическому понятию «отражение точки A в зеркале π». Это означает следующее. Для любой точки наблюдения T проведем прямую TA_1. Пусть она пересечет плоскость π в точке O. Соединим точки O и A. Надо доказать, что: а) $\angle TOS=\angle POA$ (угол падения равен углу отражения); б) $OA=OA_1$ (точка A_1 находится на том же расстоянии от T, что и A «с учетом зеркала»).*

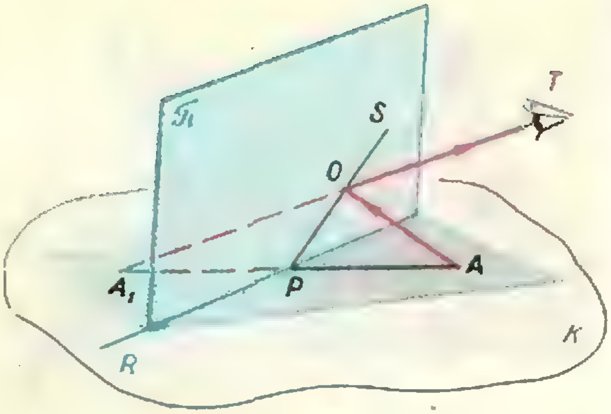


Рис. 5а. Построение отражения в зеркале. A_1 — изображение точки А.

Утверждение задачи 1 справедливо для любой точки фундаментального многоугольника, поэтому при однократном отражении в зеркале изображение M' всего фундаментального многоугольника M лежит в картинной плоскости K и получается отражением фундаментального многоугольника M в ребре R; по построению изображение в любой точке не зависит от точки наблюдения T.

Теперь рассмотрим двукратное отражение в зеркале как два однократных. Для этого «спустимся» в картинную плоскость, то есть возьмем проекции точки T и луча AOT на картинную плоскость (рис. 5б). Нетрудно доказать, что для проекций будут выполнены все законы отражения в зеркале ($OA=OA_1$, $\angle TOS=\angle POA$). Дальше мы будем иметь дело только с проекциями, поэтому обозначим проекцию точки T также буквой T.

На рисунке 6 луч, вышедший из точки A, сначала отразился в зеркале R_1 (так мы обозначим и это зеркало, и соответствующее ему ребро

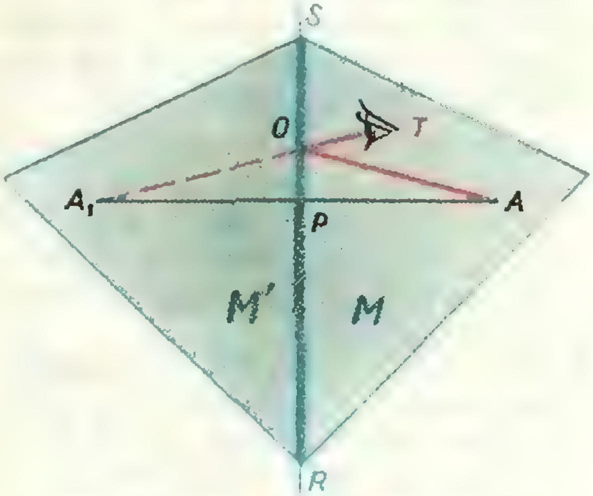


Рис. 5б. Проекция рисунка 5а на картинную плоскость.

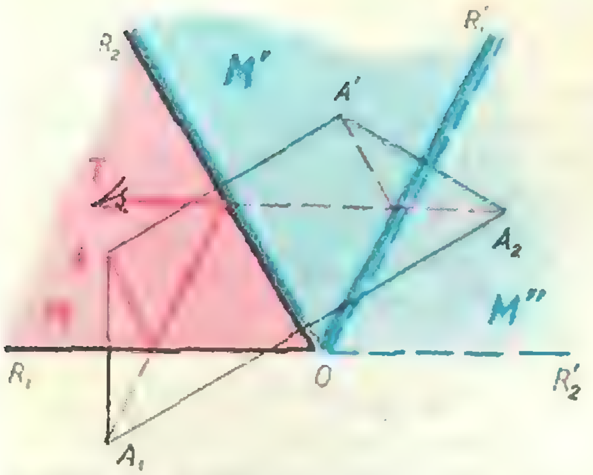


Рис. 6. Геометрия двукратного отражения в зеркале (проекция на картинную плоскость).

фундаментального многоугольника), затем отразился в зеркале R_2 и лишь после этого попал в точку T — к нам в глаз. Нам кажется, что луч исходит из точки A_2 — изображения точки A. Точка A_2 получается так. Раз луч сначала отразился в ребре R_1, отразим точку A в ребре R_1, получится точка A_1 (рис. 6). Затем луч, идущий теперь как бы из точки A_1, отразился в ребре R_2 — отразим и точку A_1 в ребре R_2, получится точка A_2 — изображение точки A при отражениях в ребрах R_1 и R_2.

Но можно рассуждать и по-другому. За ребром R_2 мы видим изображение фундаментального многоугольника — многоугольник M', в котором есть точка A' — изображение точки A в ребре R_2. У M' есть ребро R_1' — изображение зеркала (ребра) R_1 в зеркале R_2. И вот оказывается, что это изображение R_1' зеркала R_1 можно считать настоящим зеркалом и, отразив точку A' в R_1', получить то же самое изображение A_2. Чтобы убедиться в этом, заметьте, что рисунок 6 симметричен относительно R_2.

Итак, многоугольник M' оказался равноправным с фундаментальным многоугольником M, а ребро R_1' — полноправным зеркалом. Отразив M' в ребре R_1', мы получим многоугольник M'', соответствующий отражению в зеркалах R_1 и R_2. Нетрудно понять, что мы можем делать отражения и в ребрах многоугольника M'' и таким образом получать последующие изображения фундаментального многоугольника M.

Теперь мы можем забыть не только о пространстве, но и о зеркалах и описать изображение в картинной плоскости чисто геометрически.

Геометрия картинной плоскости

Имеется (фундаментальный) многоугольник M с ребрами R_1, R_2,... Внутри многоугольника помещена картинка (многоугольник мы рассматриваем как плоскую фигуру). В ребрах R_k производятся отражения многоугольника M (рис. 7), при этом получаются многоугольники с ребрами R_1', R_2', ... В этих ребрах также производятся отражения, получаются новые многоугольники. Продвигаясь таким образом, мы замощаем всю картинную плоскость.

Отметим одно обстоятельство. «Гуляя» по плоскости, мы можем попасть на место, в котором уже один раз побывали. На нем уже есть изображение, скажем, точки A фундаментального многоугольника, а теперь

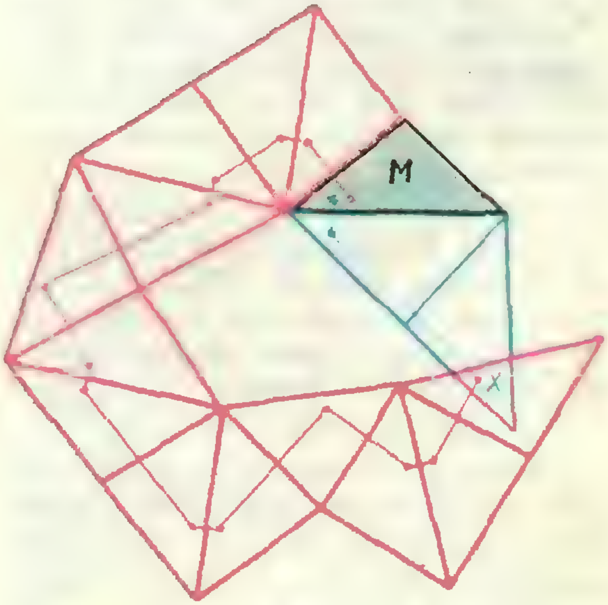


Рис. 7. Так заполняется картинная плоскость. Что видно в точке X!

мы доставили туда же изображение, возможно, другой точки B фундаментального многоугольника.

Например, на рисунке 7 черным цветом изображен фундаментальный многоугольник, красным — одна последовательность отражений, синим — другая. В точке X они перекрываются. Возникает вопрос: *должны ли мы видеть в точке X два изображения или одно, и если одно, то какое именно?*

Сначала разберем такой вопрос: *из каких точек пространства (внутри калейдоскопа!) мы можем увидеть изображение A_1 точки A* (рис. 8)? Ответ ясен: необходимо, чтобы луч, идущий из точки A к нам в глаз, мог отразиться в выбранном зеркале, то есть луч, идущий «из точки A_1 к нам в глаз», должен пересекать ребро многоугольника, соответствующее выбранному зеркалу. Поэтому из одних точек пространства внутри калейдоскопа изображение A_1 видно, а из других — нет. Но точка A_1 — это точка картинной плоскости, что же видно в ней из других положений? Очевидно, изображение некоторой точки фундаментального многоугольника, но отраженное в другом зеркале.

Возьмем, например, два зеркала, поставленные под углом 150°. Рассмотрим их проекции на картинную плоскость (рис. 9). Из положения T_1 в точке X мы видим изображение точки A (отраженной в ребре R_1). Но из положения T_2 в той же точке X мы видим изображение точки B (отраженной в ребре R_2), потому что прямая, соединяющая точки T_2 и X, пересекает ребро R_2.

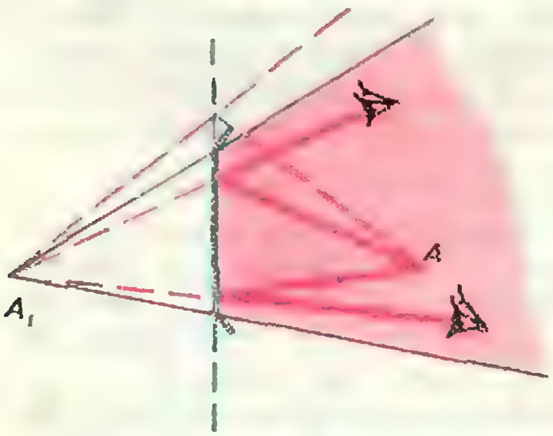


Рис. 8. Зона видимости изображения A_1.

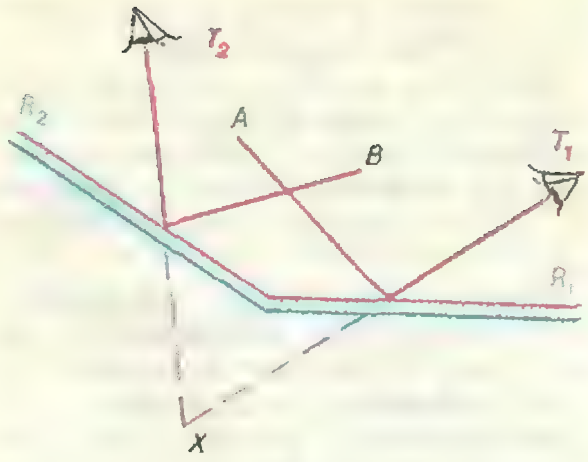


Рис. 9. Из разных положений в точке X видны изображения разных точек: из положения T_1 — изображение точки A, из положения T_2 — изображение точки B.

Ясно, что для многократных отражений тоже надо соединить прямой линией точку наблюдения T_2 с точкой X, в которую мы смотрим, и взять ту последовательность отражений фундаментального многоугольника, которая покрывает отрезок TX. Точка A фундаментального многоугольника, которая окажется в X, и будет в ней изображена, а отражения надо делать в тех ребрах, которые пересекает прямая TX. Для другой точки наблюдения может получиться другая последовательность отражений и другое изображение.

К чему это может привести? Вот к чему. Если учесть, что мы смотрим в калейдоскоп не из одной точки, а из целой области (зрачок глаза, объектив фотоаппарата), то мы можем увидеть в одной точке изображения двух разных точек фундаментального многоугольника. На рисунке 10а приведена фотография изображения в калейдоскопе. Объектив открыт полностью, и в некоторых точках видны перекрывающиеся изображения. Но если объектив диафрагмировать (уменьшить почти до «точки» отверстие для света), то в каждой точке останется лишь одно изображение (рис. 10б). В этом случае мы «смотрим» как бы из одной точки.

Итак, мы почти исследовали, как получается изображение в картинной плоскости, только оказалось, что оно еще зависит от точки, из которой мы на него смотрим. Поэтому сделаем так.

Назовем калейдоскоп «физически правильным», если изображение в его картинной плоскости не зависит от точки наблюдения, и «математически правильным», если для любой точки X картинной плоскости разные последовательности геометрических отражений, приводящие в точку X, дают в ней изображение одной и той же точки фундаментального многоугольника.

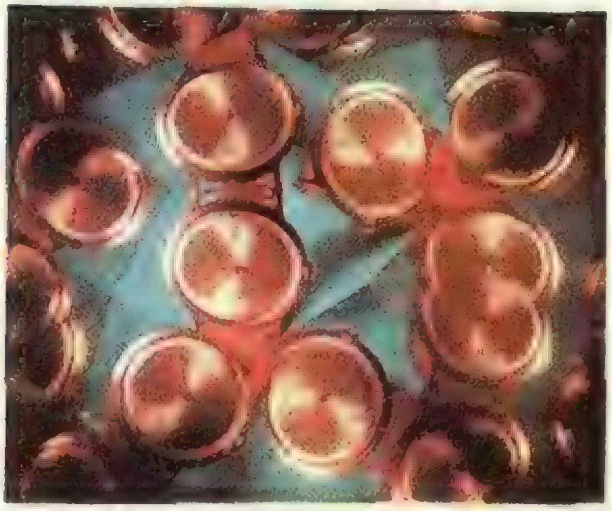


Рис. 10а. Объектив открыт полностью. В некоторых местах изображения перекрываются.

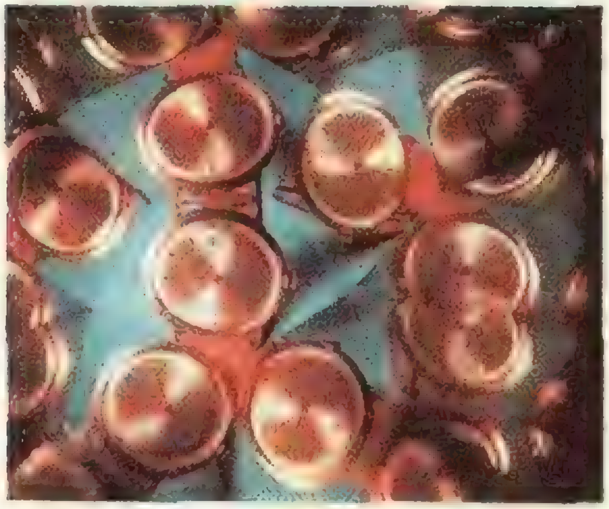


Рис. 10б. Объектив диафрагмирован, перекрытия исчезли.

Отметим разницу между математическим и физическим понятием правильности калейдоскопа. Геометрически мы можем доставлять изображения в точку X любой последовательностью отражений. Но далеко не каждое изображение можно будет увидеть хотя бы из одной точки внутри калейдоскопа. Один из примеров мы привели на рисунке 7 — изображение, доставленное по синему пути, в точке X видно, а по красному пути — нет. Вот еще один пример.

Задача 2. *Докажите, что в калейдоскопе, перпендикулярное сечение которого представляет собой равносторонний треугольник со сторонами R_1, R_2, R_3, невозможна такая последовательность отражений светового луча: R_1, R_2, R_1, R_3, R_2, R_3.*

Может ли получиться так, что математически калейдоскоп неправилен, то есть существует точка X и две последовательности отражений, дающие в X разные изображения, но одно из этих изображений видно из любой точки, а второе (или все остальные) никогда не видно, то есть физически калейдоскоп будет правильным?

Оказывается, это не так. Совершенно ясно, что если геометрически (отражениями) в точку X по разным путям приходит одно и то же изображение, то оно и будет видно из любой точки. Но вместе с тем, если из любой точки наблюдения T в точке X видно одно и то же изображение, то и геометрически в точке X получается ровно одно изображение. Доказательством последнего утверждения и нахождением всех правильных калейдоскопов мы сейчас и займемся.

Правильные калейдоскопы

Сначала рассмотрим самые простые калейдоскопы. Правда, их сечения являются «бесконечными» (неограниченными) многоугольниками, но это не должно вас смущать.

Бесконечное плоское зеркало является математически правильным калейдоскопом (в картинной плоскости имеется ровно одна «отражающая» прямая) — это следует из задачи 1.

Пусть теперь два зеркала R_1 и R_2 образуют между собой угол α. Напомним, что ребра многоугольника, получающегося в перпендикулярном сечении этого двугранного угла, мы обозначаем теми же буквами R_1 и R_2.

Задача 3. *Докажите, что отражение сначала в ребре R_1, а затем в ребре R_2 (как на рисунке 6) эквивалентно повороту вокруг точки O на угол 2α в направлении от ребра R_1 к ребру R_2.*

Иными словами, вместо того, чтобы два раза отражать картинку относительно прямых, можно просто повернуть ее вокруг точки O на угол 2α.

Задача 4. *Докажите, что два зеркала, поставленные под углом 120°, не образуют математически правильного калейдоскопа.*

Задача 5. *Докажите, что два зеркала, поставленные под углом α друг к другу, образуют математически правильный калейдоскоп только при $\alpha=\frac{180^\circ}{n}$, где n — натуральное число.*

Задача 6. *Докажите, что если калейдоскоп математически правилен, то углы при вершинах его фундаментального многоугольника имеют вид $\frac{180^\circ}{n}$ (n — соответствующее натуральное число, для разных вершин эти n могут быть различными).*

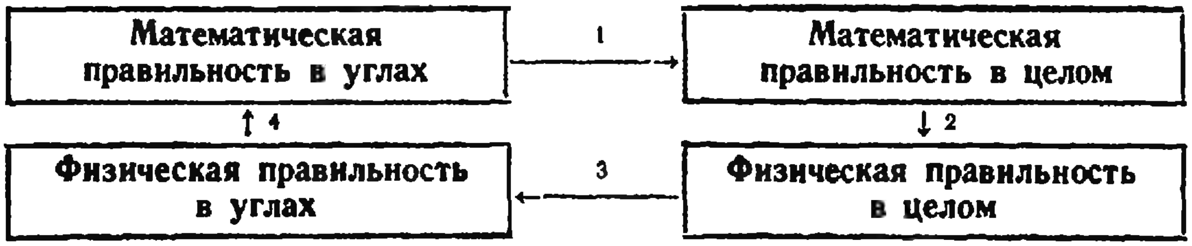
Различие между задачами 5 и 6 невелико: в задаче 5 зеркала неограниченны, а в задаче 6 они имеют конечные размеры. Решаются обе задачи почти одинаково. Зато задача 6 дает необходимое условие математической правильности калейдоскопа: углы при вершинах его фундаментального многоугольника должны иметь указанный вид.

Раз у нас есть хотя бы одно условие, которому должен удовлетворять каждый математически правильный калейдоскоп, можно попробовать найти все калейдоскопы, удовлетворяющие этому условию. Во всяком случае, среди них будут все искомые калейдоскопы, что значительно сузит область наших поисков.

Задача 7. *Найдите все калейдоскопы, удовлетворяющие необходимому условию правильности (задача 6). Это означает следующее: надо найти, при каком числе сторон фундаментального многоугольника и каких углах при его вершинах все эти углы имеют вид $\frac{180^\circ}{n}$. Проверьте, что все получающиеся калейдоскопы математически правильны, то есть что необходимое условие математической правильности калейдоскопа, сформулированное в задаче 6, является и достаточным.*

Теперь мы вернемся к эквивалентности физической и математической правильности калейдоскопа. Назовем калейдоскоп *правильным в углах*, если каждые его два зеркала (мы считаем их бесконечными), образующие угол, являются правильным калейдоскопом. Доказательство эквивалентности будем вести по следующей схеме, на которой стрелки означают, что из одного утверждения следует другое.

Схема доказательства


Математическая правильность в углах
1
Математическая правильность в целом
4
2
Физическая правильность в углах
3
Физическая правильность в целом

Из этой диаграммы следует, что любая из правильностей калейдоскопа влечет за собой все остальные. Значит, найдя все калейдоскопы, правильные математически в углах, мы тем самым нашли все правильные (с любой точки зрения) калейдоскопы.

Докажем справедливость диаграммы.

Переход 1. Он был представлен вам в виде задачи 7.

Переход 2. Его очевидность уже обсуждалась выше.

Переход 3. Он почти очевиден. Надо лишь учесть, что фундаментальный многоугольник для двух зеркал неограничен, а для исходного калейдоскопа он мог быть ограничен. Будем вести доказательство от противного. Пусть калейдоскоп неправилен физически хотя бы в одном угле, то есть найдутся точки T_1 и T_2 (точки наблюдения) и X (в картинной плоскости) такие, что за счет отражений только в этом угле из точек T_1 и T_2 в точке X видны разные изображения. Подобно уменьшая всю картину к вершине угла, мы можем перевести точки T_1 и T_2 внутрь фундаментального многоугольника. В новой точке X' из точек T'_1 и T'_2 по-прежнему будут видны разные изображения. Тем самым переход 3 доказан.

Переход 4. Он также доказывается от противного, это будет еще одна задача.

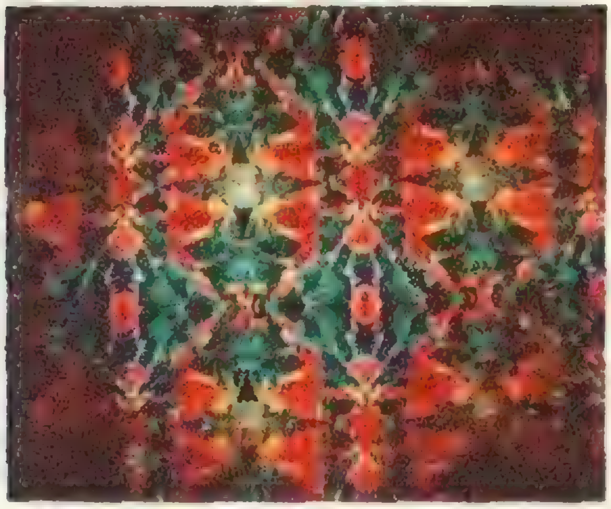


Рис. 11.

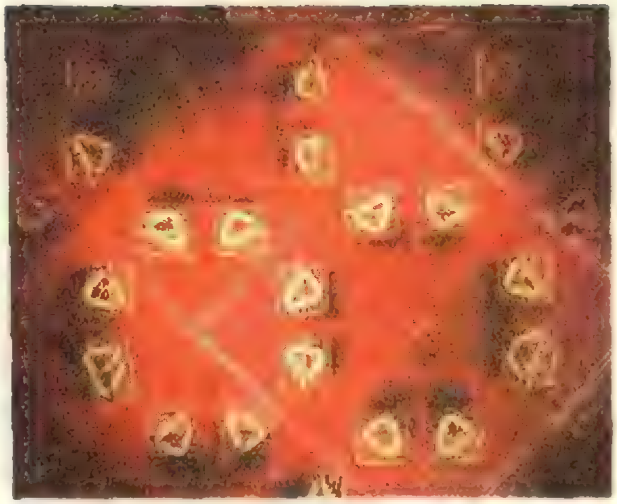


Рис. 12.

Задача 8. *Доказать, что если калейдоскоп из двух зеркал математически неправилен, то найдутся точки T_1, T_2 и X такие, что из точек T_1 и T_2 в точке X видны изображения разных точек фундаментального многоугольника.*

Итак, мы разобрались в работе калейдоскопов. Фотографии изображений в некоторых из них приведены на рисунках 11—14.

Попробуйте определить, правильны ли эти калейдоскопы. На многих из этих снимков можно определить, из какой точки велась съемка. Лучи света не могут отразиться в вершине угла (ребре калейдоскопа), поэтому из каждой вершины исходит линия раздела — смена порядка отражений. По одну сторону от этой линии луч добирается до глаза одной последовательностью отражений, по другую — другой последовательностью. Если продолжить эти линии внутрь фундаментального многоугольника,

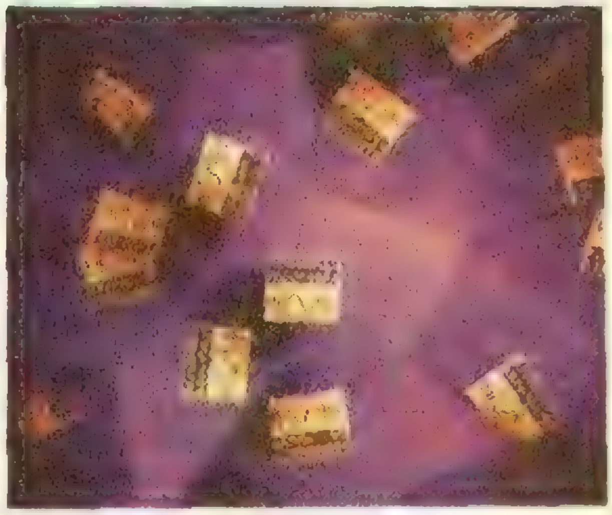


Рис. 13.

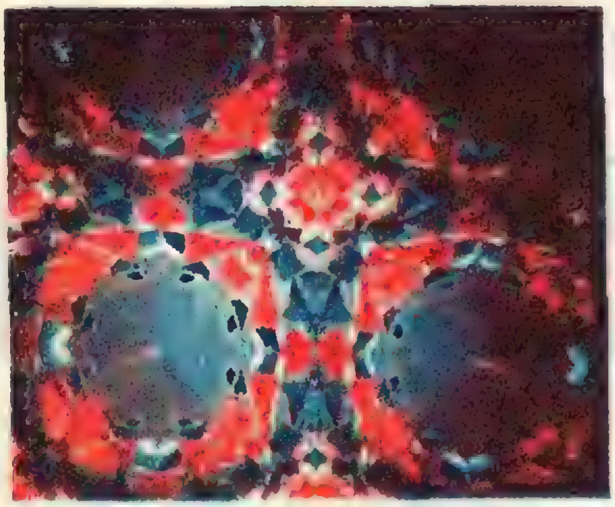


Рис. 14.

то все они пересекутся в одной точке, над которой велась съемка. В правильных калейдоскопах вдоль этих линий изображения сливаются, в неправильных на них появляется «излом».

Упражнения

9. Образует ли пара параллельных зеркал «правильный калейдоскоп» (хотя он и не подходит под наше определение калейдоскопа, можно проверить, удовлетворяет ли эта оптическая система определению правильности, данному выше)?

10. Какое максимальное число изображений одной точки можно увидеть в двух зеркалах, поставленных под углом α друг к другу, если $\frac{180°}{\alpha}=r$ и а) r — целое; б) r — не целое?

11. Опять два зеркала образуют угол α. Каково наибольшее число точек фундаментального «двуугольника» (угла), изображения которых можно увидеть в некоторой фиксированной точке A картинной плоскости такого калейдоскопа, меняя точку наблюдения? Изображения скольких точек фундаментального многоугольника накладываются в точке A с точки зрения геометрии? Рассмотрите три случая: $\alpha=\frac{180°}{r}$ и а) r — иррационально; б) $r=\frac{p}{q}$ (несократимая дробь), $q\neq 1$; в) r — натуральное число.

12. Что видно в «цилиндрический калейдоскоп», если глаз расположить на оси цилиндра?

13. Два плоских зеркала расположены под углом 40° друг к другу. Какое максимальное число отражений светового луча возможно в этой оптической системе?

14. В задаче 7 есть решение $n_1=\infty$, $n_2=2$, $n_3=2$ $\left(\frac{180°}{\infty}\right.$ мы считаем равным нулю). Какому «калейдоскопу» соответствует это решение (каков физический смысл этого решения)?

ОПИСАННАЯ ТРАПЕЦИЯ И СРЕДНИЕ

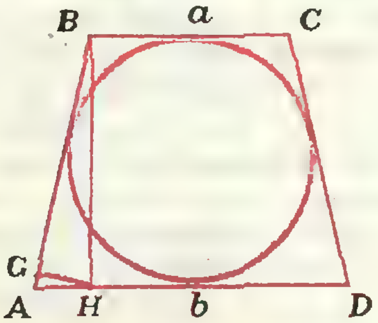
Взгляните на рисунок. Описанная трапеция, в которой проведены высота BH и отрезок HG, перпендикулярный стороне AB. Казалось бы, ничего особенно примечательного в этой фигуре нет, однако этот чертеж обладает удивительным свойством. На нем вместе с верхним основанием a и нижним основанием b уже содержатся все три средние этих отрезков: среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое, а именно:

$$AB=\frac{a+b}{2},$$

$$BH=\sqrt{ab},$$

$$BG=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Попробуйте самостоятельно доказать эти утверждения.



А теперь достаточно одного взгляда на чертеж, чтобы убедиться, что между средними выполнены следующие соотношения:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Действительно, AB и BH являются наклонной и перпендикуляром, проведенным к прямой AD из точки B, а BH и BG — наклонная и перпендикуляр из точки B к прямой HG.

А. Савин, В. Сендеров

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

ОТВЕРСТИЕ-ЛИНЗА

В. В. Майер

Дифракция света на круглом отверстии

Наблюдая дифракцию света на прорезанном в непрозрачном экране круглом отверстии, можно заметить ряд интереснейших закономерностей*). Если расстояние от отверстия до плоскости наблюдения невелико, то дифракционная картина представляет собой семейство концентрических светлых и темных колец, в центре которого может находиться как светлое, так и темное пятно. Будем увеличивать расстояние между отверстием и плоскостью наблюдения. Общий характер картины сохраняется, но в центре последовательно сменяются светлые и темные пятна. При еще большем увеличении расстояния до плоскости наблюдения в центре дифракционной картины появляется и при дальнейшем удалении остается светлое пятно (рис. 1).

Все эти закономерности можно объяснить, воспользовавшись методом построения зон Френеля.

Будем считать, что точечный источник света S находится в бесконечности; так что к экрану $Э_1$ с круглым отверстием приходит плоская световая волна, параллельная плоскости экрана (рис. 2). Нам нужно оценить освещенность центральной точки A дифракционной картины, получающейся на экране $Э_2$.

Всю площадь отверстия разобьем на такие кольцевые зоны, чтобы расстояния AB_1, AB_2, ..., AB_k удовлетворяли условию:

$$AB_1 - AO = AB_2 - AB_1 = \ldots = AB_k - AB_{k-1} = \frac{\lambda}{2},$$

где λ — длина волны падающего света.

Это означает, что волны, приходящие в точку A с границ соседних

---

*) Метод наблюдения дифракции света на круглом отверстии описан в статье Г. И. Косоурова «Шарик вместо линзы» («Квант» № 9, 1970).

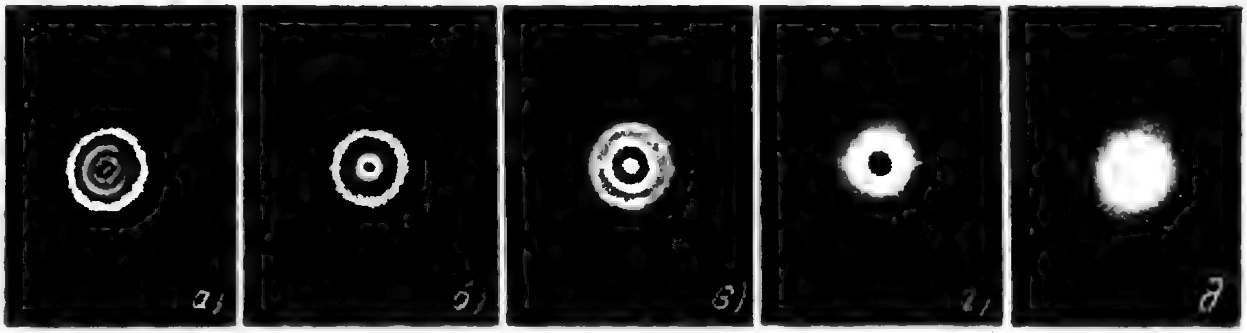


Рис. 1. Распределение освещенности при дифракции света на круглом отверстии.

а) Расстояние от отверстия до плоскости наблюдения минимально; заметны неправильности дифракционной картины, обусловленные неровностями края отверстия.

б, в, г) При увеличении расстояния до плоскости наблюдения в центре дифракционной картины последовательно сменяются светлые и темные пятна.

д) При дальнейшем увеличении расстояния в центре остается светлое пятно.

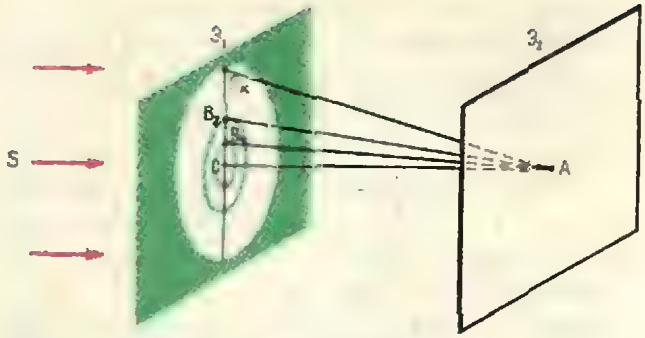


Рис. 2. Построение зон Френеля.

зон, имеют разность хода $\lambda/2$, то есть находятся в противофазе. Тогда для каждой точки любой зоны найдется такая точка соседней зоны, что волны из этих точек приходят в центр дифракционной картины в противофазе. Зоны, построенные таким образом, носят название зон Френеля.

Колебания, вызываемые в точке *А* волнами, идущими из двух соседних зон, взаимно компенсируются.

Ясно, что если отверстие открывает четное число зон Френеля, то в точке *А* амплитуда результирующего колебания будет минимальна, а значит, минимальна будет и освещенность экрана $Э_2$ в этой точке. Максимальной освещенность точки *А* будет в том случае, если отверстие открывает нечетное число зон. Именно поэтому при удалении плоскости наблюдения от экрана с отверстием темные и светлые пятна в центре дифракционной картины последовательно сменяют друг друга.

Оптическое изображение

Проколите в одной из стенок непрозрачной коробки небольшое отверстие, а противоположную стенку замените хорошо натянутой папиросной бумагой (или, еще лучше, матовым стеклом). У вас получилась камера-обскура — простейший прибор, дающий изображения предметов, прибор, в котором изображение создается круглым отверстием.

Но ведь отверстие не может дать иного распределения освещенности на плоскости наблюдения, кроме того, которое получается в результате дифракции света. Какое же из этих распределений можно считать изображением светящейся точки с бо́льшим основанием? Конечно то, которое больше всего напоминает саму светящуюся точку, то есть такое, в котором центральное светлое пятно имеет наибольшую освещенность, а окружающие его светлые кольца — наименьшую.

Такое распределение освещенности будет на плоскости, бесконечно удаленной от отверстия. Действительно, в бесконечно удаленную точку, лежащую на оси отверстия, все волны, идущие от источника света (также лежащего в бесконечности), приходят в фазе, и их амплитуды в этой точке в результате интерференции суммируются. Во все другие точки оси отверстия волны от источника света приходят уже с некоторой разностью хода, так что интенсивность света в них меньше, чем могла бы быть, если бы волны приходили в них в фазе. Раз интенсивность в центральной точке дифракционной картины стала меньше, то согласно закону сохранения энергии интенсивность света в окружающих ее кольцах возросла. А это означает, что изображение точечного источника света ухудшилось.

Итак, наилучшее изображение светящейся точки, создаваемое отверстием, есть дифракционная картина, в центре которой находится светлое пятно, причем разность хода волн, приходящих в центр этого пятна, равна нулю.

Но это идеальный случай. Практически волны в центр изображения всегда приходят с некоторой разностью хода. Каким должно быть максимальное значение этой разности хода, чтобы изображение можно было считать не слишком отличающимся от идеального? Сразу можно сказать, что максимальная разность хода не должна превышать половины длины волны, потому что в этом случае отверстие открывает не более одной зоны Френеля, и интенсивность света в центре дифракционной картины много больше, чем в окружающих его кольцах. В центре картины получается светлое пятно. Но физики несколько более строго относятся к подобным вещам. Поэтому они согласились с предложением Рэлея *) считать изображение не слишком сильно отличающимся от идеального, если максимальная разность хода волн, идущих из источника в центр изображения, не превышает четверти длины волны. Это предложение получило название критерия Рэлея.

Интересно, что в том случае, когда отверстие открывает ровно одну зону Френеля, яркость пятна в центре картины в четыре раза больше, чем при отсутствии экрана.

Фокусы круглого отверстия

Поскольку отверстие дает изображение, мы вправе ввести для него понятия, аналогичные тем, которые вводятся при изучении идеальной линзы. Будем называть оптическим центром *O* круглого отверстия его центр, а главной оптической осью *X* — прямую, проходящую через оптический центр отверстия перпендикулярно плоскости непрозрачного экрана *Э* (рис. 3).

Пусть на прорезанное в непрозрачном экране *Э* круглое отверстие падает плоская световая волна от бесконечно удаленного точечного источника света *S*. Найдем точки главной оптической оси, в которых находится центр изображения источника света.

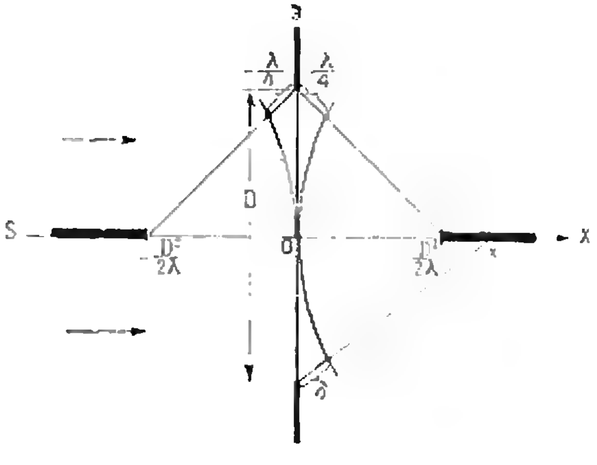


Рис. 3. Фокусы круглого отверстия.

Обозначим диаметр отверстия через D, а максимальную разность хода волн через δ. Для любой точки x, лежащей на главной оптической оси, согласно теореме Пифагора можно записать:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = (x+\delta)^2 - x^2,$$

или

$$\frac{D^2}{4} = 2\delta x + \delta^2.$$

Величина δ^2 мала по сравнению с остальными величинами, входящими в эту формулу, можно ею пренебречь. Тогда

$$x = \frac{D^2}{8\delta}. \qquad (1)$$

Согласно критерию Рэлея максимальная разность хода δ не должна превышать четверти длины волны, то есть $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\lambda}{4}$. Подставляя эти значения δ в формулу (1), получим

$$\frac{D^2}{2\lambda} \leqslant x < \infty. \qquad (2)$$

Однако критерием Рэлея определяется не только множество точек (2), но еще и симметрично расположенное ему относительно центра отверстия множество точек (см. рис. 3),

$$-\infty < x \leqslant -\frac{D^2}{2\lambda}. \qquad (3)$$

Оба множества точек — это изображения бесконечно удаленного источника света, лежащего на главной оптической оси отверстия. Но такие точки принято называть фокусами системы. Таким образом, множества точек (2) и (3) есть не что иное, как фокусы круглого отверстия!

У собирающей линзы фокус действительный (фокусное расстояние положительно), а у рассеивающей — мнимый (фокусное расстояние отрицательно). Отверстие же, как показывают выражения (2) и (3), имеет и действительный, и мнимый фокусы. Следовательно, прорезанное в непрозрачном экране круглое отверстие одновременно действует и как собирающая, и как рассеивающая линза!

---

*) Лорд Рэлей (1842—1919) — выдающийся английский физик, основные работы которого посвящены изучению колебаний и волн различной природы.

Отверстие — лупа

Поскольку отверстие действует аналогично линзе, для него должны быть справедливы все формулы, выведенные для идеальной линзы, только вместо значения фокусного расстояния линзы нужно подставить множество значений фокусных расстояний круглого отверстия.

Хорошо известно, что увеличение N линзы, когда она используется в качестве лупы, определяется формулой $N=\frac{250}{f}$, где f — фокусное расстояние линзы, выраженное в миллиметрах.

Из формулы (2) видно, что минимальное значение фокусного расстояния круглого отверстия, действующего как собирающая линза, равно $f'=\frac{D^2}{2\lambda}$. Следовательно, при использовании отверстия в качестве лупы максимальное увеличение составит

$$N=\frac{500\lambda}{D^2}. \tag{4}$$

Положим, что длина волны света $\lambda=6\cdot10^{-4}$ *мм*, и выберем два значения диаметра отверстия: $D_1=0{,}1$ *мм* и $D_2=0{,}2$ *мм*. Подставляя эти значения в формулу (4), получим, что максимальное увеличение, которое можно получить с отверстием диаметром 0,1 *мм*, — 30, а с отверстием диаметром 0,2 *мм* — 7,5!

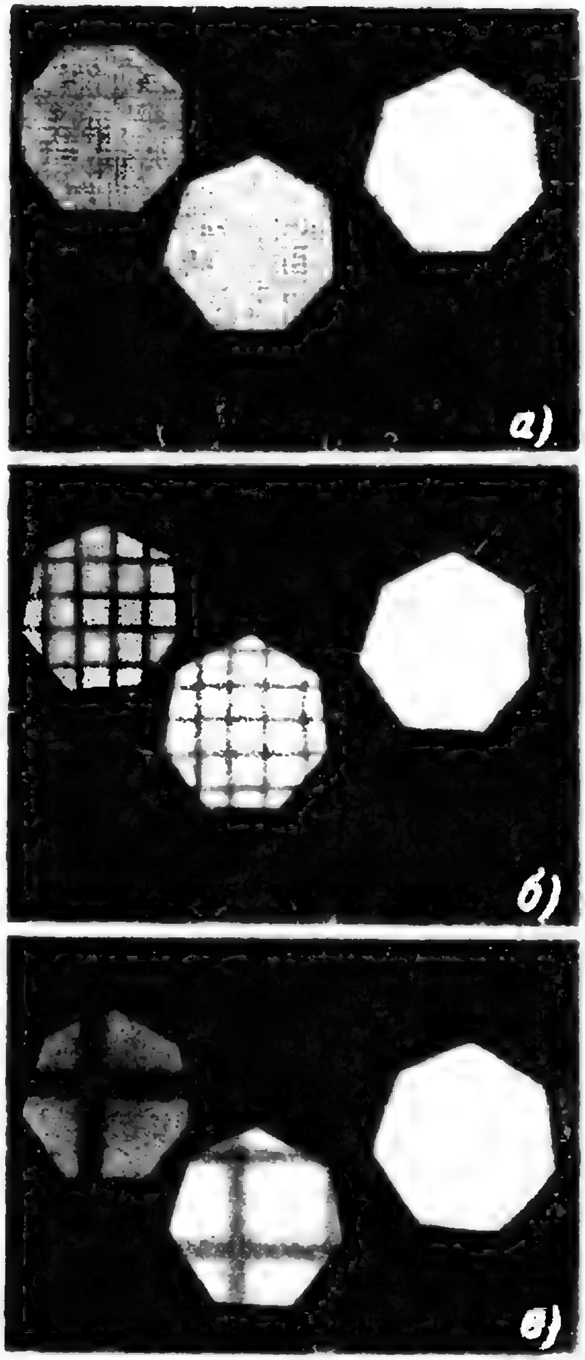


Рис. 5. В качестве лупы использовались проколотые в листочке фольги отверстия диаметром 0,2; 0,3 и 0,4 мм. В качестве объекта была использована сетка с размером ячеек 0,5×0,5 мм.

а) Расстояние до сетки 140 мм. Отверстия дают практически одинаковые изображения.

б) Расстояние до сетки 30 мм. Наилучшие изображения дают отверстия 1 и 2.

в) Расстояние до сетки 10 мм. Наилучшее изображение дает отверстие 1, имеющее наименьший диаметр.

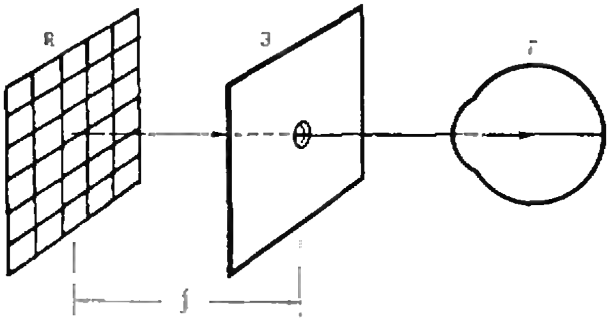


Рис. 4.

Это можно проверить. Проколите иглой в листочке станиолевой фольги ряд отверстий последовательно уменьшающегося диаметра. Сделать это нужно по возможности аккуратно. Отверстия должны быть близки к круглым, для этого при прокалывании отверстий в фольге осторожно поворачивайте иглу.

Сядьте перед окном и смотрите на небо (можно смотреть на любую достаточно сильно и равномерно освещенную поверхность, например, на побеленную стену, лист белой бумаги). Близко к зрачку глаза *Г* (рис. 4) расположите листок фольги (экран *Э*) с одним из проколотых вами отверстий. На вытянутой руке перед глазом держите какой-нибудь небольшой предмет *R* (иглу, металлическую сетку с размером ячеек около 0,5×0,5 *мм*, редкую ткань) и приближайте этот предмет к глазу.

Начиная с расстояния между предметом и глазом меньше 250 *мм* и до расстояния, равного минимальному фокусному расстоянию отверстия, будет видно достаточно резкое увеличенное изображение предмета. Если вы придвините предмет еще ближе к глазу, изображение станет нерезким. Однако, поместив перед глазом отверстие меньшего диаметра, вы опять получите резкое, еще более увеличенное изображение предмета (рис. 5).

Попробуйте проделать опыт со всеми изготовленными вами отверстиями.

«Дырочная» зрительная труба

На рисунке 6 показана оптическая схема «дырочной» зрительной трубы, в которой объективом является проколотое в листе фольги круглое отверстие, а окуляром — лупа с фокусным расстоянием примерно 2—5 *см*. Светосила «объектива» такой зрительной трубы мала, поэтому в нее можно рассматривать только очень яркие предметы, например, нить электрической лампы накаливания.

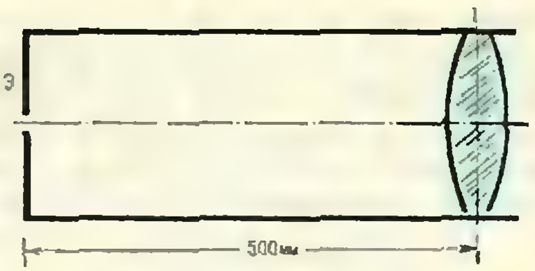


Рис. 6.

Изготовив «дырочную» зрительную трубу, вы обнаружите, что она может быть использована и в качестве микроскопа, и в качестве телескопа! Чтобы «дырочная» зрительная труба работала как микроскоп, достаточно приблизить предмет к ее «объективу». Если предмет удален от «объектива», то зрительная труба работает как телескоп (рис. 7).

Действительный и мнимый фокусы отверстия

Убедившись, что отверстие действует как собирающая линза, проверим, верно ли, что оно действует и как рассеивающая линза.

Отверстие, прорезанное в непрозрачном экране $Э_1$, создает действительное перевернутое R_1 и мнимое прямое R_2 изображения предмета *R* (рис. 8). Изображения этих изображений с помощью линзы *L* можно получить на белом экране $Э_2$.

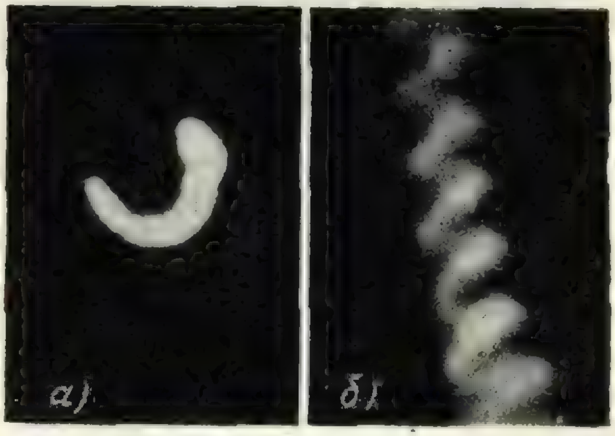


Рис. 7. Изображение нити электрической лампы, полученное с помощью «дырочной» зрительной трубы:

а) расстояние от лампы до «объектива» 2 м,

б) расстояние от спирали той же самой лампы до «объектива» 60 мм.

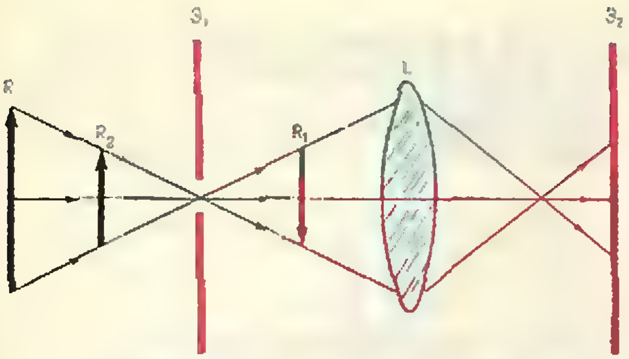


Рис. 8.

В качестве предмета R можно использовать светящуюся нить электрической лампы. Лампу следует поместить в коробку, в одной из стенок коробки проделать отверстие диаметром 40—80 *мм*. На расстоянии метра от лампы нужно поставить непрозрачный экран (например, лист фанеры) с отверстием диаметром около 10 *мм*. Это отверстие следует перекрывать листочком фольги с проколотым в нем отверстием (экран $Э_1$). Для опыта можно использовать линзу L с фокусным расстоянием 5—10 *см*. Белый экран $Э_2$ (лист плотной белой бумаги) находится на расстоянии 1—2 метра от экрана $Э_1$.

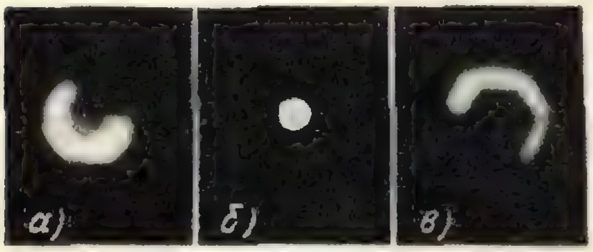


Рис. 9.

Линзу L в начале опыта отодвиньте от экрана $Э_1$ на расстояние, превышающее сумму фокусных расстояний отверстия и линзы, а затем придвигайте ее к экрану $Э_1$. На белом экране $Э_2$ вы будете наблюдать изображение созданного отверстием действительного изображения R_1 предмета (рис. 9, *а*), затем — резкое изображение отверстия в экране $Э_1$ (рис. 9, *б*), и, наконец, изображение созданного отверстием мнимого изображения R_2 предмета (рис. 9, *в*). В первом случае на экране $Э_2$ вы получите прямое изображение предмета R, в последнем — перевернутое.

Вместо того, чтобы приближать линзу L к экрану $Э_1$, можно перемещать экран $Э_2$.

Проделанный опыт показал, что отверстие дает действительное и мнимое изображения предмета, то есть действует одновременно и как собирающая, и как рассеивающая линзы. Можно ли этой удивительнейшей способностью отверстия воспользоваться на практике?

Упражнения

1. Для идеальной линзы справедлива формула

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

где a — расстояние от предмета до линзы, b — расстояние от линзы до изображения и f — фокусное расстояние линзы. Пользуясь критерием Рэлея, выведите аналогичную формулу для круглого отверстия. (Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии a от отверстия.)

2. Предмет находится на конечном расстоянии от отверстия. Где находится наилучшее изображение предмета, создаваемое отверстием, и что оно собой представляет?

3. Длина тубуса «дырочной» зрительной трубы (расстояние между ее «объективом» и передней фокальной плоскостью окуляра) равна 500 *мм*. Каково максимальное значение диаметра отверстия «объектива», если трубу предполагается использовать в качестве телескопа?

4. «Дырочную» зрительную трубу предполагают использовать в качестве микроскопа. Длина тубуса трубы 500 *мм*, а расстояние от предмета до «объектива» 50 *мм*. Каково максимальное значение диаметра отверстия «объектива»? Объясните, почему «дырочную» зрительную трубу с тем же значением диаметра отверстия объектива можно использовать и в качестве телескопа.

5. Вам очень не хочется ставить довольно сложный опыт, описанный в статье, чтобы подтвердить существование одновременно действительного и мнимого изображений предмета. Придумайте (и поставьте) более простой опыт.

ЗАДАЧНИК Кванта

Задачи

В этом номере мы помещаем задачи, предлагавшиеся на заключительных турах Всесоюзной математической и физической олимпиад, проходивших в апреле этого года.

Решения задач этого номера можно присылать не позднее 15 сентября по адресу: 117071, Москва, В - 71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант».

После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете (например: «Задачник «Кванта», М156, Ф157»).

Решения задач по математике и физике, а также новые задачи по каждому предмету посылайте в отдельных конвертах. В начале писем укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь).

М156. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка DC за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Доказать, что $\measuredangle QNM = \measuredangle MNP$ (8 кл.).

Ю. В. Михеев

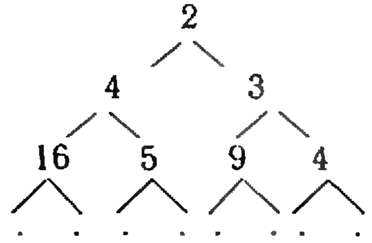
М157. Сумма n положительных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ равна 1. Пусть S — наибольшее из чисел

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Найти наименьшее возможное значение S. При каких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оно достигается (10 кл.)?

Ю. И. Ионин

М158. Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число $a > 1$, а далее под каждым числом k слева пишется k^2, а справа — число $k+1$. Например, при $a = 2$ получается таблица



Доказать, что в каждой строчке таблицы все числа различны (9, 10 кл.).

М159*. Можно ли расставить цифры 0, 1, 2 в клетках листа клеточной бумаги размером 100×100 таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике 3×4, стороны которого идут по сторонам клеток, оказалось бы три нуля, четыре единицы и пять двоек (9 кл.)?

В. Е. Лапицкий

М160*. Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из этой же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечетное число очков. Доказать, что в турнире участвовало четное число команд. (Поражение — 0 очков, ничья — 1 очко, выигрыш — 2 очка.) (10 кл.).

Г. А. Каспаров

Ф168. Шестиугольный карандаш толкнули вдоль горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 1. При каких значениях коэффициента трения α между карандашом и плоскостью карандаш будет скользить по плоскости, не вращаясь? (8 кл., 9 кл.)

Л. П. Баканина

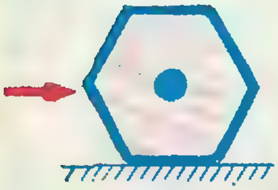


Рис. 1.

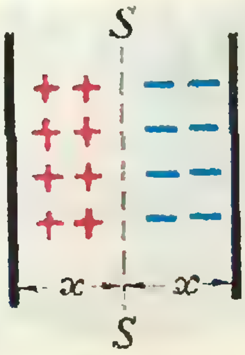


Рис. 2.

Ф169. Для дальней космической связи используется спутник объемом $V=100\ м^3$, наполненный воздухом при нормальных условиях. Метеорит пробивает в его корпусе отверстие площадью $S=1\ см^2$. Оценить время, через которое давление внутри спутника изменится на 1%. Температуру газа считать неизменной. Универсальная газовая постоянная равна 8,3 *дж/град·моль.* (9 кл.)

А. Р. Зильберман

Ф170. В однородной плазме с плотностью (числом зарядов каждого знака в единице объема — в 1 $см^3$) n все электроны, первоначально находившиеся в слое толщиной x, смещаются по нормали к этому слою на расстояние x. Найти электрическое поле E в сечении SS (рис. 2). (9 кл.)

В. Г. Аверин

Ф171. На гладкий горизонтальный стол поставили вертикально гантельку, состоящую из невесомого стержня с двумя одинаковыми маленькими шариками на концах (рис. 3). Верхнему шарику ударом сообщают скорость $\mathbf{v}$ в горизонтальном направлении. При какой максимальной длине гантельки l нижний шарик сразу оторвется от стола? (8 кл., 9 кл.)

А. Р. Зильберман

Ф172. Проводящий стержень подвешен горизонтально на двух легких проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией $E=1$ *тл* (см. рис. 4). Длина стержня $l=0{,}2$ *м*, масса $m=10$ *г*, длина проводов $l_1=0{,}1$ *м*. К точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкостью $C=100$ *мкф*, заряженный до напряжения $U=100$ *в*. а) Определить максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после разряда конденсатора, считая, что разряд происходит за очень малое время.

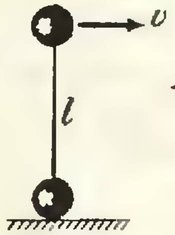


Рис. 3.

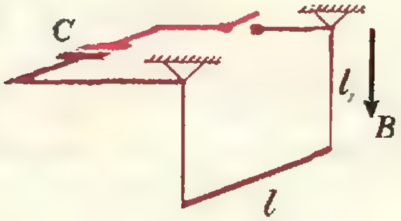


Рис. 4.

б) Определить емкость конденсатора C_1, при разряде которого система отклонится на угол $\alpha=3°$, если при разряде заряженного до такого же напряжения конденсатора емкостью $C_0=10$ *мкф* угол отклонения равен $\alpha_0=2°$. (10 кл.)

В. В. Светозаров

ЗАДАЧНИК кванта

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М110—М122

М110

На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия:

1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах;

2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не меньше $^1/_5$ и не более $^4/_5$ площади K.

Будем называть *допустимыми* квадраты, закрашенные не больше, чем на $^4/_5$ и не меньше, чем на $^1/_5$. Возьмем n таким большим, чтобы нашелся квадрат из линий сетки со стороной 2^n, содержащей все закрашенные клетки, причем их площадь составляла бы меньше $^1/_5$ площади квадрата. Разобьем этот квадрат на 4 равных. Каждый квадрат разбиения, очевидно, будет закрашен меньше, чем на $^4/_5$. Те квадраты, которые закрашены не меньше чем на $^1/_5$, будут допустимыми. Остальные квадраты разбиения закрашены меньше, чем на $^1/_5$, и каждый из них разобьем снова на 4 квадрата и т. д. (рис. 1).

После $(n-2)$-го разбиения мы получим некоторое число допустимых квадратов разных размеров и квадраты 2×2, каждый из которых закрашен меньше, чем на $^4/_5$. Те из этих квадратов, которые содержат хотя бы одну черную клетку, уже закрашены на $^1/_4$ и потому допустимы. Остальные квадраты 2×2 не будут содержать закрашенных клеток, следовательно, все черные клетки попадут в допустимые квадраты и тем самым требуемое покрытие будет построено.

Задача допускает обобщение на трехмерный случай, с заменой $^1/_5$ и $^4/_5$ на $^1/_9$ и $^8/_9$ соответственно.

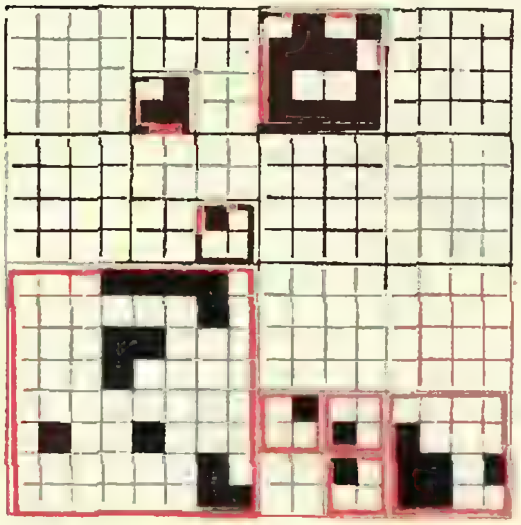


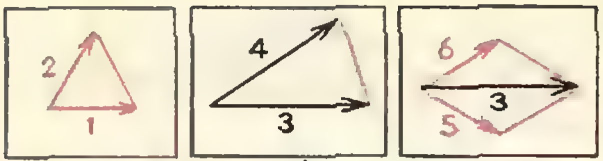
Рис. 1.

М111

В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превышает 0,31.

Постарайтесь получить более точную оценку и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Обозначим через F нашу фигуру, а через S — ее площадь. Рассмотрим фигуру F_1, полученную путем сдвига F на 0,001 в направлении, параллельном стороне квадрата. Фигура F_2 — это F, сдвинутая на 0,001 в направлении 2, составляющем угол 60° с направлением 1 (рис. 2, *а*). Фигуры F_1 и F не имеют общих точек. Действительно, пусть точка A принадлежит F и в то же время принадлежит F_1, то есть получена сдвигом какой-то точки B фигуры F на 0,001. Тогда расстояние между A и B будет равно 0,001,



а) б) в)

Рис. 2.

вопреки условию задачи. Аналогично не пересекаются F с F_2 и F_1 с F_2. Все три рассматриваемые фигуры имеют одинаковую площадь S и лежат в пределах квадрата со стороной 1,001. Поэтому верно неравенство $3S<1{,}001^2$, откуда $S<0{,}335$.

Эту оценку можно несколько уточнить (в третьем или четвертом знаках после запятой) за счет более аккуратного исследования части фигуры F, лежащей вблизи границы квадрата. Мы, однако, докажем существенно лучшую оценку, именно $S<0{,}287$.

Рассмотрим фигуры F_3 и F_4, полученные из F сдвигом на $0{,}001\sqrt{3}$ в двух направлениях, *3* и *4*, образующих угол $\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$; F_4 может быть получена из F_3 сдвигом на 0,001, поэтому F_3 и F_4 не пересекаются (рис. 2, *б*). Выберем из этих фигур ту (например, F_3), которая имеет меньшее пересечение с F. Площадь этого пересечения не больше $S/2$, поэтому суммарная площадь, занимаемая F и F_3, будет не меньше $3S/2$. Построим теперь фигуры F_5 и F_6, сдвигая F на 0,001 в направлениях *5* и *6*, образующих угол 30° с *3* (рис. 2, *в*). Фигура F_3 может быть получена из F_5 сдвигом на 0,001 в направлении *6* и из F_6 сдвигом на 0,001 в направлении *5*. Поэтому F_5 и F_6 не пересекаются ни с F_3, ни с F; не пересекаются они и между собой. Следовательно, площадь, занимаемая F, F_3, F_5 и F_6, не меньше $7S/2$. Все эти фигуры должны содержаться в квадрате со стороной $1+0{,}001\sqrt{3}<1{,}0018$, поэтому $S<\frac{2}{7}(1{,}0018)^2<0{,}287$. Эту оценку удалось доказать *А. Гольбергу* (Москва).

Вопрос о наличии существенно лучшей оценки пока остается открытым. Все примеры, которые удается построить, дают значение S меньше 0,25.

Г. В. Розенблюм

M112

В таблице $m\times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Доказать, что осталось не меньше, чем $(n+m-1)$ чисел.

Для математика идею нашего доказательства можно изложить так. Таблицы, удовлетворяющие условию задачи, образуют линейное пространство размерности $n+m-1$. С другой стороны, если числа, стоящие в некоторых s клетках, определяют таблицу однозначно, то размерность «пространства таблиц» не превосходит s, поэтому $s\geqslant n+m-1$.

Перейдем теперь к подробному изложению доказательства. Условимся называть числа, стоящие в таблице, ее *элементами*. Будем обозначать через a_{ij} элемент таблицы A, стоящей на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Естественно определяется сумма таблиц и умножение таблицы на число.

Сложение двух таблиц. Если нам даны таблицы A и B с элементами a_{ij} и b_{ij}, то их суммой C $(C=A+B)$ называется таблица с элементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Умножение таблицы на число. Если нам дана таблица A с элементами a_{ij}, то таблица λA — это таблица B с элементами $b_{ij}=\lambda a_{ij}$.

Легко проверить, что если таблицы, удовлетворяющие условию задачи, складывать между собой и умножать на числа, то получаемые таблицы вновь удовлетворяют условию задачи. Поскольку все встречающиеся ниже таблицы удовлетворяют условию задачи, то мы этого больше специально не оговариваем.

Введем теперь очень важное понятие линейной зависимости. Назовем таблицу, состоящую из одних нулей, *нулевой*.

Таблицы $A_1, A_2, \ldots, A_r$ называются *линейно зависимыми*, если можно указать такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не все из которых равны нулю, что таблица $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\ldots+\lambda_rA_r$ — нулевая.

(Например, если среди таблиц $A_1, A_2, \ldots, A_r$ некоторые две таблицы одинаковы $(A_i=A_j)$, то такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ указать можно: $\lambda_i=1$, $\lambda_j=-1$, а все остальные λ равны нулю.) Если же для таблиц $A_1, A_2, \ldots, A_r$ таких чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ не существует, то они называются *линейно независимыми*.

Мы предоставляем читателю доказать, что из любого набора таблиц $B_1, B_2, \ldots, B_s$, не все из которых равны нулю, можно выделить максимальный линейно независимый набор $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_t}$, то есть такой набор, что если присоединить к нему еще одну из таблиц B_i, то он станет линейно зависимым.

Длина максимального линейного набора однозначно определяется набором $B_1, B_2, \ldots, B_s$, то есть если указан еще один максимальный набор $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_r}$, то $r=t$.

Вернемся теперь к нашей задаче. Пусть осталось s не стертых чисел и таблица восстанавливается по ним однозначно. Докажем, что только у нулевой таблицы в наших s клетках (в тех клетках, где стоят не стертые числа) стоят нули. Действительно, если бы нашлась ненулевая таблица B, у которой в наших s клетках стояли бы нули, то было бы можно восстановить не только некоторую таблицу A, но и таблицы $A+\lambda B$, где λ —

произвольно. Но это противоречит условию задачи.

Докажем теперь, что любые $s+1$ таблиц линейно зависимы. Возьмем для этого некоторый набор из $s+1$ таблицы. Обозначим их через $A_1, A_2, \ldots, A_{s+1}$. Если одна из этих таблиц нулевая, то все доказано. В противном случае в таблице A_{s+1} в некоторой из наших s клеток, например, в клетке s_1, стоит не нуль. Поэтому можно подобрать такие числа $\lambda_{1,s+1}, \lambda_{2,s+1}, \ldots, \lambda_{s,s+1}$, что у таблиц $B_1 = A_1 - \lambda_{1,s+1}A_{s+1}$, $B_2 = A_2 - \lambda_{2,s+1}A_{s+1}, \ldots, B_s = A_s - \lambda_{s,s+1}A_{s+1}$ в клетке s_1 стоит нуль. Если таблица B_s нулевая, то все доказано. В противном случае в одной из наших клеток, например, в клетке s_2 в таблице B_s стоит не нуль. Поэтому вновь можно подобрать такие числа $\lambda_{1,s}, \lambda_{2,s}, \ldots, \lambda_{s-1,s}$, что у таблиц $C_1 = B_1 - \lambda_{1,s}B_s$, $C_2 = B_2 - \lambda_{2,s}B_s, \ldots, C_{s-1} = B_{s-1} - \lambda_{s-1,s}B_s$ в клетке s_2 стоят нули. Если таблица C_{s-1} не нулевая, то проделаем еще один шаг и так далее. После каждого шага число нулей в наших клетках возрастает на единицу. Таким образом мы либо получим после некоторого шага нулевую таблицу, либо сумеем проделать s шагов, и получить таблицу, у которой во всех наших клетках стоят нули, то есть тоже нулевую таблицу. Легко видеть, что полученную нулевую таблицу можно записать так:

$$A_i + \mu_1 A_{i+1} + \mu_2 A_{i+2} + \ldots + \mu_{s+1-i} A_{s+1}.$$

Поэтому таблицы $A_1, A_2, \ldots, A_{s+1}$ линейно зависимы и теперь достаточно указать $n+m-1$ линейно независимых таблиц. Действительно, если это удастся сделать, то по доказанному $s \geqslant n+m-1$, а именно это неравенство нам и требуется доказать.

Отыскать $n+m-1$ линейно независимых таблиц совсем просто. Можно взять, например, такие таблицы. Таблицы $A_{k,1}$, где $k=2, 3, \ldots, m$ с элементами $a_{k,j}=1$ и остальными элементами, равными нулю; таблицы $A_{1,l}$, где $l=2, 3, \ldots, n-1$ с элементами $a_{j,l}=1$ и остальными элементами, равными нулю, и таблица $A_{1,1}$, у которой $a_{1,1}=1$, $a_{1,j}=0$, $a_{i,1}=0$ при $i, j>1$ и $a_{i,j}=-1$ при $i, j>1$ (см. рис. 3). То, что эти таблицы линейно независимы, вы без труда докажите сами. Решение задачи закончено.

M113

Доказать, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n.

Докажем, что разные n-значные числа, составленные из цифр 1 и 2, дают разные остатки при делении на 2^n.

Действительно, если два таких n-значных числа a_n и b_n дают одинаковый остаток, то они должны быть либо оба четными, либо оба нечетными. Поэтому у них должны совпадать последние цифры и их можно представить так: $a_n = 10a_{n-1} + i$, $b_n = 10b_{n-1} + i$, где i равно единице или двойке, а a_{n-1} и b_{n-1} — $(n-1)$-значные числа, составленные из цифр 1 и 2. $a_n - b_n$ делится на 2^n, поэтому $10(a_{n-1} - b_{n-1})$ тоже делится на 2^n, следовательно, $a_{n-1} - b_{n-1}$ делится на 2^{n-1}. Из этого точно так же выводится, что последние цифры у чисел a_{n-1} и b_{n-1} совпадают.

Повторяя наше рассуждение, мы убеждаемся, что все цифры чисел a_n и b_n совпадают, то есть мы показали, что если два числа a_n и b_n дают равные остатки при делении на 2^n, то они совпадают. Поэтому разные n-значные числа, составленные из цифр 1 и 2, действительно дают разные остатки при делении на 2^n. Но и этих чисел и различных остатков ровно 2^n, поэтому одно из этих чисел дает при делении остаток нуль, то есть делится на 2^n.

M114

По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c)<0$, то числа b и c можно поменять местами. Доказать, что эту операцию можно проделать лишь конечное число раз.

Пусть по кругу расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. x_1 и x_2 — соседи, x_2 и x_3 — соседи, ..., x_n и x_1 — соседи (см. рис. 4). Рассмотрим сумму попарных произведений соседних чисел:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1. \qquad (1)$$

Докажем, что если некоторые два числа x_i и x_{i+1} $(x_{n+1}=x_1)$ можно переставить,

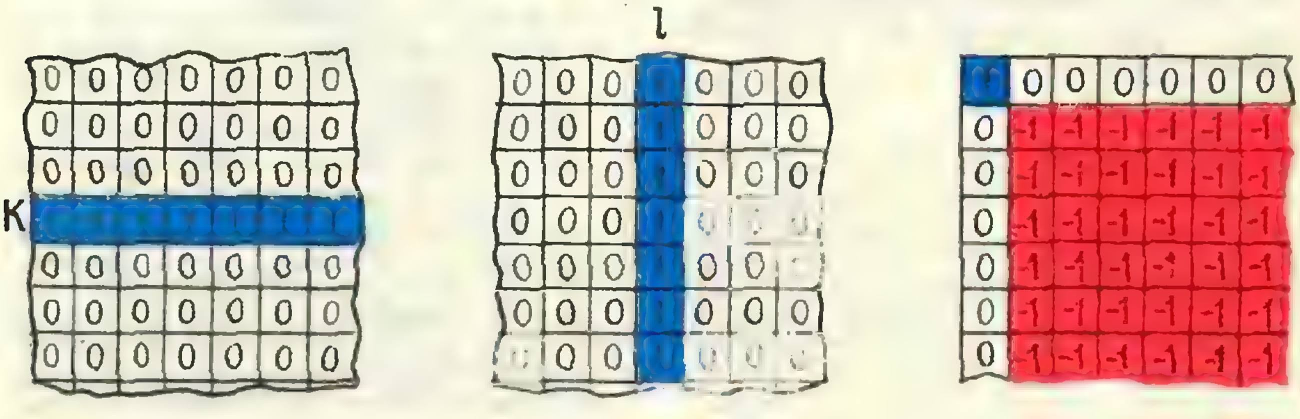


Рис. 3. $A_{k,1}$ $A_{1,l}$ $A_{1,1}$

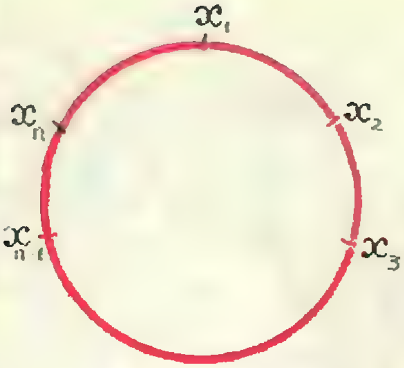


Рис. 4.

то после их перестановки сумма (1) увеличится. Действительно, если x_i и x_{i+1} можно переставить, то $(x_{i-1}-x_{i+2})(x_i-x_{i+1})<0$, а это неравенство можно записать так:

$$x_{i-1}x_i+x_ix_{i+1}+x_{i+1}x_{i+2}<$$
$$<x_{i-1}x_{i+1}+x_{i+1}x_i+x_ix_{i+2}.$$

Но всего существует конечное число возможных перестановок чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по кругу, поэтому и сумма (1) может принимать лишь конечное число значений. Следовательно, нашу операцию можно проделать лишь конечное число раз: в противном случае мы получили бы бесконечную последовательность различных значений для суммы (1) $s_1<s_2<s_3<\ldots$

M115

В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Доказать, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду.)

Пусть в первом сосуде a литров воды, во втором — b литров, в третьем — c литров, и $a\leqslant b\leqslant c$.

Разберем сначала случай, когда $a=1$. Если доливать воду только в первый сосуд, то при первом переливании в него нужно будет долить 1 литр воды, при втором — два литра, при третьем — четыре литра, вообще при i-м переливании 2^{i-1} литров.

Разделим теперь, разумеется, чисто условно, воду во втором сосуде на порции: $2^{i_0}, 2^{i_1}, \ldots, 2^{i_k}$, где $i_0<i_1<\ldots<i_{k-1}<i_k$. (Для этого, найдем такое i_k, что $2^{i_k}\leqslant b$, а $2^{i_k+1}>b$, тогда $b=2^{i_k}+b_1$, где $b_1<2^{i_k}$; для него, в свою очередь, найдем $2^{i_{k-1}}$ и т. д.)

Если $i_0=0$, $i_1=1$, $i_2=2$, …, $i_k=k$, то третий сосуд нам не понадобится. Начнем переливать из второго сосуда в первый. После первого переливания в первом сосуде станет два литра, а во втором $2+2^2+2^3+\ldots+2^k$ литров, после второго соответственно 2^2 и $2^2+2^3+\ldots+2^k$, после третьего — 2^3 и $2^3+\ldots+2^k$, после k-го — 2^k и 2^k и после $k+1$-го — 2^{k+1} и 0.

Если же некоторые степени двойки, меньшие 2^{i_k}, среди «порций» отсутствуют, то недостающие порции выделим в третьем сосуде (воды в нем для этого хватит; действительно, нам заведомо хватит $1+2+2^2+\ldots+2^{i_k-1}=2^{i_k}-1$ литров воды, это меньше b литров, а b, в свою очередь, меньше c).

Переливать теперь будем так: каждый раз будем брать тот сосуд, в котором выделена соответствующая порция. После i_k+1-го переливания второй сосуд опустеет.

Общий случай ($a\neq 1$) фактически ничуть не сложнее. Представим b и c так: $b=b_1a+b_2$, $c=c_1a+c_2$, где b_1, b_2, c_1, c_2 — натуральные числа, а $b_2<a$, $c_2<a$ (такое представление единственно). Если мы забудем теперь про «лишние» b_2 и c_2 литров, и объявим a литров новой единицей объема, то поскольку $b_1\leqslant c_1$, мы сможем устроить переливание так, чтобы вылить из второго сосуда b_1a литров. После этого в нем останется b_2 литров, причем целое число b_2 меньше a. Итак, нам удалось от сосудов с $a\leqslant b\leqslant c$ литрами воды перейти к сосудам с $a'\leqslant b'\leqslant c'$ литрами воды, причем $a>a'$. Повторяя нашу процедуру, мы будем последовательно получать сосуды со все меньшим и меньшим количеством воды: $a>a'>a''\ldots$ Поскольку, однако, все эти количества выражаются целым числом литров, мы через конечное число шагов получим пустой сосуд.

Отметим, что эта задача впервые возникла в одной из работ известного советского алгебраиста А. И. Ширшова. Она понадобилась ему для построения серьезной математической теории. Кстати, это не единственная из предлагавшихся на олимпиадах задач, взятая из вполне серьезных математических работ.

Л. Г. Лиманов

M116

Докажите, что если соединить середины последовательных сторон выпуклого n-угольника M (рис. 5), то у полученного многоугольника

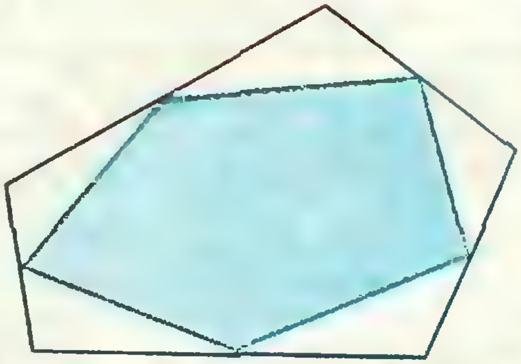


Рис. 5.

а) периметр не меньше половины периметра M ($n \geqslant 3$);

б) площадь не меньше половины площади M ($n \geqslant 4$).

Пусть $A_1 A_2 \ldots A_n$ — данный многоугольник M, B_k — середина стороны $A_{k-1}A_k$ (здесь и ниже $k=1, 2, \ldots, n$, причем подразумевается, что $A_{n+1}=A_1$, $A_0=A_n$ и т. п.), S и S' — площади, P и P' — периметры многоугольников $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1 B_2 \ldots B_n$ соответственно; $n \geqslant 4$.

Заметим, что диагональ $A_{k-1}A_{k+1}$ отрезает от многоугольника треугольник $A_{k-1} A_kA_{k+1}$, в котором B_kB_{k+1} является средней линией (рис. 6), поэтому

а) $A_{k-1} A_{k+1} = 2B_kB_{k+1}$;

б) $S(\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}) = 4S(\Delta B_kA_kB_{k+1})$.

(Эти соотношения играли основную роль в большинстве решений, присланных читателями). Ясно, что из всех диагоналей $A_{j-1} A_{j+1}$ (где $j=1, 2, \ldots, n$; $j \neq k$) данный треугольник $A_{k-1} A_kA_{k+1}$ пересекают только две: $A_{k-2}A_k$ и A_kA_{k+2}, причем соответствующие точки пересечения C_k, C_{k+1} этих диагоналей с $A_{k-1}A_{k+1}$ расположены в таком порядке, что отрезки $A_{k-1}C_k$ и $C_{k+1}A_{k+1}$ (а, следовательно, треугольники $A_{k-1}A_kC_k$ и $C_{k+1}A_kA_{k+1}$) не налегают друг на друга. Теперь утверждения задачи доказываются так (суммы Σ берутся по всем k):

а) $$2P' = 2\Sigma B_k B_{k+1} = \Sigma A_{k-1} A_{k+1} > \\ > \Sigma A_{k-1}C_k + \Sigma C_{k+1} A_{k+1} =$$

(голубые отрезки на рис. 7)

$$= \Sigma (A_{k-1}C_k + C_kA_k) > \Sigma A_{k-1}A_k = P$$

(неравенство треугольника для $\Delta C_kA_{k-1}A_k$), откуда $P' > P/2$;

б) $$4(S - S') = 4\Sigma S(\Delta B_kA_kB_{k+1}) = \\ = \Sigma S(\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}) \leqslant 2S$$

(поскольку треугольники $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ нигде не покрывают многоугольник более чем в два слоя), откуда $S' \geqslant S/2$; равенство здесь достигается лишь при $n=4$ (в случае а) — лишь при $n=3$).

Правильное решение обеих задач — и а), и б) — прислали *А. Меркурьев* и *А. Колдобский* из Ленинграда, *М. Розов* и *А. Черняк* из Минска, *М. Илларионов*, *А. Глушко* и *В. Кореняко* из Воронежа, *В. Шихман*, *И. Шпарлинский* и *М. Колодочкин* из Москвы, *Б. Хафизов* из с. Богатые Сабы Татарской АССР, *Э. Туркевич* из Черновцев, *Л. Пугач* и *С. Лягушин* из Днепропетровска, *А. Цанава* из Тбилиси, *А. Рябкин* из г. Речица Гомельской обл., *А. Гордиенко* из с. Полтавченского Краснодарского края, *А. Смирнов* из Горького, *В. Малыченко* из Славянска на Кубани, *Н. Чернов* из Кривого Рога, *А. Макричев* из Львова, *А. Жумадилдаев* из Алма-Аты, *С. Малеванкин* из Феодосии, *Г. Фильковский* из Баку, *В. Чухин* из Волжска Марийской АССР, *Ю. Кисин* из Ст. Руссы.

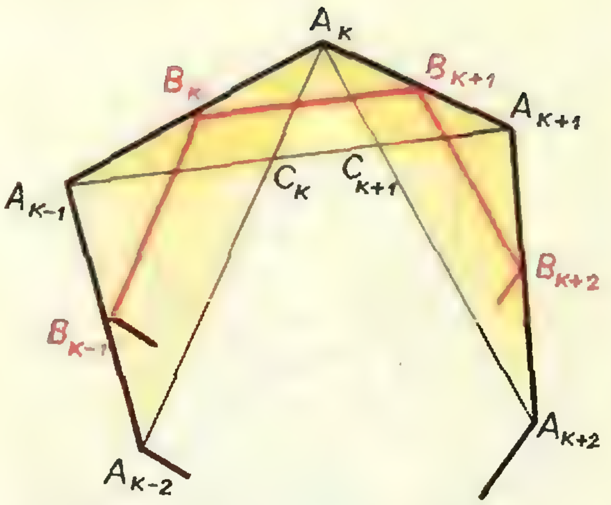


Рис. 6.

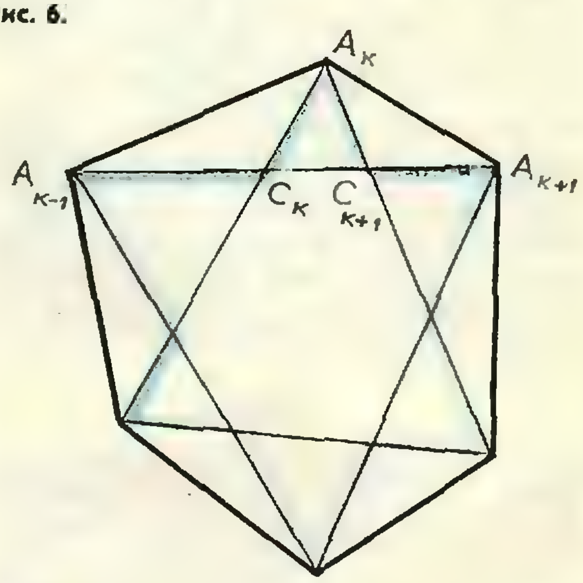


Рис. 7.

Итак доказано, что отношения P'/P и S'/S (соответственно, при $n \geqslant 3$ и $n \geqslant 4$) заключены в пределах от 1/2 до 1. Возникает естественный вопрос — его обсуждают и некоторые читатели: можно ли хотя бы для некоторых n уменьшить эти границы, или отношения P'/P и S'/S принимают (при каждом $n > 3$ и $n > 4$ соответственно) все значения между 1/2 и 1? Некоторые указания к решению этого вопроса вы найдете на стр. 80.

Н. Б. Васильев

М117

Несколько человек в течение t минут наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти t минут?

Попробуйте решить эту задачу сначала для небольших значений t, например, для $t=2,5$.

Эта задача возникла из ошибки одного студента мехмата МГУ. Однажды он воспользовался следующей леммой, считая ее очевидной: если на отрезке $[a, b]$ задана функция $\varphi(x)$, этот отрезок покрыт конечной системой отрезков и при этом на каждом отрезке системы изменение функции не превышает его длины, то изменение функции на всем отрезке $[a, b]$ не превышает $b-a$. (Изменением функции на отрезке в данном случае называется разность между максимальным и минимальным значениями функции на этом отрезке.)

Если бы эта лемма была верна, то в нашей задаче получалось бы, что улитка не может проползти более t метров. Действительно, отложим время x по оси изменения аргумента и рассмотрим на отрезке $0 \leqslant x \leqslant t$ функцию $\varphi(x)$, которая определяется как путь, пройденный улиткой за время x. Время наблюдения одного человека изображается на оси x отрезком длины 1. Весь отрезок $[0, t]$ покрыт этими отрезками, так как улитка не остается без наблюдения. Тогда по нашей лемме путь улитки за все время наблюдения (численно) не превышает этого времени. Этого убеждения придерживаются многие авторы присланных в редакцию писем, содержащих попытку решения задачи. Больше того, многие считают, что улитка должна ползти с постоянной скоростью 1 *м/с*, а потому за все время проползла t метров. Но в том-то и дело, что не верны ни это убеждение, ни приведенная выше лемма. Видимо, в этом кажущемся противоречии между здравым смыслом и фактом состоит привлекательность задачи. Когда было обнаружено, что лемма неверна, к ее условиям добавили для большей определенности только еще то, что все отрезки наблюдения — одинаковой длины, и предложили эту задачу восьмиклассникам на Московской математической олимпиаде в 1960 году.

Первая трудность в этой задаче — понять, что условия задачи не противоречат тому, что улитка проползла не t метров. Многие авторы писем приводят для случая $t=2{,}5$ график (см. рис. 8), из которого видно, как должна ползти улитка и как должны расположиться отрезки наблюдения, чтобы за 2,5 *мин* улитка проползла 4 *м*.

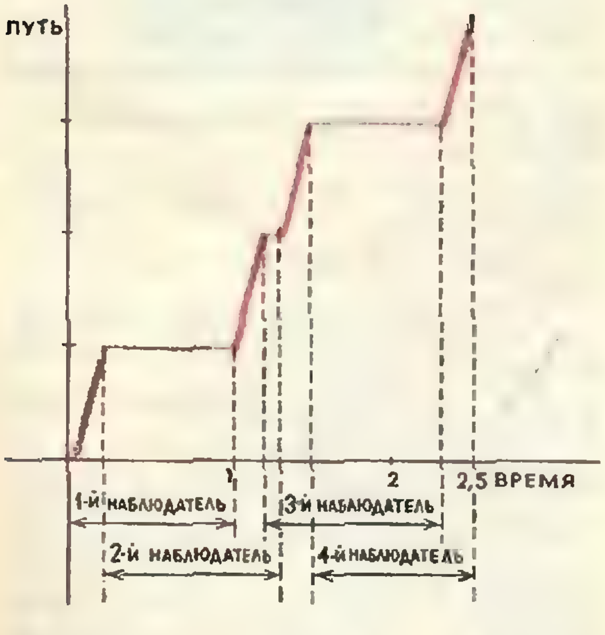


Рис. 8.

С помощью рисунка 8 легко сообразить, что возможно такое расположение наблюдателей и такое движение улитки, что за t *мин* (при условии, что t больше 1) улитка проползет $2(t-1)$ *м*, если t — целое, и $2[t]$, если t — не целое.

Вторая трудная часть задачи состоит в том, чтобы доказать, что при этом достигается действительно максимальное перемещение улитки.

Пусть a_1 — первый наблюдатель. Рассмотрим всех наблюдателей, которые начали следить за улиткой либо в тот момент, когда кончил a_1, либо еще раньше (по условию такие наблюдатели есть). Пусть a_2 — последний из таких наблюдателей. Рассмотрим, далее, всех наблюдателей, начавших следить за улиткой не позже, чем кончил a_2, и обозначим через a_3 последнего из них. Аналогично выберем наблюдателя a_4 и т. д. Очевидно, что в конце концов мы дойдем до наблюдателя, окончившего наблюдать как раз в конце последней минуты (если наблюдатель a_k кончил наблюдать раньше, то имеются наблюдатели, начавшие следить позже, чем начал a_k, а потому можно выбрать наблюдателя a_{k+1}). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — все выбранные таким образом наблюдатели. Ясно, что промежутки наблюдения $a_1, a_3, a_5, \ldots$ не пересекаются; точно так же не пересекаются промежутки, в которых следили наблюдатели $a_2, a_4, a_6, \ldots$ Действительно, если бы, например, нашелся момент времени, когда наблюдали a_1 и a_3, то это означало бы, что наблюдатель a_2 выбран неправильно, так как a_3 начал наблюдать позже, чем начал a_2, но еще до того, как кончил a_1. Так как промежутки наблюдения $a_1, a_3, a_5, \ldots$ не пересекаются, то этих наблюдателей за t *мин* меньше t. Поэтому если t — целое, их не больше $t-1$, а если t не целое, то не больше $[t]$. Тем же числом ограничивается количество наблюдателей «четной группы»: $a_2, a_4, a_6, \ldots$

Улитка не могла проползти больше суммы всех перемещений, зафиксированных всеми наблюдателями. Но в условии задачи число наблюдателей ничем не было ограничено. Теперь же мы из множества всех наблюдателей выбрали такое подмножество, которое тоже покрывает весь интервал наблюдения и при этом ограничено некоторым числом ($2(t-1)$, если t — целое, и $2[t]$, — если не целое). Это число и есть максимальное возможное перемещение улитки.

Третья часть задачи — выяснение того, каков может быть минимальный путь улитки. Для этого рассмотрим всех «нечетных» наблюдателей $a_1, a_3, \ldots$, как это делалось выше, и оценим число этих наблюдателей снизу. Если все зазоры между соседними

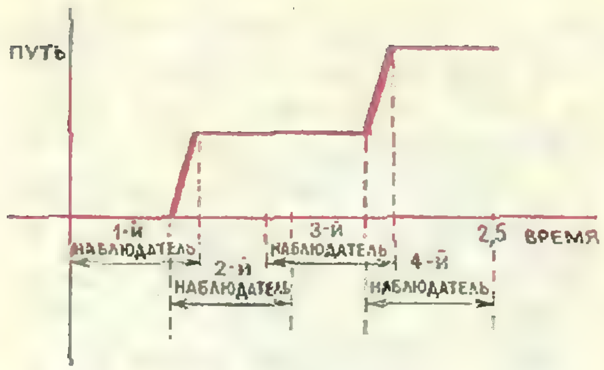


Рис. 9.

нечетными наблюдателями меньше единицы, то число нечетных наблюдателей должно быть больше $\left[\frac{t}{2}\right]$. Это означает, что улитка не могла проползти путь, меньший $\left[\frac{t}{2}\right]+1$. Это и есть ответ на второй вопрос задачи. На графике (см. рис. 9) показано, как должна двигаться улитка, чтобы этот минимум был достигнут.

Задача. Попробуйте теперь правильно сформулировать лемму, о которой говорится в первом абзаце нашего решения.

Н. Н. Константинов

М118

С четырех сторон шахматной доски размером $n \times n$ построена кайма шириной в два поля.

Доказать, что эту кайму можно обойти шахматным конем, побывав на каждом поле один и только один раз, в том и только в том случае, когда $n-1$ кратно 4.

Для решения задачи достаточно показать, что четырехстороннюю кайму ширины 2 при $n=4l+1$ можно обойти конем, а при $n \neq 4l+1$ — нельзя.

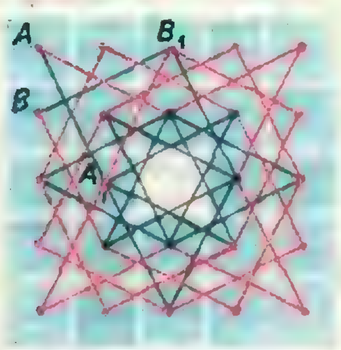


Рис. 10. Здесь каждое поле соединено черными отрезками с теми полями, в которые из него можно попасть одним ходом коня. Красная линия — путь с концами А и В, проходящий по всем полям по одному разу. (Заметим, что если вместо отрезка A_1B_1 включить в путь отрезки AA_1 и BB_1, то он распадается на два замкнутых пути).

Доказательство первой части этого утверждения достаточно очевидно.

На рисунке 10 показано, как обойти кайму при $l=0$ ($n=1$). Вставляя последовательно по четыре блока 2×4, изображенных на рисунке 11, можно получить нужный обход при любом l (для $l=1$ такое построение приведено на рисунке 12).

Для доказательства второй более трудной части утверждения нам будет полезна такая лемма, справедливая для любого конечного множества полей на бесконечной шахматной доске.

Лемма. *Если в множестве G, состоящем из g полей, можно выделить k подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, которые содержат m полей, причем*

1) эти подмножества не имеют общих полей;

2) ни с одного поля подмножества A_i конь не может пройти ни на одно поле подмножества A_j при $i \neq j$;

3) $g-m<k-1$, то область G нельзя обойти ходом коня.

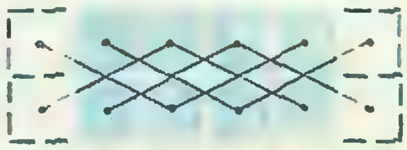


Рис. 11.

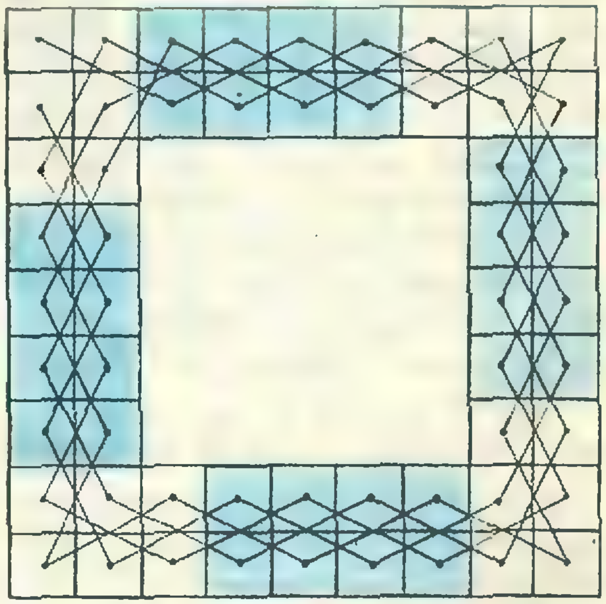


Рис. 12. Вставленные блоки выделены синим цветом.

Доказательство леммы достаточно очевидно. Действительно, если конем удастся обойти всю область G, то путь коня должен пройти через все k подмножеств. При этом в силу условия 2) леммы при переходе из подмножества в подмножество коню придется не менее чем $k-1$ раз побывать вне подобластей, но вне подобластей по условию

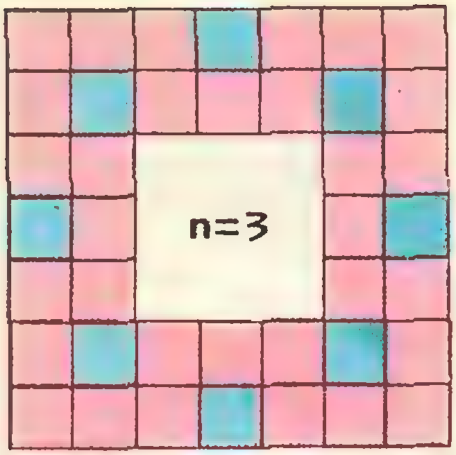


Рис. 13. Красные клетки — это подмножество A_1. Все остальные клетки — это A_2.

3) леммы не найдется такого числа полей. Лемма доказана.

Рассмотрим три случая: 1) $n=4t$; 2) $n=4t+2$ и 3) $n=4t+3$.

Начнем с более легкого случая 3), когда $n=4t+3$. Разделим всю кайму на два подмножества A_1 и A_2 так, как показано на рисунке 13. (Здесь $t=0$; для того, чтобы получить рисунок при других t, нужно вставлять блоки, изображенные на рис. 11.)

Легко видеть, что из подмножества A_1 нельзя попасть в подмножество A_2 ходом коня. Поэтому можно применить лемму ($k=2$, $m=g$).

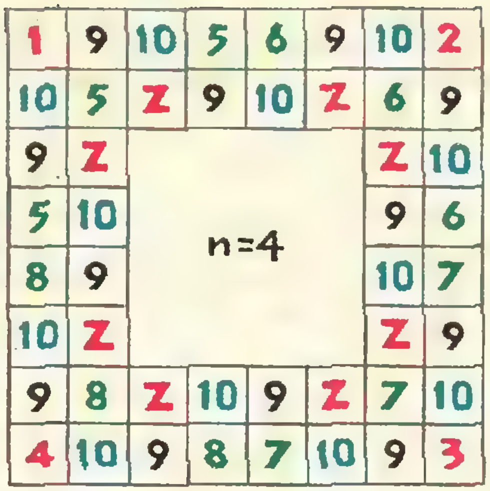
В оставшихся двух случаях $n=4t$ и $n=4t+2$ основная трудность — описание полей, которые не войдут ни в одно из подмножеств. Мы будем называть их нейтральными.

Случай 1) ($n=4t$). При $t>0$ нейтральными объявим поля, имеющие по одной общей стороне с угловыми полями окаймляемой доски. (На рисунке 14 они помечены буквой Z.) Их будет 8. Подмножества — их будет 10 — определяются следующим образом: берем незанятое поле и все те поля, в которые можно «пройти» из него конем, не пользуясь нейтральными клетками. Все эти поля и образуют одно подмножество. Для того, чтобы из рисунка 14 получить рисунок при любом $t>0$, нужно вставлять блоки, изображенные на рисунке 11. При $t=0$ нейтральные поля и подмножества изображены на рисунке 15.

Случай 2) ($n=4t+2$) разбирается аналогично. Здесь при $t>0$ число нейтральных полей 12, а число подмножеств 14. Как выбирать нейтральные поля при $t>0$ и при $t=0$, видно из рисунков 16 и 17.

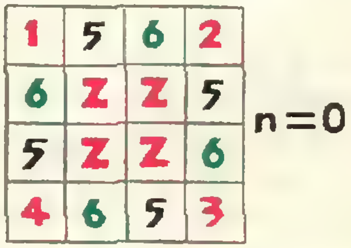
Задача **М118** является частным случаем такой задачи: дан «граф» (система «вершин», некоторые из которых «соединены ребрами»), требуется найти путь, обходящий вершины по одному разу — так называемый *гамильтонов* путь.

Заметим, что в общем случае эта задача не решена — не найдено простого алгоритма, позволяющего для произвольного графа построить гамильтонов путь и даже выяснить,



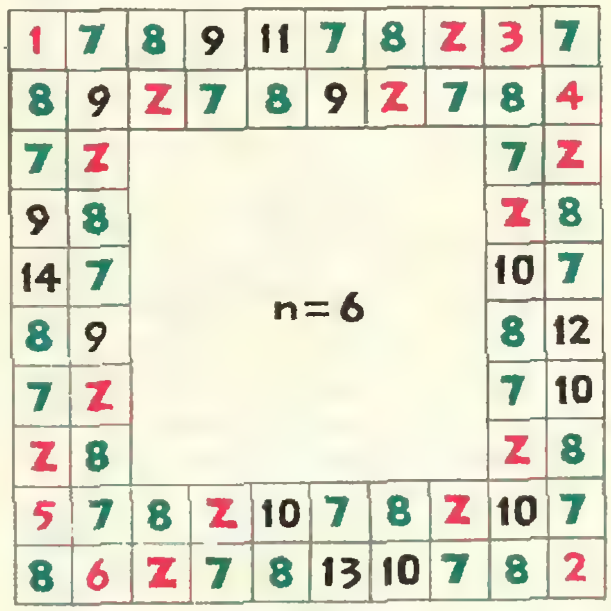
1	9	10	5	6	9	10	2
10	5	Z	9	10	Z	6	9
9	Z					Z	10
5	10					9	6
8	9		n=4			10	7
10	Z					Z	9
9	8	Z	10	9	Z	7	10
4	10	9	8	7	10	9	3

Рис. 14.



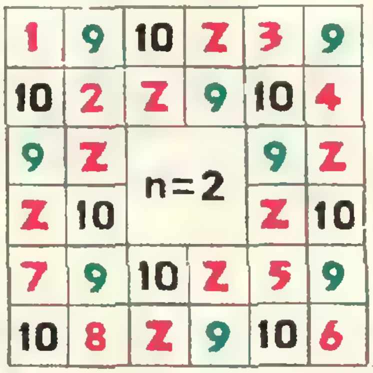
1	5	6	2
6	Z	Z	5
5	Z	Z	6
4	6	5	3

Рис. 15.



1	7	8	9	11	7	8	Z	3	7
8	9	Z	7	8	9	Z	7	8	4
7	Z							7	Z
9	8							Z	8
14	7							10	7
8	9			n=6				8	12
7	Z							7	10
Z	8							Z	8
5	7	8	Z	10	7	8	Z	10	7
8	6	Z	7	8	13	10	7	8	2

Рис. 16.



1	9	10	Z	3	9
10	2	Z	9	10	4
9	Z			9	Z
Z	10	n=2		Z	10
7	9	10	Z	5	9
10	8	Z	9	10	6

Рис. 17.

существует ли такой путь. Похожая на нее задача — отыскать путь, проходящий по разу по всем ребрам,— намного проще.

Ю. Ю. Соркин

М119

Докажите, что если на каждой грани выпуклого многогранника выбрать по точке и провести из этой точки вектор, который направлен перпендикулярно соответствующей грани во внешнюю сторону и длина которого равна площади этой грани, то сумма всех таких векторов будет равна нулю.

Убедительное и короткое доказательство можно получить из физических соображений. Представим себе, что замкнутый сосуд, внутренняя полость которого имеет форму нашего многогранника, заполнен газом под давлением P и помещен в пустоту (внешние силы — вес и т. п. — отсутствуют). Тогда сила давления газа на грань площади S равна PS и направлена перпендикулярно к этой грани во внешнюю сторону (как коротко говорят, «по внешней нормали» к грани). Конечно, можно принять P равным 1; тогда силы, действующие на грани, будут равны тем векторам, о которых идет речь в условии задачи. Так как сосуд не может двигаться с ускорением под действием лишь внутренних сил, то векторная сумма этих сил, то есть сумма наших векторов, равна нулю.

Приведем и чисто математическое доказательство. (Мы не будем здесь подробно обсуждать интересный вопрос о том, в какой мере проведенное выше рассуждение можно считать «строгим доказательством». Заметим, что все используемые в нем физические понятия и законы можно было бы ввести в рамках строгой математической «дедуктивной» теории: понятия получили бы точные определения, законы — строгие доказательства, а данные опыта рассматривались бы как подтверждение полезности определений и теорем; но в школьном — да и не только в школьном — курсе физики такой подход не очень популярен. К тому же, чтобы осуществить такую «формализацию» курса физики, школьного курса математики было бы явно недостаточно. Для решения же нашей задачи вполне хватит и школьной математики.)

Нам понадобится такая лемма (ее доказательство мы даем в конце решения): *если многоугольник имеет площадь S и его плоскость образует с некоторой плоскостью π угол α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), то площадь проекции этого многоугольника на плоскость π равна $S\cos\alpha$.*

Возьмем произвольную ось (направленную прямую) l и перпендикулярную ей плоскость π. Спроектируем все грани нашего многогранника на плоскость π, а соответствующие им векторы — на ось l. Если площадь одной из граней равна S, а угол, образуемый ее «внешней нормалью» с осью l, равен α, то проекция вектора на ось l равна (с учетом знака) $S\cos\alpha$, а площадь проекции грани на плоскость π равна $|S\cos\alpha|$. Мы пишем знак модуля, потому что угол α может быть не только острым (рис. 18а; грани, для которых $\cos\alpha \geqslant 0$ мы называем *верхними*), но и тупым (рис. 18, б; грани, для которых $\cos\alpha < 0$, мы называем *нижними*).

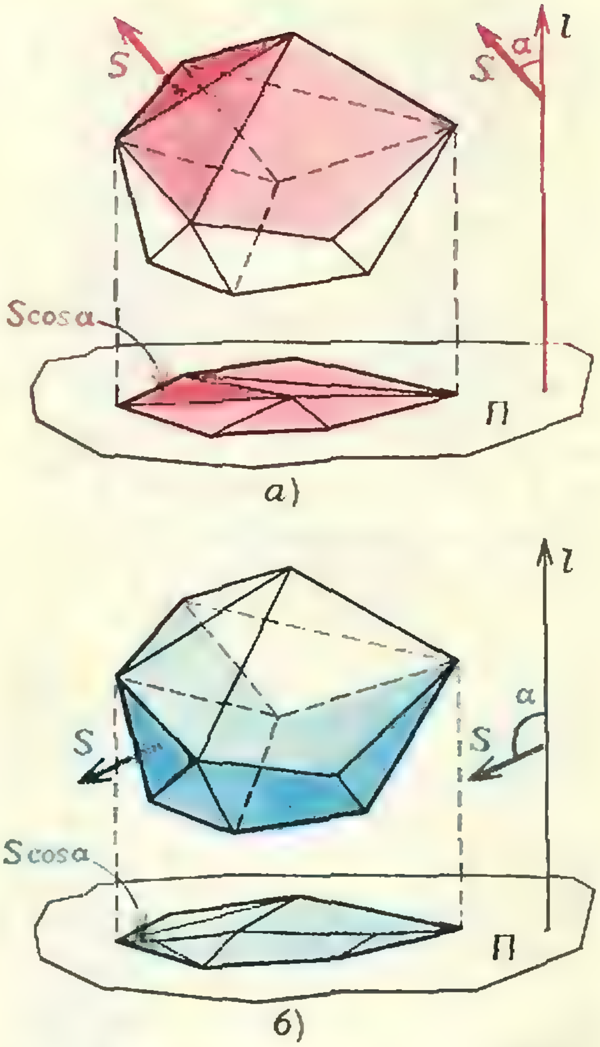


Рис. 18. а) верхние грани: $0 \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$; б) нижние грани: $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$.

Рассмотрим теперь многоугольник, в который проектируется наш многогранник (на плоскость π). Этот многоугольник, как видно из рисунков 18а и 18б, можно составить из проекций всех верхних граней, а можно — из проекций всех нижних граней. (Здесь мы пользуемся тем, что многогранник — выпуклый, поэтому на каждой прямой, параллельной l и пересекающей многогранник, найдется одна точка, принадлежащая верхним граням, и одна — нижним). Поэтому, если отделить среди чисел $S\cos\alpha$ положительные и отрицательные, то сумма тех и других по модулю будет одинаковой. Следовательно, сумма всех чисел $S\cos\alpha$, соответствующих разным граням, равна 0. Итак, сумма проекций наших векторов на ось l, или, что то же самое *), проекция их суммы на ось l равна 0. Но ось l выбрана произвольно, следовательно, сумма векторов равна 0.

Доказательство леммы. Если $\alpha=0$ или $\alpha=90°$, то это ясно. В остальных случаях многоугольник можно разрезать на трапеции и треугольники, основания которых параллельны плоскости π (для этого достаточно провести плоскости, параллельные π, через все вершины многоугольника). Для этих трапеций и треугольников утверждение леммы очевидно, поскольку при проектировании их основания не изменяются, а высоты умножаются на $\cos\alpha$.

Мы получили много решений этой задачи и «физических» (*М. Белау* из Мелитополя, *А. Шерстюк* из Николаева, *А. Глушко*, *С. Лягушин*, *Л. Пугач*, *М. Розов*, *Р. Шигапов*), и «математических» (*А. Бугай* из Изяславля Хмельницкой обл., *Л. Книжнерман* и *А. Братковский* из Москвы, *Л. Брагинский* из Фрунзе, *Н. Корниенко*, *М. Илларионов*, *А. Меркурьев*, *И. Шпарлинский*, *В. Кореняко*, *А. Николаев*, *А. Колдобский*, *О. Худавердян*, *Э. Туркевич*, *Б. Хафизов*, *А. Черняк*, *А. Шерстюк*). Авторы последних, как правило, решают задачу для тетраэдра, а затем пользуются тем, что любой многогранник можно разрезать на тетраэдры.

Заметим в заключение, что утверждение задачи верно и для невыпуклых многогранников.

M120

В некотором множестве введена операция $\bullet$, которая каждым двум элементам a и b этого множества ставит в соответствие элемент $a \bullet b$ из этого множества. Известно, что

1°. для любых трех элементов a, b и c
$$a \bullet (b \bullet c) = b \bullet (c \bullet a);$$

2°. если $a \bullet b = a \bullet c$, то $b = c$;

3°. если $a \bullet c = b \bullet c$, то $a = b$.

Докажите, что операция $\bullet$

а) коммутативна, то есть для любых двух элементов a и b
$$a \bullet b = b \bullet a;$$

б) ассоциативна, то есть для любых трех элементов
$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).$$

Из условий 1° и 2° следует коммутативность: подставив в 1° a вместо b, получим, что для любых a и c
$$a \bullet (a \bullet c) = a \bullet (c \bullet a),$$
а отсюда следует, согласно 2°, что $a \bullet c = c \bullet a$.

Из условия 1° и коммутативности следует ассоциативность: для любых a, b и c, согласно 1°,
$$a \bullet (b \bullet c) = b \bullet (c \bullet a) = c \bullet (a \bullet b)$$
и, пользуясь коммутативностью, получаем
$$a \bullet (b \bullet c) = c \bullet (a \bullet b) = (a \bullet b) \bullet c.$$

Задача решена. Условие 3°, как заметили многие читатели, оказалось лишним. Разумеется, можно было использовать его вместо 2°. Если условие 1° выполнено, то каждое из условий 2° и 3° следует из другого.

Мы видели, что из 1° и коммутативности следует ассоциативность. Конечно, если операция $\bullet$ коммутативна и ассоциативна, для нее верно 1°. Однако из ассоциативности и условия 1° коммутативность не следует (то есть без условий 2° или 3° в доказательстве коммутативности обойтись нельзя). Приведем пример, подтверждающий это: пусть множество состоит из четырех элементов 0, 1, 2, 3 и операция $\bullet$ определена так: $1 \bullet 2 = 3$, и для любой другой пары элементов $a \bullet b = 0$ (в частности, $2 \bullet 1 = 0$); в этом примере $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) = 0$ для любых трех a, b и c.

Попробуйте придумать пример, доказывающий, что из одного условия 1° не следует ассоциативность (один такой пример указан в конце журнала на стр. 80).

Правильное решение этой задачи прислали *А. Клейн* из Одессы, *А. Каримов* из Уфы, *А. Мартынов* из Москвы.

M121

Докажите, что для любых n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется такое натуральное $k \leqslant n$, что каждое из k чисел
$$a_k, \quad \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \quad \frac{a_{k-2}+a_{k-1}+a_k}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$$
не превосходит
$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Пусть это не так. Тогда существуют такие вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что для каждого k $(1 < k \leqslant n)$ найдется l $(0 \leqslant l < k)$ такое, что $\dfrac{a_{l+1}+a_{l+2}+\ldots+a_k}{k-l}$ больше
$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = A.$$

В частности, для $k=n$ найдется $l=n_1$ такое, что среднее арифметическое чисел от a_{n_1+1} до a_n больше A. Возьмем теперь $k=n_1$; для него найдется $l=n_2$ $(0 \leqslant n_2 < n_1)$ такое, что среднее арифметическое чисел от a_{n_2+1} до a_{n_1} больше A; если $n_2 > 0$, то возьмем $k=n_2$ и найдем по нему $l=n_3$ ..., и т. д. до тех пор, пока некоторое n_{r+1} не окажется нулем, то есть очередное среднее арифметическое будет браться от a_1 до a_{n_r} (рис. 19). Но если среднее арифметическое в каждой

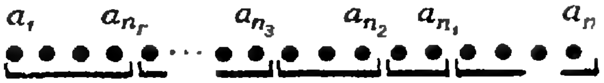


Рис. 19.

---

*) См. «Квант» № 6, стр. 25, 1972 г.

группе больше A, то и среднее арифметическое всех чисел больше A (действительно, если сумма чисел в первой группе больше $(n-n_1)A$, во второй — больше $(n_1-n_2)A$ ..., в последней — больше n_rA, то сумма всех больше nA). Но через A мы как раз и обозначили среднее всех n чисел. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно.

Многие наши читатели рассуждали иначе. Например, полезно вычесть из каждого из данных чисел величину A (их среднее арифметическое). Тогда задача сведется к частному случаю, когда среднее арифметическое всех чисел равно нулю. После этого можно отбросить знаменатели и говорить уже не о средних, а о суммах чисел и их знаках, и задача становится простым следствием такой задачи: если по окружности выписано несколько чисел, сумма которых равна 0, то найдется такое число, что оно само неотрицательно, сумма его со следующим по часовой стрелке неотрицательна, сумма его со следующими двумя неотрицательна и т. д. вплоть до суммы всех n чисел. Об этой задаче (в несколько иной формулировке) уже шла речь в «Кванте» (см. «Квант» № 1, 1972, стр. 42, решение задачи **М82**).

М122

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что расстояния от точки E до прямых AB, BC, CD равны соответственно p, q, r. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

Если дана окружность и на ней две точки P и Q, то через $s(PQ)$ мы будем обозначать синус вписанного угла, опирающегося на дугу PQ (поскольку $\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$ не зависит от того, в какой из двух дуг лежит точка M).

Нам понадобятся следующие два факта.

1°. Пусть PQ — хорда окружности радиуса R. Тогда $PQ=2Rs(PQ)$.

2°. Если P, Q и E — три различные точки окружности радиуса R, то расстояние от точки E до прямой PQ равно $2Rs(EP)\,s(EQ)$.

Утверждение 1° хорошо известно (из него выводится обычно «теорема синусов» для треугольника), а 2° легче всего вывести из 1°, подсчитав двумя способами площадь треугольника PQE. Если α — угол при вершине E этого треугольника, h — высота, опущенная из этой вершины, то удвоенная площадь равна $h\cdot PQ=EP\cdot EQ\cdot\sin\alpha$, откуда с учетом того, что $EP=2Rs(EP)$, $EQ=2Rs(EQ)$, $PQ=2Rs(PQ)=2R\sin\alpha$, получаем $h=2Rs(EP)\,s(EQ)$.

Теперь задача **М122** решается мгновенно: по условию

$$\begin{aligned} p &= 2Rs(EA)\,s(EB),\\ q &= 2Rs(EB)\,s(EC),\\ r &= 2Rs(EC)\,s(ED), \end{aligned}$$

следовательно, расстояние от точки E до прямой AD равно

$$2Rs(EA)\,s(ED)=pr/q.$$

Эта задача предлагалась в одном из вариантов письменного экзамена по математике на физфаке МГУ в 1971 году (там она была наиболее трудной).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф131—Ф137

Ф131

Легкая стеклянная трубка длины l и поперечного сечения S, заполненная целиком ртутью и запаянная с одного конца, расположена горизонтально в резервуаре со ртутью вблизи поверхности. Какую минимальную работу надо совершить для того, чтобы перевести трубку в вертикальное положение, в котором она будет касаться открытым концом поверхности ртути?

Работа, необходимая для перемещения трубки, не зависит от способа, которым мы будем переводить трубку в вертикальное положение. Можно, например, поворачивать трубку вокруг ее открытого конца, можно повернуть трубку вокруг середины и затем вытащить из ртути и, наконец, можно повернуть ее вокруг закрытого конца и затем снова вытащить из ртути. Удобнее всего рассмотреть последний способ.

При перемещении части ртути внутри резервуара из одного места в другое работа не затрачивается, так как потенциальная энергия системы не меняется. Поэтому при повороте трубки вокруг ее запаянного конца работа также не затрачивается. Следовательно, нужно учитывать только работу, необходимую для «вытаскивания» трубки из ртути.

Если конец трубки находится над поверхностью на высоте x (рис. 20), то сверху на него действует сила атмосферного давления $F_1=P_0S$, а снизу на донышко трубки действует сила $F_2=P\cdot S$, где P — давление на донышко. P можно найти, записав условие равновесия столба ртути в трубке

$$P+\rho gx=P_0.$$

(Давление в точке B должно быть равно P_0.) Отсюда

$$P=P_0-\rho gx.$$

Сила, с которой нужно вытаскивать трубку, очевидно, равна разности сил F_1 и F_2:

$$F=F_1-F_2=\rho gxS.$$

Эта сила пропорциональна x.

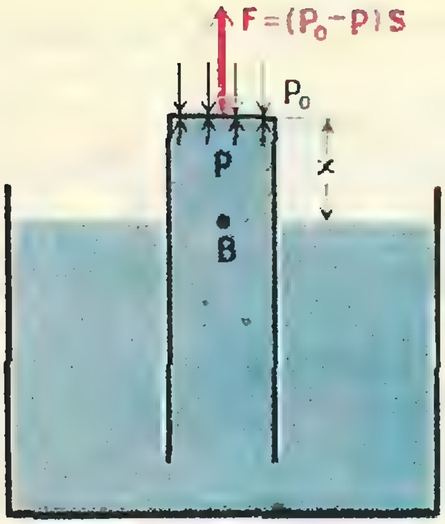


Рис. 20.

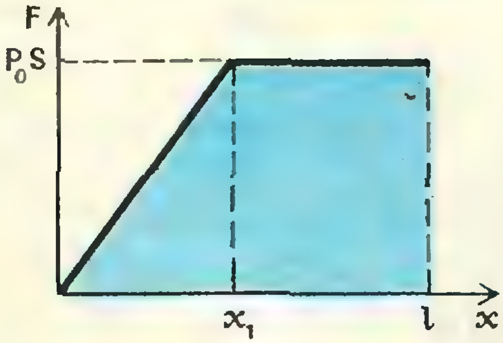


Рис. 21.

Однако это верно только до тех пор, пока P не стало равным нулю, то есть при

$$x \leqslant \frac{P_0}{\rho g} = 0,76 \text{ м}.$$

Если длина трубки l больше $x_1 = P_0/\rho g =$ $= 0,76$ м, то при $x > x_1$ $P = 0$ (давлением паров ртути можно пренебречь), и сила, с которой нужно «тащить» трубку, равна просто $F_1 = P_0S$.

Нарисуем график зависимости силы F от x (рис. 21). Работа, необходимая для вытаскивания трубки, равна площади фигуры *под этим графиком. Поэтому, если* $l < x_1$, то

$$A = \frac{1}{2}\rho g l S \cdot l = \frac{1}{2}\rho g S l^2.$$

При $l > x_1$

$$A = \frac{1}{2}\rho g S x_1^2 + P_0 S (l - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2} P_0 S x_1 + P_0 S (l - x_1) =$$

$$= P_0 S \left(l - \frac{1}{2} x_1 \right).$$

Ф132

Цилиндр массы m раскрутили и поместили между двумя закрепленными плоскостями, расположенными под углом 2α друг к другу (рис. 22). Зная, что коэффициент трения между цилиндром и плоскостями равен k, определить силы, с которыми цилиндр действует на плоскости.

Рассмотрим равновесие цилиндра. На него действуют силы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ нормальных реакций плоскостей, силы трения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и сила тяжести $m\mathbf{g}$. Поверхность цилиндра скользит по плоскостям, поэтому $F_1 = kN_1$ и $F_2 = kN_2$.

Так как цилиндр находится в равновесии, то сумма проекций на любую ось всех действующих на него сил должна быть равна нулю. Спроектируем все силы на две взаимно перпендикулярные оси — горизонтальную и вертикальную:

$$-N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha + F_1 \sin\alpha + \\ + F_2 \sin\alpha = 0,$$

$$N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha + F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha - \\ - mg = 0.$$

Подставив в эти уравнения значения $F_1 = kN_1$ и $F_2 = kN_2$, разделив левые и правые части на $\cos\alpha$, получим:

$$(N_1 + N_2) k \operatorname{tg}\alpha - N_1 + N_2 = 0,$$

$$(N_1 + N_2) \operatorname{tg}\alpha + kN_1 - kN_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Решая уравнения совместно, получим

$$N_1 = \frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 + k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)},$$

$$N_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 - k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)}.$$

Следовательно, силы трения

$$F_1 = \frac{mgk}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 + k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)},$$

$$F_2 = \frac{mgk}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 - k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)}.$$

Зная силы, действующие на цилиндр, нетрудно найти силы, действующие со

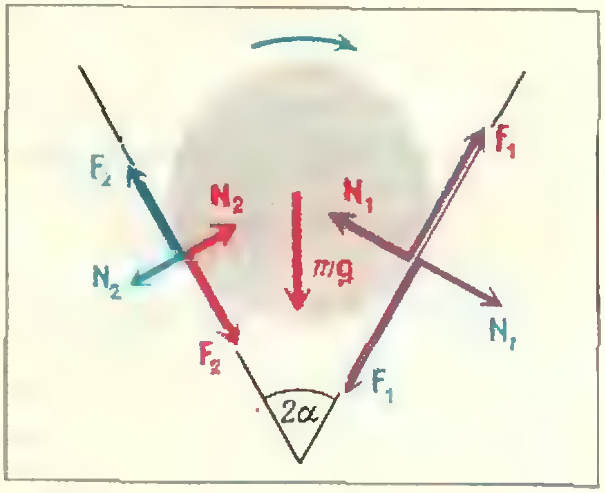


Рис. 22.

стороны цилиндра на плоскости. Согласно третьему закону Ньютона эти силы равны по величине и противоположны по направлению. На рисунке они отмечены синими векторами.

Так как сила N_2 не может быть отрицательной, то решение справедливо при $k \operatorname{tg} \alpha \leqslant 1$. Если $k \geqslant \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, то $N_2 = 0$ и $F_2 = 0$. При этом цилиндр или покоится, не касаясь левой наклонной плоскости, или поднимается вверх по правой наклонной плоскости.

Ф133

Замкнутая металлическая цепочка соединена нитью с осью центробежной машины и вращается с угловой скоростью ω (рис. 23). При этом нить составляет угол α с вертикалью. Найти расстояние от центра тяжести цепочки до оси вращения.

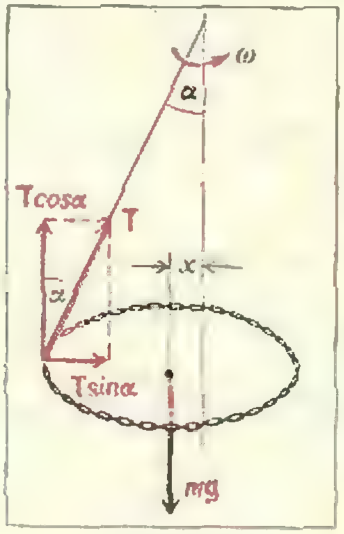


Рис. 23.

Силы, действующие на цепочку, показаны на рисунке: **T** — сила натяжения нити, $m\mathbf{g}$ — сила тяжести. Так как центр тяжести цепочки движется по окружности радиуса x, то, согласно второму закону Ньютона, сумма проекций всех сил, действующих на цепочку, на горизонтальное направление, должна быть равна произведению массы цепочки на центростремительное ускорение ее центра масс. То есть

$$T \sin \alpha = m\omega^2 x. \qquad (1)$$

В вертикальном направлении цепочка не перемещается; следовательно, сумма проекций всех сил, действующих на цепочку, на вертикальное направление, равна нулю:

$$T \cos \alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

Исключая из этих уравнений T, найдем

$$x = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

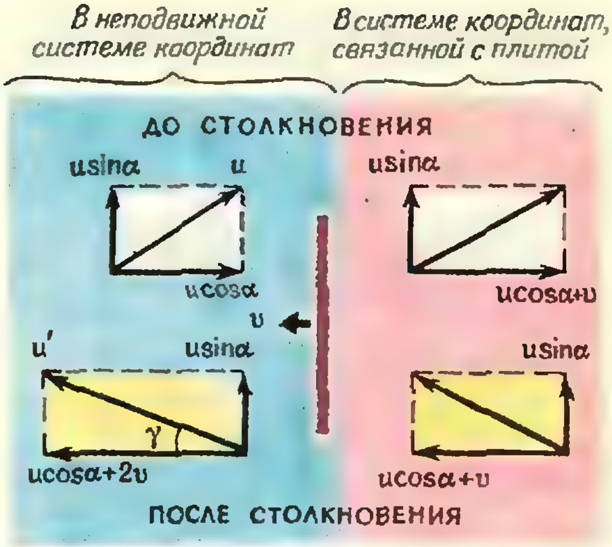


Рис. 24.

Ф134

Тяжелая плита движется со скоростью v в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Под углом α к направлению движения плиты летит со скоростью u легкий шарик. Определить величину и направление скорости шарика после его упругого столкновения с плитой.

а) Рассмотреть случай, когда скорость шарика направлена к плите и от нее.

б) Как изменится ответ, если плита движется в направлении, составляющем угол β с ее плоскостью?

а) Так как скорость плиты при соударении не меняется, система плита — шарик не является изолированной и для решения задачи нельзя воспользоваться законом сохранения импульса. Поэтому поступим так. Разложим скорость шарика на составляющие — параллельную плите и перпендикулярную ей — и перейдем в систему координат, связанную с плитой. В этой системе координат составляющая скорости шарика, параллельная плите, равна $u \sin \alpha$, а перпендикулярная плите равна $u \cos \alpha + v$ (рис. 24). После упругого столкновения шарика с плитой составляющая скорости шарика, параллельная плите, не изменится, а перпендикулярная плите будет той же по величине, но противоположной по направлению.

Теперь «вернемся» в неподвижную систему координат. Здесь составляющие скорости шарика после удара о плиту будут

$u \sin \alpha$ и $(u \cos \alpha + v) + v = u \cos \alpha + 2v$.

Это означает, что скорость шарика после удара о плиту в неподвижной системе координат равна

$$u' = \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha + (u \cos \alpha + 2v)^2} = \sqrt{u^2 + 4v^2 + 4vu \cos \alpha}. \qquad (1)$$

Эта скорость составляет с направлением

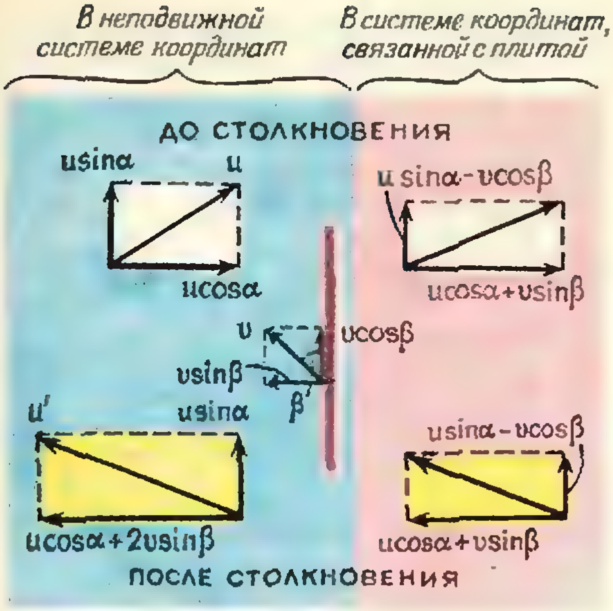


Рис. 25.

движения плиты угол γ такой, что

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha + 2v}. \qquad (2)$$

Мы подробно рассмотрели случай, когда скорость шарика направлена к плите. Ясно, что если скорость шарика направлена от плиты, то $u\cos\alpha < v$, решение остается верным, только во всех формулах нужно заменить $u\cos\alpha$ на $-u\cos\alpha$. При $u\cos\alpha \geqslant v$ шарик не столкнется с плитой.

б) Нетрудно обобщить задачу на случай, когда плита движется в направлении, составляющем угол β с ее плоскостью. Ясно, что и в этом случае при столкновении шарика с плитой изменится только перпендикулярная плите составляющая его скорости. Ее изменение такое же, как и в том случае, когда плита движется в направлении, перпендикулярном ее плоскости, со скоростью $v' = v\sin\beta$ (рис. 25). Поэтому мы получим правильный ответ, если в формулах (1) и (2) вместо v подставим v'. Тогда

$$u' = \sqrt{u^2 + 4v^2\sin^2\beta + 4uv\cos\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha + 2v\sin\beta}.$$

Ф135

Мина, лежащая на земле, взрывается от детонации. Осколки мины начинают двигаться симметрично во все стороны с одинаковыми скоростями v. Размеры всех осколков одинаковы. Какая часть осколков упадет вне круга радиуса R с центром в точке взрыва?

Запишем кинематические уравнения движения вдоль осей X и Y для осколка, вылетевшего под углом α к горизонту:

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = vt\sin\alpha - gt^2/2. \qquad (1)$$

Найдем из этих уравнений дальность полета осколка. В момент падения осколка на Землю его координата y равна нулю, а координата x — дальности полета l. Значит, в этот момент

$$vt_0\cos\alpha = l, \qquad vt_0\sin\alpha = gt_0^2/2.$$

(Здесь t_0 — время полета осколка.) Следовательно, дальность полета осколка

$$l = v\cos\alpha\cdot\frac{2v}{g}\sin\alpha = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha. \qquad (2)$$

Нетрудно определить, при каких углах вылета осколков дальность их полета больше R:

$$\frac{v^2\sin 2\alpha}{g} > R, \qquad \sin 2\alpha > \frac{gR}{v^2},$$

$$\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2 - \alpha_0,$$

где $\alpha_0 = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{gR}{v^2}$.

Проведем мысленно вокруг мины полусферу радиуса a. Очевидно, часть осколков n, вылетевших в интервале углов $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2 - \alpha_0$, равна отношению площади S боковой поверхности шарового слоя, который виден из центра полусферы в этом интервале углов, к площади полусферы:

$$n = \frac{S}{\pi a^2}.$$

Для того чтобы найти S, разобьем шаровой слой на тонкие слои, которые видны из центра полусферы в малом интервале углов $\Delta\alpha$. Площадь s боковой поверхности такого тонкого слоя с $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ равна его ширине $a\Delta\alpha = a(\alpha_2 - \alpha_1)$, умноженной на длину окружности среднего сечения слоя — ее радиус равен $a\cos\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$:

$$s = 2\pi a\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\cdot 2a\,\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

Так как $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ мало, то

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \approx \sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2},$$

$$s \approx 4\pi a^2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 2\pi a^2(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).$$

Площадь S боковой поверхности всего слоя равна сумме площадей боковых поверхностей тонких слоев:

$$S = s_1 + s_2 + \ldots = 2\pi a^2(-\sin\alpha_0 + \sin\alpha_1 - \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - \ldots) = 2\pi a^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) - \sin\alpha_0\right] = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_0\right).$$

Но

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_0\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha_0}{2}}.$$

Следовательно,

$$S = 2\sqrt{2}\,\pi a^2 \sqrt{\frac{1-\sin\left(\arcsin\frac{gR}{v^2}\right)}{2}} = 2\pi a^2\sqrt{1-\frac{gR}{2}}$$

и

$$n = \frac{S}{\pi a^2} = 2\sqrt{1-\frac{gR}{v^2}}.$$

Ф136

Плоский конденсатор имеет емкость C. На одну из пластин конденсатора поместили заряд $+q$, а на другую — заряд $+4q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

Если на пластинах плоского конденсатора имеются заряды $+Q$ и $-Q$, то напряженность поля между пластинами, как известно, равна $E = \frac{Q}{Cd}$. Это поле равно сумме одинаковых полей двух пластин. Поэтому напряженность поля одной пластины с равномерно распределенным зарядом равна $\frac{1}{2}\,\frac{Q}{Cd}$.

Напряженность поля пластины с зарядом $+q$ равна $\frac{1}{2}\,\frac{q}{Cd}$, а напряженность поля пластины с зарядом $+4q$ равна $\frac{2q}{Cd}$. В отличие от случаев обычных зарядов конденсатора, когда напряженности полей пластин направлены в одну сторону и складываются, в нашем случае напряженности полей, создаваемых пластинами, направлены в разные стороны. Поэтому напряженность однородного поля между пластинами равна разности напряженностей полей каждой из пластин (рис. 26):

$$E' = \frac{2q}{Cd} - \frac{1}{2}\,\frac{q}{Cd} = \frac{3}{2}\,\frac{q}{Cd}.$$

Теперь нетрудно найти разность потенциалов пластин. Она равна работе, необходимой для перенесения единичного положительного заряда с одной пластины на другую. На такой заряд действует сила, равная E'. Поэтому разность потенциалов пластин равна

$$\Delta\varphi = E'd = \frac{2}{3}\,\frac{q}{C}.$$

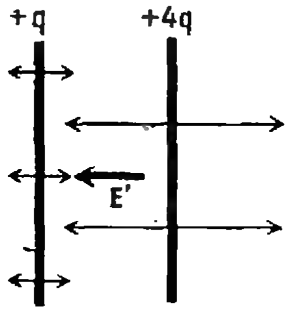


Рис. 26.

Ф137

Инфракрасное излучение определенной длины волны поглощается метаном (CH_4). При нормальных условиях слой чистого метана толщиной в 1 *см* поглощает 98% энергии излучения (то есть $q = 0{,}98$ часть энергии излучения). Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении по вертикали атмосферы Земли?

При расчете весовое содержание метана в атмосфере принять равным $\alpha = 1{,}4\cdot10^{-6}$.

Найдем вначале количество метана в вертикальном столбе земной атмосферы с площадью основания S. Давление этого столба на поверхность Земли равно атмосферному давлению P_0. С другой стороны, это давление равно силе тяжести воздушного столба, деленной на площадь S. Пренебрегая изменением ускорения силы тяжести с высотой (это можно сделать, так как граница атмосферы лежит на высоте около 200 *км*, а это много меньше радиуса Земли 6400 *км*), мы можем записать:

$$P_0 = \frac{mg}{S}.$$

Отсюда

$$m = \frac{P_0 S}{g}.$$

Умножив m на α, получим массу метана в этом столбе:

$$m_{CH_4} = \alpha m = \frac{\alpha P_0 S}{g}.$$

Теперь найдем, слой какой толщины x составляла бы эта масса метана при нормальных условиях (площадь основания цилиндра по-прежнему равна S).

Запишем уравнение газового состояния:

$$P_0 S x = \frac{m_{CH_4}}{\mu}\,RT,$$

где Sx — объем массы метана m_{CH_4}, μ — масса одного киломоля метана ($\mu = 16\,\frac{кг}{кмоль}$), $R = 8{,}3\cdot10^3\,\frac{дж}{град\cdot кмоль}$ — газовая постоянная, $T = 273°$ K — нормальная температура и $P_0 = 1$ *атм* — нормальное давление. Подставив в это уравнение выражение для массы метана, найдем

$$x = \frac{\alpha RT}{g\mu}\ (м).$$

Если энергия излучения равна вначале E_0, то после того, как излучение пройдет слой толщиной $d = 1$ *см*, энергия излучения станет равна $(1-q)E_0$. Следующий сантиметр метана поглотит q-ю часть этой оставшейся энергии излучения. В результате после того, как излучение пройдет слой метана толщиной 2 *см*, энергия излучения будет равна $(1-q)^2E_0$, и т. д. После прохождения слоя метана толщины x энергия излучения будет

$$E = (1 - q)^x\ E_0,$$

то есть составлять $(1 - q)^x$ часть первоначального излучения.

Подставив в эту формулу численные значения всех входящих в нее величин, найдем, что после прохождения атмосферы излучение будет составлять от первоначального

$$(1 - 0{,}98)^{\frac{1.4\cdot10^{-6}\cdot273\cdot8.3\cdot10^3}{10\cdot16\cdot10^{-2}}} \approx 0{,}02^2 \text{ часть.}$$

Редакция журнала получила более 170 писем читателей с решениями задач **Ф131**—**Ф137**. Правильные решения задач прислали: *А. Александров* (Глазов УАССР) **Ф131**, **Ф132**; *П. Амосов* (Ярославль) **Ф136**; *М. Артюхов* (Братск) **Ф134**; *Ю. Артюшин* (Ленинград) **Ф136**; *А. Баевский* (Гомель) **Ф133**, **Ф135**, **Ф136**, **Ф137**; *И. Бакши* (Грозный) **Ф136**; *В. Белов* (Вологда) **Ф133**, **Ф134**, **Ф136**; *И. Бобко* (Вильнюс) **Ф133**; *Л. Бригинский* (Фрунзе) **Ф131**, **Ф133**, **Ф135**; *А. Братковский* (Москва) **Ф131**; *Т. Вайнтрауб* (Кишинев) **Ф135**, **Ф136**; *В. Гринман* (Москва) **Ф136**; *С. Галакваридзе* (Тбилиси) **Ф135**, **Ф136**; *К. Гадшимурадов* (с. Мучерчан Магарамкентского р-на Даг. АССР) **Ф136**; *С. Граник* (Дзержинск Горьковской обл.) **Ф134**; *А. Гофман* (Орел) **Ф135**, **Ф136**; *Е. Голубков* (Москва) **Ф136**, **Ф137**; *О. Гольтяев* (Жуковский Московской обл.) **Ф131**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *В. Долматов* (Ташкент) **Ф131**, **Ф136**; *А. Демидов* (Москва) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф135**, **Ф136**; *А. Дудов* (Тамбов) **Ф136**; *В. Заблоцкий* (Донецк) **Ф134**, **Ф135**; *Б. Зотов* (Н.-Тагил) **Ф136**; *В. Зайцев* (Острогожск Воронежской обл.) **Ф135**; *С. Запесочный* (Ужгород) **Ф136**; *А. Истомин* (Подольск Московской обл.) **Ф131**; *О. Иванов* (Ленинград) **Ф134**, **Ф135**; *Н. Карпусь* (Кировское Донецкой обл. УССР) **Ф136**; *В. Колесников* (Челябинск) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *А. Кулагин* (Новокузнецк) **Ф135**; *В. Киба* (п. Замковка Ворошиловградской обл.) **Ф131**; *Л. Книжнерман* (Москва) **Ф132**, **Ф133**, **Ф135**; *В. Кокогуй* (Гомель) **Ф132**; *В. Коротких* (Новокузнецк) **Ф135**; *А. Коваленко* (Ростов-на-Дону) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *Г. Киперман* (Черновцы) **Ф134**; *А. Каграмов* (п. Кедровка Свердловской обл.) **Ф134**, **Ф136**; *А. Киселев* (Москва) **Ф134**; *С. Котко* (Воронеж) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**, **Ф137**; *И. Киселев* (Фрунзе) **Ф133**, **Ф136**; *М. Кацнельсон* (Магнитогорск) **Ф135**, **Ф136**; *А. Локитанов* (Лыткарино Московской обл.) **Ф135**; *В. Логозинский* (Ртищево Саратовской обл.) **Ф131**, **Ф134**, **Ф135**; *С. Лягушин* (Днепропетровск) **Ф131**, **Ф132**, **Ф133**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**, **Ф137**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф132**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *А. Мамула* (с. Дыбинцы Богуславского р-на Киевской обл.) **Ф131**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *В. Михнев* (Пятигорск) **Ф131**; *А. Набатов* (Евпатория) **Ф131**; *Е. Метт* (Ленинград) **Ф135**; *А. Масалов* (Москва) **Ф135**; *И. Мацяс* (Макеевка) **Ф133**; *С. Молотков* (Златоуст) **Ф136**; *Т. Новикова* (Ряжск Рязанской обл.) **Ф133**; *В. Нарожный* (Аксай Ростовской обл.) **Ф135**, **Ф136**; *Т. Обгадзе* (Тбилиси) **Ф135**, **Ф136**; *В. Переседов* (Похвистнево Куйбышевской обл.) **Ф131**; *А. Панин* (Гомель) **Ф136**; *С. Поляруш* (Жабинка Брестской обл.) **Ф135**, **Ф136**; *М. Перельмутер* (Херсон) **Ф135**; *М. Прегер* (Томск) **Ф131**; *И. Радюк* (Новогрудок Гродненской обл.) **Ф134**; *Ю. Рацин* (Рига) **Ф133**; *А. Редченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.) **Ф136**; *И. Ривец* (Фрунзе) **Ф134**, **Ф136**; *М. Ригмант* (Магнитогорск) **Ф136**; *М. Ривилис* (Ленинград) **Ф133**, **Ф136**; *Л. Рудицер* (Харьков) **Ф132**; *А. Сбоев* (п. Медведок Нолинского р-на Кировской обл.) **Ф136**; *С. Соколов* (Орша) **Ф134**; *А. Смирнов* (Горький) **Ф132**; *Л. Сафиуллин* (с. Б. Сабы Сабинского р-на ТАССР) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *М. Соломонович* (Кишинев) **Ф136**; *В. Склер* (ст. Бада Читинской обл.) **Ф133**; *И. Сугурова* (Самарканд) **Ф133**; *О. Саакян* (Ереван) **Ф131**; *П. Сергеев* (Грозный) **Ф132**, **Ф133**, **Ф136**; *В. Ткач* (с. Черняхов Острожского р-на Ровенской обл.) **Ф136**; *М. Темкин* (Минск) **Ф131**, **Ф133**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *В. Терентьев* (Павлово Горьковской обл.) **Ф133**, **Ф134**; *М. Трапезников* (п. В.-Нейвинск Свердловской обл.) **Ф131**; *Д. Фушман* (Черновцы) **Ф131**, **Ф132**, **Ф133**, **Ф134**, **Ф136**; *Н. Федин* (Омск) **Ф133**; *В. Хенкин* (Кировоград) **Ф136**; *В. Циркревич* (Бельцы МССР) **Ф136**; *А. Чивилев* (Химки Московской обл.) **Ф135**, **Ф136**; *Е. Часовников* (с. Нарычино Зыряновского р-на Восточно-Казахстанской обл.) **Ф134**; *А. Шерстюк* (Николаев УССР) **Ф136**; *А. Шамис* (Житомир) **Ф136**; *Н. Шабарин* (Москва) **Ф136**; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) **Ф136**, **Ф137**; *Г. Шепетько* (Давид-Городок Брестской обл.) **Ф137**; *М. Якубов* (Тахтаабадский р-он Андижанской обл. Уз. ССР) **Ф136**.

И. Ш. Слободецкий

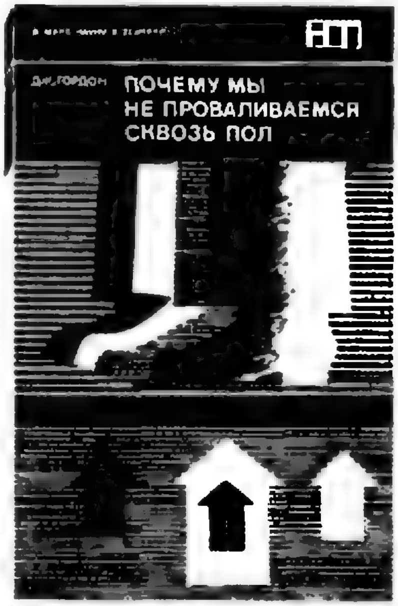
Почему мы не проваливаемся сквозь пол?

И в самом деле — почему? Каждый школьник ответит: потому что мы давим на пол, а пол давит на нас, силы давления равны по третьему закону Ньютона. Но ведь пол не учил закона Ньютона — откуда пол знает, что ему полагается давить с такой же силой? Как возникает сила противодействия? Почему пол выдерживает нагрузку? Почему вообще материалы обладают прочностью? Почему одни твердые тела прочнее других? Почему ломаются вещи? Почему сталь вязкая, а стекло — хрупкое? Что означают такие понятия, как прочность, вязкость, хрупкость? — с этого начинает Дж. Гордон свою книгу «Почему мы не проваливаемся сквозь пол?» *).

«Написать популярную книгу о прочности материалов и конструкций очень трудно,— пишет в предисловии к переводу этой книги академик Ю. Н. Работнов.— Эта область науки мало эффектна, в ней нет таких захватывающих идей и впечатляющих открытий, которые поражают воображение каждого. Когда на воздушной трассе появляется новый реактивный самолет, когда на Луну или одну из планет отправляется космический корабль, это понятно и интересно всем, но мало кто представляет себе, что великолепные технические достижения последних лет в значительной мере связаны с преодолением основной трудности — сделать конструкцию более прочной. Человечество было вынуждено решать проблему прочности в течение всей истории своего существования, но делалось это наощупь, эмпирически. В наше время учение о прочности — это большая и разветвленная наука о свойствах материалов и принципах ее создания, с одной стороны, и о рациональном использовании материала в конструкции, с другой. Эти две стороны неразрывно связаны между собой».

Дж. Гордон — профессор университета в Рединге (Англия), физик, известный специалист в области создания новых высокопрочных материалов, один из пионеров применения пластиков в авиастроении. Живо, остроумно, с чисто английским юмором и с глубочайшим знанием предмета автор рассказывает о накопленном веками опыте в науке о прочности.

Почему материалы сопротивляются внешним нагрузкам? Потому что в них возникают смещения. В природе нет и не может быть абсолютно жестких материалов, все материалы в той или иной степени обладают податливостью. Во многих телах смещения очень малы. «Если я наступлю на обычный строительный кирпич,— пишет Гордон,— то его высота уменьшится примерно на (1/20 000) *см*. А два любых соседних атома в кирпиче станут ближе один к другому на (1/500 000) Å, то есть на $2 \cdot 10^{-14}$ *см*». Надо ли считаться со столь малыми смещениями? Они, оказывается, не столь уж малы! «Стальные канаты, на которых висит мост через залив Форт в Шотландии,— приводит пример Гордон,— все время упруго растянуты примерно на 0,1%, но при общей их



длине около 3 *км* это растяжение составляет уже 3 метра! Эти малые, невидные смещения иногда приводят к тому, что стальной мост может внезапно обрушиться, унося с собой десятки или сотни человеческих жизней, а океанский пароход неожиданно и мгновенно разламывается пополам. За первые 60 лет XX века 27 океанских пароходов погибли, нежданно развалившись пополам в открытом море».

Основной закон упругости — закон, открытый в 1676 году Робертом Гуком,— утверждает: напряжение пропорционально деформации. Напряжение — это нагрузка, отнесенная к единице площади. Деформация — это изменение размера под действием нагрузки, отнесенное к начальному размеру. При всякой деформации в теле возникают напряжения. Величина, равная отношению напряжения к деформации — модуль Юнга — неотъемлемая характеристика материала. Модуль Юнга показывает, насколько материал податлив. Иначе говоря, он определяет жесткость материала. Прочность материала характеризуется напряжением, необходимым для того, чтобы этот материал разрушить. Малые деформации являются упругими. Для упругих деформаций процесс нагрузки и разгрузки обратим, его можно повторять тысячи и миллионы раз. Пружинка балансира в часах упруго нагружается и разгружается по 18 000 раз в час. Этот процесс длится годами. И все же наступает момент, когда пружинка разламывается. Почему?

---

*) Дж. Гордон. Почему мы не проваливаемся сквозь пол? Перевод с английского С. Т. Милейко, предисловие акад. Ю. Н. Работнова. М., «Мир», 1971, 272 стр., ц. 64 коп.

Гордон рассказывает о концентрации напряжения в материалах и конструкциях. Концентрация напряжений образуется на малом участке около отверстия, надреза, неоднородности материала, ступеньки или царапинки на поверхности. Местное, локальное напряжение может во много раз превысить среднее значение напряжения. Советский академик А. Ф. Иоффе показал, что если смочить поверхность, убрав таким образом влияние царапин и неровностей на ней, то хрупкий кристалл каменной соли можно сделать столь гибким, что его удается согнуть руками и даже завязать узлом. Всякая неровность поверхности, надрез, всякое отверстие создают концентрацию напряжений. Эта концентрация может оказаться смертельно опасной для прочной конструкции, для моста, парохода, здания.

Концентрация напряжений в материале приводит к образованию трещин. Когда стекольщик режет стекло, он не старается прорезать его на всю толщину листа, он делает лишь неглубокий надрез на поверхности, после чего по такой царапине стекло легко разламывается. Неопытный человек старается прорезать царапину поглубже, опытный мастер ведет острый алмаз, прорезая стекло тонкой, еле видной черточкой: он знает по опыту, что ослабляющее действие царапины зависит совсем не от ее глубины, а только от ее формы, от остроты ее кромки. Степень концентрации напряжений у трещины зависит от геометрии трещины, от формы. Если трещина, которая началась от того или иного дефекта в материале, не распространяется, то материал не будет разрушаться хрупко. Однако он может, подобно пластилину, течь и разрушаться от сдвига. Подробно разобрав концентрации напряжений, механизм образования трещин и механизм пластического течения, Гордон заключает: всегда существуют два механизма, ведущие спор за право разрушить материал,— пластическое течение и хрупкое растрескивание. Материал уступает тому или другому из них. Если он начинает течь прежде, чем растрескивается, то значит, он пластичен. Если же он растрескивается до того, как начал течь, то мы имеем дело с хрупким материалом. Потенциальные возможности обоих видов разрушения заложены во всех материалах. Как же создать материал с оптимальным сочетанием обоих возможностей? Об этом, оказывается, позаботилась природа. Гордон подробно разбирает прочность естественных материалов, рассказывает увлекательную историю использования в технике древесины, соломы, стеблей бамбука, объясняет причины прочности материала зубов, гибкости материала костей.

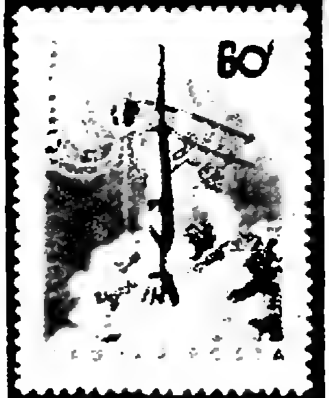
В кристаллических твердых телах роль концентраторов напряжений играют дислокации — малые нарушения порядка атомов в структуре кристалла. Именно поэтому любой кристаллический материал всегда оказывается гораздо менее прочным, чем это следует из теоретических расчетов. Сам Гордон своими научными работами внес немалый вклад в учение о дислокациях в кристалле. Пластическое течение кристалла объясняется тем, что около дислокации создается концентрация напряжений и дислокация начинает двигаться в кристалле, увлекая за собой присущее ей поле напряжений. Как же помешать этому процессу? Как упрочнить кристалл? Гордон рассказывает (к сожалению, довольно бегло) о том, как упрочняют кристаллы путем введения примесей или улучшения обработки поверхности. Но зато чрезвычайно подробно и исключительно интересно в книге рассказывается о новом направлении техники создания высокопрочных материалов — о разработке композиционных материалов, в частности, с кристаллическими волокнами — так называемыми «усами». Тонкие стеклянные нити оказываются тем прочнее, чем они тоньше. Стеклопластики или армированные пластмассы — это пластмассовая основа, пропитанная или заполненная тонкими волокнами. Уже сейчас созданы стеклопластики, которые прочнее стали. Захватывающие перспективы открывает использование волокон не стеклянных, а кристаллических, то есть тонких, нитевидных кристаллов. В нитевидных кристаллах можно достигнуть прочности, близкой к теоретической прочности материала. Гордон разбирает причины этого удивительного явления, показывая, что в нитевидном кристалле затруднено или совсем исключено движение дислокаций. Поэтому получение этих тонких, как паутинки, ничтожно малых кристаллов становится сейчас одним из самых актуальных вопросов науки и техники. Уже сейчас армированные материалы применяются для лопастей газовых турбин и для деталей самолетов.

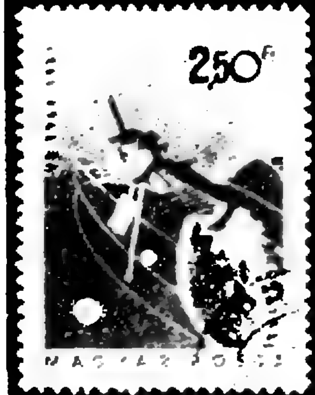
В последней главе книги Дж. Гордон описывает общую картину современного развития техники прочных материалов и прогнозирует ее развитие на ближайшие годы. Он рассказывает о возможности создания высокопрочных пористых материалов, о будущем армированных материалов.

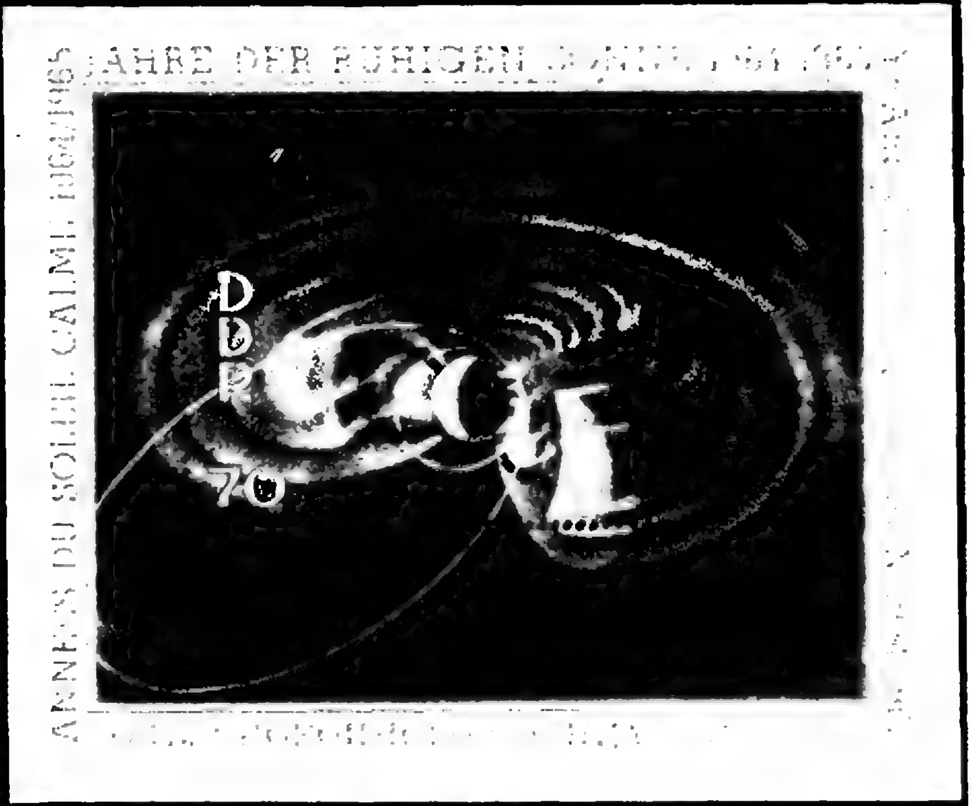
Мы рекомендуем нашим читателям прочитать эту интересную и полезную книгу.

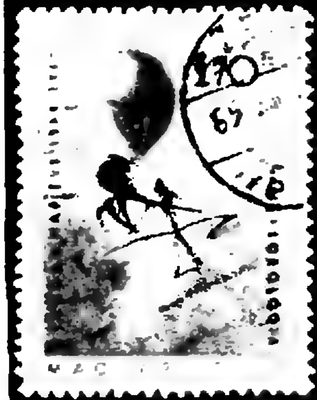
М. П. Шаскольская

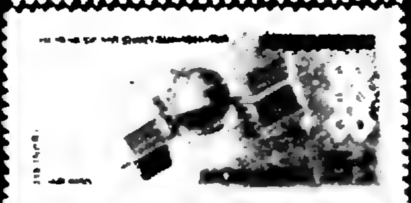
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

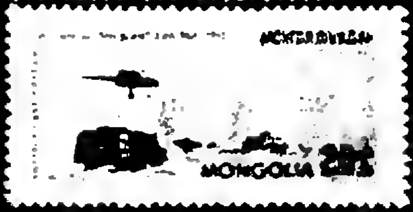

60f
MAGYAR POSTA


2,50Ft
MAGYAR POSTA


JAHRE DER RUHIGEN SONNE 1964/1965
ANNÉES DU SOLEIL CALME 1964/1965
DDR
70

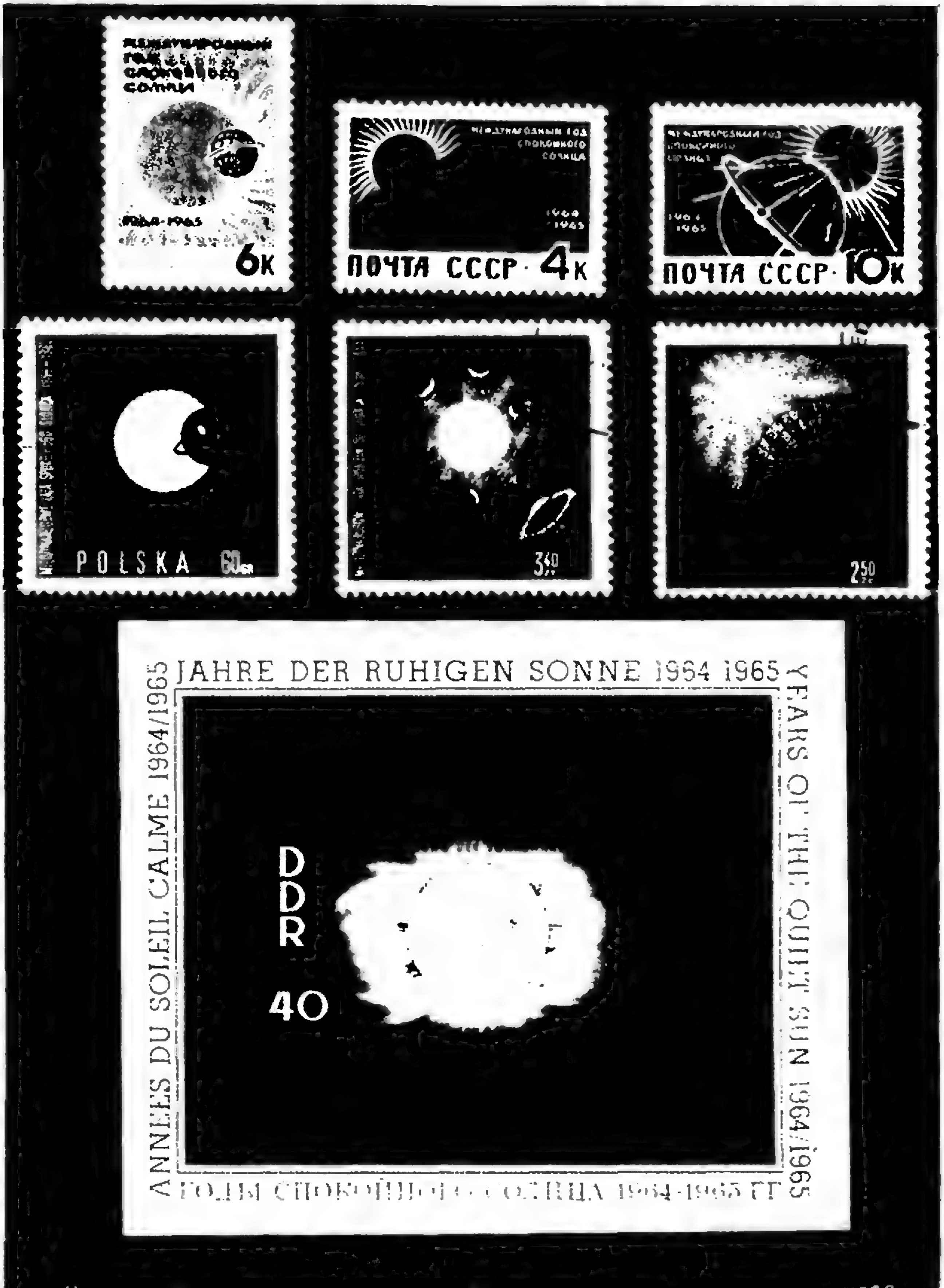






МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕЖДУНАРОДНОМУ ГОДУ СПОКОЙНОГО СОЛНЦА

Солнце шлет к нам на Землю не только видимый свет. Оно является источником различных невидимых электромагнитных излучений и потоков заряженных частиц. Эти излучения оказывают огромное влияние на состояние атмосферы, вызывая полярные сияния, магнитные бури, замирание радиоволн и многие другие эффекты. Солнечная активность периодически изменяется с интервалом в 11 лет. Международный геофизический год, с марками в честь которого мы познакомили читателей во втором номере «Кванта» за 1972 год, проходил в период исключительно высокой солнечной активности. Чтобы сравнить полученные тогда сведения о Солнце и земной атмосфере с аналогичными сведениями, полученными из наблюдений в период низкой солнечной активности, ученые решили повторить обширную программу международных исследований. В 1964—1965 годах был проведен «Международный год спокойного солнца» (МГСС). Многие страны — участники этой программы выпустили посвященные ей специальные почтовые марки.


МЕЖДУНАРОДНЫЙ ГОД СПОКОЙНОГО СОЛНЦА
1964-1965
6к
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ГОД СПОКОЙНОГО СОЛНЦА
1964 1965
ПОЧТА СССР 4к
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ГОД СПОКОЙНОГО СОЛНЦА
1964 1965
ПОЧТА СССР 10к
POLSKA 60 gr
3.40
2.50
JAHRE DER RUHIGEN SONNE 1964 1965
YEARS OF THE QUIET SUN 1964/1965
ГОДЫ СПОКОЙНОГО СОЛНЦА 1964-1965 ГГ
ANNEES DU SOLEIL CALME 1964/1965
DDR
40

Мы приводим здесь марки ряда социалистических стран, посвященные МГСС. Вверху изображена серия советских марок и три из шести польских марок, а также почтовый блок из ГДР. На странице 76 показан еще один блок ГДР с изображением радиационных поясов Земли, а также три венгерских и четыре монгольских марки.

В. А. Чепикоцев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Калейдоскопы»

1. Треугольники OAP и OA_1P равны ($\angle APO = \angle OPA_1 = 90^\circ$, $AP = PA_1$, OP — общая сторона), поэтому $\angle TOS = \angle A_1OP$ (как вертикальные), но $\angle A_1OP = \angle AOP$.

2. Надо нарисовать соответствующее разбиение плоскости и определить, где должно находиться изображение фундаментального треугольника при такой последовательности отражений. Сразу будет видно, что прямая, соединяющая любые точки фундаментального треугольника и полученного изображения, пересекает совсем другие ребра.

3. На рисунке 5 в тексте статьи соедините точку 0 со всеми изображениями точки A. Теперь утверждение задачи легко доказывается: $\angle AOA_2 = \angle AOR_2 + \angle R_2OA' + \angle A'OR_1' + \angle R_1'OA_2$, но $\angle R_2OA' = \angle R_2OA$ и $\angle R_1'OA_2 = \angle A'OR_1' = \angle AOR_1$, откуда $\angle AOA_2 = 2(\angle AOR_2 + \angle AOR_1) = 2\angle R_1OR_2$.

4. При отражении в зеркале ориентация фигуры меняется — часы, идущие «по часовой стрелке», в зеркале идут «против часовой стрелки». Для данного калейдоскопа изображения ребер фундаментального угла разобьют плоскость на три области, но внутри углов изображения наложатся с разной ориентацией.

5, 6. Стороны углов (изображений) после обхода вокруг вершины должны совпасть, это дает условие $k\alpha = 360^\circ$. Из того, что ориентация после обхода вокруг вершины не должна измениться, следует, что k четно, $k = 2n$ и $\alpha = \dfrac{180^\circ}{n}$.

7. Треугольники с углами а) 45°, 45°, 90°; б) 60°, 60°, 60°; в) 30°, 60°, 90°; прямоугольник. Постройте соответствующие разбиения плоскости и проверьте правильность этих калейдоскопов. Есть еще вырожденные калейдоскопы — углы, плоские зеркала; но их фундаментальные «многоугольники» неограниченны. Идея решения задачи такова: сумма углов, скажем, треугольника, равна 180°; один из углов не меньше трети от 180°, то есть 60°. Если один угол 90°, то два других в сумме дают 90°, один из них не меньше 45°. Если он 45°, то и другой 45° — подходит. Если 60°, то другой 30° — тоже подходит и т. д. Многоугольники с числом сторон больше четырех не годятся — у них найдется угол, превышающий 90°.

8. Надо взять точку X_1 внутри угла и центрально симметричную ей X относительно вершины угла. При несоблюдении условия $\alpha = \dfrac{180^\circ}{n}$ из точек T_1 и T_2, лежащих вблизи разных сторон угла, в точке X будут видны изображения разных точек фундаментального угла.

9. Образует.

10. Не считая точки-оригинала: а) $2r - 1$, б) $[2r]$ ($[\,]$ — целая часть числа).

11. а) Увидеть можно изображения двух разных точек, геометрически накладываются изображения бесконечного числа разных точек; б) можно увидеть изображения двух точек, геометрически почти во всех точках накладываются p изображений; в) в этом случае калейдоскоп правилен.

12. Система концентрических окружностей; между ними будут изображения, распространяющиеся по радиусам.

13. Пять. Надо нарисовать картинку и рассмотреть, сколько изображений сторон угла может пересечь прямая на плоскости.

14. Калейдоскоп в виде буквы П с бесконечными вниз вертикальными сторонами.

К статье «Отверстие — линза»

1. Согласно формуле (1) статьи разность хода δ_1 волн, идущих из точки S (рис. 1) в центр отверстия и в его край,

$$\delta_1 = \frac{D^2}{8a}.$$

Аналогично, разность хода δ_2 волн, идущих из центра и края отверстия в изображение S',

$$\delta_2 = \frac{D^2}{8b}.$$

Максимальная разность хода δ волн, идущих из источника S в его изображение S', согласно критерию Рэлея должна быть равна четверти длины волны света:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{D^2}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda}{4}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\left(\dfrac{D^2}{2\lambda}\right)} = \frac{1}{f'},$$

f' — минимальное фокусное расстояние от-

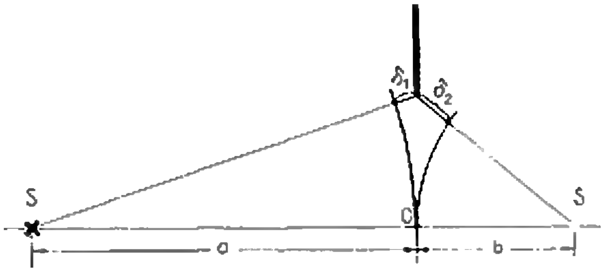


Рис. 1.

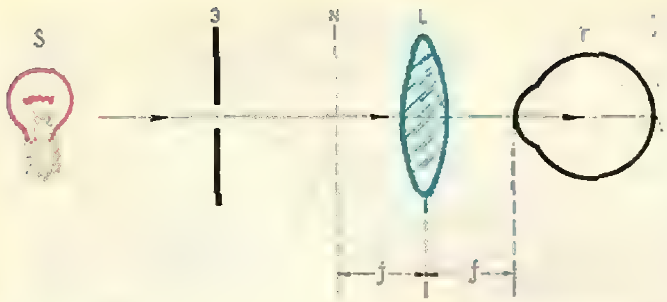


Рис. 2.

верстия. В общем случае, очевидно,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x},$$

где x принадлежит множествам точек (2) и (3).

2. «Наилучший фокус» отверстия лежит в бесконечности ($x=\infty$). Пользуясь формулой, выведенной при решении первой задачи, получим, что наилучшее изображение предмета, создаваемое отверстием, лежит на расстоянии $b=-a$ от отверстия, то есть совпадает с самим предметом.

Это наилучшее изображение представляет собой, однако, дифракционное распределение освещенности.

3. Полагая, что $\lambda=6\cdot10^{-4}$ *мм*, получим:

$$D=\sqrt{2f\lambda}\approx0{,}78\ \textit{мм}.$$

4. При решении этой задачи нужно воспользоваться формулой

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\left(\frac{D^2}{2\lambda}\right)}.$$

Отсюда (при $\lambda=6\cdot10^{-4}$ *мм*)

$$D=\sqrt{\frac{2ab\lambda}{a+b}}\approx0{,}2\ \textit{мм}.$$

При увеличении расстояния между предметом и «объективом» зрительной трубы максимальная разность хода волн, идущих из точки предмета в соответствующую точку изображения, может только уменьшиться. Следовательно, в «дырочную» зрительную трубу будут практически одинаково резко видны все предметы, находящиеся перед ее «объективом» на любом расстоянии от 50 *мм* до бесконечности.

5. Когда вы смотрите в лупу, глаз, как правило, бывает аккомодирован на бесконечность. При этом на его сетчатку отображается передняя фокальная плоскость N лупы. Оптическая схема опыта показана на рисунке 2. Зрачок глаза должен находиться вблизи заднего фокуса лупы.

Перед глазом поместите лупу с фокусным расстоянием 5—10 *см*. На вытянутой руке перед глазом и лупой держите листок фольги с проколотым в нем иглой отверстием. Через лупу и отверстие смотрите на удаленную на расстояние нескольких метров от вас электрическую лампу. Листок фольги с отверстием приближайте к лупе. При этом вы будете вначале наблюдать действительное изображение нити лампы, созданное отверстием; затем, когда листок фольги совпадет с передней фокальной плоскостью лупы, само отверстие, и, наконец, созданное отверстием мнимое изображение нити лампы.

К заметке «Описанная трапеция и средние»

(*см. стр. 49*)

Боковая сторона трапеции является средним арифметическим оснований — это следует из того, что в описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

Выразим высоту BH через основания

$$BH^2=AB^2-AH^2=\left[\frac{1}{2}(AD+BC)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(AD-BC)\right]^2=AD\cdot BC=a\cdot b.$$

Наконец, выразим отрезок BG через основания трапеции. Для этого заметим, что треугольники ABH и HBG подобны, откуда $\frac{BH}{BG}=\frac{AB}{BH}$. Следовательно,

$$\frac{1}{BG}=\frac{AB}{BH^2}=\frac{\frac{1}{2}(AD+BC)}{AD\cdot BC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

К заметке «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 7, 3-я стр. обл.*)

1. Будем искать лишь последнюю цифру чисел:

$$3^{1999}=(3^4)^{499}\cdot3^3=(81)^{499}\cdot27,$$

это число оканчивается на 7;

$$7^{1997}=(7^4)^{499}\cdot7^1=(2401)^{499}\cdot7,$$

это число тоже оканчивается на 7; разность этих чисел делится даже на десять.

2. Пузырек в теплую погоду меньше, чем в холодную: он сжимается расширяющейся водой.

3. На 1972-м месте стоит цифра 6.

4. 30 граммов.

5. 7 банок.

6. Пусть периметр равен $4a$, стороны прямоугольника $a-x$ и $a+x$. Тогда $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ и наибольшее при $x=0$.

К задаче «Не пропадает ли в вас Шерлок Холмс?»

(*см. «Квант» № 7, 4-я стр. обл.*)

Зашифрован следующий текст:

«Я спрятал ключ в погребе слева на второй полке на дне третьего ящика под различным железным хламом. Он завернут в бумагу. Не забудь при отъезде снова запереть дверь на замок, а ключ положить на то же место обратно. Желаю тебе приятного отдыха.

Коля.»

К «Задачам на неравенства»

(см. стр. 16, 25)

1. Задача допускает интересное геометрическое решение, основанное на теореме Пифагора. На рисунке дано решение для $n = 3$.

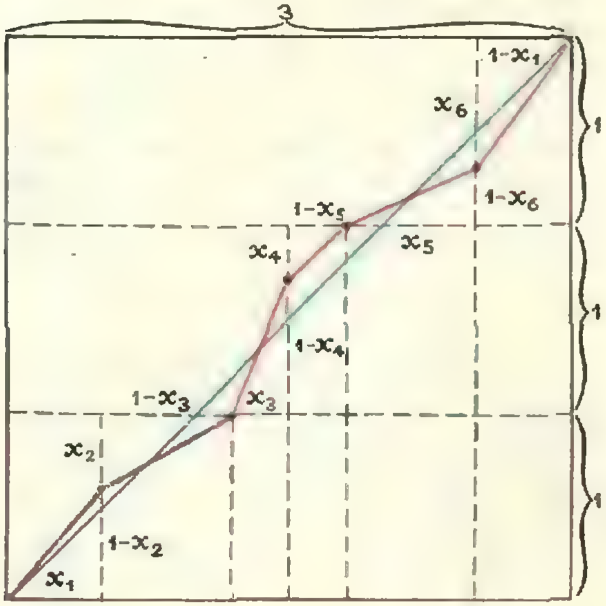


Рис. 3.

Длина ломаной, нарисованной красным цветом,— левая часть неравенства, длина диагонали — правая часть. Знак равенства имеет место лишь при выполнении следующих условий:

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n-1}; \quad x_2 = x_4 = \ldots = x_{2n} \text{ и } x_1 + x_2 = 1.$$

В этом случае ломаная сливается с диагональю квадрата.

2. Достаточно установить знак неравенства

$$\sqrt[3]{10} - 2 \vee 3 - \sqrt{8}.$$

Для этого воспользоваться тождеством

$$\left(\sqrt[3]{10}-2\right)\left(\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4\right) = (3-\sqrt{8})(6+2\sqrt{8}) = 2.$$

3. Прежде всего покажем, что

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} < 2.$$

$(n-1$ радикал$)$

Действительно, заменив последний из радикалов $\sqrt{2}$ на 2, мы увеличим x, то есть

$$x < \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2}}} = \ldots = \sqrt{2+2} = 2.$$

Перепишем исходное неравенство так: $4(2-\sqrt{2+x}) > 2-x$ и далее

$$(2-\sqrt{2+x})^2 > 0.$$

4. Указание. Оценить сумму

$$\frac{1}{5}\sqrt{5x+15} + \ldots + \frac{1}{5}\sqrt{5x+15} +$$

(5 слагаемых)

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{8-2x} + \frac{1}{2}\sqrt{8-2x}.$$

5. Указание. Определить, что больше: $3-\sqrt[3]{18}$ или $\sqrt[3]{2}-1$.

(Ответ: $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}<4$.)

6. Указание. Воспользоваться неравенством $\sqrt{2}>1$.

К задаче М116

Отношение периметров P'/P при каждом $n>3$ может принимать любые значения из интервала $(^1/_2,\ 1)$. Мы не будем доказывать это строго, а ограничимся описанием примеров, когда это отношение приближается к $^1/_2$ и к 1. Если многоугольник $A_1, A_2, \ldots A_n$ «вырождается в отрезок» так, что две соседние вершины — скажем A_1 и A_2,— приближаются к одному концу отрезка, а остальные — к другому, то P'/P приближается к 1; если он «вырождается в отрезок» так, что A_1 и A_2 служат концами этого отрезка, а все остальные вершины приближаются к середине отрезка, то P'/P приближается к $^1/_2$.

Отношение площадей S'/S при каждом $n>4$ может быть сколь угодно близко к $^1/_2$: достаточно представить себе, что многоугольник «вырождается в треугольник» так, что A_1 и A_2 служат двумя вершинами треугольника, а все остальные вершины приближаются к третьей вершине треугольника. При каждом $n>5$ отношение легко приблизить к 1, заставляя многоугольник вырождаться в треугольник так, что A_1 и A_2 приближаются к одной вершине, A_3 и A_4 — к другой, остальные вершины (их по крайней мере две!) к третьей. Но для $n=5$ приблизиться к 1 не удается. И действительно, как вы можете доказать, отношение S'/S для пятиугольника не превосходит $^3/_4$.

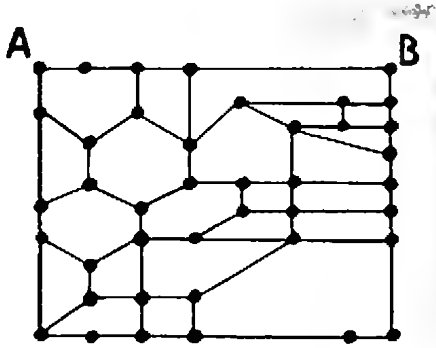
К задаче М120

Пусть в множестве из трех элементов 0, 1, 2 операция $*$ определена так: $1*2=1$, и $a*b=0$ для всех других пар a, b. Тогда $a*(b*c)=0$ для любых трех элементов a, b и c, но $(1*2)*2=1$.

Квант
для младших школьников

1. Победителями футбольного турнира оказались четыре команды: «Динамо», «Спартак», «Труд» и «Шахтер», набравшие одинаковое количество очков. Между командами-победительницами был организован дополнительный турнир, на котором каждая команда играла с каждой по одному матчу. Победа давала 2 очка, ничья 1 очко. «Динамо» получило 5 очков, «Труд» 3 очка и «Шахтер» 1 очко. На дополнительном турнире было забито 11 голов, из которых 5 забили игроки «Труда». Кстати, эта команда победила «Шахтер» со счетом 2 : 1. Восстановите исходы остальных матчей.

2. На рисунке слева города отмечены точками, соединяющие их дороги отрезками (других дорог, кроме указанных на рисунке, нет). Найти кратчайший путь от города A до города B при условии, что количество промежуточных городов четно (таким образом, прямой путь от A к B не годится, ибо пролегает через нечетное количество городов).



3. Когда учитель вошел в класс, дежурный стирал запись предыдущего урока, которую учитель собирался использовать. Остановив дежурного, учитель попросил его по оставшимся цифрам восстановить стертые. Можно ли это сделать?

```
                    9 0 5 3
                      9 5 6
   __               -------
 4 4                    1 8
 7 1 8
   3 2
   8 3 3
     4 2 4
   ---------
     4 4 2 5
```

4. Два друга стояли внизу около эскалатора метро. Им хотелось сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Однако вести счет движущимся ступенькам оказалось не так просто, и вскоре друзья запутались. Тогда они решили применить гораздо более надежный метод. Они одновременно ступили на эскалатор, причем в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому из друзей, который шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другой же сделал всего 21 шаг. Сколько ступенек в эскалаторе (снизу доверху)?

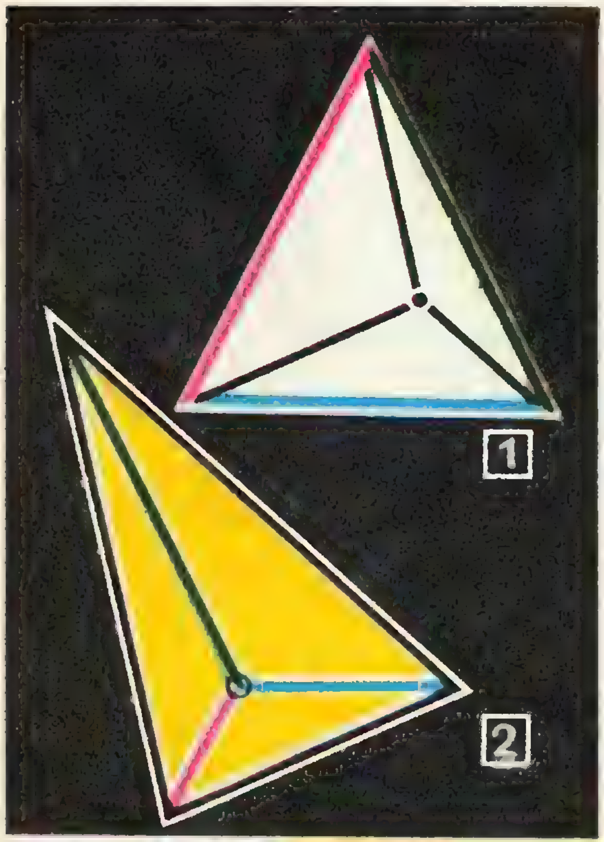
Ю. Каазик.

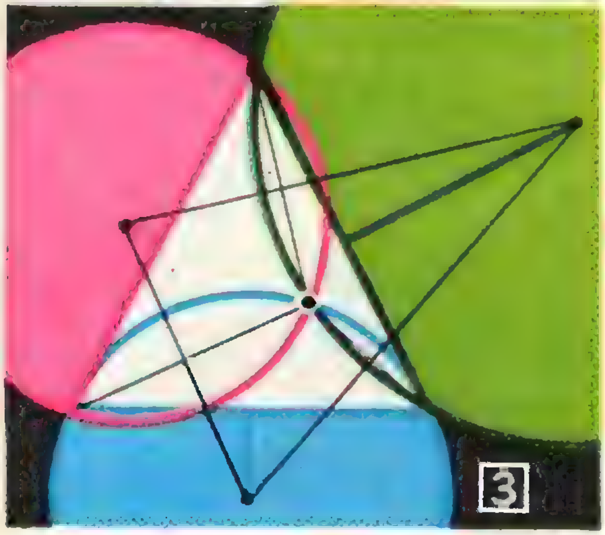
ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 8

24-1-42





ЗАДАЧА МАКСВЕЛЛА

Выдающийся английский физик-теоретик Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879) интерсcовался элементарной геометрией. Вот одна из задач, помещенных им в статье по строительной механике, которая была опубликована в журнале The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science (1864).

Внутри треугольника произвольно берется точка (рис. 1) и соединяется с вершинами. Доказать, что если построить треугольник со сторонами, параллельными этим отрезкам, и через его вершины провести прямые, параллельные сторонам данного треугольника (рис. 2), то они пересекутся в одной точке, как это и показано на рисунке.

Приведем доказательство. На рисунке 3 около каждого из треугольников, составляющих данный, описана окружность. Стороны треугольника с вершинами в центрах этих окружностей перпендикулярны нашим отрезкам. Новый треугольник подобен треугольнику на рисунке 2, а проведенные через его вершины отрезки так же наклонены к его сторонам, как одинаково с ними окрашенные отрезки на рисунке 2. Поскольку эти отрезки пересекаются в центре окружности, описанной около данного треугольника, должны пересекаться в одной точке и отрезки на рисунке 2. Доказательство завершено.

Теперь нетрудно найти решение следующей задачи замечательного немецкого геометра Якоба Штейнера (1796—1863): *если из вершин A_1, B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ опущены перпендикуляры соответственно на стороны B_2C_2, C_2A_2 и A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_2$ и эти перпендикуляры пересекаются в одной точке, то перпендикуляры из вершин A_2, B_2 и C_2 соответственно на стороны B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 пересекаются в одной точке* (докажите это).

И еще вопрос: *какое механическое следствие мог вывести Максвелл из доказанного им утверждения?*

В. Н. Березин.

НОМЕР
9

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

9
СЕНТЯБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 Интеграл — *Ю. И. Ионин*
10 Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха — *А. Л. Стасенко*
16 Сравнения — *Г. А. Кудреватов*
22 Затменные переменные — *В. А. Бронштэн*
30 Путешествие мистера Клока — *Д. Бородин*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК
32 Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года — *А. Л. Тоом*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»
36 Премии «Кванта»
37 Задачи М161—М165, Ф163—Ф167
39 Решения задач М123—М125, Ф138—Ф144

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА
45 Научимся обращаться с абсолютной величиной — *Е. Б. Ваховский, А. Б. Волынский*
50 Варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года
51 Движение по окружности — *Л. Г. Асламазов*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ
58 Новые книги — *М. Л. Смолянский*

ИНФОРМАЦИЯ
60 Телевидение готовит в ВУЗ — *И. А. Дьяконов, А. Г. Мордкович, И. М. Наслузов*

62 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

СМЕСЬ (стр. 21, 31, 35, 38, 61)

ИНТЕГРАЛ

Ю. И. Ионин

В этой статье рассказывается об одном из важнейших математических понятий — интеграле. Используя это понятие, можно решать разнообразные геометрические и физические задачи.

Заметим, что по новой программе интегральное исчисление будет изучаться в курсе средней школы.

Подробнее с интегральным исчислением можно познакомиться по книге Б. Е. Вейца, И. Т. Демидова «Алгебра и начала анализа» (пробный учебник для 10 класса под редакцией академика А. Н. Колмогорова). Однако изложение там ведется с несколько иных позиций.

Когда вы до сих пор встречались с понятием функции, то чаще всего предполагалось, что область определения функции состоит из чисел. Например, функция $x \to \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ определена на множестве чисел, удовлетворяющих условиям $x \geqslant -2$ и $x \neq 3$, а функция $x \to \sqrt{\lg\cos 2\pi x}$ определена на множестве целых чисел.

Однако не меньшее значение имеют функции, область определения которых состоит не из чисел, а из множеств, лежащих на прямой, в плоскости или в пространстве. Например, площадь можно рассматривать как функцию, которая определена на множестве плоских фигур. Прямоугольнику со сторонами a и b эта функция ставит в соответствие число ab, а кругу радиуса R — число πR^2. Если задан какой-нибудь закон движения точки, то можно рассмотреть функцию, сопоставляющую каждому промежутку времени путь, пройденный за этот промежуток; область определения этой функции состоит из промежутков времени.

Обе рассмотренные функции множества обладают свойством аддитивности (от латинского addo — складываю): если фигура разбита на несколько частей, то площадь ее равна сумме площадей этих частей; если промежуток времени разбит на несколько частей, то сумма путей, пройденных за каждую из этих частей, окажется равной пути, пройденному за весь промежуток.

Физика дает множество примеров аддитивных функций.

Если задано движение материальной точки, происходящее под действием некоторой силы, то можно каждому отрезку траектории поставить в соответствие работу силы по перемещению точки, совершенную на этом отрезке. Это — аддитивная функция.

Масса, заряд, энергия тела — также аддитивные функции *).

Для изучения аддитивных функций усилиями великих ученых XVII—XVIII веков, прежде всего

---

*) Аддитивность массы подробно обсуждалась в статье Я. А. Смородинского в «Кванте» № 3, 1972.

Ньютона (1643—1727) и Лейбница (1646—1716), был создан аппарат, называемый интегральным исчислением. Интегральное исчисление позволяет вычислять значения аддитивных функций по определенным их характеристикам. Такой характеристикой для массы служит плотность, для пути — скорость, для работы — сила и т. д.

§ 1. Аддитивные функции промежутка

Функции, с примерами которых вы только что познакомились, принято называть функциями множества. Обычные функции мы будем называть функциями числа, или числовыми функциями.

Простейшим видом функций множества являются функции промежутка, то есть функции, область определения которых состоит из отрезков числовой оси.

Определение. Функция промежутка T называется аддитивной, если

$$T[a, b] + T[b, c] = T[a, c] \qquad (1)$$

для любой пары отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$ из ее области определения. (Через $T[a, b]$ обозначается число, которое функция промежутка T ставит в соответствие отрезку $[a, b]$. Будем предполагать, что область определения функции промежутка состоит из всех отрезков $[a, b]$, содержащихся в некотором фиксированном отрезке $[A, B]$.

Рассмотрим более подробно два примера аддитивных функций промежутка.

1°. Масса неоднородного стержня

Представьте себе, что на числовой оси от точки A до точки B расположен материальный стержень. Каждому отрезку $[a, b]$ этого стержня сопоставим число $m[a, b]$ — массу этого отрезка. Полученная таким образом функция промежутка m аддитивна: $m[a, b] + m[b, c] = m[a, c]$,— если отрезок стержня разбит на две части, то масса его равна сумме масс этих частей. В частности, если масса распределена вдоль стержня равномерно, то есть стержень однороден, и λ — его линейная плотность (масса, приходящаяся на единицу длины), то $m[a, b] = \lambda(b - a)$.

2°. Приращение функции

Пусть $F = F(x)$ — любая функция числа, определенная на отрезке $A \leqslant x \leqslant B$. Тогда функция

$$\Delta F[a, b] = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

(то есть функция ΔF, которая промежутку $[a, b]$ ставит в соответствие число $\Delta F[a, b] = F(b) - F(a)$) аддитивна. Проверим это: если $a < b < c$, то

$$[F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a),$$

то есть

$$\Delta F[a, b] + \Delta F[b, c] = \Delta F[a, c].$$

Упражнение 1. Докажите, что для любой аддитивной функции промежутка T найдется такая функция F числа, что $T = \Delta F$, то есть $T[a, b] = F(b) - F(a)$.

§ 2. Определение интеграла

Каким образом вычисляют значения аддитивных функций промежутка?

Вернемся к примеру с массой стержня. Если стержень составлен из нескольких однородных кусков, то масса его равна $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_n l_n$, где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — длины этих кусков, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — их плотности (рис. 1). В общем же случае, когда стержень неоднороден, его разбивают на отрезки настолько малые, чтобы на каждом из них

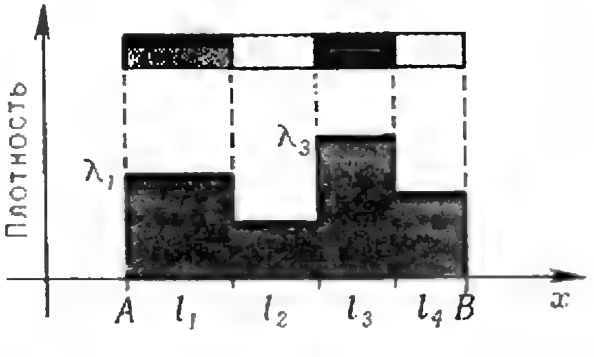


Рис. 1.

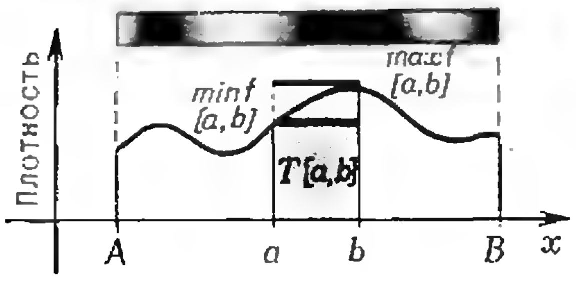


Рис. 2.

масса была распределена «почти равномерно», иначе говоря, плотность стержня в точках каждого такого отрезка должна мало отличаться от средней плотности стержня на этом отрезке.

Средняя плотность стержня на отрезке $[a, b]$ равна $\frac{m[a, b]}{b-a}$. Аналогичное понятие нетрудно ввести для произвольной функции промежутка. Средней плотностью функции промежутка T на отрезке $[a, b]$ (при $a \neq b$) будем называть число $\frac{T[a,b]}{b-a}$.

Дать определение плотности «в точке» значительно сложнее, и мы не будем его здесь приводить еще и потому, что нам понадобится лишь одно свойство этой «точечной» плотности. Чтобы сформулировать это свойство, удобно ввести некоторые обозначения. Если отрезок $[a, b]$ входит в область определения числовой функции f, то символами $\min\limits_{[a, b]} f$ и $\max\limits_{[a, b]} f$ мы будем обозначать соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f на этом отрезке. Интересующее нас свойство плотности состоит в следующем. Если числовая функция f является плотностью функции промежутка T, то средняя плотность функции промежутка T на каждом отрезке $[a, b]$ заключена между числами $\min\limits_{[a, b]} f$ и $\max\limits_{[a, b]} f$ (рис. 2), то есть выполнено неравенство

$$\min_{[a, b]} f \leqslant \frac{T[a, b]}{b-a} \leqslant \max_{[a, b]} f, \qquad (3)$$

которое можно переписать так:

$$(b-a)\min_{[a, b]} f \leqslant T[a, b] \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)\max_{[a, b]} f.$$

Предположим, что нам удалось для данной функции числа f подобрать такую аддитивную функцию промежутка T, что на каждом отрезке из области определения функции T выполнено неравенство (3). Однозначно ли определена этим функция промежутка T? Можно придумать пример «плохой» числовой функции f, для которой аддитивная функция промежутка T неравенствами (3) однозначно не определяется. Один такой пример приведен в упражнении 4. Но для любой, достаточно «хорошей» функции f, например, для любой монотонной функции, найдется только одна аддитивная функция промежутка T, значения которой на каждом отрезке $[a, b]$ удовлетворяют неравенству (3). То же утверждение справедливо и для кусочно-монотонных функций f, то есть для функций, область определения которых разбивается на отрезки монотонности. Кусочно-монотонными являются степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и многие другие функции.

Мы подошли к определению интеграла.

Определение. Пусть функция числа f определена на отрезке $[A, B]$. Аддитивная функция промежутка T, определенная на множестве отрезков $[a, b]$, содержащихся в отрезке $[A, B]$, называется интегралом от функции f, если для каждого отрезка $[a, b]$ выполнено неравенство

$$(b-a)\min_{[a, b]} f \leqslant T[a, b] \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)\max_{[a, b]} f. \qquad (4)$$

Таким образом, интеграл от числовой функции — это аддитивная функция промежутка. Интеграл определен лишь для тех числовых функций f, для которых аддитивная функция промежутка T однозначно определяется неравенствами (4). Такие функции называют интегрируемыми. Как уже говорилось, все монотонные и кусочно-монотонные функции интегрируемы.

Если T — интеграл от f, то вместо $T[a, b]$ принято писать $\int_a^b f(x)\,dx$. Смысл этого обозначения выяснится в следующем параграфе.

Упражнение 2. а) Проверьте, что $\int_a^b \lambda\,dx = \lambda(b-a)$, то есть значение интеграла от постоянной функции $f(x) = \lambda$ на отрезке $[a, b]$ равно $\lambda(b-a)$.

б) Проверьте, что $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Упражнение 3. Рассмотрим числовую функцию $H = H(x)$, определенную на отрезке $[-A, A]$ следующим образом:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Докажите, что для аддитивной функции промежутка $T = \Delta H$ не существует «плотности в точке», то есть ограниченной функции f такой, чтобы для любого промежутка $[a, b]$ выполнялось неравенство (3). Какому распределению массы на отрезке $[-A, A]$ соответствует функция ΔH?

Упражнение 4. Функция Дирихле D определяется по следующему закону: $D(x) = 1$, если x — рациональное число, и $D(x) = 0$, если x — иррациональное число. Докажите, что существует много различных аддитивных функций промежутка T, удовлетворяющих неравенствам (4) с одной и той же функцией f — функцией Дирихле.

§ 3. Интегральные суммы

Как вычисляются интегралы? Попробуем, например, вычислить $\int_0^1 x^2\,dx$.

Для этого выберем произвольное натуральное число n и разобьем отрезок $[0,1]$ на n равных частей. Так как интеграл аддитивен, то

$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^{1/n} x^2\,dx + \int_{1/n}^{2/n} x^2\,dx + \int_{2/n}^{3/n} x^2\,dx + \ldots + \int_{n-1/n}^{1} x^2\,dx. \quad (5)$$

Функция $x \to x^2$ на отрезке $[0,1]$ возрастает. Следовательно, ее наименьшее значение на любом из отрезков $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ равно $\frac{k^2}{n^3}$, а наибольшее — $\frac{(k+1)^2}{n^2}$. Так как длина такого отрезка равна $\frac{1}{n}$, то из неравенства (4)

$$\frac{1}{n}\,\frac{k^2}{n^2} \leqslant \int_{k/n}^{k+1/n} x^2 dx \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{(k+1)^2}{n^2}.$$

Полученное неравенство показывает, что заменяя $\int_{k/n}^{k+1/n} x^2\,dx$ числом $\frac{k^2}{n^2}\,\frac{1}{n}$, мы ошибемся не более, чем на $\frac{1}{n}\,\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{1}{n}\,\frac{k^2}{n^2} = \frac{2k+1}{n^3}$.

Если проделать такую замену с каждым из n слагаемых в правой части равенства (1), суммарная ошибка не превзойдет

$$\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \frac{5}{n^3} + \ldots + \frac{2n-1}{n^3} = \\ = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, с точностью до $\frac{1}{n}$ справедливо равенство

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

Сумма в правой части этого равенства вычисляется:

$$\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \\ = \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} = \\ = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

так что

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leqslant \int_0^1 x^2 dx \leqslant \\ \leqslant \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{1}{n}.$$

Полагая $n = 10$, получим, что с точностью до 0,1 вычисляемый интеграл равен 0,3, а полагая $n = 1000$, мы найдем, что с точностью до 0,001 этот интеграл равен 0,333. Точное значение этого интеграла мы найдем в следующем параграфе. Как вы, может быть, догадались, оно равно $1/3$.

И в более общем случае удается, разбив отрезок $[a, b]$ на достаточно мелкие части, приблизить $\int_a^b f(x)\,dx$ суммой вида

$$f(x_1)(a_1 - a) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \ldots + f(x_n)(b - a_{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — точки, разбивающие отрезок $[a, b]$ на части, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки из этих частей. Такое приближение может быть сделано сколь угодно точным.

Написанную выше сумму называют интегральной. Обычно интегралом по определению называют предел, к которому стремится интегральная сумма, когда разбиение становится все более мелким. При нашем определении интеграла понятие предела не используется. От интегральных сумм произошло и обозначение интеграла. Символ $\int$ — это удлиненная буква S — первая буква слова summa — сумма, d — первая буква слова differentia — разность, так что dx понималось как разность двух значений x. Все выражение $f(x)\,dx$, стоящее под знаком интеграла, напоминает общий вид слагаемых в интегральной сумме. Читается символ $\int_a^b f(x)\,dx$ так: «интеграл от а до бэ эф от икс по де икс». Функция f называется подынтегральной, числа a и b — соответственно нижним и верхним пределам интегрирования. Следует иметь в виду, что так же, как $x \to x^2$, $t \to t^2$, $z \to z^2$ — это одна и та же функция, символы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(z)\,dz$ обозначают одно и то же число — значение интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$.

§ 4. Формулы интегрирования

Вычисление интегралов с помощью интегральных сумм — занятие довольно хлопотное, да и результат получается приближенный. Вместо этого поступают так: вычисляют несколько стандартных, часто встречающихся интегралов, а прочие интегралы пытаются свести к ним. Мы вычислим два стандартных интеграла $\int_a^b x_n\,dx$ и $\int_a^b \cos x\,dx$ и установим некоторые теоремы, позволяющие сводить ряд интегралов к стандартным.

1° Вычисление $\int_a^b x^n\,dx$.

Рассмотрим функцию промежутка T, задаваемую формулой

$$T[a, b] = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Эта функция аддитивна:

$$T[a, b] + T[b, c] = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} + \frac{c^{n+1} - b^{n+1}}{n+1} = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = T[a, c].$$

Докажем, что T — интеграл от числовой функции $x \to x^n$. Для этого нужно установить, что на каждом отрезке $[a, b]$ выполнено неравенство $(b - a)\min\limits_{[a,\,b]} x^n \leqslant T[a, b] \leqslant (b - a)\max\limits_{[a,\,b]} x^n$. Проверим это неравенство для неотрицательных a и b. В этом случае $\min\limits_{[a,\,b]} x^n = a^n$, $\max\limits_{[a,\,b]} x^n = b^n$, так что нужно доказать, что

$$(b - a)\,a^n \leqslant \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \leqslant b^n(b - a)$$

или

$$(n + 1)\,a^n(b - a) \leqslant b^{n+1} - a^{n+1} \leqslant (n + 1)\,b^n(b - a).$$

Раскладывая $b^{n+1} - a^{n+1}$ на множители и сокращая на $b - a > 0$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\underbrace{a^n + a^n + \ldots + a^n}_{n+1} \leqslant b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots + ba^{n-1} + a^n \leqslant \underbrace{b^n + b^n + \ldots + b^n}_{n+1}.$$

Это неравенство справедливо, так как слагаемые в его средней части не меньше слагаемых в левой части и не больше слагаемых в правой части.

Таким образом, аддитивная функция промежутка T является интегралом от функции $x \to x^n$:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \qquad (6)$$

Хотя наш вывод пригоден лишь для натурального числа n, установленная формула справедлива для любого вещественного n (при $n = 1$ и $n = 0$ вы уже проверяли ее в упражнении 3), исключая, разумеется, $n = -1$.

При $n = -1$ мы приходим к интегралу $\int_a^b \frac{dx}{x}$. Оказывается, этот интеграл равен $\log_e b - \log_e a$. Об этом мы поговорим подробнее в одном из следующих номеров журнала.

2°. Вычисление $\int_a^b \cos x\, dx$.

Представьте себе точку, равномерно движущуюся по окружности радиуса 1 *м* с центром в начале координат с постоянной угловой скоростью 1 *рад/с*. Линейная скорость точки равна тогда по величине 1 *м/с*. Предположим, что в начальный момент точка была расположена по оси абсцисс, то есть имела координаты (1,0). Тогда в момент времени x радиус-вектор точки будет образовывать угол x (радиан) с осью абсцисс и, следовательно, координаты точки будут равны $(\cos x, \sin x)$ (рис. 3). Рассмотрим проекцию нашей точки на ось ординат. Эта проекция движется по оси ординат. Так как в момент a точка имела ординату $\sin a$, а в момент b — ординату $\sin b$, то перемещение проекции в течение промежутка времени $[a, b]$ равно $\sin b - \sin a$. Обозначив это перемещение через $S\,[a, b]$, мы получим аддитивную функцию промежутка S:

$$S\,[a, b] + S\,[b, c] = (\sin b - \sin a) + (\sin c - \sin b) = \sin c - \sin a = S\,[a, c].$$

Средняя плотность функции промежутка S на отрезке $[a, b]$ $\frac{S\,[a, b]}{b-a}$ — это средняя скорость движения проекции. Так как она заключена между наибольшим и наименьшим значениями скорости в точках отрезка $[a, b]$, то скорость движения проекции играет здесь ту же роль, что плотность в случае массы. Чтобы найти эту скорость, нужно спроектировать на ось ординат вектор скорости точки, движущейся по окружности. Радиус-вектор этой точки образует в момент времени x, как уже говорилось, угол x с осью абсцисс. Вектор скорости направлен, как вы знаете, по касательной к окружности, то есть перпендикулярно радиусу-вектору, и образует, следовательно, угол x с осью ординат (рис. 4). Так как длина вектора скорости равна 1, то его проекция на ось ординат равна $\cos x$.

Таким образом, плотность аддитивной функции промежутка S в точке x равна $\cos x$. Следовательно, S — интеграл от функции $x \to \cos x$, то есть

$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a.$$

Мы вычислили два интеграла. Каждый из них, в полном соответствии со сказанным в упражнении 1, оказался приращением некоторой числовой функции $\left(F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right.$ — в первом случае и $F(x) = \sin x$ — во втором). Под интегрированием обычно понимают именно отыскание такой функции F.

3°. Несколько общих формул.

Следующие несколько формул интегрального исчисления выведем, интерпретируя интеграл от функции f как массу стержня, линейная плотность которого описывается функцией f.

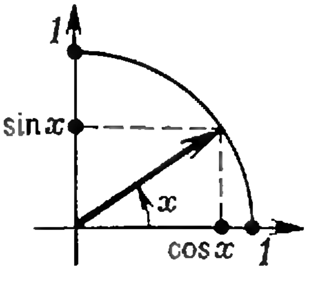


Рис. 3.

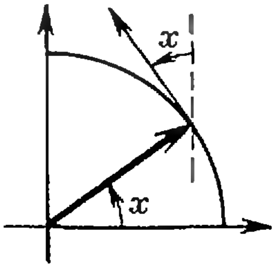


Рис. 4.

Предположим, что имеется два стержня с плотностями f_1 и f_2, расположенных на одном и том же отрезке $[a, b]$ числовой оси. Образованный ими «двойной» стержень имеет, очевидно, в точке x плотность $f_1(x) + f_2(x)$. Следовательно, масса этого стержня равна $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, dx$. В то же время эта масса равна сумме масс данных стержней. Следовательно,

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx. \qquad (8)$$

Из естественного предположения что при увеличении плотности стержня в каждой точке в α раз во столько же раз увеличится его масса, вытекает еще одна простая формула:

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (9)$$

Теперь мы можем вычислить, или, как еще говорят, «взять» интеграл от любого многочлена (см. упражнение 5).

Предположим теперь, что стержень с линейной плотностью f, располагавшийся на отрезке $[a, b]$ числовой оси, переместили таким образом, что он стал занимать отрезок $[a - h, b - h]$. Плотность «нового» стержня в точке x обозначим $g(x)$. Ясно, что эта плотность равна плотности «старого» стержня, в точке $x + h$, то есть $g(x) = f(x + h)$. Масса «нового» стержня равна $\int_{a-h}^{b-h} g(x)\, dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x + h)dx$, в то время как масса «старого» стержня равна $\int_a^b f(x)\, dx$. Так как в обоих случаях речь идет об одной и той же массе, то

$$\int_{a-h}^{b-h} f(x + h)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (10)$$

Мы имеем дело с массой, плотностью, но нигде не говорили о системе единиц, считая ее выбранной раз и навсегда. При выводе очередной формулы мы используем переход от одной системы единиц к другой.

Предположим, что длина измеряется в сантиметрах, а масса — в граммах. Материальный стержень расположен на числовой оси от точки a *см* до точки b *см*. Если $f(x)$ — линейная плотность стержня (измеренная в *г/см*) в точке x *см*, то масса его в граммах равна $\int_a^b f(x)\, dx$.

Будем теперь, массу измеряя попрежнему в граммах, измерять длину в метрах. Теперь стержень занимает положение от точки $\frac{a}{100}$ *м* до точки $\frac{b}{100}$ *м*. Обозначим через $g(x)$ плотность стержня (в *г/м*) в точке x *м*. Эта плотность численно в сто раз больше плотности в прежней системе единиц в точке $100\,x$ *см*, то есть $g(x) = 100 f(100\,x)$. Масса стержня (по-прежнему в граммах) равна теперь

$$\int_{a/100}^{b/100} g(x)\, dx = 100 \int_{a/100}^{b/100} f(100\,x)\, dx.$$

Так как масса стержня не изменилась, то

$$100 \int_{a/100}^{b/100} f(100\,x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx,$$

откуда

$$\int_{a/100}^{b/100} f(100x)\, dx = \frac{1}{100} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Если в качестве новой единицы длины мы выбрали бы не 100, а α *см*, то пришли бы к такой формуле, справедливой для любого положительного числа α:

$$\int_{a/\alpha}^{b/\alpha} f(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (11)$$

Формулы (10) и (11) удобно свести в одну. Для этого вычислим $\int\limits_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx$. Положим $g(x)=f(x+\beta)$. Тогда $f(\alpha x+\beta)=g(\alpha x)$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx=\int\limits_a^b g(\alpha x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} g(x)\,dx=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} f(x+\beta)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx. \qquad (12)$$

При отрицательном α эта формула теряет смысл, так как в этом случае $\alpha a+\beta>\alpha b+\beta$. Отражая стержень симметрично относительно начала координат, можно получить формулу

$$\int\limits_a^b f(-x)\,dx=\int\limits_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$$

Поэтому, если $\alpha<0$, то

$$\int\limits_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx=\int\limits_{-b}^{-a} f(-\alpha x+\beta)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha b+\beta}^{\alpha a+\beta} f(x)\,dx. \qquad (13)$$

Вы увидите, как применяются эти формулы, решая приведенные ниже примеры. Некоторые из них будут подробно разобраны в конце журнала (в разделе «Ответы, указания, решения») «Квант» № 10.

Упражнение 5. Вычислить интегралы

а) $\int\limits_{-2}^{1}(x-1)^3\,dx$; д) $\int\limits_{-1}^{2}|x^2-x|\,dx$;

б) $\int\limits_{a}^{b}\sin x\,dx$; е) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin x\cos 2x\,dx$

в) $\int\limits_{a}^{b}\cos^2 x\,dx$; ж) $\int\limits_{-1}^{1}(x^3-1)^2\,dx$;

г) $\int\limits_{0}^{2}|x-1|\,dx$; з) $\int\limits_{-\pi}^{0}\sin^3 x\,dx$.

Упражнение 6. а) Докажите, что если f — нечетная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0.$$

б) Докажите, что если f — четная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Упражнение 7. Докажите, что если f — периодическая функция, l — ее период, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\int\limits_{a+l}^{b+l} f(x)\,dx.$$

О различных геометрических и физических приложениях интеграла будет рассказано в следующем номере журнала.

ВОЛНЫ НА ВОДЕ
И «ЗАМОРСКИЕ ГОСТИ» Н. РЕРИХА

А. Л. Стасенко

«Глубока, по-весеннему студена подернутая рябью синь реки. Весело плывут *по ней нарядные расписные* ладьи с пестрыми парусами. Лихо поднялись их носовые части, завершающиеся головами драконов. Их яркая раскраска горит на солнце... Далек и опасен путь варягов» *).

Речь идет о картине прекрасного русского художника Николая Рериха «Заморские гости» (1901), которой можно полюбоваться в Третьяковской галерее. Она воспроизведена на обложке нашего журнала.

Используем это яркое поэтическое полотно для размышлений на некоторые физические темы: о законе сохранения энергии, теории размерностей физических величин и статистической обработки результатов эксперимента. А при чем тут картина? Просто, чтоб было веселее.

В самом деле, разве не интересно попытаться определить, глядя на эту картину, с какой скоростью плывут заморские гости? Пусть относительно текущей воды, а не относительно берегов. А что в картине может нам дать необходимую информацию? Прежде всего — носовая волна, образующаяся с обоих бортов у форштевня, завершающегося драконом. Далее, круговые волны, которые бегут по поверхности воды от корабля; качественно они похожи на окружности с общим центром, лежащим где-*то в плоскости ватерлинии* ладьи. Добавим к этому постановку реи и паруса относительно осевой плоскости корабля. Может быть, вы найдете и еще что-нибудь, дающее сведения о направлении или модуле скорости корабля, ветра, реки. Мы же ограничимся здесь рассмотрением двух явлений, тесно связанных с волнами на воде. Итак,

Носовая волна

Почему она образуется? Пусть вода симметрично набегает на клин (нос корабля) с вертикальными гранями и углом при вершине 2α (рис. 1) со скоростью V (очевидно, это и есть скорость корабля относительно воды). У самого носика клина мы можем разложить вектор V на две компоненты: параллельную одной из граней (одному из бортов корабля) $V_\parallel$ и перпендикулярную ей $V_\perp$. Таким образом, вода относительно рассматриваемого борта участвует в двух движениях: скользит вдоль борта со скоростью $V_\parallel = V\cos\alpha$ и «налетает» на него перпендикулярно со скоростью $V_\perp = V\sin\alpha$.

Во втором движении она разделяется на слои: нижние слои «ныряют» под днище корабля (рис. 2), верхний же слой поднимается вертикально, и мы можем легко оценить, на какую высоту. Действительно, каждая частица воды из этого верхнего слоя, обладая энергией $mV_\perp^2/2$, резко изменив

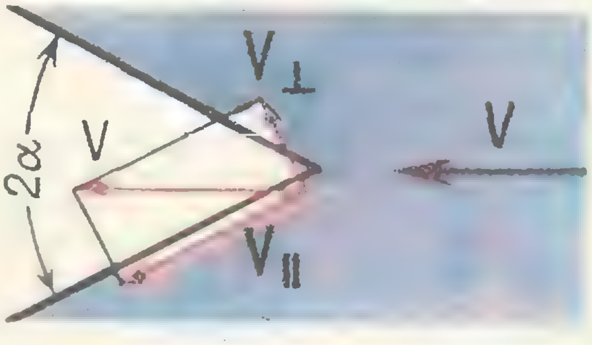


Рис. 1.

---

*) В. П. Князева, «Н. Рерих», Издательство «Искусство», 1968.

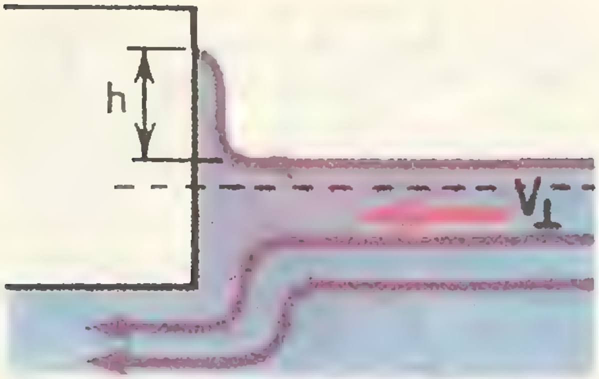


Рис. 2.

направление движения, может забраться вверх на такую высоту h, где ее потенциальная энергия mgh будет не больше кинетической энергии:

$$mgh \leqslant m\frac{V_\perp^2}{2}.$$

Отсюда

$$h \leqslant \frac{V_\perp^2}{2g}.$$

Таким образом, закон сохранения энергии и принцип суперпозиции движений позволяет нам сделать оценку для скорости корабля:

$$V_\perp^2 \geqslant 2\,gh,$$

следовательно, $$V^2 \geqslant \frac{2gh}{\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

Нам нужно лишь измерить угол α и высоту носовой волны h. Соответствующий расчет будет проведен ниже, а сейчас рассмотрим второй источник информации о движении корабля, которым мы располагаем.

Поверхностные волны

Поверхностные волны — довольно сложный объект исследования, но мы можем многое узнать о них, исходя из очень простых соображений размерности тех физических величин, которые описывают это явление. Для этого нужно прежде всего ясно представить себе причины явления. Волна — это распространяющееся колебание. А почему поверхность воды, выведенная чем-то из положения равновесия, может колебаться? Всякое колебание является результатом «игры» двух факторов: силы, возвращающей в положение равновесия, и инерции, заставляющей проскакивать это положение равновесия.

Если на поверхности жидкости образуется «горб», то вернуть частицы жидкости в положение равновесия может, например, сила тяжести F_g (см. рис. 3а), пропорциональная ускорению земного тяготения g. Падая вниз, по инерции «горб» провалится ниже положения равновесия; по соседству с ним будет вытеснен другой «горб» и т. д., в результате чего побежит волна, характеризуемая некоторой скоростью u и длиной λ (расстоянием между «горбами»). В рассматриваемом нами случае мерой инертности колеблющейся воды является ее плотность.

Итак, движение волны по поверхности жидкости описывается следующими величинами (будем сразу писать их размерности):

$$u\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right],\ \lambda\left[\text{м}\right],\ g\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right],\ \rho\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right].$$

Как их связать друг с другом? Например, как найти зависимость интересующей нас скорости волны u от других величин λ, g, ρ? Здесь-то нам и придут на помощь уже выписанные размерности.

Мы видим, что размерность u содержит в знаменателе *секунду*. Из трех других величин размерность времени входит только в g (там в знаменателе стоит $с^2$). Отсюда немедленно пишем $u \sim \sqrt{g}$, и, очевидно, g больше трогать нельзя: мы получили от него требуемую *секунду* в знаменателе размерности u. Но вместе с этим $\sqrt{g}$ дал нам в числителе

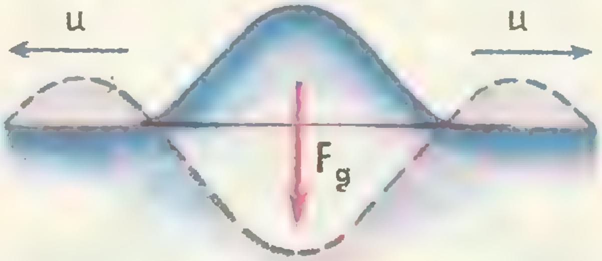


Рис. 3а

$\sqrt{м}$, а нам нужен в числителе *метр* без всякого корня. Значит, мы можем $\sqrt{g}$ домножить на $\sqrt{\lambda}$, и тогда все будет в порядке: величина $\sqrt{g\lambda}$ имеет нужную нам размерность $[м/с]$.

Итак,

$$u\left[\frac{м}{с}\right] \sim \sqrt{g\left[\frac{м}{с^2}\right]\cdot\lambda\,[м]}\,.$$

Заметим, что мы получили только пропорциональность, а не равенство, так как перед $\sqrt{g\lambda}$ может стоять любой множитель k, не имеющий размерности, то есть $u = k\sqrt{g\lambda}$. Может быть, $k = {}^1/_2$, а может быть, $k = 1\,000\,000$. Здесь наша теория бессильна, но она нам позволила выяснить главное — физику явления. Точное решение задачи дает значение $k = 1/\sqrt{2\pi}$, то есть

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\,. \qquad (2)$$

А где же здесь ρ $[кг/м^3]$? Его нет, ибо нам просто некуда деть килограммы, входящие в размерность ρ, их не с чем сократить, чтобы в конечном результате величина u измерялась только в $м/с$. Это физически понятно: ведь и вес «горба», ускоряющий его вниз, и масса «горба», определяющая его инерционность, пропорциональны ρ — вот плотность и выпала из формулы (2). (Аналогичная ситуация имеет место в случае математического маятника, период которого $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ по той же самой причине не зависит от массы, подвешенной на нити длиной l).

Но если волны становятся очень мелкими, «рябью» (ниже мы оценим, что значит очень мелкими), то «горб» стремится вернуть в положение равновесия другая сила — сила поверхностного натяжения, связанная с коэффициентом поверхностного натяжения σ $[н/м]$. Это похоже на то, как если бы мы натянутую горизонтально резиновую пленку приподняли пальцем кверху: тогда из-за натяжения пленки на палец вниз стала бы действовать сила $F_\sigma \sim \sigma$ (рис. 3б). В этом случае распространение волн будет зависеть от величин σ $[н/м]$, λ $[м]$, u_σ $[м/с]$, ρ $[кг/м^3]$. (Мы обозначили скорость волн, связанных с поверхностным натяжением, через u_σ, чтобы отличить ее от u из формулы (2).)

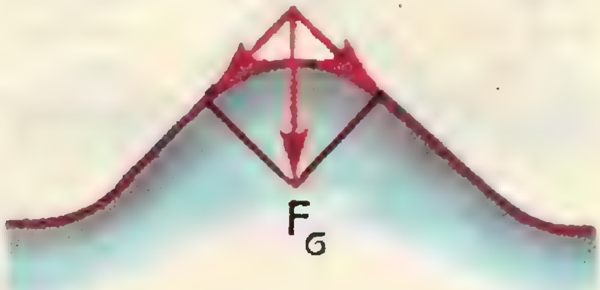


Рис. 3, б.

Теперь у нас достаточно опыта, чтобы, пользуясь размерностями, получить выражение для скорости волн (вспомним, что $1\ н = 1\ кг\cdot м/с^2$):

$$u_\sigma\left[\frac{м}{с}\right] \sim \sqrt{\frac{\sigma\,[кг/с^2]}{\rho\,[кг/м^3]\cdot\lambda\,[м]}}\,.$$

Если мы хотим знак пропорциональности заменить на знак равенства, нужно учесть недостающий безразмерный множитель. Согласно точной теории он равен $\sqrt{2\pi}$. Итак,

$$u_\sigma = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}\,. \qquad (3)$$

Разве не удивительно, что мы почти «бесплатно», не зная никаких теорий, получили основное: характер зависимости между величинами! Здесь уместно вспомнить, что по мнению знаменитого итальянского физика Энрико Ферми «в физике...нет места для путаных мыслей...действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности» *).

Для «студеной» воды

$$\sigma \approx 80\ дн/см = 8\cdot 10^{-2}\ н/м,$$
$$\rho = 1 г/см^3 = 10^3\ кг/м^3$$

Учитывая это, мы построили график зависимости скорости поверхностных волн, определяемой выражениями (2) и (3), от величины $\sqrt{\lambda}$ (рис. 4).

---

*) Б. Понтекорво, «Энрико Ферми» М., «Знание», 1971, стр. 27.

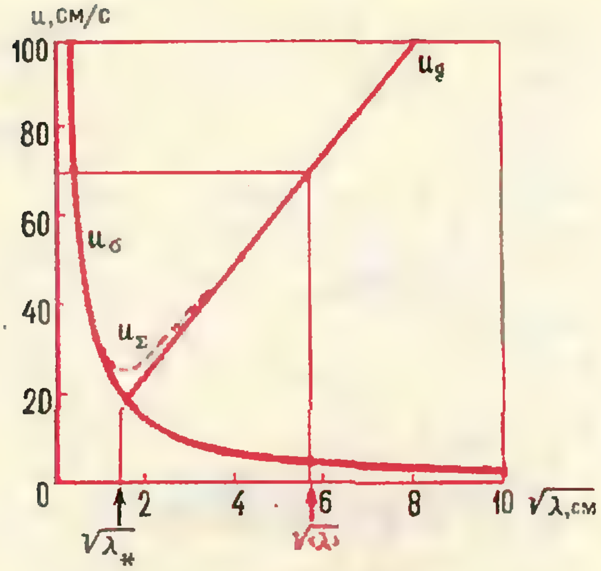


Рис. 4

Видно, что обе кривые пересекаются при $\lambda = \lambda_* \approx 12$ *см*. Таким образом, при очень малых длинах волн $(\lambda \ll \lambda_*)$ их скорость определяется поверхностным натяжением, при больших $(\lambda \gg \lambda_*)$ — ускорением земного тяготения. В *промежуточной* области $(\lambda \approx \lambda_*)$ скорость поверхностных волн определяется обоими факторами (силой земного тяготения и поверхностным натяжением). Выражение для скорости волны становится сложнее $(u_\Sigma = \sqrt{u^2 + u_\sigma^2})$. Зависимость u_Σ от $\sqrt{\lambda}$ показана на рисунке 4 пунктирной линией.

В физике часто бывает так, что гораздо проще исследовать некоторые предельные случаи (у нас это $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$), а «промежуточная область» требует больших усилий. К счастью, для нас эта область не существенна, потому что, взглянув на картину Рериха, мы можем сказать достоверно, что круговые волны имеют длину, явно большую λ_*, и, следовательно, их скорость описывается выражением (2). Чтобы найти ее, надо только «измерить» λ. Вычисления мы проведем ниже, а пока что сделаем еще один шаг.

Вспомним, что когда жук-водомер быстро бежит по воде или пуля летит в воздухе быстрее звука, всегда образуются характерные «усы», которые тем теснее прижимаются к движущемуся телу, чем больше его скорость V по сравнению со скоростью u распространения возмущений, вызываемых телом. На рисунке 5 приведены три характерных случая: если $V < u$, волны обгоняют тело и лишь теснее сжимаются в направлении движения; если $V = u$, то гребни волн в одной точке (в направлении движения) наползают друг на друга; если $V > u$, то тело обгоняет волны, и образуются «усы». (Фотография, приведенная на второй полосе обложки, иллюстрирует последний случай.)

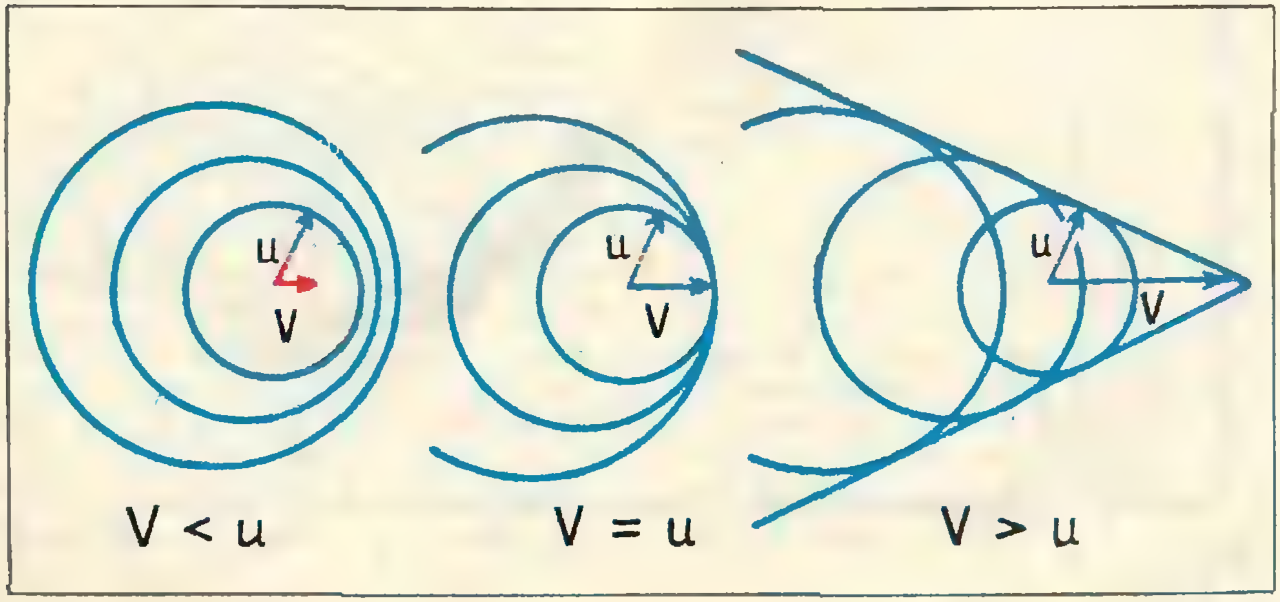


Рис. 5.

Взглянув на картину Рериха, мы видим, что на ней изображен первый случай; более того, поскольку незаметно даже намека на сжатие волн в направлении движения корабля, мы должны заключить, что его скорость намного меньше, чем скорость движения волн:

$$V \ll u. \qquad (4)$$

Таким образом, с точки зрения поверхностных круговых волн корабль просто «топчется на месте».

А теперь приступим к вычислениям. Для этого нам нужно «измерить» высоту носовой волны h, угол 2α и длину поверхностной волны λ.

Измерения

Мы могли бы постараться измерить нужные нам величины по картине поточнее, с учетом перспективы, проекций, ракурсов и т. д. Но, во-первых, это довольно сложно и утомительно; во-вторых, мы оказались бы при этом в смешном положении: действительно, нелепо подходить к сказочному вымыслу художника как к экспериментально полученной фотографии. К тому же мы не знаем, какой высоты был, например, нос у изображенного корабля, какого размера нарисованные щиты. Есть, правда, на картине один характерный размер, который, по-видимому, мало изменился со времен варягов — это размер головы.

Прежде чем читать дальше, попробуйте сами, пользуясь хотя бы этим «эталоном», оценить h и λ. Это будет ваше личное «измерение». Нельзя, однако, забывать, что картина воспринимается каждым зрителем очень индивидуально. Покажите эту картину всем ребятам вашего класса и спросите каждого, что он думает о значениях h, λ, α (хорошо, если спрашиваемый при этом не слышал ответов других товарищей; тогда «показания» всех учеников будут похожи на независимые показания прибора). Полученные ответы запишите, затем постройте график, где по горизонтальной оси отложите значения h, а по вертикальной — число человек n, назвавших это значение h.

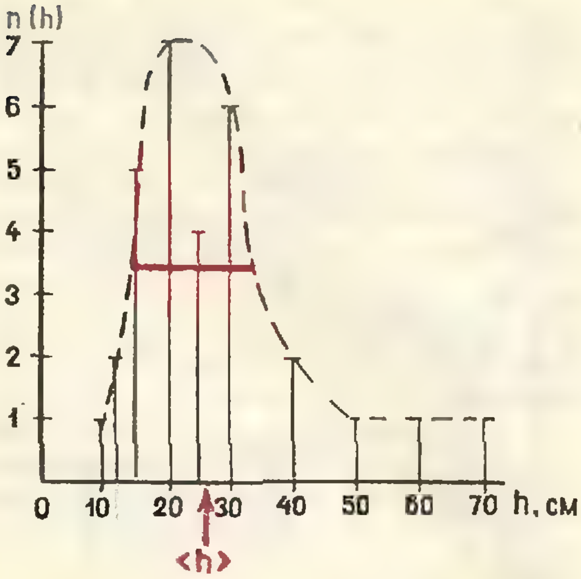


Рис. 7.

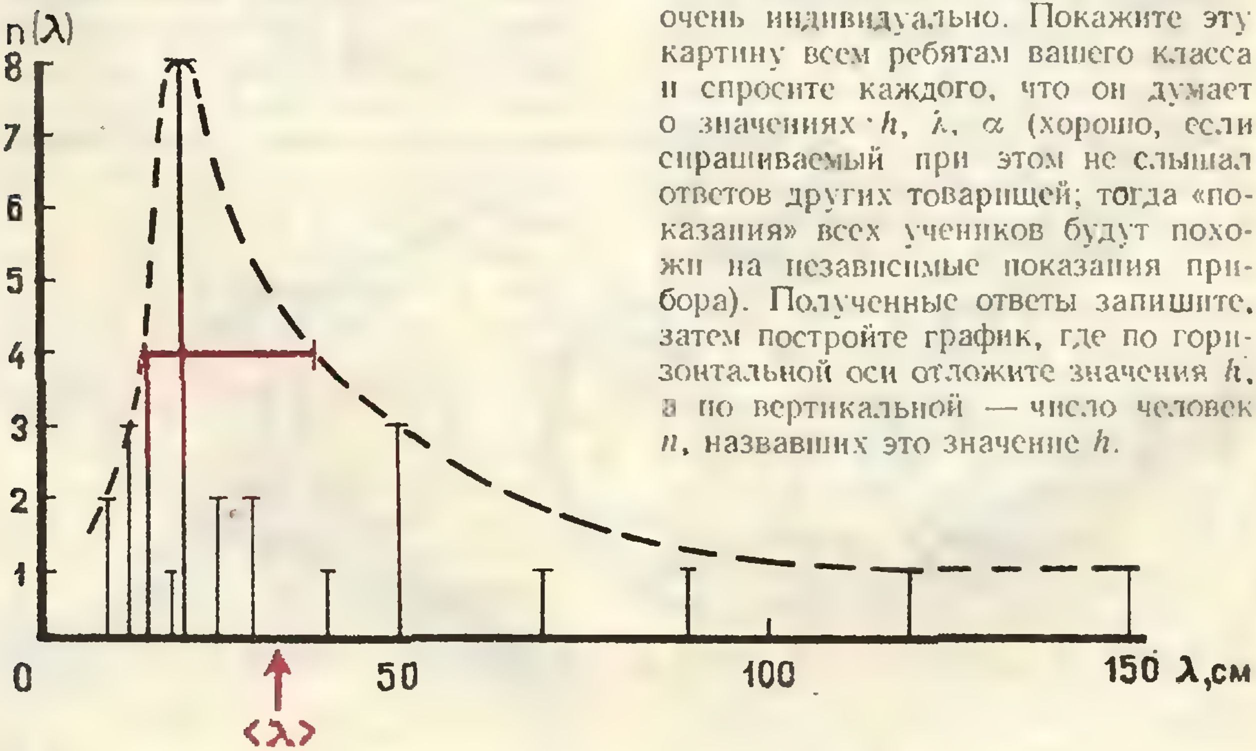


Рис. 6.

Автор проделал это со своими товарищами (всего было опрошено 30 человек) и получил графики, приведенные на рисунках 6 и 7. Интересно, что большинство опрошенных назвали значения h и λ, кратные 5 *см*, некоторые — кратные 2—2,5 *см*, но не менее (никто не назвал, например, $h = 27,1357891439$ *см*). Это похоже на то, как если бы измеряли расстояния линейкой с минимальной ценой деления 2—2,5 *см*.

При помощи этих графиков мы можем найти средние значения $<h>$ и $<\lambda>$ и считать их достаточно объективными.

Процедура определения средних обычна. Каждое значение h_i нужно умножить на число людей n_i, назвавших его, взять сумму по всем i и разделить на полное число опрошенных. В результате получим

$$<h> = \frac{\sum\limits_{i=1}^{30} h_i n_i}{\sum\limits_{i=1}^{30} n_i} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} h_i n_i =$$

$$= \frac{1}{30}(10 + 2\cdot 12 + 5\cdot 15 + 7\cdot 20 + 4\cdot 25 + 6\cdot 30 + 2\cdot 40 + 1\cdot 50 + 1\cdot 60 + 1\cdot 70) = \frac{789}{30} \approx 26 \text{ см} \approx 0{,}26 \text{ м}. \qquad (5)$$

Аналогично

$$<\lambda> = \frac{1}{30}(2\cdot 10 + 3\cdot 12 + 4\cdot 15 + 1\cdot 18 + 8\cdot 20 + 2\cdot 25 + 2\cdot 30 + 1\cdot 40 + 3\cdot 50 + 1\cdot 70 + 1\cdot 80 + 1\cdot 90 + 1\cdot 120 + 1\cdot 150) = 32{,}5 \text{ см} = 0{,}325 \text{ м}. \qquad (6)$$

Эти средние значения отмечены на рисунках 6 и 7 красными стрелками.

Точность наших «измерений»-опросов можно грубо оценить шириной плавной пунктирной кривой, взятой на половине ее высоты (красные линии на рисунках 6 и 7). Для физических экспериментов разработана, конечно, целая теория ошибок, в общем очень похожая на то, что мы сделали, только в эксперименте «опрашиваются» приборы).

А как быть с углом α? Все опрошенные сошлись на том, что он лежит где-то в пределах $90° < 2\alpha < 180°$ (корабль на картине довольно тупоносый). Таким образом,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° < \sin\alpha < \sin 90° = 1. \qquad (7)$$

Теперь у нас есть все, чтобы сделать оценки скорости корабля и поверхностных волн.

Результаты

Подставляя значения h, λ и $\sin\alpha$ из (5), (6), (7) в формулы (1) и (2), получим

$$V \geqslant \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\,[м/с^2]\cdot 0{,}26\,[м]}{1 \div \sqrt{2}/2}} = \sqrt{5{,}1 \div 7{,}25\,[м^2/с^2]} = 2{,}25 \div 2{,}7\,[м/с], \qquad (8)$$

$$u = \sqrt{\frac{9{,}8\,[м/с^2]\cdot 0{,}34\,[м]}{2\pi}} \approx 0{,}7\,[м/с]. \qquad (9)$$

Теперь мы с удивлением замечаем, что соотношения (8) и (9) несовместимы с неравенством (4). Действительно, судя по высоте носовой волны, корабль плывет со скоростью V не меньшей, чем 2,25 *м/с*, а если ориентироваться на круговые поверхностные волны, которые на картине почти концентричны, скорость корабля должна быть намного меньше скорости этих волн $u = 0{,}7$ *м/с*, которая и без того меньше V.

При известной внимательности вы найдете много подобных физических неточностей и в других произведениях искусства (по-видимому, это связано с тем, что у него свои задачи и законы). Тогда вы сможете не только полюбоваться ими и получить эстетическое удовольствие, но и поговорить с младшим братом о законах физики, используя очень привлекательные иллюстрации.

Г. А. Кудреватов

СРАВНЕНИЯ

Разделится или нет? Этот вопрос часто возникает в арифметике целых чисел. И это не случайно — ведь деление является наиболее сложным из арифметических действий.

Обозначим делимое и делитель буквами a и m (мы ограничимся случаем $m>0$), а частное и остаток — буквами q и r соответственно. Тогда (см. рисунок) $a=mq+r$, $0\leqslant r<m$ (определение деления с остатком).

Если $r=0$, то $a=mq$, и мы говорим, что *«a делится на m»* или *«a кратно m»*. Обозначается это с помощью троеточия: $a \vdots m$; символ $\vdots$ означает *«делится на...»*

Ответить на вопрос, делится или нет, в ряде случаев помогают признаки делимости. Но в школьном курсе рассматриваются лишь простейшие из них: на 2, 3, 5 и 9. Признаки делимости, например, на 7, 11 лежат за пределами школьного курса. Знаний, получаемых на уроках арифметики, недостаточно, чтобы найти остаток от деления $2^{2^5}+1$ на 641, 1971^{1972} на 7, $22^{11}+11^{22}$ на 3. На эти и многие другие вопросы дает ответ теория сравнений, об элементах которой и рассказывается в данной статье.

1. Остаток от деления

Нередко остаток r представляет бо́льший интерес, чем частное q. Например, чтобы определить НОД $(x, 6)$ при некотором x, достаточно определить НОД $(x_0, 6)$, где x_0 — остаток от деления x на 6 ($x=6q+x_0$, $0\leqslant x_0<6$): НОД $(x, 6)=$ НОД $(x_0, 6)$. Таким образом, целые числа, дающие при делении на 6 один и тот же остаток, имеют один и тот же НОД с числом 6. Это свойство целых чисел и лежит в основе алгоритма Евклида *).

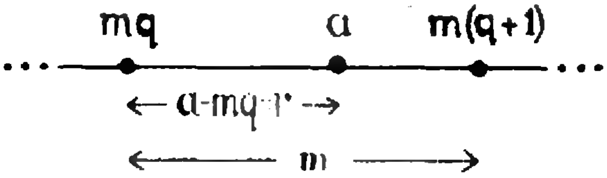


Рис. 1.

Другой пример. Наблюдая таблицу целых неотрицательных степеней числа 3, легко заметить (а заметив, и доказать) периодическое повторение последней цифры:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
3^x	1	3	9	27	81	243	729	2187

Поэтому, чтобы определить последнюю цифру числа 3^x при некотором значении x, достаточно определить ее для числа 3^{x_0}, где x_0 — остаток от деления x на 4. Например, последняя цифра числа 3^{4939} есть 7, так как $4939=4\cdot 1234+3$ и $3^3=27$.

Для тех, кто знаком с комплексными числами (о них шла речь в статье С. Г. Гиндикина «Дебют Гаусса», «Квант» № 1, 1972),

---

*) Подробно об этом рассказано в статье В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики», «Квант» № 6, 1972.

приведем еще один пример: целые степени мнимого числа i равны, если показатели при делении на 4 дают один и тот же остаток, поэтому достаточно знать следующую таблицу значений i^x:

x	0	1	2	3
i^x	1	i	-1	$-i$

Например, $i^{-2} = i^2 = -1$, $i^{11} = i^3 = -i$.

Остаток однозначно определяется по делимому a и делителю m, поэтому в дальнейшем мы будем обозначать его символом $r(a, m)$. Например,

$$r(-10, 5) = 0,\quad r(30, 7) = 2,\quad r(-30, 7) = 5.$$

2. Сравнения по модулю

Рассмотренные примеры показывают, что в ряде случаев нам приходится иметь дело с фиксированным натуральным делителем m или *модулем* (от латинского *modulus* — мера). В примере с НОД $(x, 6)$ модуль был равен шести, а в следующих двух примерах четырем. Мы видели, что целые числа, дающие равные остатки при делении на данный модуль, обладают некоторыми общими свойствами, например, имеют с модулем один и тот же НОД или служат показателем степени числа 3, имеющей заданную последнюю цифру. Это обстоятельство может быть широко использовано при решении различных задач теории делимости. Поэтому числа, дающие равные остатки при делении на данный модуль, получили специальное название — *числа, сравнимые по данному модулю.* Например, -18 и 14 сравнимы по модулю 4, так как $r(-18, 4) = r(14, 4) = 2$, но эти числа не сравнимы по модулю 5, так как $r(-18, 5) = 2$, а $r(14, 5) = 4$. То, что целые числа a и b сравнимы по модулю m, принято записывать в виде сравнения:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

По определению эта запись означает, что $r(a, m) = r(b, m)$. Так, $-18 \equiv 14 \pmod 4$, но $-18 \not\equiv 14 \pmod 5$.

Очевидно, что каждое целое число сравнимо со своим остатком по модулю m, то есть $a \equiv r(a, m) \pmod m$. И обратно, если $a \equiv b \pmod m$ и $0 \leqslant b < m$, то $b = r(a, m)$. Еще заметим, что сравнение типа $a \equiv 0 \pmod m$ означает, что $a \vdots m$.

С помощью понятия сравнения выводы в примерах из п. 1 могут быть записаны следующим образом *):

1) $a \equiv b \pmod 6 \Rightarrow$ НОД $(a, 6) =$ НОД $(b, 6)$. Здесь мы вместо шести можем взять произвольное натуральное число m, то есть справедливо утверждение $a \equiv b \pmod m \Rightarrow$ НОД $(a, m) =$ НОД (b, m). (Обратное утверждение неверно, вот опровергающий пример: НОД $(1, 4) =$ НОД $(3, 4) = 1$, но $1 \not\equiv 3 \pmod 4$).

2) $3^{x_1} \equiv 3^{x_2} \pmod{10} \Longleftrightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod 4$ (последняя цифра натурального числа является его остатком по модулю 10, поэтому числа с одной и той же последней цифрой сравнимы по модулю 10);

3) $i^{x_1} = i^{x_2} \Longleftrightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod 4$.

Сравнимы ли числа 15 884 и 27 467 по модулю 13? На этот вопрос можно ответить с помощью определения: так как $r(15884, 13) = r(27467, 13) = 11$, то $15884 \equiv 27\,467 \pmod{13}$. Однако ответ можно получить и с помощью следующего критерия:

$$a \equiv b \pmod m \Longleftrightarrow a - b \vdots m. \qquad (\text{К})$$

В данном случае $27\,467 - 15\,884 = 11\,583 = 13 \cdot 891$, то есть делится на 13.

Утверждение $a - b \vdots m$ эквивалентно тому, что существует целое t, при котором $a = b + mt$.

Таким образом, сравнимые целые числа равны с точностью до слагаемого, кратного модулю. При этом замечательно то, что сравнения имеют не только внешнее сходство с обычными равенствами, но обладают почти всеми основными их свойствами. Так, сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать, вычитать и перемножать:

---

*) Символ $\Rightarrow$ означает, что из одного соотношения следует другое.

$$a \equiv b,\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d,\ ac \equiv bd \pmod{m}. \quad (C)$$

Отсюда получаются такие следствия: к частям данного сравнения можно прибавлять одно и то же число, их можно умножать на одно и то же число, а также возводить в одну и ту же натуральную степень, то есть

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c,\ ac \equiv bc,\ a^k \equiv b^k \pmod{m}.$$

Упражнения

1. Докажите критерий (К) и свойства сравнений (С).

2. Докажите, что части сравнения можно сокращать на число, взаимно простое с модулем (если, конечно, обе части сравнения делятся на это число).

3. Покажите, что сравнение $3x \equiv 4 \pmod{5}$ верно при любом x, сравнимом с 3 по данному модулю.

4. Проверьте, что не существует целых чисел x, удовлетворяющих сравнению $3x \equiv 2 \pmod{6}$.

3. Сравнения по модулю и разбиения на классы

Свойства сравнений, данные в пункте 2, позволяют сравнительно просто решать многие задачи теории делимости, нередко встречающиеся среди олимпиадных, конкурсных и т. п. Рассмотрим некоторые из них, но предварительно заметим, что при решении этих задач множество всех целых чисел полезно представлять себе разбитым на классы чисел, сравнимых по данному модулю (при этом модуль выбирается в зависимости от обстоятельств или определяется самим условием задачи).

При каждом a сравнению $x \equiv a \pmod{m}$ удовлетворяет класс целых чисел x, которые при делении на m дают остаток $r(a, m)$. Для каждого целого x выполняется одно из сравнений

$$x \equiv 0,\ x \equiv 1,\ x \equiv 2,\ \dots,\ x \equiv m - 2,\ x \equiv m - 1 \pmod{m}$$

или, что то же самое, одно из равенств

$$x = mt,\ x = 1 + mt,\ x = 2 + mt,\ \dots,\ x = m - 2 + mt,\ x = m - 1 + mt,$$

где t — соответствующее целое число. Итак, каждое целое число принадлежит одному из m классов; не сравнимые по данному модулю числа принадлежат различным классам.

Упражнение

5. Проверьте, что отношение сравнимости является отношением эквивалентности и разбивает все числа на классы сравнимых, а именно, докажите, что

а) $x \equiv x \pmod{m}$;

б) $x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow y \equiv x \pmod{m}$;

в) $x \equiv y,\ y \equiv z \pmod{m} \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}$.

Подробно о разбиении на классы рассказано в статье М. М. Глухова «Отношения эквивалентности и разбиения множеств», «Квант» № 2, 1972.

4. Некоторые задачи

Чтобы свободнее пользоваться «языком сравнений» при решении задач, рассмотрим следующие вопросы: *какие классы, например, по модулю 6, содержат простые числа? Какому из этих классов принадлежит простое число 37? Какие классы по модулю 6 содержат четвертые степени целых чисел?*

Легко видеть, что класс $x \equiv 0 \pmod{6}$ не содержит простых чисел: он состоит из чисел, кратных 6. Не входят простые числа и в класс $x \equiv 4 \pmod{6}$, так как он состоит из четных чисел $4 + 6t = 2\,(2 + 3t)$ (и не содержит числа 2). Классы $x \equiv 2$ и $x \equiv 3 \pmod{6}$ содержат по одному простому числу: соответственно 2 и 3. Классы $x \equiv 1$, $x \equiv 5 \pmod{6}$ содержат все остальные простые числа; например, в первый из них входят 7 и 13, а во второй 11 и 17.

Так как $37 \equiv 1 \pmod 6$, то 37 принадлежит классу $x \equiv 1 \pmod 6$.

Ответ на последний вопрос можно получить так: целое число по модулю 6 сравнимо с одним из остатков 0, 1, 2, 3, 4 и 5; его четвертая степень сравнима соответственно с четвертой степенью остатка, то есть с одним из чисел 0, 1, 16, 81, 256 и 625. Так как $16 \equiv 4$, $81 \equiv 3$, $256 \equiv 4$, $625 \equiv 1 \pmod 6$, то четвертые степени целых чисел встречаются лишь в классах $x \equiv 0$, $x \equiv 1$, $x \equiv 3$, $x \equiv 4 \pmod 6$.

Остановимся еще на одном вопросе. До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно множество пар простых чисел-близнецов, то есть простых чисел вида

$$p, \ p+2.$$

Примерами «близнецов» служат 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13. Но вот с тройками простых чисел вида

$$p, p+2, \ p+4$$

дело обстоит значительно проще. По модулю 3 для p имеем три возможности:

а) $p \equiv 0$, б) $p \equiv 1$, в) $p \equiv 2 \pmod 3$.

Первому из этих классов принадлежит единственное простое число $p = 3$, которому соответствуют простые числа $p+2=5$ и $p+4=7$. Таким образом, первая возможность приводит к тройке (3, 5, 7). При $p \equiv 1 \pmod 3$ $p+2 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$, откуда $p+2=3$, $p=1$, что противоречит условию. При $p \equiv 2 \pmod 3$ $p+4 \equiv 6 \equiv 0 \pmod 3$, откуда $p+4=3$ или $p=-1$, что тоже не подходит. Итак, с помощью сравнений весьма просто выясняется, что существует единственная тройка «близнецов»: (3, 5, 7).

Теперь перейдем к решению задач.

Задача 1. *Найти*

$$r(2^{2^5}+1, 641).$$

Решение. $2^{15} = 32\,768 \equiv 77 \pmod{641}$, откуда $2^{30} \equiv 77^2 = 5929 \equiv 160 \pmod{641}$ и $2^{32} \equiv 160 \cdot 4 = 640 \pmod{641}$, значит, $2^{32}+1 \equiv 641 \equiv 0 \pmod{641}$, то есть $r(2^{2^5}+1, 641) = 0$ или $2^{2^5}+1 \vdots 641$ *).

Задача 2. *Найти последнюю цифру натурального числа* $33^{22}+22^{11}$.

Решение. Требуется найти $r(33^{22}+22^{11}, 10)$.

Так как $33 \equiv 3 \pmod{10}$, то $33^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$ и $33^{22} \equiv (-1)^{11} \equiv -1 \pmod{10}$. Из $22 \equiv 2 \pmod{10}$ следует $22^5 \equiv 32 \equiv 2 \pmod{10}$, $22^{10} \equiv 4 \pmod{10}$ и $22^{11} \equiv 4 \cdot 22 \equiv 8 \pmod{10}$. Складывая почленно полученные сравнения, имеем

$$33^{22}+22^{11} \equiv 7 \pmod{10}.$$

Таким образом, данное число оканчивается цифрой 7.

Задача 3. *Доказать, что не существует натуральных чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению*

$$2^x+7^y=19^z.$$

Решение. Используем модуль 3. В силу $19 \equiv 1 \pmod 3$ имеем $19^z \equiv 1 \pmod 3$. С другой стороны, $2^x+7^y \equiv (-1)^x+1 \pmod 3$, откуда $2^x+7^y \equiv 2 \pmod 3$ или $2^x+7^y \equiv 0 \pmod 3$ (в зависимости от четности x). Так как $2^x+7^y \not\equiv 19^z \pmod 3$, то $2^x+7^y \neq 19^z$.

Подчеркнем, что при решении этой задачи мы догадались, что надо использовать модуль 3. Если бы мы взяли модуль 4, то у нас противоречия не получилось бы. Вопрос о выборе подходящего модуля при решении задачи сложен. Если он вас интересует — посмотрите статью М. И. Башмакова «Нравится ли вам возиться с целыми числами», «Квант», № 3, 1971.

---

*) Из геометрии известно, что циркулем и линейкой окружность можно разделить на $2^{2^k}+1$ равных частей, если это число простое. В свое время французский математик Пьер Ферма (1601—1665) считал, что все числа данного вида — простые. Однако позднее Леонард Эйлер (1707—1783) показал, что $2^{2^5}+1 \vdots 641$. После Эйлера «числами Ферма» занимался уральский математик-любитель И. М. Первушин, доказавший, в частности, что $2^{2^{12}}+1 \vdots 114689$.

Задача 4. *Доказать, что число* $p^3 + 2$ *— простое, если простыми являются числа* p *и* $p^2 + 2$.

Решение. Если $p \equiv 0 \pmod 3$, то $p = 3$ и $p^2 + 2 = 11$, $p^3 + 2 = 29$.

Если $p \equiv 1 \pmod 3$, то $p^2 \equiv 1$ и $p^2 + 2 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$, откуда $p^2 + 2 = 3$, но такому соотношению ни одно простое число не удовлетворяет. К противоречию приводит и вариант $p \equiv 2 \pmod 3$. Таким образом, числа p и $p^2 + 2$ являются простыми только при $p = 3$. В этом случае и число $p^3 + 2$ простое.

Задача 5. *Доказать, что не существует квадратного уравнения*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с целыми коэффициентами и дискриминантом 215.

Решение. Если $b^2 - 4ac = 215$, то $b^2 - 215 \vdots 4$ или $b^2 \equiv 215 \equiv 3 \pmod 4$. Но это невозможно, так как $r(b^2, 4)$ может быть равен только 0 или 1 (докажите!).

Замечание. Из решения ясно, что все целые числа, сравнимые с 2 или 3 по модулю 4, не могут быть дискриминантом квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 6. *Доказать, что по крайней мере одна из сторон пифагорова треугольника (прямоугольного треугольника, стороны которого выражаются натуральными числами) делится на* 5.

Решение. Пусть x, y, z — натуральные числа, причем $x^2 + y^2 = z^2$. Допустим, что ни одно из них не сравнимо с нулем по модулю 5. Тогда квадрат каждого из них сравним с 1 или 4 (докажите!). Имеем три возможности:

а) $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 5$;
б) $x^2 \equiv 1$, $y^2 \equiv 4 \pmod 5$ или $x^2 \equiv 4$, $y^2 \equiv 1 \pmod 5$;
в) $x^2 \equiv y^2 \equiv 4 \pmod 5$.

Тогда соответственно:

а) $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 5$;
б) $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 5$;
в) $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$.

Случаи а) и в) невозможны (z^2 должно быть сравнимо с 1 или 4). Значит, хотя бы одно из чисел x, y, z сравнимо с нулем по модулю 5, то есть делится на 5.

Упражнения

6. Найдите: а) $r(1971^{1972}, 7)$; б) $r(22^{11} + 11^{22}, 3)$.

7. Докажите, что по крайней мере один из катетов пифагорова треугольника делится на 3.

8. Найдите натуральные числа n такие, что $n^2 + 5$ кратно 7.

9. Докажите, что нет на плоскости целых точек (точек, обе координаты которых выражаются целыми числами), принадлежащих параболе

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{5}.$$

10. Докажите, что число 287 нельзя представить в виде суммы двух квадратов целых чисел.

11. Найдите такое простое число p, чтобы числа $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ оба были простыми.

12. Докажите, что не существует прямоугольного параллелепипеда с целочисленными ребрами и диагональю $\sqrt{807}$.

5. Признаки делимости и проверка действий

Сравнения могут служить для установления различных признаков делимости. Например, признак делимости на 11 можно вывести с помощью очевидного сравнения $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Заметим, что $10^1 \equiv -1$, $10^2 \equiv 1$, $10^3 \equiv -1$, $10^4 \equiv 1$, $10^5 \equiv -1$, $10^6 \equiv 1$, $10^7 \equiv -1$, ..., $\pmod{11}$. Записав число n в виде

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_k 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

и воспользовавшись свойствами сравнений, получим сравнение

$$n \equiv (a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots) \pmod{11},$$

то есть каждое число сравнимо по модулю 11 с разностью между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах (справа налево), и суммой остальных цифр.

Остается сформулировать признак делимости: число делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится упомянутая разность. Например, $1\,493\,745 \vdots 11$, так как $(5+7+9+1) - (4+3+4) = 11$.

Рассмотрим еще признак делимости на 7. Исходя из сравнения $1000 \equiv -1 \pmod 7$ для любого

$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, легко получить сравнение

$$n \equiv (\overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_8 a_7 a_6} + \ldots) - (\overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_{11} a_{10} a_9} + \ldots) \pmod 7,$$

выражающее признак делимости на 7. Сформулируйте этот признак самостоятельно.

При выполнении арифметических действий полезно проверять правильность результатов. Один из способов проверки действий сложения, вычитания и умножения — «способ девятки» — легко получить с помощью сравнений. По модулю 9 каждое натуральное число n сравнимо с суммой $S(n)$ своих цифр:

$$n \equiv S(n) \pmod 9$$

(докажите этот факт самостоятельно). Значит, если $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ или $n_1 n_2 \ldots n_k = n$, то соответственно $S(n_1) + S(n_2) + \ldots + S(n_k) \equiv S(n) \pmod 9$ и $S(n_1) \times S(n_2) \ldots S(n_k) \equiv S(n) \pmod 9$. Например, верной записи $121\,232 \times 212\,323 = 25\,740\,341\,936$ отвечает соотношение $(1+2+1+2+3+2) \times (2+1+2+3+2+3) - (2+5+7+4+3+4+1+9+3+6) = 11 \times 13 - 44 = 99$.

Найденное условие может выполняться и при ошибке в результате действия (когда ошибка кратна 9), но если выведенное нами условие не выполняется, то результат действия заведомо ошибочен. Для действия деления, например, чтобы обнаружить ошибочность записи $95\,425 : 775 = 123$, достаточно ее представить в виде $95\,425 = 775 \cdot 123$ и заметить, что $(9+5+4+2+5) - (7+7+5) \times (1+2+3) = 25 - 114 = -89$ не делится на 9.

Еще пример. Запись $\sqrt[5]{371293} = 23$ ошибочна, так как $S(371\,293) = 25$, $S(23) = 5$ и $5^5 - 25 = 3100 \not\equiv 0 \pmod 9$, а это значит, что $23^5 \neq 371\,293$, откуда $\sqrt[5]{371293} \neq 23$.

Упражнения

13. Дан многочлен $ax^n + bx^{n-1} + \ldots + fx + d$ с целыми коэффициентами. Докажите, что сравнимым значениям аргумента x отвечают сравнимые значения этого многочлена (по одному и тому же модулю).

14. Попробуйте вывести признак делимости на 101.

15. Установите еще один признак делимости на 11, исходя из сравнения

$$100 \equiv 1 \pmod{11}.$$

16. Докажите, что $\sqrt[3]{19783} \neq 27$.

17. Делятся ли на 7 числа а) 123456789; б) 987654321?

В заключение укажем, что с методом сравнений более подробно можно познакомиться по книгам:

1. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. М., «Наука». 1965.
2. Г. Н. Берман. Число и наука о нем. М., Физматгиз, 1960.
3. Г. Дэвенпорт. Высшая арифметика. М., «Наука», 1965.
4. Ш. Х. Михелевич. Теория чисел. М., «Высшая школа», 1967.

УДИВИТЕЛЬНЫЕ РАВЕНСТВА

Как объяснить следующие странные равенства?

1. а) $\dfrac{9-25}{6+10} = \dfrac{9}{6} - \dfrac{25}{10}$;

б) $\dfrac{121-64}{55+40} = \dfrac{121}{55} - \dfrac{64}{40}$;

в) $\dfrac{8-50}{2+5} = \dfrac{8}{2} - \dfrac{50}{5}$.

2. $\dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{26}{65} = \dfrac{2}{5}$; $\dfrac{49}{98} = \dfrac{4}{8}$.

3. а) $\log\left(16 + \dfrac{16}{15}\right) = \log 16 + \log \dfrac{16}{15}$;

б) $\log\left(17 + \dfrac{17}{16}\right) = \log 17 + \log \dfrac{17}{16}$.

4. а) $\log\left(\dfrac{49}{6} - 7\right) = \log \dfrac{49}{6} - \log 7$;

б) $\log\left(\dfrac{64}{7} - 8\right) = \log \dfrac{64}{7} - \log 8$.

И. Г. Булавко

ЗАТМЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В. А. Бронштэн

При изучении Вселенной астрономам не раз приходилось убеждаться в том, что правильный анализ наблюдаемого явления почти всегда позволяет получить множество данных об изучаемом небесном теле или группе тел. Прекрасным примером этого являются так называемые затменные переменные звезды.

В 1669 г. итальянский математик и астроном Дж. Монтанари обнаружил, что звезда Алголь (β Персея) периодически меняет свой блеск. (Возможно, что переменность блеска этой звезды была известна еще древним арабам, которые и назвали ее поэтому Рас Аль-Гуль — «голова дьявола». Это арабское название превратилось потом в Алголь.) О работах Монтанари мы знаем мало, так как многие его сочинения не дошли до нас. Известно лишь, что он открыл переменность блеска не одного Алголя, а около ста звезд. Но каких именно, мы не знаем: каталог Монтанари погиб.

Сто с лишним лет спустя наблюдениями Алголя занялся английский любитель астрономии, восемнадцатилетний глухонемой юноша Джон Гудрайк. Из своих наблюдений за 1782—1783 гг. он установил, что Алголь, который обычно светит как звезда 2-й величины, примерно раз в трое суток ослабевает до 3—4 величины.

В астрономии *блеск* звезд принято выражать в звездных величинах — единицах, пропорциональных логарифму освещенности, создаваемой звездой на плоскости, перпендикулярной к ее лучам. Блеск звезды зависит только от ее силы света и расстояния от Земли, и не зависит от того, наблюдаем ли мы звезду простым глазом или в телескоп, поскольку освещенность зрачка глаза и объектива телескопа светом звезды, естественно, одна и та же. Блеск в астрономии принято обозначать буквой L (luminosity), звездную величину — буквой m.

Разность в 1 звездную величину соответствует отношению блеска в 2,512 раза *). Разность двух любых звездных величин m_1 и m_2 равна

$$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log \frac{L_1}{L_2},$$

где L_1 и L_2 — блеск звезд.

Наблюдая Алголь, Гудрайк заметил, что уменьшение его блеска до минимума и обратный рост до «нормального» значения продолжаются приблизительно по 4,5 часа, после чего в течение 2 суток 12 часов звезда сохраняет постоянный блеск, а затем весь цикл повторяется снова. Гудрайк весьма точно определил период изменения блеска звезды — 2 суток 20 часов 49 минут, что лишь на 3 минуты отличается от современного значения. Но самое главное состояло в том, что Гудрайк правильно объяснил наблюдавшееся им явление: он предположил, что здесь происходит затмение одной звезды (яркой) другой (темной), обращающейся вокруг первой. Звезды типа Алголя получили название затменных переменных.

Гипотеза Гудрайка подтвердилась спустя сто лет.

---

*) См. статью А. Д. Марленского «Возможности оптических телескопов» («Квант» № 8, 1972).

В 1880 г. американский астроном Э. Пикеринг показал, как из наблюдений Алголя (и других открытых к тому времени затменных переменных звезд) можно определить отношение размеров обеих звезд: главной звезды Алголя А и звезды-спутника Алголя В. Через 9 лет, в 1889 г. немецкий астроном Г. Фогель обнаружил смещение линий спектра Алголя то к фиолетовому, то к красному концу спектра с периодом, равным периоду изменения блеска звезды. На основании принципа Доплера *) это означало, что звезда то приближается к нам, то удаляется, то есть обращается по орбите вокруг центра масс системы. Это окончательно подтвердило гипотезу Гудрайка.

Сейчас известно несколько тысяч затменных переменных звезд. Большие заслуги в их исследовании принадлежат русским и советским астрономам.

Посмотрим теперь, какие характеристики затменной звезды можно получить, наблюдая изменение ее блеска.

Вот перед нами кривая типичной звезды типа Алголя (рис. 1, *а*). Поскольку минимум — острый, без участка постоянного блеска, мы здесь наблюдаем частное затмение (то есть закрывается только часть поверхности главной звезды (рис. 1, *б*)). Нетрудно подсчитать, какая именно часть звезды закрывается. Будем считать, что диск главной звезды — равномерно яркий, а орбита темной звезды — круговая. Условимся обозначать блеск звезды вне затмения через L_0, а в период максимального затмения — через l.

По кривой блеска звезды мы можем определить амплитуду изменения блеска — Δm (если вне затмения звезда светит как звезда m_1-й звездной величины, а в затмении — как звезда m_2-й звездной величины, то $\Delta m = m_2 - m_1$). По определению

$$\Delta m = 2{,}5 \log \frac{L_0}{l} = -2{,}5 \log \frac{l}{L_0}. \quad (1)$$

Но отношение l/L_0 равно отношению площади S незакрытой части диска звезды в период максимального затмения ко всей площади диска S_0, то есть

$$\Delta m = -2{,}5 \log \frac{S}{S_0}. \quad (2)$$

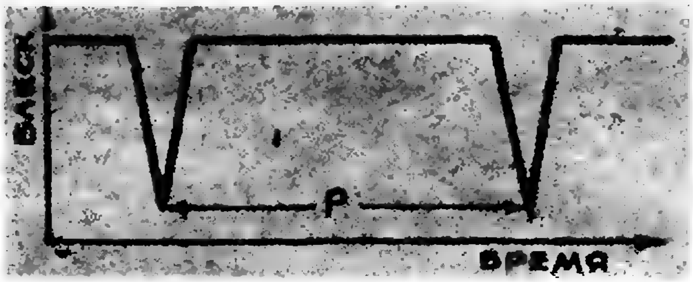
Сделаем здесь некоторые пояснения. Назовем поверхностной яркостью энергию излучения единицы поверхности звезды в единице телесного угла. Блеск L и яркость B связаны соотношением $L = B \cdot S$, где S — поверхность диска звезды. Так как по нашему предположению $B = \mathrm{const}$, значит, $l/L_0 = S/S_0$, откуда и следует равенство (2).

Для Алголя, у которого $\Delta m = 1{,}27$, по формуле (2) находим $\log S/S_0 \approx$ $\approx -0{,}51 = \bar{1}{,}49$, то есть $S/S_0 \approx 0{,}3$. При максимальном затмении (главный минимум на кривой блеска) закрывается 70% площади диска главной звезды.

В дальнейшем выяснилось, что кроме главного минимума (Δm_1 —

---

*) Подробнее см. статью Л. Г. Асламазова «Эффект Доплера» («Квант» № 4, 1971).



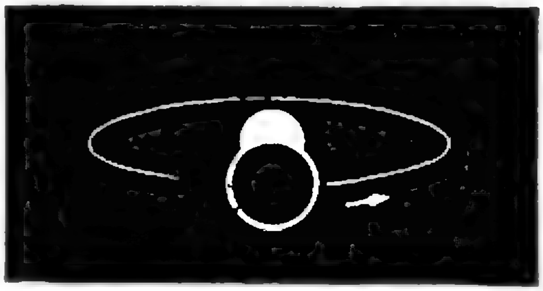


Рис. 1. а б

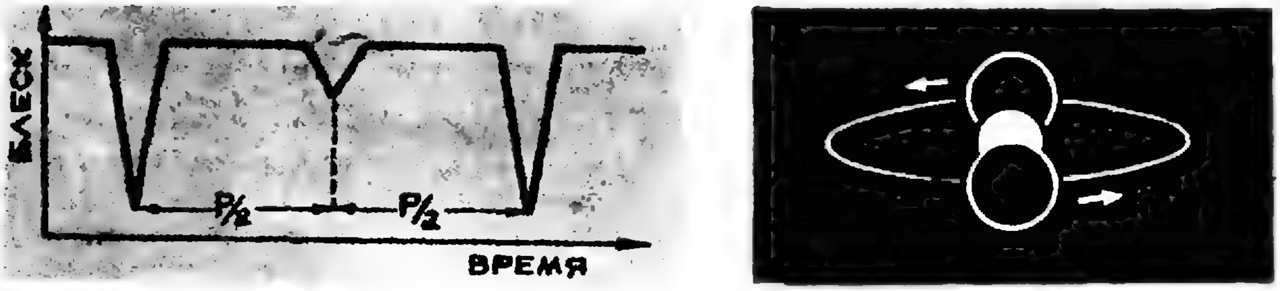


Рис. 2. а б

= 1,27) у Алголя через полпериода наступает вторичный минимум, когда его блеск падает лишь на $\Delta m_2 = 0{,}06$ звездной величины (рис. 2, *а*). Это означает, что спутник в системе Алголя не совсем темный, и излучает немного света, и когда его частично закрывает главная звезда, блеск системы несколько ослабевает. Поскольку геометрическая картина обоих затмений совершенно симметрична относительно центра главной звезды независимо от угла наклона орбиты к лучу зрения, очевидно, что закрываемая площадь диска спутника в точности равна закрываемой в главном минимуме площади диска главной звезды (см. рис. 2, *б*). Но тогда по соотношению амплитуд потери блеска в главном и вторичном минимуме (Δm_1 и Δm_2) и соответствующих им значений блеска (l_1 и l_2) можно найти отношение поверхностных яркостей обеих звезд (B_1, B_2). Примем для простоты блеск системы вне затмения за единицу ($L_0 = 1$); тогда из (1) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta m_1 = -2{,}5\log l_1;\ \Delta m_2 = \\ &= -2{,}5\log l_2;\ \log l_1 = -0{,}4\,\Delta m_1;\\ &\log l_2 = -0{,}4\,\Delta m_2;\\ &\quad l_1 = 10^{-0{,}4\Delta m_1};\ l_2 = 10^{-0{,}4\Delta m_2}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Потери блеска в главном и вторичном минимумах будут равны $(1-l_2)$ и $(1-l_2)$ соответственно (мы ведь положили $L_0 = 1$). Но так как закрытые при затмениях площади дисков обеих звезд равны, поверхностные яркости закрываемых звезд относятся как потери блеска в соответствующих минимумах:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{1-l_1}{1-l_2} = \frac{1-10^{-0{,}4\Delta m_1}}{1-10^{-0{,}4\Delta m_2}}. \quad (4)$$

Подставив $\Delta m_1 = 1{,}27$ и $\Delta m_2 = 0{,}06$, найдем для Алголя $B_1/B_2 = 12{,}7$, то есть поверхность главной звезды почти в 13 раз ярче, чем поверхность спутника.

Зная отношение яркостей главной звезды и звезды-спутника, можно найти отношение температур обеих звезд. Экспериментально было установлено, что излучение с единицы поверхности светящихся тел пропорционально четвертой степени их температуры *). В нашем случае излучение с единицы поверхности — это поверхностная яркость звезд. Следовательно, мы можем записать:

$$B_1 = \sigma T_1^4,\quad B_2 = \sigma T_2^4, \quad (5)$$

где B_1, B_2 и T_1, T_2 — поверхностные яркости и абсолютные температуры главной звезды и звезды-спутника, σ — постоянная величина. Из соотношений (5) следует, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}}. \quad (6)$$

Для звезд системы Алголя

$$T_1 : T_2 = \sqrt[4]{12{,}7} \approx 1{,}89.$$

Температуру главной звезды можно определить, изучая ее спектр, а точнее — распределение яркости вдоль спектра. Было установлено, что положение максимума энергии излучения, соответствующего длине волны λ_{max}, меняется при изменении температуры светящегося тела. При увеличении температуры тела максимум излучения смещается все дальше в область коротких волн. Таким образом,

---

*) Строго говоря, такое соотношение между излучаемой энергией и температурой справедливо для абсолютно черного тела. Однако без большой ошибки его можно применять и для излучения раскаленных металлов, Солнца, звезд.

$$\lambda_{\max}\cdot T = b,$$

где T — абсолютная температура тела, b — постоянная величина. Определив из наблюдений спектра звезды $\lambda_{\max}$ и зная b, мы можем найти абсолютную температуру светящегося тела T. Для главной звезды системы Алголя $T \approx 12\,800^\circ$; зная эту величину, можно найти абсолютную температуру звезды-спутника. Она равна 6800°. (Спектр излучения звезды-спутника очень слабый и к тому же накладывается на спектр главной звезды.)

Мы уже говорили о том, что в спектре Алголя было обнаружено смещение линий то к фиолетовому, то к красному концу спектра с периодом T, равным периоду P изменения блеска звезды. Это значит, что звезда то приближается к нам, то удаляется от нас, обращаясь по орбите вокруг центра масс системы с периодом $T = P$.

Согласно принципу Доплера скорость наибольшего приближения или удаления главной звезды Δv, длина волны линии спектра λ и ее смещение $\Delta\lambda$ связаны соотношением

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c}, \qquad (7)$$

где c — скорость света. Определив из наблюдений спектра звезды изменение длины волны при смещении линии, можно найти по формуле (7) скорость движения главной звезды по орбите. Для Алголя было найдено, что $\Delta v \approx 46$ *км/с*. Эта величина равна орбитальной скорости v.

Теперь, зная период $T = P \approx 68$ *ч* 52 *мин*, можно определить радиус орбиты звезды:

$$R_1 = \frac{T\cdot v}{2\pi} \approx 1{,}86 \ (\textit{млн. км}).$$

Радиус орбиты Алголя почти в 5 раз больше радиуса орбиты Луны.

Если в спектре звезды видны спектральные линии не только яркого, но и слабого компонента (звезды-спутника), то можно таким же точно путем найти радиус орбиты спутника R_2. Для спутника Алголя (Алголь В) было найдено $R_2 = 8{,}54$ *млн. км*. Таким образом, радиус относительной орбиты, то есть орбиты спутника относительно главной звезды равен $R = R_1 + R_2 = 10{,}4$ *млн. км*.

Зная радиус относительной орбиты и период обращения, мы можем по третьему закону Кеплера определить сумму масс обеих звезд. В обобщенной форме (выведенной Ньютоном) третий закон Кеплера имеет такой вид:

$$\frac{T_1^2\,(M_1 + M_2)}{T_2^2\,(M_3 + M_4)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (8)$$

Здесь T_1, T_2 — периоды обращения вокруг центра масс в первой и второй системах тел, a_1, a_2 — большие полуоси орбит, M_1, M_2 — массы тел первой системы, M_3, M_4 — массы тел второй системы. Примем за первую систему — систему Алголя, за вторую — систему «Солнце — Земля», за единицу массы, как это принято в физике звезд, примем массу Солнца (т. е. положим $M_3 = 1$), а массой Земли пренебрежем ($M_4 = 0$); большие полуоси заменим радиусами круговых орбит. Тогда получим:

$$M_1 + M_2 = \left(\frac{R}{R'}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2.$$

Подставляя $T_1 = 2{,}87$ суток, $T_2 = 365{,}24$ суток, $R' = 149{,}6$ *млн. км* и найденное выше значение $R = 10{,}4$ *млн. км*, получим $M_1 + M_2 = 5{,}4$, то есть сумма масс обеих звезд системы Алголя в 5,4 раза превышает массу Солнца.

Чтобы определить массу каждой звезды в отдельности, вспомним, что расстояния двух тел от центра их масс обратно пропорциональны массам. Значит,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (9)$$

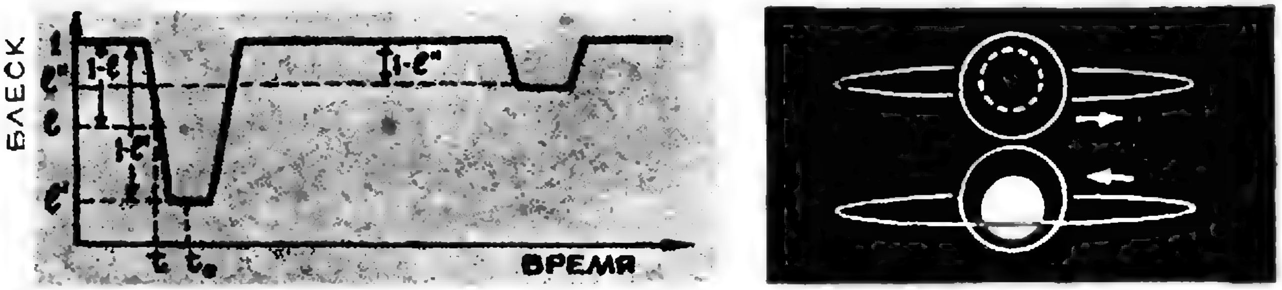


Рис. 3. а б

В случае системы Алголя $M_1/M_2 = 8{,}54 : 1{,}86 = 4{,}6$. По сумме и отношению масс находим $M_1 = 4{,}55$, $M_2 = 0{,}95$. Итак, звезда-спутник имеет массу, почти равную солнечной, а главная звезда — массу примерно в 4,5 раза больше солнечной.

Анализ кривой блеска позволяет не только найти радиусы орбит звезд, но и определить элементы орбиты: ее наклон к лучу зрения, эксцентриситет, положение плоскости орбиты в пространстве. Метод определения элементов орбиты затменной переменной звезды по кривой ее блеска был разработан в 1912 г. американским астрономом Г. Ресселом *). Вот основы этого весьма остроумного метода.

Предположим, что мы наблюдаем затмение звезды (рис. 3, *б*). Пока главная звезда закрыта целиком, блеск системы изменяться не будет. В этом случае главный минимум на кривой блеска (рис. 3, *а*) будет плоским. Во вторичном минимуме произойдет кольцеобразное затмение (рис. 3, *б*; малая звезда впереди) и он тоже будет плоским. Обозначим блеск звезды в любой момент затмения, пока оно не полное (или не кольцеобразное), через l, блеск в главном минимуме — через l', блеск во вторичном минимуме — через l''. Блеск звезды вне затмения примем за единицу. Тогда потери блеска будут равны соответственно $1-l$, $1-l'$ и $1-l''$.

Положение спутника на орбите относительно направления на Землю в каждый момент времени t определяется углом фазы θ (см. рис. 4), который равен

$$\theta = \frac{360^\circ}{P}(t - t_0), \qquad (10)$$

где t_0 — момент времени, соответствующий середине главного минимума на кривой блеска (см. рис. 3, *а*), P — период обращения спутника, равный периоду изменения блеска. В момент $t = t_0$ угол фазы $\theta = 0$. Для упрощения расчетов положим $t_0 = 0$, то есть счет времени будем вести от середины главного минимума. Примем радиус относительной орбиты за единицу ($R = 1$) и обозначим отношение радиуса меньшей звезды к радиусу большей через k ($k = r_2 : r_1$). Пусть орбита спутника наклонена

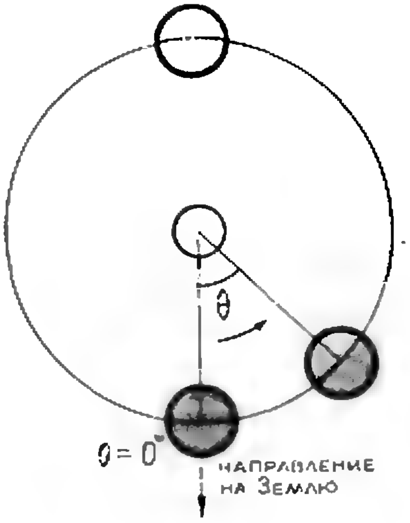


Рис. 4.

---

*) Первая общая теория затменных звезд и метод вычисления орбит были опубликованы в 1911 г. в Москве С. Н. Блажко в его докторской диссертации.

к картинной плоскости*) под углом i (очевидно, что он близок к 90°, иначе мы не увидели бы затмения). Нам нужно определить три неизвестных: r_1, r_2, i.

Из кривой блеска мы можем для каждого момента времени определить фотометрическую фазу затмения, равную отношению потери блеска в данный момент времени к потере блеска в главном минимуме:

$$\alpha = \frac{1-l}{1-l'}. \qquad (11)$$

Из определения α видно, что α есть функция угла фазы θ. Именно по известной из наблюдений зависимости $\alpha(\theta)$ мы и определим величины r_1, r_2, i.

Легко видеть, что фотометрическая фаза α однозначно зависит от трех величин: от расстояния d между центрами дисков обеих звезд (AB на рис. 5) и от их радиусов r_1, r_2 (или от одного из них, r_1, и их отношения k). Численно она равна отношению площади двойного сегмента $CDEF$ к площади диска меньшей звезды, то есть к площади круга с центром в A (рис. 5). Как же найти расстояние между центрами d?

Если бы плоскость орбиты проходила через луч зрения ($i=90°$), то было бы $d = a \cdot \sin\theta$. Но так как орбита имеет наклон $i \neq 90°$, величина d будет функцией двух углов: i и θ, из которых нам известен только второй (θ). Хотя формула, выражающая связь d с i и θ, несложна, мы не будем здесь ее выводить, чтобы избежать громоздких выкладок, а запишем ее в неявном виде:

$$d = f_1(i, \theta). \qquad (12)$$

Кроме того, согласно сказанному выше,

$$d = f_2(\alpha, k, r_1). \qquad (13)$$

Таким образом, мы имеем как будто лишь два уравнения с четырьмя неизвестными d, i, k, r_1. Исключив d, мы получим одно уравнение с тремя неизвестными i, k, r_1.

Но в нашем распоряжении не одна точка на кривой блеска, а много. Выбрав три точки, мы получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными, которую можно решить и получить величины i, r_1, k (значит, и $r_2 = kr_1$).

В методе Рессела две точки выбираются фиксированными (они соответствуют $\alpha=0{,}6$ и $\alpha=0{,}9$), а третья точка — «скользящая», то есть в качестве третьей точки по очереди выбираются многие точки на кривой блеска. Из получаемых 10—20 решений для неизвестных берутся средние значения. Таким образом, в решении участвует как бы вся кривая блеска.

Зная радиусы обеих звезд в долях радиуса орбиты R (мы полагали $R=1$), мы можем затем найти абсолютные радиусы, а по ним — объемы. Поделив массы звезд на их объемы, мы найдем средние плотности звезд.

Если затмение не полное, а частное, решение будет более сложным, но метод Рессела позволяет достичь успеха и в этом случае.

Для выбранного нами примера — системы Алголя — $r_1=2{,}0$ *млн. км*, $r_2=2{,}0$ *млн. км*. Зная размеры и массы, мы легко найдем средние плотности обеих звезд $\rho_1=0{,}1$ *г/см*³, $\rho_2=0{,}06$ *г/см*³.

Итак, из анализа кривой блеска затменной переменной звезды Алголь

---

*) Картинной плоскостью называется плоскость, перпендикулярная лучу зрения.

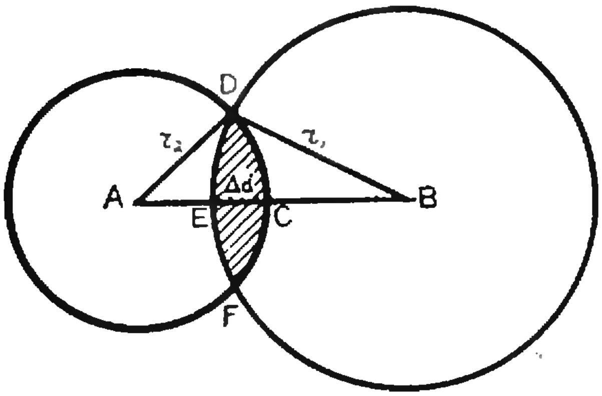


Рис. 5.

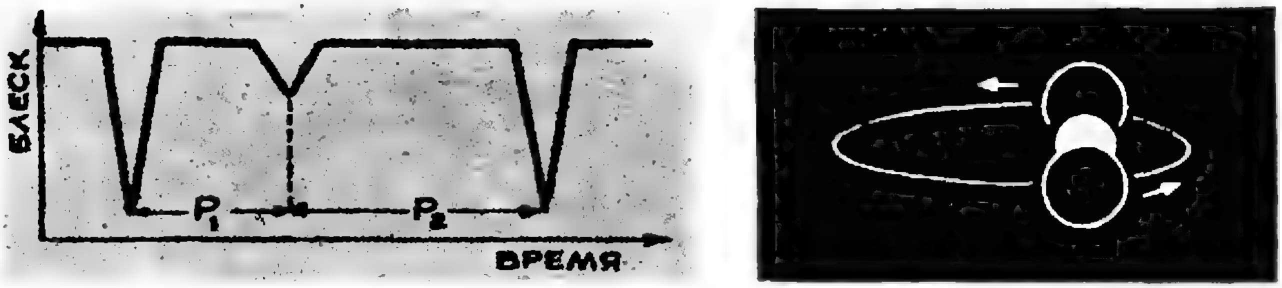


Рис. 6. а б

использовав также спектральные наблюдения, мы узнали о ней следующее: размеры и угол наклона орбиты к картинной плоскости, скорости обеих звезд на орбитах, их массы, температуры, радиусы, плотности.

Но это еще не все.

Многолетние наблюдения обнаружили периодические колебания периода изменения блеска Алголя. Это удалось объяснить возмущениями со стороны третьего компонента этой системы — звезды Алголь С, которая имеет массу $M_3=1{,}3\ M_C$ (M_C — масса Солнца) и период обращения вокруг центра масс системы 1,873 года. На основании третьего закона Кеплера находим, что радиус орбиты Алголя С (относительно Алголя А) в 38 раз больше радиуса орбиты Алголя В, то есть равен 400 *млн. км* (на таком расстоянии от Солнца движутся некоторые астероиды).

У некоторых звезд вторичный минимум на кривой блеска расположен не посередине между двумя главными, а смещен в сторону (рис. 6, *а*). Это означает, что орбита спутника — не круговая, а эллиптическая (рис. 6, *б*). Вблизи периастра — самой близкой точки орбиты к главной звезде — спутник, на основании второго закона Кеплера, движется быстрее, чем вблизи апоастра — самой далекой точки орбиты.

Любопытное явление было обнаружено при наблюдении звезды RU Единорога, открытой в начале нашего века русской исследовательницей переменных звезд Л. П. Цераской. Вторичный минимум кривой блеска этой звезды постепенно перемещался между главными. Советские ученые А. Д. Дубяго и Д. Я. Мартынов, изучавшие эту звезду, объяснили наблюдаемое явление вращением эллиптической орбиты звезды в своей плоскости. Позже были обнаружены и другие звезды, у которых орбита поворачивается.

У некоторых звезд блеск между главными минимумами не остается постоянным — блеск звезды после затмения продолжает расти, пока не наступает вторичное затмение (затмение спутника); после вторичного минимума блеск постепенно убывает (рис. 7, *а*). Здесь проявляется эффект отражения: более слабая звезда отражает свет яркой и при этом меняет свои фазы (подобно Луне) *). Вблизи вторичного минимума слабая звез-

---

*) Здесь происходит не только простое отражение, но и усиление свечения слабой звезды в результате поглощения ею излучения яркой звезды.

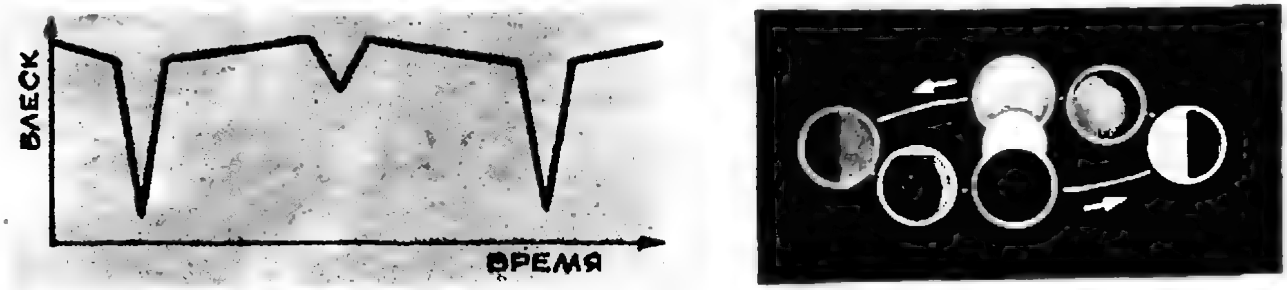


Рис. 7. а б

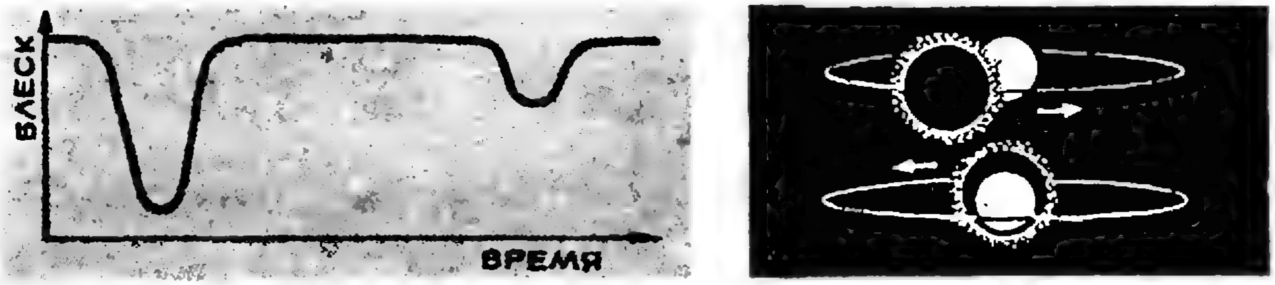


Рис. 8.

да имеет почти полную фазу (как Луна в полнолуние) и общий блеск системы возрастает (рис. 7, *б*).

Иногда затмевающая звезда имеет протяженную атмосферу, и тогда ослабление блеска начинается еще задолго до затмения (рис. 8).

В заключение нашего знакомства с затменными переменными звездами скажем только, что производить их наблюдения может каждый желающий, располагающий призматическим биноклем. Как это сделать, описано в книгах:

В. П. Цесевич — Переменные звезды и способы их исследования. Изд-во «Педагогика», 1970.

В. П. Цесевич — Что и как наблюдать на небе. Изд. 3-е, Физматгиз, 1963.

Н. Е. Курочкин — Инструкция для наблюдения переменных звезд. Изд-во «Наука», 1963.

Последнюю книжку можно получить по адресу: Москва, К-9, п/я 918, Всесоюзное астрономо-геодезическое общество.

ПРИЛОЖЕНИЕ

вывод обобщенного закона Кеплера

В результате долгой и кропотливой обработки наблюдений положений планеты Марс за 24 года известный немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630) вывел свои три закона движения планет. III закон был им получен в такой форме:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

что означает: квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит (или, что то же самое, их средних расстояний от Солнца).

Позже Ньютон вывел законы Кеплера теоретически, как прямые следствия открытого им закона всемирного тяготения. Вывод этот требует знания дифференциального и интегрального исчисления и для читателей «Кванта» сложен. Но если ограничиться круговыми орбитами, этот вывод становится доступным школьнику. Вот он.

Планета притягивается Солнцем с силой $F = k\frac{Mm}{R^2}$, R — расстояние между планетой и Солнцем, M — масса Солнца, m — масса планеты, k — постоянная тяготения.

От силы перейдем к ускорению, которое Солнце сообщает планете: $g_1 = \frac{F}{m} = k\frac{M}{R^2}$.

Но так как притяжение — взаимное, то и Солнце под действием планеты получит ускорение, направленное в противоположную сторону: $g_2 = -\frac{F}{M} = -k\frac{m}{R^2}$.

Найдем теперь ускорение относительного движения (планеты относительно Солнца). Оно будет равно разности двух предыдущих ускорений: $g = g_1 - g_2 = \frac{k(M+m)}{R^2}$.

Приравняем его центростремительному ускорению:

$$\frac{k(M+m)}{R^2} = \frac{v^2}{R}. \tag{1}$$

Но скорость движения планеты по круговой орбите равна длине орбиты, поделенной на время обращения T:

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и выполняя сокращения и простые преобразования, получим

$$\frac{T^2(M+m)}{R^3} = \frac{4\pi^2}{k}. \tag{3}$$

Величина, стоящая справа, — константа. Поэтому для любых двух планет отношение, стоящее в левой части (3), будет одинаковым. Отсюда и следует формула обобщенного III закона Кеплера: $\frac{T_1^2(M+m_1)}{T_2^2(M+m_2)} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$.

Путешествие мистера Клока

Д. Бородин

Начало этой истории похоже на детективный роман. В один из весенних дней 1970 года на борту самолета, совершающего кругосветный рейс, находились два пассажира. Один из них был американский физик Хафель, другой занимал целых два места и был зарегистрирован в аэропорту как мистер Клок. Мистер Клок был на самом деле часами*), очень точными атомными часами, которые отсчитывали время с 13 знаками**).

Путешествие было предпринято для того, чтобы продемонстрировать эффект изменения хода часов, предсказываемый теорией относительности.

Опыт был поставлен так, что в нем участвовали на самом деле не один, а два самолета, в каждом из которых путешествовали по два экземпляра атомных часов. (Мистера Клока во втором самолете сопровождал другой физик Китинг).

Один из самолетов летел с запада на восток, другой — с востока на запад. Маршрут их пролегал на высоте примерно в 10 *км* и шел вдоль земной параллели. Скорость самолетов была около 1000 *км/час*, так что свой рейс они завершали примерно за двое суток (считая остановки в пути).

Когда показания часов сверили с часами на аэродроме, то оказалось, что часы, которые летели на самолете с запада на восток, отстали на 5 стомиллионных долей секунды (как сейчас принято говорить, — на 50 наносекунд). Часы, облетевшие Землю с востока на запад, ушли вперед на 16 стомиллионных секунды (160 *нсек*). Хотя в опыте было много помех, которые трудно поддаются точному учету (например, посадки самолета в промежуточных аэропортах), тем не менее эффект изменения хода часов был продемонстрирован очень убедительно.

Физики, занимающиеся элементарными частицами, наблюдают эффект замедления времени уже давно. Им хорошо известно, что летящая с большой скоростью частица, например, μ-мезон, «живет» дольше, чем покоящийся μ-мезон. Время жизни T μ-мезона, летящего со скоростью v, связано со временем жизни T_0 покоящегося μ-мезона формулой

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

($c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/с* — скорость света, $T_0 = 2$ микросекунды $= 2 \cdot 10^{-6}$ *с*). Только благодаря такому замедлению распада μ-мезон успевает пройти через всю толщу атмосферы Земли.

---

*) «Clock» по-английски означает «часы».

**) Земля вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Многие годы все часы на Земле сверялись со звездными сутками — временем одного оборота Земли относительно неподвижных звезд. Но все же такие часы ошибались на 1 *с* за 10^8 *с*. Поэтому сейчас точное время проверяют по атомным часам, которые могут отсчитывать время с точностью, в 100 000 раз большей.

Другой эффект замедления времени наблюдали астрономы. В поле тяжести звезд согласно общей теории относительности время замедляется и свет, излучаемый атомами на этих звездах, имеет частоту, меньшую, чем такое же излучение на Земле. Это «гравитационное» смещение спектральных линий звезд наблюдалось уже давно. Американские физики Паунд и Репка наблюдали его и в земной лаборатории. В их опытах было показано, что с удалением источника излучения от поверхности Земли его частота увеличивается (так же как далекие от звезды земные часы идут быстрее, чем часы на тяжелой звезде).

В опытах мистера Клока сказывались оба эффекта. Часы, поднятые на 10 *км* над Землей, идут быстрее земных, как в опытах Паунда и Репки. За двое суток полета «гравитационный» эффект должен был подогнать часы на $+100$ *нсек*. Кроме того, часы двигались вместе с вращением Земли со скоростью $\Omega\,(R+h)+v$ $(v>0)$, если самолет летел с запада на восток, и $v<0$, если самолет летел с востока на запад). Здесь Ω — угловая скорость Земли, равная $\frac{2\pi}{86400}$ *рад/сек*, R — радиус Земли, h — высота полета, v — скорость самолета. При этом часы отставали благодаря тому же эффекту, который приводит к замедлению распада μ-мезонов. Часы не могут разделить оба эффекта («гравитационный» и «скоростной»). Но эти эффекты нетрудно сосчитать.

$$\frac{\Delta t\,(\text{самолет})}{\Delta t\,(\text{Земля})}\approx 1+\frac{gh}{c^2}-\frac{2R\Omega v+v^2}{2c^2}. \quad (1)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, $g=\frac{\gamma M}{R^2}-R\Omega^2$, γ — постоянная в законе тяготения, M — масса Земли, c — скорость света, $v>0$ — при полете «запад → восток», $v<0$ — при полете «восток → запад».

Результаты расчетов и опыты приведены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты опыта мистера Клока

Направление полета самолета	Теория	Опыт
Запад→Восток	−40 *нсек* (часы отстали)	−50 *нсек*
Восток→Запад	+275 *нсек* (часы ушли вперед)	+160 *нсек*

Согласие, конечно, не очень хорошее, но и опыт был простой, а затраты на него равны стоимости шести билетов на самолет. Вероятно, его повторят в более хороших условиях, но вряд ли кто сейчас сомневается, что более точный опыт даст хорошее согласие с теорией.

ПОПОЛНЕНИЕ КОМАНДЫ

Сборную футбольную команду города необходимо было пополнить защитником, полузащитником, левым крайним нападающим и центральным нападающим. И хотя было 7 приблизительно одинаково играющих претендентов, задача оказалась не из легких, так как необходимо было учитывать их сыгранность и весьма сложные взаимоотношения.

Капралов согласен войти в сборную только центральным нападающим и то при условии, что Полянчиков не будет защитником, а Алексеев — левым крайним нападающим. Колесников отказывается играть за сборную, если туда войдут Зборовский и Дымников вместе или если в команду будет включен Алексеев без Комарова, а чтобы согласился выступать Комаров, надо отказаться от приглашения Колесникова и Капралова. Полянчиков не желает играть вместе с Дымниковым, если в команде не будет Капралова или если Алексеев будет центральным нападающим. Дымников согласен только в нападении и при условии, что в команде не будет Алексеева. Зборовский соглашается войти в сборную только вместе с Дымниковым, но и при этом отказывается быть защитником.

Кого и кем взяли в сборную команду города?

А. С. Сорокин

Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года

А. Л. Тоом

Условия этих задач и правила приема в заочную математическую школу при МГУ и ЛГУ были помещены в первом номере «Кванта» за этот год. Здесь мы помещаем решения и указания к некоторым из этих задач.

Новая вступительная работа во Всесоюзную заочную математическую школу будет опубликована в первом номере «Кванта» 1973 года.

1. *В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.*

Обозначим концы той стороны, относительно которой симметричны центры, через A и C, а третью вершину — через B (см. рис. 1). Пусть O и D — центры соответственно вписанной и описанной окружностей. Если опустить из них перпендикуляры на AC, то они упадут в одну точку M — середину отрезка OD (это и означает, что O и D симметричны относительно AC). Нам надо найти углы треугольника: $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$.

Докажем сначала, что $\alpha=\gamma$. Действительно, $AD=DC$ (как радиусы), поэтому $AM=MC$, откуда $\triangle AMO=\triangle CMO$. Следовательно, $\angle OAM=\angle OCM$. Но $\angle OAM=\frac{\alpha}{2}$ $\angle OCM=\frac{\gamma}{2}$ (центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения его биссектрис), поэтому $\alpha=\gamma$.

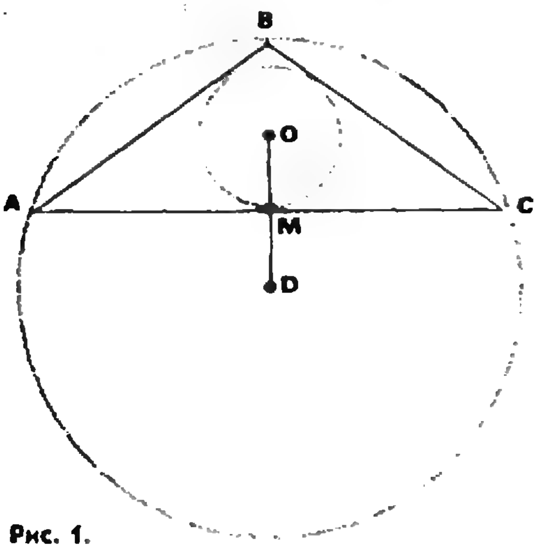


Рис. 1.

Отсюда следует, что $AB=BC$, тогда медиана BM — одновременно и высота, значит, O лежит на BM.

Поэтому точки B, O, M и D лежат на одной прямой, а так как $BD=AD$ (как радиусы), то $\angle BAD=\angle ABD=\frac{\beta}{2}$.

С другой стороны, $\triangle AOM=\triangle ADM$. Поэтому

$$\angle MAD=\angle MAO=\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\angle BAD=\angle BAM+\angle MAD=\alpha+\frac{\alpha}{2}=\frac{3\alpha}{2}.$$

Итак,

$$\frac{\beta}{2}=\frac{3\alpha}{2},\quad \beta=3\alpha.$$

Поэтому сумма углов треугольника ABC равна 5α, откуда $\alpha=36^\circ$, $\beta=108^\circ$.

Ответ: 36°, 108°, 36°.

2. *Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку написано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер, и как ему надо для этого играть, если вначале написано:* а) *7 минусов*; б) *8 минусов*; в) *k минусов?*

Выигрывает при всех n начинающий. Опишем стратегию, применяя которую, он наверняка выиграет. Первый ход надо сделать в середине, чтобы оставшиеся минусы образовали два отдельных «куска» равной длины (на рисунке 2 изображена позиция после первого хода для $n=7$ и $n=8$). После этого начинающий каждым своим ходом должен переправлять минусы, симметричные тем, которые перед этим переправил второй. Так, если второй переправил k-й (или k-й и $k+1$-й) минус справа, то надо переправить k-й (или k-й и $k+1$-й) минус слева. Тогда после каждого хода первого будет получаться симметричная позиция.

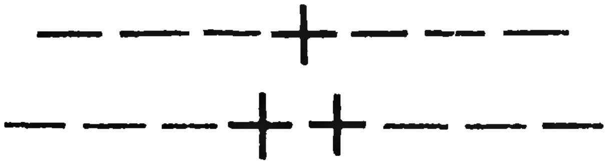


Рис. 2.

Второй каждым ходом будет переправлять один или два минуса, симметричные которым еще не переправлены; следовательно, эти минусы не могут быть последними, и второй не может выиграть.

3. *В треугольнике ABC проводятся биссектриса AK и медиана AM. Чему может равняться отношение сторон AB и AC, если известно, что один из отрезков BM, MK, KC равен полусумме двух других?*

Указание. Здесь необходимо рассмотреть шесть случаев, соответствующих клеткам таблицы (см. рис. 3).

В клетках написаны ответы.

	$BM=\frac{MK+KC}{2}$	$MK=\frac{BM+KC}{2}$	$KC=\frac{BM+MK}{2}$
точка K ближе к B чем точка M	$\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}$	нет решений	нет решений
точка M ближе к Б чем точка K	нет решений	$\frac{AB}{AC}=5$	$\frac{AB}{AC}=2$

Рис. 3.

4. *Существует ли хотя бы одно число a такое, что оба числа $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ и $a+\sqrt{15}$ — целые?*

Пусть $a+\sqrt{15}=m$, $\frac{1}{a}-\sqrt{15}=n$.

Выразим a из первого равенства и подставим во второе:

$$\frac{1}{m-\sqrt{15}}-\sqrt{15}=n.$$

Преобразуем:

$$16-mn=(m-n)\sqrt{15}.$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы было:

$$\begin{cases} 16-mn=0, \\ m-n=0. \end{cases}$$

(В действительности это и необходимо, раз m, n — целые, но этого можно и не знать: ведь нам достаточно найти хоть одно значение a.)

Полученная система легко решается:

$$m_1=n_1=4,\ m_2=n_2=-4.$$

Ответ: такое a существует: например, $4-\sqrt{15}$ (в действительности таких чисел всего два).

5. *Один из пяти братьев разбил окно. Андрей сказал: «Это или Витя, или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба говорите неправду». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты неправ». Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто разбил окно?*

Изобразим заявления братьев в виде таблицы из 5 строк и 5 столбцов

	А	В	Т	Д	Ю
А	−	+	−	+	−
В	+	−	−	+	−
Т	+	+	−	−	+
Д	−	+	−	+	−
Ю	−	−	+	−	+

Рис. 4.

(рис. 4). Строки и столбцы названы первыми буквами имен братьев. Заявление каждого брата записывается столбцом под первой буквой его имени. В этом столбце расставим плюсы и минусы по следующему правилу: плюс, если высказывание допускает, что брат, по имени которого названа строка, разбил окно, и минус, если высказывание этого не допускает.

Так, в столбце под буквой *А* плюся стоят только против букв *В* и *Т*, поскольку Андрей сказал: «Это или Витя, или Толя». В столбце под буквой *В* минусы стоят только в строках *В* и *Ю*.

Чтобы заполнить столбец *Т*, надо разобраться, в каком случае Андрей и Витя оба неправы. Например, если окно разбил Андрей, то Витя окажется прав, так как он это допускал, и в столбце *В* против буквы *А* стоит плюс. Вообще, Андрей и Витя оба окажутся неправы, только если окно разбил Юра, так как только в строке *Ю* на первых двух местах стоят минусы. Значит, в столбце *Т* надо поставить плюс только против *Ю*.

Дима окажется прав, только если ровно один из первых двух братьев — Андрей и Витя — окажется прав, а другой неправ. Значит, в столбце *Д* плюс ставится только в тех строках, в которых на первых местах стоит один минус и один плюс.

Юра просто отрицает то, что сказал Дима; где в столбце Димы плюс, там у него минус, и наоборот. Таблица заполнена. Мы знаем, что не менее трех братьев сказали правду. Значит, надо искать строку, в которой не менее трех плюсов. Такая строка только одна — *Т*.

Ответ: окно разбил Толя.

6. *Придумайте четыре тройки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от* 1 *до* 81 *можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой тройки.*

Годятся такие четыре тройки:

1, 2, 3
0, 3, 6
0, 9, 18
0, 27, 54.

Объясним, как они придуманы. Легче решить эту задачу в более общем виде: придумать k троек целых неотрицательных чисел таких, чтобы каждое число от 1 до 3^k можно было представить в виде суммы k чисел — по одному из каждой тройки.

При $k=1$ решение очевидно: одна тройка 1, 2, 3. Пусть задача для k троек решена. Как подобрать еще одну тройку, чтобы получить решение задачи для $k+1$?

Первое число надо взять равным нулю. Тогда, прибавляя его ко всем суммам k чисел, взятых по одному из первых троек, получим те же числа от 1 до 3^k.

Второе число возьмем равным 3^k. Прибавляя его к числам от 1 до 3^k, получим все числа от 3^k+1 до $2\cdot3^k$.

Третье число возьмем равным $2\cdot3^k$. Прибавляя его к тем же числам, получим все числа от $2\cdot3^k+1$ до $3\cdot3^k=3^{k+1}$.

Итак, задача решена и для $k+1$. Так построены четыре наши тройки. Доказано, что они годятся при каждом k, в том числе и при $k=4$.

Об экстремальных точках

Ж. Б. Линковский

Экстремальная точка — это точка, для которой некоторая функция достигает наибольшего или наименьшего значения. Легко доказать, что точка пересечения медиан треугольника обладает следующим свойством: *для нее сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна.* В этой статье мы изложим вполне элементарное доказательство обобщения этого факта.

Пусть на плоскости даны n точек. Введем на плоскости декартову систему координат с осями Ox, Oy и обозначим эти точки так: $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, . . . , $A_n(x_n, y_n)$ (рис. 1). Возьмем любую точку $M(x, y)$ на плоскости. Квадрат расстояния от точки M до точки A_i легко найти по теореме Пифагора (рис. 2): $d_i^2=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2$. Сумма квадратов расстояний от M до точек A_1, A_2, . . . , A_n выглядит так:

$$D = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + \ldots + (x-x_n)^2 + (y-y_n)^2.$$

Раскроем скобки и представим D в виде суммы многочленов от x и y:

$$D = nx^2-2x(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+ny^2-2y(y_1+y_2+\ldots+y_n)+(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2).$$

Получилась сумма двух многочленов, один зависит только от x:

$$P(x) = nx^2-2x(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2),$$

второй зависит только от y:

$$Q(y) = ny^2-2y(y_1+y_2+\ldots+y_n)+(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)$$

и $D=P(x)+Q(y)$. Замечаем, что x и y независимы, поэтому D достигнет наименьшего значения при таком x, при котором $P(x)$ наименьшее, и при таком y, при котором $Q(y)$ наименьшее. Но $P(x)$ и $Q(y)$ — это многочлены второго порядка (с несколько длинно записанными коэффициентами). Графиком функции $P(x)$ будет парабола (рис. 3), ветви которой направлены вверх ($n>0$), наименьшее значение $u=P(x)$ достигается при x, равном абсциссе вершины параболы. Отсюда легко найти значение x, при котором $P(x)$ минимально: $x=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Аналогично находится координата y (из $Q(y)$): $y=\dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$.

Предоставляем читателю решить следующие задачи.

1. Доказать, что координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ таковы:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

2. Точкой Торричелли называется точка треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Доказать, что из точки Торричелли стороны треугольника видны под углами 120°.

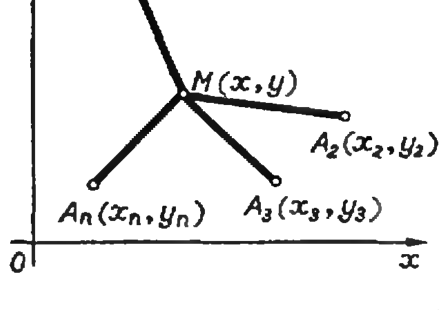


Рис. 1.

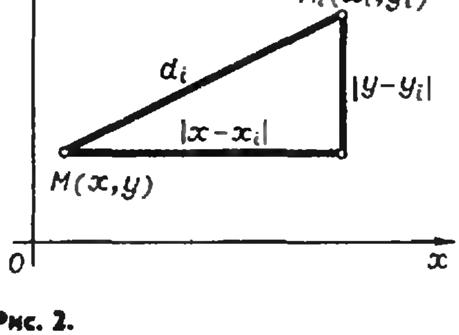


Рис. 2.

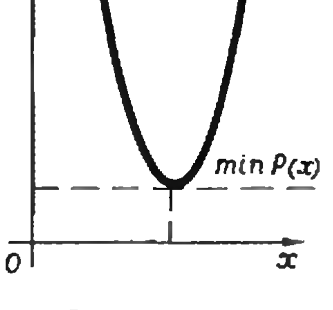


Рис. 3.

Премии «Кванта»

Редакция журнала получила более 3000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1973 год.

Вот имена победителей нашего конкурса:

Леонид Брагинский
Фрунзе, школа № 61;

Ирина Братовская
Усолье-Сибирское,
школа № 2;

Александр Григорян
Баку, школа № 211;

Владимир Кууск
Ржев, школа № 4;

Геннадий Левин
Куйбышев, школа № 135;

Юрий Лурье
Грозный, школа № 1;

Александр Макаричев
Львов, школа № 14;

Александр Шерстюк
Николаев, школа № 2;

Фарид Тухватуллин
Ташкент, школа № 110.

ЗАДАЧНИК Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите решения каких задач Вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М182, М184» или «... Ф193».

Решения задач по каждому из предметов — математике и физике, а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах.

Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с Вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

ЗАДАЧИ

М161. Озеро имеет форму невыпуклого n-угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого m-угольника, где $m \leqslant n$.

И. Н. Бернштейн

М162. Последовательность натуральных чисел

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots \quad (A)$$

такова, что каждое натуральное число либо входит в последовательность (А), либо представляется в виде суммы двух чисел из последовательности (А), быть может, одинаковых.

Докажите, что $a_n \leqslant n^2$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Ю. Г. Ерошкин, ученик 9 класса

М163. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то проекции их точки пересечения на все четыре стороны (или их продолжения) лежат на одной окружности.

И. А. Кушнир

М164. На белых клетках бесконечной шахматной доски, заполняющей верхнюю полуплоскость (рис. 1), записаны какие-то числа так, что для каждой черной клетки сумма чисел, стоящих в двух соседних с ней клетках — справа и слева,— равна сумме двух других чисел, стоящих в соседних с ней клетках — сверху и снизу. Известно число, стоящее в одной клетке n-й строки (голубой крестик на рисунке 1), а требуется узнать число, стоящее над ним в $(n+2)$-й строке (красный знак вопроса на рисунке). Сколько еще чисел, стоящих в двух нижних строках (голубые точки на рисунке), нужно для этого знать?

М. Л. Гервер

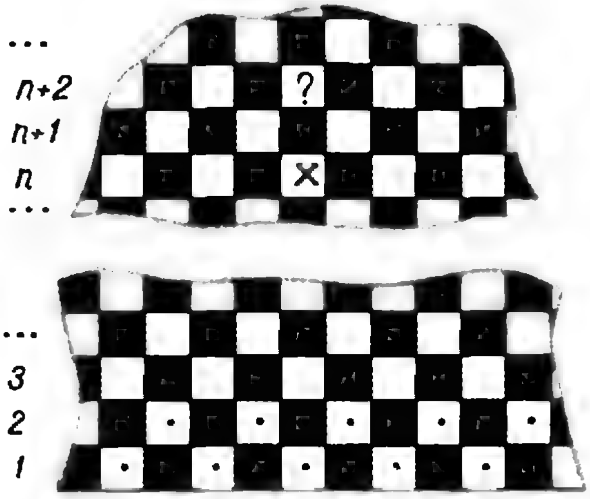


Рис. 1.

М165.* На окружности расположено множество F точек, состоящее из 100 дуг. Известно, что при любом повороте R окружности множество $R(F)$ имеет общую точку с F. (Другими словами, для любого α от 0° до 180° в множестве F можно указать две точки, отстоящие друг от друга на α.) Какую наименьшую сумму длин могут иметь 100 дуг, образующих множество F? Каков будет ответ, если дуг не 100, а n?

Ю. П. Лысов

Ф163. В однородно заряженной сфере радиуса R имеется сферическая полость радиуса r, центр которой находится на расстоянии a от центра сферы (рис. 1). Найти напряженность электрического поля в различных точках полости, если плотность заряда равна σ.

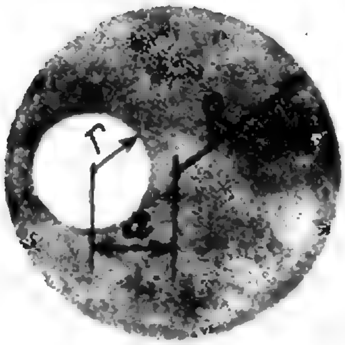


Рис. 2.

В. Д. Кривченков

Ф164. Найти теплоемкость идеального газа в процессе, при котором температура газа а) пропорциональна квадрату его объема; б) обратно пропорциональна его объему.

И. Ш. Слободецкий

Ф165. Оцените время упругого столкновения двух стальных или двух резиновых шаров с одинаковыми радиусами $R=1$ *см*. Для стали модуль Юнга $E_с=2{,}1\cdot10^{11}$ *н/м²*, плотность стали $\rho_с=7{,}8\cdot10^3$ *кг/м³*. Модуль Юнга резины $E_р\approx10^6$ *н/м²*, ее плотность $\rho_р\approx10^3$ *кг/м³*. Шарики движутся навстречу друг другу со скоростями $v=1$ *м/с*.

Какова средняя сила взаимодействия шариков?

Г. Л. Коткин

Ф166. Почему легче проткнуть шилом дыру, если шило вращается? Почему нужно вращать гвоздь, чтобы вытащить его из стены? Почему, когда вы режете хлеб или мясо, вы двигаете нож взад-вперед, а когда режете сыр, то только давите на нож?

А. Г. Косоуров

Ф167. Частота колебаний струны зависит от ее длины, натяжения и от погонной плотности — массы единицы длины струны. Определите вид этих зависимостей.

И. А. Зайцев

ЗАДАЧИ НА КОМБИНАТОРИКУ

1. В классе присутствуют 36 учащихся. Сколько существует вариантов выбора одного председателя и одного секретаря для проведения классного собрания?

2. Автомобиль «Волга» имеет номер ММО-6057. Сколько всего машин может оказаться с индексом ММО?

3. Телефонные номера в Ленинграде состоят из шести цифр. Сколько всего телефонных номеров может быть в Ленинграде?

4. Во время обеда в столовой посетитель выбирает себе одну столовую, одну чайную ложки и одну вилку. Сколько всего существует вариантов выбора, если в столовой имеется 20 столовых, 10 чайных ложек и 15 вилок?

5. В соревнованиях по футболу принимают участие 20 команд. Сколько встреч будет проведено между ними, если соревнования проводятся в один круг?

6. В соревнованиях по шахматам принимает участие 30 человек. Сколько партий будет сыграно между ними, если соревнования проводятся в один круг?

7. В праздничные дни для патрулирования выделено 50 офицеров и 100 солдат. Нужно их разбить на группы по три человека в каждой (один офицер и два солдата). Сколько существует вариантов составления патрулей?

Х. Ш. Шихалиев

ЗАДАЧНИК КВАНТА

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М123—М125

М123

Найдите все натуральные числа m, для которых

$$1!\cdot 3!\cdot 5!\ldots(2m-1)! = \frac{m(m+1)}{2}\,!$$

(через $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

Решениями уравнения являются числа 1, 2, 3, 4. В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой. Докажем, что других решений нет. (Эта задача под номером 76 была опубликована в сборнике «Математическое просвещение» № 4 за 1935 год; в то время никому из читателей не удалось найти «убедительное доказательство того, что уравнение не имеет других решений» — так было написано в № 8 этого сборника за 1936 год). Простое доказательство, которое мы предлагаем, опирается на следующую теорему («постулат Бертрана», о котором рассказывалось в «Кванте» № 5 за 1971 год и № 5 за 1972 год): между числами a и $2a$, где $a>1$, всегда найдется хотя бы одно простое число.

Пусть p — простое число, лежащее между $2x-1$ и $2(2x-1)$. Если бы выполнялось неравенство

$$2(2x-1)<\frac{x(x+1)}{2},$$

то получилось бы, что число p входит в разложение на простые множители правой части уравнения, так как оно меньше $\frac{x(x+1)}{2}$, и в то же время не может входить в разложение левой части, так как оно больше $(2x-1)$. А это, по теореме о единственности разложения на простые множители, невозможно. Поэтому обязательно

$$2(2x-1)\geqslant\frac{x(x+1)}{2}.$$

Из этого неравенства находим, что $x\leqslant 6$. Но $x=5$ и $x=6$, как легко убедиться, не удовлетворяют уравнению.

В. П. Бешкарев

М124

Дан треугольник ABC. Найдите внутри него точку O, обладающую следующим свойством: *для любой прямой, проходящей через точку O и пересекающей стороны треугольника AB в точке K и BC в точке L, выполняется равенство*

$$\frac{AK}{KB}+\frac{CL}{LB}=1.$$

Вообще, докажите, что если p и q — произвольно заданные положительные числа, то внутри треугольника ABC можно указать такую точку O, что для любой прямой KL, проходящей через эту точку (K лежит на AB, L на BC),

$$p\frac{AK}{KB}+q\frac{CL}{LB}=1.$$

Проще всего решить эту задачу, используя понятие центра тяжести*).

---

*) См. статью Б. Ю. Когана «Физика помогает геометрии», «Квант» № 5, 1971 и книгу М. Б. Балка «Геометрическое приложение понятия о центре тяжести», Физматлит, 1959.

В нашем доказательстве мы воспользуемся таким свойством центра тяжести: если в системе из n грузиков $p_1, p_2, \ldots, p_n$ два грузика p_1 и p_2 заменить грузиком $p=p_1+p_2$, помещенным в их центр тяжести, то положение центра тяжести системы не изменится (курсивом выделены утверждения, вытекающие из этого свойства).

Поместим в вершины A, B и C треугольника единичные грузики a, b и c. Тогда центр тяжести O грузиков a, b и c — точка пересечения медиан. Возьмем теперь точку K на стороне AB, для которой $\frac{AK}{KB} \leqslant 1$, и представим грузик b в виде суммы двух грузиков: $b_1 = \frac{AK}{KB}$ и $b_2 = 1 - \frac{AK}{KB}$. Центр тяжести грузиков *a и b_1* находится в точке K. Тогда, если L — центр тяжести грузиков c и b_2, то $\frac{CL}{LB} = 1 - \frac{AK}{KB}$, *а центр тяжести O грузиков a, b и c лежит на прямой KL*. Поэтому для любой прямой, проходящей через точку O и пересекающей стороны AB и BC, выполняется первое равенство.

Аналогично доказывается, что если O' — центр тяжести грузиков $a=p$, $b=1$ и $c=q$, то для любой прямой, проходящей через точку O' и пересекающей стороны AB и BC треугольника, выполняется второе равенство. Действительно, возьмем на стороне AB точку K, для которой $\frac{AK}{KB} \leqslant \frac{1}{p}$, и представим грузик b в виде суммы двух грузиков $b_1 = p\frac{AK}{KB}$ и $b_2 = 1 - p\frac{AK}{KB}$. Тогда, если L — центр тяжести грузиков b_2 и c, то $1 - p\frac{AK}{KB} = q\frac{CL}{LB}$, а точки O', K и L лежат на одной прямой.

Доказательство закончено.

Похожее решение задачи прислал нам *Ф. Шмидель* из Москвы.

Л. Г. Макаров

М125

а) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, обладающая следующим свойством:

Ни одно из этих чисел не делится на другое, но среди каждых трех чисел можно выбрать два, сумма которых делится на третье?

б) Если нет, то как много чисел может быть в наборе, обладающем таким свойством?

в) Решите ту же задачу при дополнительном условии: в набор разрешается включать только нечетные числа.

Вот один пример такого набора из четырех чисел: 3, 5, 7, 107. Здесь среди трех чисел 3, 5, 7 сумма $5+7$ делится на 3; в тройке 5, 7, 107 сумма $107+5$ делится на 7; в тройке 3, 7, 107 сумма $7+107$ делится на 3; наконец, в тройке 3, 5, 107 сумма $3+107$ делится на 5.

Решим сначала задачу в).

К приведенной в условии последовательности из четырех чисел 3, 5, 7, 107 можно добавить пятое число 10693: $10693+5$ делится на 3, $10693+3$ делится на 7, $10693+7$ делится на 5, $10693+107$ делится на 3 и на 5, $10693+7$ делится на 107.

Покажем, что из шести нечетных чисел нельзя образовать последовательности, удовлетворяющей условию задачи. Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ — нечетные числа такие, что ни одно из них не делится на другое, но среди любых трех можно выбрать два, сумма которых делится на третье.

Сделаем несколько предварительных замечаний.

1. Если a, b, c — три члена нашей последовательности, $a>b>c$, то $b+c$ не делится на a.

Действительно, $b+c<2a$ и $b+c \neq a$, так как a — нечетное число.

2. Если a, b — два члена нашей последовательности, $a>b$, то $a+b$ делится на все члены последовательности, меньшие b, кроме, может быть, одного.

Действительно, если $a+b$ не делится на два числа c и d, меньшие b, то $a+c$ и $a+d$ делятся на b, но тогда и $c-d$ делится на b, что невозможно.

3. Если a, b, c, d — четыре члена нашей последовательности, $a+b$ и $a+c$ делятся на d, то $b+c$ не делится на d.

Действительно, так как $a+b$ и $a+c$ делятся на d, то $2a+(b+c)$ делится на d, в то время как $2a$ не делится на d (d — нечетное число и a не делится на d).

Пусть $a_1>a_2>a_3$ — три наибольших из шести чисел $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Каждое из чисел a_1+a_2, a_1+a_3, a_2+a_3 согласно замечанию 2 делится не менее, чем на два из чисел a_4, a_5, a_6. В то же время замечание 3 показывает, что у этих чисел нет среди чисел a_4, a_5, a_6 общего делителя. Следовательно, каждое из чисел a_1+a_2, a_1+a_3, a_2+a_3 делится на два из чисел a_4, a_5, a_6 и не делится на третье.

Пусть

a_1+a_2 делится на a_4 и a_5 и не делится на a_6;
a_1+a_3 делится на a_4 и a_6 и не делится на a_5;
a_2+a_3 делится на a_5 и a_6 и не делится на a_4.

Тогда числа a_1+a_5 и a_2+a_4 делятся на a_3. Следовательно, на a_3 делится и число $(a_1+a_2)+(a_4+a_5)$.

В то же время a_1+a_2 делится на три из чисел a_3, a_4, a_5, a_6, а так как a_1+a_2 не делится на a_6, то a_1+a_2 делится на a_3, откуда следует, что a_4+a_5 делится на a_3. Получили противоречие с замечанием 1.

Таким образом, последовательность нечетных чисел с интересующим нас свойством может состоять самое большое из пяти чисел. Задача в) решена.

Если последовательность состоит только из четных чисел, то, не нарушая условия, можно их все разделить на 2. Будем поэтому считать, что в последовательности есть нечетные числа.

В силу задачи в) их не более пяти.

Замечания 1—3 справедливы теперь при некоторых дополнительных предположениях.

В замечании 1 нужно потребовать, чтобы a не равнялось $b+c$; 2 справедливо, если число a не равно сумме никаких двух членов последовательности, а 3 справедливо, если d — нечетное число.

Если члены последовательности a, b, c четны, а d нечетно, то числа $a+d$, $b+d$ и $c+d$ не делятся ни на a, ни на b, ни на c. Следовательно, числа $a+b$, $a+c$ и $b+c$ делятся на d, что противоречит замечанию 3.

Таким образом, в нашей последовательности не более двух четных чисел. Пусть их два: a и b ($a>b$). Тогда число $a+b$ делится на все нечетные члены последовательности и, следовательно, число a — наибольшее в последовательности.

Если число a не равно сумме никаких двух членов последовательности, то, отбрасывая число b, мы получим последовательность, для которой без всяких ограничений справедливы замечания 1, 2, 3. Решение задач в) показывает, что в такой последовательности не более пяти членов, то есть в исходной последовательности не более шести чисел.

Предположим теперь, что число a равно сумме каких-либо двух нечетных членов последовательности. Если c — большее из этих нечетных чисел, то $a<2c$.

Выше уже говорилось, что число $a+b$ делится на все нечетные члены последовательности.

Следовательно, $a+b \geqslant 2n$, где через n обозначено наименьшее общее кратное всех нечетных членов последовательности. c — делитель числа n, и так как $c \neq n$, то $3c \leqslant n$ (c и n — нечетные числа). С другой стороны, так как $2c>a$, то

$$3c > \frac{3}{2}a > \frac{3}{4}(a+b) \geqslant \frac{3}{2}n > n.$$

Получили противоречие.

Таким образом, в любом случае в нашей последовательности не более шести чисел. Вот пример шестичленной последовательности: 2, 3, 5, 7, 107, 10693.

Наиболее полное решение этой задачи прислал *А. Черняк* (Минск).

Ю. И. Ионин

В этом номере мы публикуем решения задач Ф138—Ф142

Ф138

Космонавт массой 100 *кг* находится вне космического корабля, масса которого равна 5 *т*, на фале длиной 64 *м*. Найти натяжение фала, если корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры тяжести.

При расчете считать, что корабль движется по круговой орбите, высота которой от поверхности Земли пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли (R 6400 *км*).

На космический корабль действуют две силы: сила притяжения к Земле $F_1 = \gamma \dfrac{MM_{\text{З}}}{R_1^2}$ (M — масса корабля, $M_{\text{З}}$ — масса Земли, R_1 — радиус орбиты корабля, γ — гравитационная постоянная) и сила натяжения фала T (рис. 1). Под действием этих сил корабль движется по окружности. Если угловая скорость движения корабля равна ω, то корабль движется с центростремительным ускорением $a_1 = \omega^2 R_1$, которое сообщает ему равнодействующая сил F_1 и T. Согласно второму закону Ньютона $F_1 - T = M\omega^2 R_1$, или

$$\gamma \frac{MM_{\text{З}}}{R_1^2} - T = M\omega^2 R_1. \qquad (1)$$

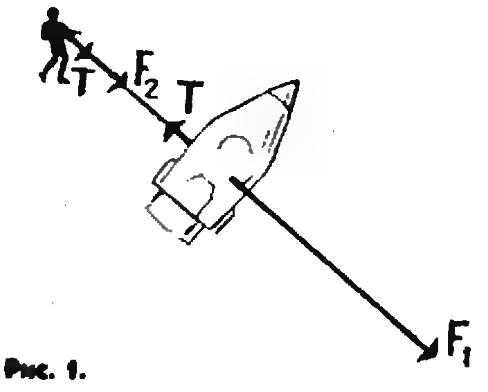


Рис. 1.

Рассмотрим силы, действующие на космонавта. Это сила натяжения фала T и сила притяжения космонавта к Земле

$$F_2 = \gamma \frac{mM_{\text{З}}}{R_2^2},$$

где m — масса космонавта, R_2 — радиус его орбиты. Под действием этих сил космонавт движется по окружности радиуса R_2 с угловой скоростью ω, то есть с центростремительным ускорением $a_2 = \omega^2 R_2$. Так как обе силы, действующие на космонавта, направлены к центру Земли, то $F_2 + T = m\omega^2 R_2$, или

$$\gamma \frac{mM_{\text{З}}}{R_2^2} + T = m\omega^2 R_2. \qquad (2)$$

Исключив ω из уравнений (1) и (2), получим

$$\left(\gamma\frac{MM_3}{R_1^2}-T\right)\frac{1}{MR_1}=$$

$$=\left(\gamma\frac{mM_3}{R_2^2}+T\right)\frac{1}{mR_2},$$

или

$$\gamma M_3\,\frac{R_2^3-R_1^3}{R_1^2R_2^2}=T\,\frac{mR_2+mR_1}{mM}. \qquad (3)$$

Но $R_2\approx R_1\approx R$ и поэтому:

$$R_1R_2\approx R^2,$$

$R_2^3-R_1^3=(R_2-R_1)(R_2^2+R_1^2+R_1R_2)\approx 3lR^2$ (l — длина фала),

$$mR_2+MR_1=(m+M)\,R.$$

Это означает, что равенство (3) можно записать так:

$$3\gamma\,\frac{M_3}{R^2}\,l=TR\frac{m+M}{mM}.$$

Отсюда получаем:

$$T=3\gamma\,\frac{M_3}{R^2}\,\frac{l}{R}\,\frac{mM}{m+M}.$$

Если тело массы m находится на поверхности Земли, то на него действует сила тяжести $F=\gamma\,\frac{mM_3}{R^2}=mg$. Это означает, что ускорение g свободного падения равно величине $\gamma\frac{M_3}{R^2}$. Поэтому мы можем выражение для силы натяжения фала переписать следующим образом:

$$T=3\,\frac{l}{R}\,\frac{mM}{m+M}\,g.$$

Подставив в эту формулу численные значения R, g, m и M, найдем

$$T\approx 0{,}03\,н.$$

Ф139

Футболист ударил по мячу, сообщив ему скорость v под углом α к горизонту, и попал в нижний угол ворот. Если бы футболист ударил по мячу в том же месте футбольного поля и мяч полетел бы под тем же углом к горизонту, но со скоростью, на 5% большей скорости v, то он попал бы в верхнюю штангу ворот. Найти скорость, с которой начинает двигаться мяч, если высота ворот $h=2$ *м*, а угол $\alpha=30°$.

Запишем кинематические уравнения движения мяча. По горизонтали — вдоль оси X мяч движется равномерно со скоростью $v_1=v\cos\alpha$ (рис. 2); его координата x меняется со временем по закону

$$x=vt\cos\alpha.$$

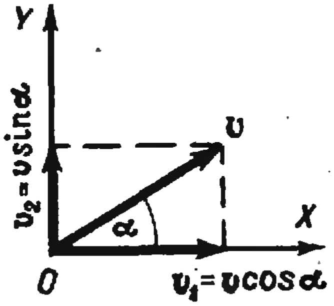


Рис. 2.

Вдоль оси Y (по вертикали) мяч движется равноускоренно с ускорением g, направленным вниз. Поэтому

$$y=vt\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_0 падения на Землю $y=0$ и $x=l$, где l — дальность полета мяча. Поэтому

$$l=vt_0\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$0=vt_0\sin\alpha-\frac{gt_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Если бы мяч начал двигаться со скоростью, на 5% большей скорости v, то есть со скоростью 1,05 v, то его координаты x и y менялись бы со временем так:

$$x=1{,}05\,vt\cos\alpha \quad\text{и}\quad y=1{,}05vt\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

В момент удара мяча о верхнюю штангу ворот его координата x была бы равна l, а координата y — высоте ворот h. Поэтому в момент t_1 удара о штангу ворот

$$l=1{,}05\,vt_1\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$h=1{,}05vt_1\sin\alpha-\frac{gt_1^2}{2}. \qquad (4)$$

Решим теперь систему уравнений (1) — (4). Из уравнения (2) нетрудно найти время t_0 полета мяча в первом случае. Так как $t_0\neq 0$, то разделив это уравнение на t_0, найдем:

$$t_0=\frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

Далее, разделив уравнение (3) на уравнение (1), получим:

$$1=1{,}05\,\frac{t_1}{t_0}.$$

Отсюда

$$t_1=\frac{t_0}{1{,}05}=\frac{2v\sin\alpha}{1{,}05g}.$$

Теперь, подставив выражение для t_1 в уравнение (4), найдем

$$v=\sqrt{\frac{gh}{0{,}2\sin^2\alpha}}.$$

Ф140

Будет ли давать правильные показания чашечный ртутный барометр, если часть его трубки (ниже уровня ртути) сделана из очень мягкой резины?

Давление выше уровня ртути в барометрической трубке пренебрежимо мало по сравнению с атмосферным — это давление насыщенных паров ртути. Поэтому можно считать его равным нулю. На уровне ртути в чашке давление в барометрической трубке равно атмосферному. Следовательно, независимо от диаметра барометрической трубки и от того, как меняется ее диаметр с высотой, высота столба ртути уравновешивает атмосферное давление p_0:

$$p_0=\rho g H$$

(ρ — плотность ртути).

Это означает, что барометр будет давать правильные показания.

Интересно выяснить, что произойдет с резиновой трубкой, какова будет ее форма. Так как давление снаружи трубки равно атмосферному, а давление внутри трубки равно $\rho g h$, то есть меньше атмосферного (атмосферному давлению равна величина $\rho g H$, а $H>h$), то трубка будет сжиматься, как показано на рисунке 3.

Ф141

Из «черного ящика», содержащего неизвестную электрическую схему, выведено три провода. Два из них соединяют с землей и затем снимают зависимость силы тока, идущего по третьему проводу, от разности потенциалов между концом этого провода и землей. Соединяя разные пары выводов с землей, строят графики для трех возможных вариантов включения схемы. Эти графики показаны на рисунке 4. Ток считается положительным, если он идет «к ящику», и отрицательным в противоположном случае. Придумайте простейшую схему содержимого «черного ящика» и определите ее параметры.

Рассмотрим графики зависимости напряжения от тока, приведенные на рисунке 4. Из первого графика следует, что ток между выводом *1* и замкнутыми выводами *2* и *3* равен нулю, когда напряжение внешнего источника равно — 3*в*. Это возможно только в том случае, когда между выводами *1* и *2* или между выводами *1* и *3* включен (или включены) источник (или источники) тока.

Из второго графика ясно, что между точками *2* и *3* и между точками *2* и *1* могут быть только сопротивления. Только в этом случае ток между выводом *2* и соединительными выводами *3* и *1* будет равен нулю при $U=0$.

Из третьего графика следует, что внутри ящика имеется источник, который включен или между точками *3* и *1*, или между точками *3* и *2* (а, возможно, и там и там).

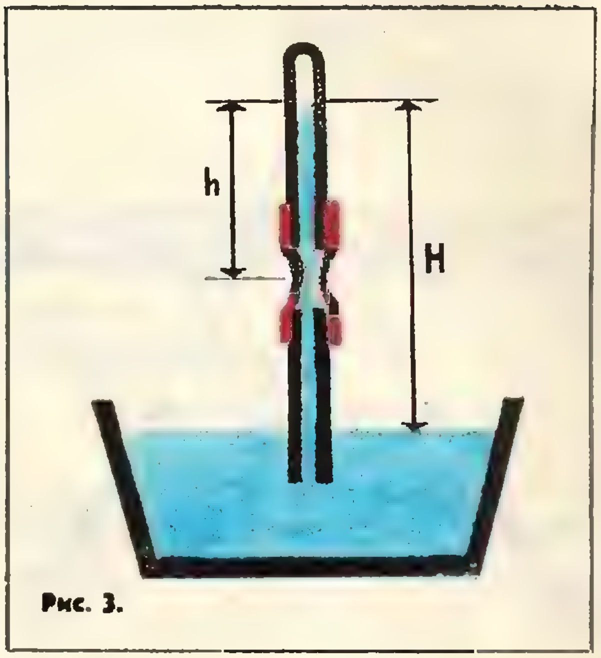


Рис. 3.

Итак,

1) между точками *1* и *2* или точками *1* и *3* — источник;

2) между точками *2* и *3* и точками *2* и *1* сопротивления;

3) между точками *3* и *1* или точками *3* и *2* — источник.

Это одновременно возможно только в том случае, если между точками *1* и *3* включен источник с внутренним сопротивлением, а между точками *1* и *2* и между точками *2* и *3* включены сопротивления.

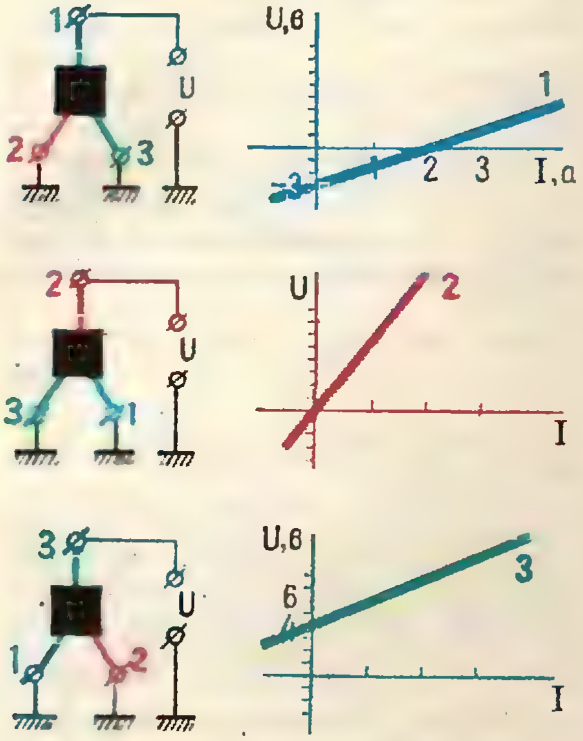


Рис. 4.

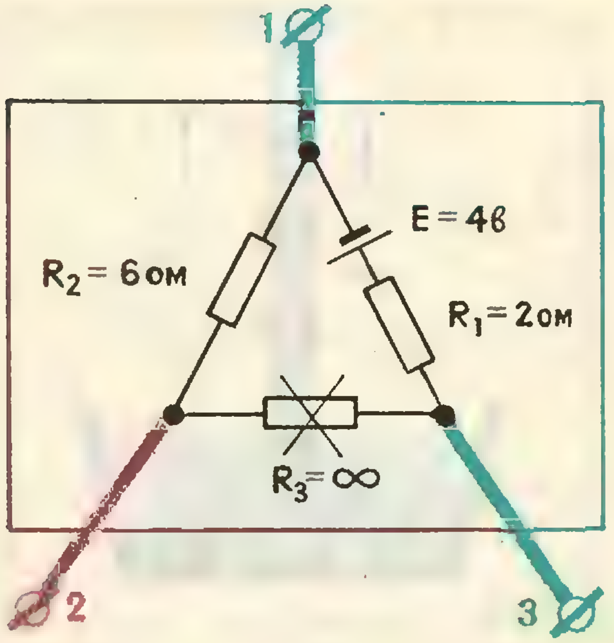


Рис. 5.

Схема внутри «черного ящика» может быть такой, как показано на рисунке 5. Определим параметры этой схемы.

Из закона Ома для участка цепи $U = IR$ следует, что изменение разности потенциалов на концах участка цепи связано с изменением тока через участок соотношением

$$\Delta U = R\Delta I.$$

Это означает, что сопротивление участка цепи равно

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

то есть равно по величине тангенсу угла наклона графика зависимости напряжения от тока.

В первом случае, когда заземлены выводы *2* и *3*, содержимое «ящика» при изменении напряжения U внешнего источника должно вести себя как два параллельно включенных сопротивления R_1 и R_2, общее сопротивление которых равно $^2/_3$ *ом*. Поэтому

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

(сопротивления R_1 и R_2 должны быть выражены в омах).

Кроме того, мы знаем, что ток во внешней цепи равен нулю, когда $U = 3$*в*. Это означает, что когда ток равен нулю и схема внутри ящика как бы не связана с источником, падение напряжения на сопротивлении R_2 равно 3 *в*. Но в этом случае сопротивления R_1 и R_2 включены последовательно с источником, следовательно, ток через них равен $\frac{E}{R_1 + R_2}$ и падение напряжения на сопротивлении R_2 равно $\frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$, то есть

$$\frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = 3\ (в). \qquad (2)$$

Во втором случае цепь внутри ящика должна вести себя как два параллельно включенных сопротивления R_2 и R_3, общее сопротивление которых равно 6 *ом*. Поэтому

$$\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6\ (ом). \qquad (3)$$

В третьем случае к внешнему источнику «подключены» параллельно соединенные сопротивления R_1 и R_3, их общее сопротивление равно 2 *ом*:

$$\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 2\ (ом). \qquad (4)$$

Причем, так как в этом случае ток равен нулю при $U = 4$*в*, то

$$\frac{R_3 E}{R_1 + R_3} = 4\ (в). \qquad (5)$$

Мы получили систему из 5 уравнений с 4 неизвестными: R_1, R_2, R_3 и E. Проверим, совместна ли она. Разделив уравнение (1) на уравнение (2), найдем:

$$\frac{E}{R_1} = 2\ (в/ом).$$

Аналогично, разделив уравнение (4) на уравнение (5), получим точно такое же соотношение между E и R_1. Это означает, что наша система совместна.

Найдем теперь сопротивления R_1, R_2 и R_3. Для этого нам нужно решить систему из трех уравнений (1), (3) и (4). Вначале перепишем ее, «перевернув» каждое из уравнений:

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{3}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} = \frac{1}{6}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} = \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2}.$$

Принимая $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ и $\frac{1}{R_3}$ за новые неизвестные и решая получившуюся систему, найдем:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_3} = 0.$$

Отсюда следует, что

$R_1 = 2$ *ом*, $R_2 = 6$ *ом*, $R_3 = \infty$ и $E = 4$ *в*.

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

НАУЧИМСЯ ОБРАЩАТЬСЯ С АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

Е. Б. Ваховский, А. Б. Волынский

Идет экзамен. Абитуриенту предложено тригонометрическое уравнение:

$$\sqrt{\cos^2 x-\cos 2x}-1=\sin x.$$

В процессе его решения абитуриент выписывает следующую цепочку уравнений:

$$\sqrt{\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x}-1=\sin x,$$

$$\sin x-1=\sin x,\quad -1=0.$$

Полученное ложное числовое равенство означает, говорит абитуриент, что данное уравнение не имеет решений.

Ответ неверный. В этом легко убедиться, подставив в первоначальное уравнение число $x=-\frac{\pi}{6}$, которое оказывается корнем:

Ошибка абитуриента, кстати, очень распространенная, состояла в том, что не для всякого действительного a

$$\sqrt{a^2}=a \qquad (1)$$

(в данном примере, в частности, абитуриент считал, что $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$). На самом деле единственно верным является тождество

$$\sqrt{a^2}=|a|, \qquad (2)$$

в то время как равенство (1) справедливо лишь при $a\geqslant 0$ (см. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова «Алгебра и элементарные функции», § 77).

Таким образом, решая приведенное выше уравнение, абитуриент должен был получить

$$|\sin x|-1=\sin x.$$

Если $\sin x\geqslant 0$, то последнее уравнение запишется так: $\sin x-1=\sin x$, откуда $-1=0$, и в этом случае решений нет.

Если $\sin x<0$, то $|\sin x|=-\sin x$, и мы получим $-\sin x-1=\sin x$, откуда $\sin x=-\frac{1}{2}$, что согласуется с условием $\sin x<0$.

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Познакомимся теперь более подробно с понятием абсолютной величины.

Прежде всего заметим, что графически модуль числа x есть просто расстояние от точки x числовой оси до начала отсчета (см. рис. 1).

Приведенное соображение облегчает решение большого класса неравенств.

Пример 1. *Решить неравенства*

$$|x|<a \quad (a>0), \qquad (3)$$

$$|x|>a \quad (a>0). \qquad (4)$$

Решение. Неравенству (3) удовлетворяют только те точки числовой оси, расстояния от которых до начала отсчета меньше a, то есть точки, лежащие между $-a$ и a (рис. 2).

Ответ: $-a<x<a$. Это означает, что x удовлетворяет системе

неравенств

$$\begin{cases} x > -a, \\ x < a. \end{cases}$$

По аналогичным соображениям решениями неравенства (4) служат значения x, удовлетворяющие совокупности двух неравенств: $x < -a$; $x > a$ (рис. 3).

Следует заметить, что при $a \leqslant 0$ неравенство (3) не имеет решений. Неравенству (4) при $a < 0$ удовлетворяют все действительные числа, а при $a = 0$ — все, кроме $x = 0$.

Поэтому в примерах подобного типа мы должны в первую очередь интересоваться знаком правой части. Так, например, неравенство $|x| < |a|$ часто автоматически решают с разбором случаев $a \geqslant 0$ и $a < 0$, полагая, что это необходимо, раз число a стоит под знаком модуля. Однако проще всего здесь заметить, что $|a| > 0$ при $a \neq 0$. Отсюда мы легко получаем ответ: если $a \neq 0$, то $-|a| < x < |a|$, если $a = 0$, то решений нет.

К неравенствам типа (3) и (4) сводятся некоторые неравенства, не содержащие знаков абсолютной величины.

Пример 2. *Решить неравенство* $4 < x^2 < 9$.

Решение. Извлечем из всех трех частей неравенства (арифметический) квадратный корень. Полученное равносильное неравенство $2 < |x| < 3$ легко решается с помощью графического представления (рис. 4).

Ответ: $-3 < x < -2$; $2 < x < 3$.

Пример 3 (МГУ, мех. мат., 1966). *Решить неравенство*

$$|3^{\operatorname{tg} \pi x} - 3^{1 - \operatorname{tg} \pi x}| \geqslant 2.$$

Решение. Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств: $3^{\operatorname{tg} \pi x} - 3^{1 - \operatorname{tg} \pi x} \leqslant -2$; $3^{\operatorname{tg} \pi x} - 3^{1 - \operatorname{tg} \pi x} \geqslant 2$.

Обозначая $3^{\operatorname{tg} \pi x}$ через y, мы получим совокупность неравенств:

$$y - \frac{3}{y} \leqslant -2; \quad y - \frac{3}{y} \geqslant 2 \; (y > 0).$$

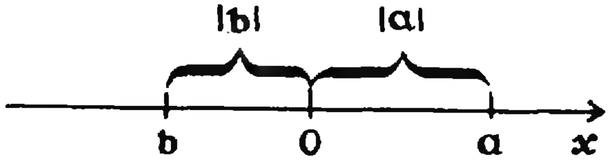


Рис. 1.

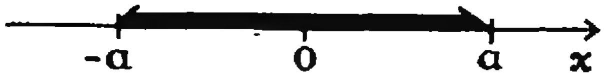


Рис. 2.

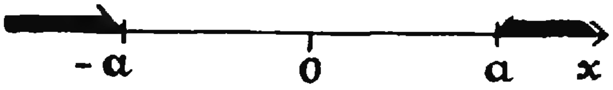


Рис. 3.

Умножая на y, мы получим квадратные неравенства: $y^2 + 2y - 3 \leqslant 0$; $y^2 - 2y - 3 \geqslant 0$.

Решением этой совокупности, с учетом условия $y > 0$, служат два интервала: $0 < y \leqslant 1$; $y \geqslant 3$.

Подставляя $3^{\operatorname{tg} \pi x}$ вместо y, приходим к совокупности $\operatorname{tg} \pi x \leqslant 0$; $\operatorname{tg} \pi x \geqslant 1$, откуда

$$n - \frac{1}{2} < x \leqslant n;$$

$$k + \frac{1}{4} \leqslant x < k + \frac{1}{2},$$

где n, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Сложнее обстоит дело в случае, когда в уравнении (или неравенстве) знак абсолютной величины выражения, содержащего неизвестное, встречается более одного раза.

Пример 4 (МАИ, 1971). *Решить неравенство*

$$\frac{6x - |x^2 - x - 6|}{|1 - x|} \leqslant 3 + 5x.$$

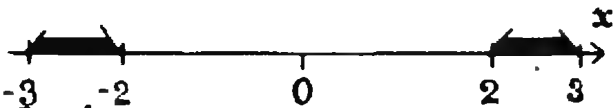


Рис. 4.

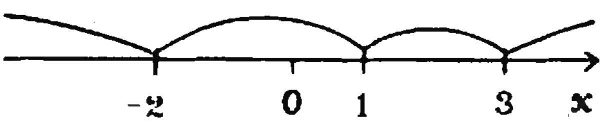


Рис. 5.

Решение. Прежде всего надо избавиться от знаков абсолютной величины. Однако для этого надо знать, какой знак имеют числа $1-x$ и x^2-x-6, стоящие под знаком модуля. Но каково число x, заранее неизвестно, поэтому необходимо разобрать несколько случаев. Для того, чтобы сделать это наиболее экономным образом, разложим трехчлен x^2-x-6 на множители и представим данное неравенство в виде

$$\frac{6x-|x+2|\,|x-3|}{|x-1|}\leqslant 3+5x.$$

Поскольку всегда $|x-1|\geqslant 0$, это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 6x-|x+2|\,|x-3|\leqslant \\ \qquad\leqslant(3+5x)\,|x-1|, \\ x\neq 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Чтобы решить систему (5), нанесем на числовую ось точки -2, 1 и 3 (рис. 5), которые разобьют ее на четыре области. Для числа x из каждой такой области ясно, какой знак имеют числа $x+2$, $x-1$, $x-3$.

Например, если точка x лежит в самой левой области $(x<-2)$, то $|x+2|=-(x+2)$, $|x-1|=1-x$, $|x-3|=3-x$. Таким образом, наше неравенство равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x<-2, \\ 6x-(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(1-x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\leqslant x<1, \\ 6x+(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(1-x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1<x\leqslant 3, \\ 6x+(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(x-1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3; \\ 6x-(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(x-1). \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Решения остальных систем:

$$-\frac{3}{2}\leqslant x<1,\quad 1<x\leqslant 3,\quad x>3$$

соответственно. Окончательный **ответ:** $-\frac{3}{2}\leqslant x<1$, $x>1$.

Перейдем к следующему типу задач, связанных с абсолютной величиной.

Рассмотрим неравенство вида $|A|\leqslant B$, где A и B — некоторые выражения, содержащие неизвестное x.

В силу соображений, которые мы приводили в примере 1, это неравенство равносильно либо системе

$$1)\begin{cases} B\geqslant 0, \\ -B\leqslant A\leqslant B, \end{cases}$$

либо совокупности систем:

$$2)\begin{cases} A\geqslant 0, \\ A\leqslant B; \end{cases}\qquad \begin{cases} A<0, \\ -A\leqslant B. \end{cases}$$

Точно так же неравенство $|A|\geqslant B$ равносильно либо совокупности систем

$$1)\begin{cases} B<0, \\ A\text{ — любое}; \end{cases}\qquad \begin{cases} B\geqslant 0, \\ A\leqslant -B,\ \ A\geqslant B, \end{cases}$$

либо совокупности систем

$$2)\begin{cases} A\geqslant 0, \\ A\geqslant B; \end{cases}\qquad \begin{cases} A<0, \\ -A\geqslant B. \end{cases}$$

В каждом конкретном примере такого типа надо уметь выбрать наиболее рациональный путь.

Пример 5. *Решить неравенство*

$$5+2\cos 2x\leqslant 3\,|2\sin x-1|.$$

Решение. Здесь напрашивается первый способ, так как $5+2\cos 2x>0$ для всех x. Предложенное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$3(2\sin x-1)\leqslant -5-2\cos 2x;$$
$$3(2\sin x-1)\geqslant 5+2\cos 2x.$$

Каждое из этих неравенств после подстановки $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ становится квадратным относительно $\sin x$. Решая их с учетом неравенства $|\sin x|\leqslant 1$, приходим к совокупности

$$\sin x\leqslant -\frac{1}{2},\quad \sin x\geqslant 1.$$

Ответ: $2\pi n - \frac{5}{6}\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $n, k = 0, \pm 1, \ldots$

Пример 6. *Решить неравенство*

$$|x^3 - 8| \leqslant x^3 + x + 8.$$

Решение. Здесь первый способ просто не применим, поскольку мы не имеем возможности решить неравенство $x^3 + x + 8 \geqslant 0$. Второй способ сводит задачу к совокупности систем

$$\begin{cases} x^3 - 8 \geqslant 0, \\ x^3 + x + 8 \geqslant x^3 - 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - 8 < 0, \\ x^3 + x + 8 \geqslant -x^3 + 8, \end{cases}$$

которая в свою очередь сводится к совокупности систем

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant -16; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2, \\ x(2x^2 + 1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение первой: $x \geqslant 2$, решение второй: $0 \leqslant x < 2$.

Ответ: $x \geqslant 0$.

Легко проверить, что уравнение

$$|A| = B$$

также можно решать двумя способами, оно эквивалентно системам

$$1) \begin{cases} B \geqslant 0, \\ \pm B = A, \end{cases}$$

или

$$2) \begin{cases} A \geqslant 0; \\ A = B; \end{cases} \qquad \begin{cases} A < 0, \\ -A = B. \end{cases}$$

Пример 7 (МАИ, 1970). *Решить уравнение:*

$$x - \frac{|3x - 2|}{5} = 3 - \frac{2x - 5}{3}.$$

Решение. После простых преобразований мы получим

$$3\,|3x - 2| = 25x - 70.$$

Применим первый способ. Последнее уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 25x - 70 \geqslant 0, \\ 3(3x - 2) = 25x - 70; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x - 70 \geqslant 0, \\ 3(3x - 2) = -25x + 70. \end{cases}$$

Решение первой системы $x = 4$; вторая система несовместна.

Ответ: $x = 4$.

Пример 8 (МГУ, физ. фак., 1963). *Найти действительные решения уравнения*

$$\left| x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right| = -x^2 - 4x + \beta.$$

Решение. В этом случае первый способ, включающий исследование знака правой части, неудобен, так как параметр β будет входить не только в уравнения, но и в соответствующие неравенства. Применим второй способ.

Предложенное уравнение равносильно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = -x^2 - 4x + \beta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x - 1 < 0, \\ -\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) = -x^2 - 4x + \beta. \end{cases}$$

Первая система сводится к системе

$$\begin{cases} x \leqslant -\frac{1}{2}, \ x \geqslant 2, \\ x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{57 + 32\beta}}{8}, \\ x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{57 + 32\beta}}{8}. \end{cases}$$

Так как $x_1 < 0$, то должны выполняться неравенства $x_1 \leqslant -\frac{1}{2}$, $x_2 \leqslant -\frac{1}{2}$, $x_2 \geqslant 2$.

Подставляя вместо x_1 и x_2 их выражения и решая относительно β иррациональные неравенства, получаем соответственно

$$\beta \geqslant -\frac{57}{32}, \quad -\frac{57}{32} \leqslant \beta \leqslant -\frac{7}{4}, \quad \beta \geqslant 12.$$

Вторая система равносильна системе

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 2, \\ x = \frac{2(\beta - 1)}{11}. \end{cases}$$

Решая неравенство $-\frac{1}{2} < \frac{2(\beta-1)}{11} < 2$, получаем $-\frac{7}{4} < \beta < 12$.

Ответ: при $-\frac{57}{32} \leqslant \beta \leqslant -\frac{7}{4}$ и $\beta \geqslant 12$ $\quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{57 + 32\beta}}{8}$;

при $-\frac{7}{4} < \beta < 12$

$$x = \frac{-5 - \sqrt{57 + 32\beta}}{8} \text{ и } x = \frac{2(\beta - 1)}{11}.$$

Одно из наиболее распространенных заблуждений, связанных с понятием абсолютной величины, состоит в том, что выражение $|A|$ считают всегда *положительным*, забывая, что $|A|$ может равняться нулю (при $A = 0$).

Пример 9 (МАИ, 1968). *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{1}{2}} \left| \frac{3 - 2x}{1 - x} \right| > -1.$$

Решение. Записав неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{2}} \left| \frac{3 - 2x}{1 - x} \right| > \log_{\frac{1}{2}} 2$$

и учитывая, что $\frac{1}{2} < 1$, получим неравенство

$$0 < \left| \frac{3 - 2x}{1 - x} \right| < 2,$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} \left| \frac{3 - 2x}{1 - x} \right| \neq 0, \\ \left| \frac{3 - 2x}{1 - x} \right| < 2, \end{cases}$$

и далее,

$$\begin{cases} x \neq \frac{3}{2}, \\ |3 - 2x| < 2\,|1 - x| \end{cases}$$

(при x, удовлетворяющих второму неравенству, $|1 - x| \neq 0$). Второе неравенство последней системы не стоит решать путем рассмотрения случаев. В данной ситуации удобнее всего избавиться от знаков абсолютной величины, возводя обе части этого неравенства в квадрат и получая равносильное неравенство $(3 - 2x)^2 < 4(1 - x)^2$, или $9 - 12x + 4x^2 < 4 - 8x + 4x^2$. Отсюда $x > \frac{5}{4}$.

Учитывая еще условия $x \neq \frac{3}{2}$, получаем окончательный ответ:

$$\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}; \quad x > \frac{3}{2}.$$

Упражнения

1. Упростить: $\sqrt[8]{x^6}$, $\sqrt[6]{x^4}$, $\sqrt{x^2y^4}$, $\sqrt[3]{x^3y^6}$, $\sqrt{x^2 - 10x + 25} - \sqrt{25 + 10x + x^2}$, если $x < -5$.

2. Чему может быть равно выражение $\frac{|x|}{x}$, где x — действительное число (не равное нулю)?

3. Найти область определения функции

$$y = \lg|x + 3|.$$

4. Решить уравнения:

а) $||3 - 2x| - 1| = 2$;

б) $|\log_3 x| - \log_3 x - 3 < 0$ (МАИ, 1968);

5. (МГУ, мех. мат., 1970). Решить систему

$$\begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2, \\ xy = 2 + x^2. \end{cases}$$

6. Решить неравенства:

а) $|\sin x| > |\cos x|$;

б) $6 + \cos 2x + 13 \cos x \geqslant$
$\geqslant |5 - 2\cos 2x - 6\sin^2 x - 3\cos x|$.

7. Определить четность функции:

а) $y = \left| \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right|$; $\quad$ б) $y = x\,|x|$.

8. (МГУ, мех. мат., 1961). Решить уравнение

$$x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}.$$

9. Решить неравенство:

$$|x^3 - 5x + 2| \geqslant x - 2.$$

10. (МГУ, ф-т экономической кибернетики, 1969). Решить неравенство:

$$\left| \sqrt{2}\,|x| - 1 \right| \times \log_2 (2 - 2x^2) \geqslant 1.$$

11. (МГУ, мех. мат. ф-т, 1965). Решить неравенство

$$\log_{|x+6|} 2 \times \log_2 (x^2 - x - 2) \geqslant 1.$$

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1972 года

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Химический факультет

1. Пристань A расположена в 27 *км* от пристани B ниже по течению реки. От пристани A по направлению к пристани B отходит первая лодка, а через час после ее отхода навстречу ей от пристани B отходит вторая лодка. Лодки встречаются в 18 *км* от пристани B.

Если бы лодки отошли от пристаней A и B навстречу друг другу одновременно, то они встретились бы через два с четвертью часа. Найти скорость первой лодки в стоячей воде, если известно, что она вдвое больше скорости течения реки.

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2+6x+8}[\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)]=0.$$

3. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN:NC=2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найти отношение $AM:MD$.

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в вершине B. Ребро SA перпендикулярно плоскости треугольника ABC. Через середины D и E соответственно ребер AC и BC проведена плоскость, параллельная ребру SC и образующая в сечении четырехугольник $DEFH$ (точка F лежит на ребре SB). Найти площадь четырехугольника $DEFH$, если известно, что $BC=a$, $AC=b$, $SA=h$.

5. Найти все значения x, для которых выражение

$$(\sin 4x+\sin 2x)(3\cos^2 x+2\sin 2x-6\cos x)$$

положительно.

Географический факультет и почвенное отделение биолого-почвенного факультета

1. В двух автоколоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 «Жигулей», остальные — «Москвичи». Сколько «Москвичей» было в каждой автоколонне, если известно, что в первой автоколонне на каждую машину «Жигули» приходилось в два раза больше «Москвичей», чем во второй?

2. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{3}\sin x+2\cos x=\sqrt{3}+\sin 2x,$$

удовлетворяющие условию $0<x<2$.

3. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$\log_2 x-\log_x 32<4.$$

4. Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1}=y^2+4, \\ 2^{x-1}\leqslant y. \end{cases}$$

5. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K и сторону AC в точке E. Найти AE, зная, что $AK=KB=a$, $\angle BCK=\alpha$, $\angle CBE=\beta$.

Биологическое отделение биолого-почвенного факультета

1. Из пункта A отправляется машина, а через час — мотоцикл, который догоняет машину в пункте B. В этот момент из A отправляется второй мотоцикл, идущий с той же скоростью, что и первый. Второй мотоцикл догоняет машину через шесть часов после своего отправления. За какое время мотоцикл проходит путь от пункта A до пункта B?

2. Упростить выражение

$$\operatorname{tg} 4x\cdot\operatorname{tg}(40^\circ-2x)+\operatorname{tg} 4x\cdot\operatorname{tg}(50^\circ-2x)+\operatorname{tg}(50^\circ-2x)\cdot\operatorname{tg}(40^\circ-2x).$$

3. Решить уравнение

$$5^{\sqrt{(\log_3 x+\log_3 9)\log_x 3}}=3^{\sqrt{\log_5 1{,}8}}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\sin \pi x+\sin(\log_x x^{3\pi x})=\cos \pi x-\cos\left(\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}\right).$$

5. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Л. Г. Асламазов

Движение по окружности

Для описания движения по окружности наряду с линейной скоростью вводят понятие угловой скорости. Если точка при движении по окружности за время Δt описывает дугу, угловая мера которой $\Delta\varphi$, то угловая скорость $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью v соотношением $v = \omega r$, где r — радиус окружности, по которой движется точка (рис. 1). Понятие угловой скорости особенно удобно для описания вращения твердого тела вокруг оси. Хотя линейные скорости у точек, находящихся на разном расстоянии от оси, будут неодинаковыми, их угловые скорости будут равны, и можно говорить об угловой скорости вращения тела в целом.

Задача. *Диск радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра диска постоянная и равна $v_\text{п}$. С какой угловой скоростью при этом вращается диск?*

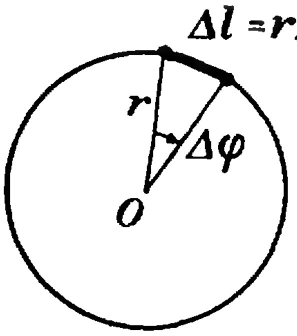


Рис. 1.

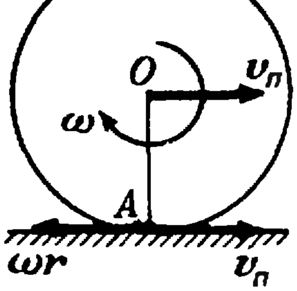


Рис. 2.

Каждая точка диска участвует в двух движениях — в поступательном движении со скоростью $v_\text{п}$ вместе с центром диска и во вращательном движении вокруг центра с некоторой угловой скоростью ω.

Для нахождения ω воспользуемся отсутствием проскальзывания, то есть тем, что в каждый момент времени скорость точки диска, соприкасающейся с плоскостью, равна нулю. Это означает, что для точки A (рис. 2) скорость поступательного движения $v_\text{п}$ равна по величине и противоположна по направлению линейной скорости вращательного движения $v_\text{вр} = \omega r$. Отсюда сразу получаем $\omega = \frac{v_\text{п}}{r}$.

Задача. *Найти скорости точек B, C и D того же диска* (рис. 3).

Рассмотрим вначале точку B. Линейная скорость ее вращательного движения направлена вертикально вверх и равна $v_\text{вр} = \omega r = \frac{v_\text{п}}{R} r = v_\text{п}$, то есть по величине равна скорости поступательного движения, которая, однако, направлена горизонтально. Складывая векторно эти две скорости, находим, что результирующая скорость v_B по величине равна $v_\text{п}\sqrt{2}$ и образует угол 45° с горизонтом. У точки C скорости вращательного и поступательного движения направлены в одну сторону. Результирующая скорость v_C равна $2v_\text{п}$ и направлена горизонтально. Аналогично находится и скорость точки D (см. рис. 3).

Даже в том случае, когда скорость точки, движущейся по окружности, не меняется по величине, точка имеет некоторое ускорение, так как меняется направление вектора скорости. Это ускорение называется центростремительным. Оно направлено к центру окружности и равно

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

(R — радиус окружности, ω и v — угловая и линейная скорости точки).

Если же скорость точки, движущейся по окружности, меняется не только по направлению, но и по величине, то наряду с центростремительным ускорением существует и так называемое тангенциальное ускорение. Оно направлено по касательной к окружности и равно отношению $\Delta v/\Delta t$ (Δv — изменение величины скорости за время Δt).

Задача. *Найти ускорения точек A, B, C и D диска радиуса r, катящегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра диска постоянна и равна $v_{\text{п}}$* (рис. 3).

В системе координат, связанной с центром диска, диск вращается с угловой скоростью ω, а плоскость движется поступательно со скоростью $v_{\text{п}}$. Проскальзывание между диском и плоскостью отсутствует, следовательно, $\omega = \frac{v_{\text{п}}}{r}$. Скорость поступательного движения $v_{\text{п}}$ не меняется, поэтому угловая скорость вращения диска постоянная и точки диска имеют только центростремительное ускорение $a_{\text{ц}} = \omega^2 r = \frac{v_{\text{п}}^2}{r}$, направленное к центру диска. Так как система координат движется без ускорения (с постоянной скоростью $v_{\text{п}}$), то в неподвижной системе координат ускорения точек диска будут теми же.

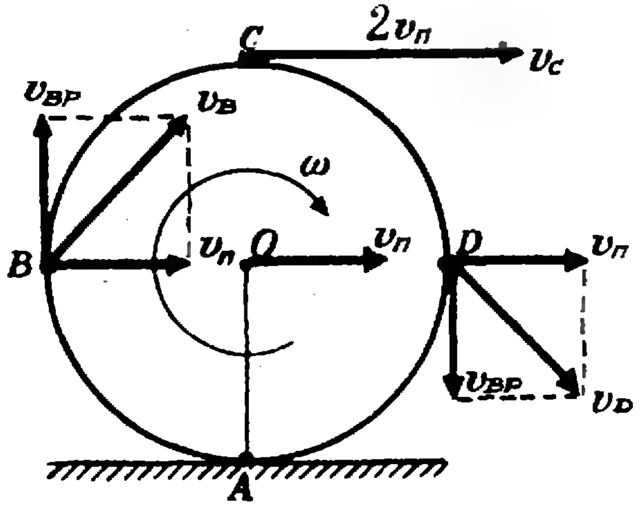


Рис. 3.

Перейдем теперь к задачам на динамику вращательного движения. Вначале рассмотрим простейший случай, когда движение по окружности происходит с постоянной скоростью. Так как ускорение тела при этом направлено к центру, то и векторная сумма всех сил, приложенных к телу, должна быть тоже направлена к центру, и по II закону Ньютона $m\mathbf{a}_{\text{ц}} = \Sigma\mathbf{F}$.

Следует помнить, что в правую часть этого уравнения входят только реальные силы, действующие на данное тело со стороны других тел. Никакой центростремительной силы при движении по окружности не возникает. Этим термином пользуются просто для обозначения равнодействующей сил, приложенных к телу, движущемуся по окружности. Что касается центробежной силы, то она возникает только при описании движения по окружности в неинерциальной (вращающейся) системе координат. Мы пользоваться здесь понятием центростремительной и центробежной силы вообще не будем.

Задача. *Определить наименьший радиус закругления дороги, которое автомобиль может пройти при скорости $v = 70$ км/ч и коэффициенте трения шин о дорогу $k = 0{,}3$.*

На автомобиль действуют сила тяжести $P = mg$, сила реакции дороги N и сила трения $F_{\text{тр}}$ между шинами автомобиля и дорогой. Силы P и N направлены вертикально и равны по величине: $P = N$. Сила трения, препятствующая проскальзыванию («заносу») автомобиля, направлена к центру поворота и сообщает центростремительное ускорение: $F_{тр} = \frac{mv^2}{R}$. Максимальное значение силы трения $F_{тр\,max} = kN = kmg$, поэтому минимальное значение радиуса окружности, по которой еще возможно движение со скоростью v, определяется из уравнения $\frac{mv^2}{R} = kmg$. Отсюда $R = \frac{v^2}{kg} \approx 130\,(м)$.

Сила реакции дороги N при движении автомобиля по окружности не проходит через центр тяжести автомобиля. Это связано с тем, что ее момент относительно центра тяжести должен компенсировать момент силы трения, стремящийся опрокинуть автомобиль. Величина силы трения тем больше, чем больше скорость автомобиля $\left(F_{тр} = \frac{mv^2}{R}\right)$. При некотором значении скорости момент силы трения превысит момент силы реакции и автомобиль опрокинется.

Задача. *При какой скорости автомобиль, движущийся по дуге окружности радиуса $R=130$ м, может опрокинуться? Центр тяжести автомобиля находится на высоте $h=1$ м над дорогой, ширина следа автомобиля $l=1{,}5$ м* (рис. 4).

В момент опрокидывания автомобиля как сила реакции дороги N, так и сила трения $F_{тр}$ приложены к «внешнему» колесу. При движении автомобиля по окружности со скоростью v на него действует сила трения $F_{тр} = \frac{mv^2}{R}$. Эта сила создает момент относительно центра тяжести автомобиля $M_{тр} = \frac{mv^2}{R}h$. Максимальный момент силы реакции дороги $N=mg$ относительно центра тяжести равен $mg\frac{l}{2}$ (в момент опрокидывания сила реакции проходит через внешнее колесо). Приравнивая эти моменты, найдем уравнение для максимальной скорости, при которой автомобиль еще не опрокинется:

$$\frac{mv^2}{R}h = \frac{mgl}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{glR}{2h}} \approx 30\ м/с \approx 110\ км/ч.$$

Чтобы автомобиль мог двигаться с такой скоростью, необходим коэффициент трения $k \geqslant \frac{v^2}{gR}$ (см. предыдущую задачу).

Аналогичная ситуация возникает при повороте мотоцикла или велосипеда. Сила трения, создающая центростремительное ускорение, имеет момент относительно центра тяжести, стремящийся опрокинуть мотоцикл. Поэтому для компенсации этого момента моментом силы реакции дороги мотоциклист наклоняется в сторону поворота (рис. 5).

Задача. *Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $v=70$ км/ч, делая поворот радиусом $R=100$ м. На какой угол α к горизонту он должен при этом наклониться, чтобы не упасть?*

Сила трения между мотоциклом и дорогой $F_{тр} = \frac{mv^2}{R}$, так как она сообщает мотоциклисту центростремительное ускорение. Сила реакции дороги $N=mg$. Условие равенства моментов силы трения и силы реакции относительно центра тяжести дает уравнение: $F_{тр} \cdot l \sin\alpha = Nl\cos\alpha$, где l — расстояние OA от центра тяжести до следа мотоцикла (см. рис. 5).

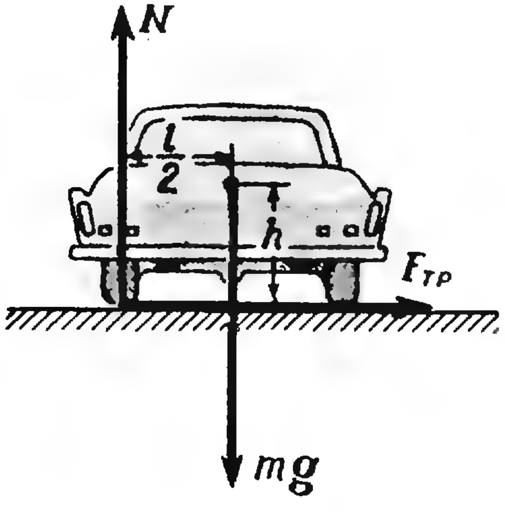


Рис. 4.

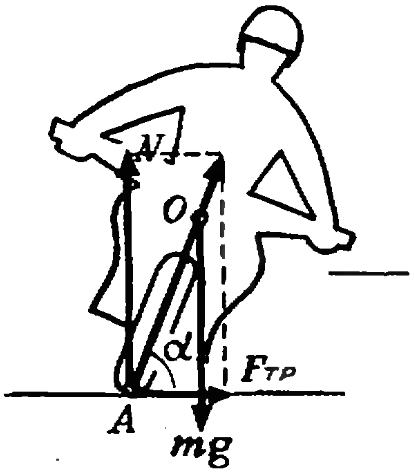


Рис. 5.

Подставляя сюда значения $F_{тр}$ и N, находим что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{gR}{v^2}$ или $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{gR}{v^2}\right) \approx 70$. Отметим, что равнодействующая сил N и $F_{тр}$ при этом угле наклона мотоцикла проходит через центр тяжести, что и обеспечивает равенство нулю суммарного момента сил N и $F_{тр}$.

Для того, чтобы увеличить скорость движения по закруглению дороги, участок дороги на повороте делают наклонным. При этом в создании центростремительного ускорения, кроме силы трения, участвует и сила реакции дороги.

Задача. *С какой максимальной скоростью v может двигаться автомобиль по наклонному треку с углом наклона α при радиусе закругления R и коэффициенте трения шин о дорогу k?*

На автомобиль действуют сила тяжести mg, сила реакции N, направленная перпендикулярно плоскости трека, и сила трения $F_{тр}$, направленная вдоль трека (рис. 6). Так как нас не интересуют в данном случае моменты сил, действующих на автомобиль, мы нарисовали все силы приложенными к центру тяжести автомобиля. Векторная сумма всех сил должна быть направлена к центру окружности, по которой движется автомобиль, и сообщать ему центростремительное ускорение. Поэтому сумма проекций сил на направление к центру (горизонтальное направление) равна $\frac{mv^2}{R}$, то есть $\frac{mv^2}{R} = N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha$.

Сумма проекций всех сил на вертикальное направление равна нулю:

$$N\cos\alpha - mg - F_{тр}\sin\alpha = 0.$$

Подставляя в эти уравнения максимальное возможное значение силы трения $F_{тр} = kN$ и исключая силу N, находим максимальную скорость $v = \sqrt{gR\frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k\operatorname{tg}\alpha}}$, с которой еще возможно движение по такому треку. Это выражение всегда больше значения $\sqrt{kgR}$, соответствующего горизонтальной дороге.

Разобравшись с динамикой поворота, перейдем к задачам на вращательное движение в вертикальной плоскости.

Задача. *Автомобиль массы $m = 1{,}5$ т движется со скоростью $v = 70$ км/ч по дороге, показанной на рисунке 7. Участки дороги AB и BC можно считать дугами окружностей радиуса $R = 200$ м, касающимися друг друга в точке B. Определить силу давления автомобиля на дорогу в точках A и C. Как меняется сила давления при прохождении автомобилем точки B?*

В точке A на автомобиль действуют сила тяжести $P = mg$ и сила реак-

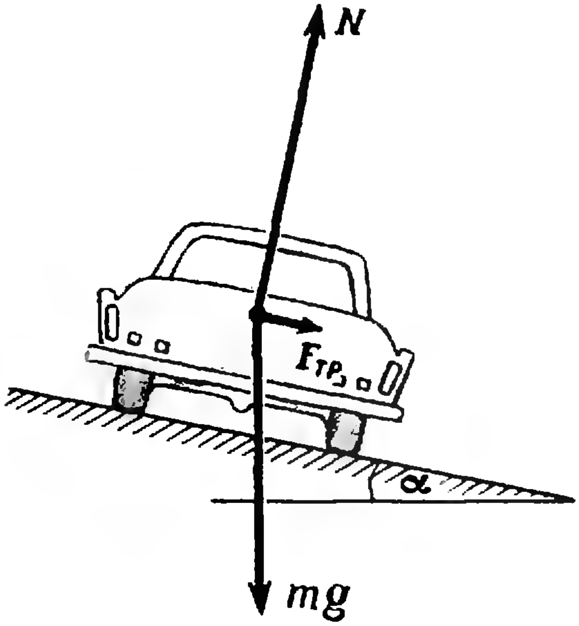


Рис. 6.

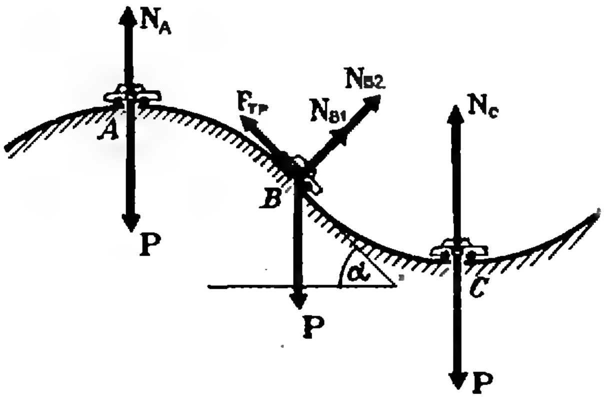


Рис. 7.

ции дороги N_A. Векторная сумма этих сил должна быть направлена к центру окружности, то есть вертикально вниз, и создавать центростремительное ускорение: $\frac{mv^2}{R} = P - N_A$, откуда $N_A = mg - \frac{mv^2}{R} \approx 12\cdot 10^3$ (*н*). Сила давления автомобиля на дорогу равна по величине и противоположна по направлению силе реакции. В точке C векторная сумма сил направлена вертикально вверх: $\frac{mv^2}{R} = N_C - P$ и $N_C = mg + \frac{mv^2}{R} = 18\cdot 10^3$ (*н*).

Таким образом, в точке A сила давления меньше силы тяжести, а в точке C — больше.

В точке B автомобиль переходит с выпуклого участка дороги на вогнутый (или наоборот). При движении по выпуклому участку проекция силы тяжести на направление к центру должна превышать силу реакции дороги N_{B_1}, причем $P\cos\alpha - N_{B_1} = \frac{mv^2}{R}$. При движении по вогнутому участку дороги, наоборот, сила реакции дороги N_{B_2} превосходит проекцию силы тяжести:

$$N_{B_2} - P\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Из этих уравнений получаем, что при прохождении точки B сила давления автомобиля на дорогу меняется скачком на величину $\frac{2mv^2}{R} \approx 6\cdot 10^3$ *н*. Разумеется, такие ударные нагрузки действуют разрушающе как на автомобиль, так и на дорогу. Поэтому дороги и мосты всегда стараются делать так, чтобы их кривизна менялась плавно.

При движении автомобиля по окружности с постоянной скоростью сумма проекций всех сил на направление, касательное к окружности, должна быть равна нулю. В нашем случае касательная составляющая силы тяжести уравновешивается силой трения между колесами автомобиля и дорогой.

Величина силы трения регулируется вращательным моментом, прикладываемым к колесам со стороны мотора. Этот момент стремится вызвать проскальзывание колес относительно дороги. Поэтому возникает сила трения, препятствующая проскальзыванию и пропорциональная приложенному моменту. Максимальное значение силы трения равно kN, где k — коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой, N — сила давления на дорогу. При движении автомобиля вниз сила трения играет роль тормозящей силы, а при движении вверх, наоборот, роль силы тяги.

Задача. *Автомобиль массой $m = 0{,}5$ т, движущийся со скоростью $v = 200$ км/ч, совершает «мертвую петлю» радиуса $R = 100$ м* (рис. 8). *Определить силу давления автомобиля на дорогу в верхней точке петли A; в точке B, радиус-вектор которой составляет угол $\alpha = 30°$ с вертикалью; в точке C, в которой скорость автомобиля направлена вертикально.*

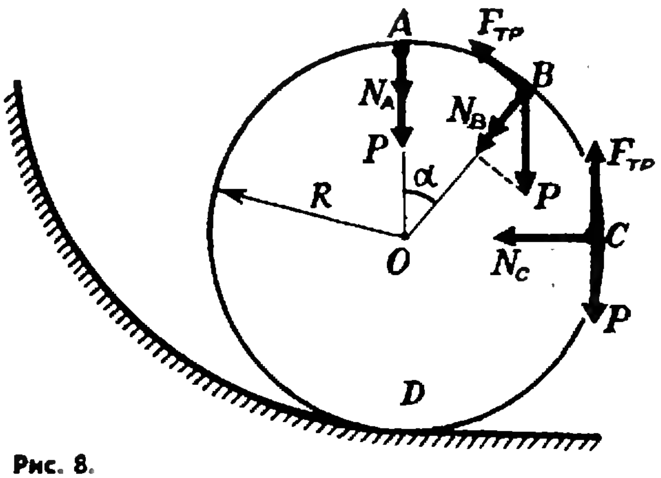


Рис. 8.

Возможно ли движение автомобиля по петле с такой постоянной скоростью при коэффициенте трения шин о дорогу $k=0{,}5$?

В верхней точке петли сила тяжести и сила реакции дороги N_A направлены вертикально вниз. Сумма этих сил создает центростремительное ускорение: $\frac{mv^2}{R}=N_A+mg$. Поэтому $N_A=\frac{mv^2}{R}-mg\approx 10^4$ *н*.

Сила давления автомобиля на дорогу равна по величине и противоположна по направлению силе N_A.

В точке B центростремительное ускорение создается суммой силы реакции и проекции силы тяжести на направление к центру: $\frac{mv^2}{R}=N_B+mg\cos\alpha$. Отсюда

$$N_B=\frac{mv^2}{R}-mg\cos\alpha\approx 11\cdot 10^3\ н.$$

Легко видеть, что $N_B>N_A$; с увеличением угла α сила реакции дороги увеличивается.

В точке C сила реакции $N_C=\frac{mv^2}{R}\approx 15\cdot 10^3$ *н*; центростремительное ускорение в этой точке создается только силой реакции, а сила тяжести направлена по касательной. При движении по нижней части петли сила реакции будет превышать mv^2/R и максимальное значение $\frac{mv^2}{R}+mg\approx 20\cdot 10^3$ *н* сила реакции имеет в точке D. Значение $N_A=\frac{mv^2}{R}-mg$, таким образом, является минимальным значением силы реакции.

Скорость автомобиля будет постоянной, если касательная составляющая силы тяжести не превышает максимальной силы трения kN во всех точках петли. Это условие заведомо выполняется, если минимальное значение $kN=kN_A=km\left(\frac{v^2}{R}-g\right)$ превосходит максимальное значение касательной составляющей силы веса. В нашем случае это максимальное значение равно mg (оно достигается в точке C), и условие $km\left(\frac{v^2}{R}-g\right)>mg$ выполняется при $k=0{,}5$, $v=200$ *км/ч*, $R=100$ *м*.

Таким образом, в нашем случае движение автомобиля по «мертвой петле» с постоянной скоростью возможно.

Рассмотрим теперь движение автомобиля по «мертвой петле» с выключенным мотором. Как уже отмечалось, обычно момент силы трения противодействует моменту, приложенному к колесам со стороны мотора. При движении автомобиля с выключенным мотором этого момента нет, и силой трения между колесами автомобиля и дорогой можно пренебречь.

Скорость автомобиля уже не будет постоянной — касательная составляющая силы тяжести замедляет или ускоряет движение автомобиля по «мертвой петле». Центростремительное ускорение тоже будет меняться. Создается оно, как обычно, равнодействующей силы реакции дороги и проекции силы тяжести на направление к центру петли.

Задача. *Какую наименьшую скорость должен иметь автомобиль в нижней точке петли* D (см. рис. 8) *для того, чтобы совершить ее с выключенным мотором? Чему будет равна при этом сила давления автомобиля на дорогу в точке* B? *Радиус петли* $R=100$ *м, масса автомобиля* $m=0{,}5$ *т*.

Посмотрим, какую минимальную скорость может иметь автомобиль в верхней точке петли A, чтобы продолжать двигаться по окружности?

Центростремительное ускорение в этой точке дороги создается суммой силы тяжести и силы реакции дороги $\frac{mv_A^2}{R}=mg+N_A$. Чем меньшую скорость имеет автомобиль, тем меньшая возникает сила реакции N_A. При значении $v_A=\sqrt{gR}$ эта сила обращается в нуль. При меньшей скорости сила тяжести превысит значение, необходимое для создания центростремительного ускорения, и автомобиль оторвется от дороги. При скорости

$v_A = \sqrt{gR}$ сила реакции дороги обращается в нуль только в верхней точке петли. В самом деле, скорость автомобиля на других участках петли будет большей, и как легко видеть из решения предыдущей задачи, сила реакции дороги тоже будет большей, чем в точке A. Поэтому, если автомобиль в верхней точке петли имеет скорость $v_A = \sqrt{gR}$, то он нигде не оторвется от петли.

Теперь определим, какую скорость должен иметь автомобиль в нижней точке петли D, чтобы в верхней точке петли A его скорость $v_A = \sqrt{gR}$. Для нахождения скорости v_D можно воспользоваться законом сохранения энергии, как если бы автомбиль двигался только под действием силы тяжести. Дело в том, что сила реакции дороги в каждый момент направлена перпендикулярно перемещению автомобиля, а следовательно, ее работа равна нулю (напомним, что работа $\Delta A = F\Delta s \cos\alpha$, где α — угол между силой F и направлением перемещения Δs). Силой трения между колесами автомобиля и дорогой при движении с выключенным мотором можно пренебречь. Поэтому сумма потенциальной и кинетической энергии автомобиля при движении с выключенным мотором не меняется.

Приравняем значения энергии автомобиля в точках A и D. При этом будем отсчитывать высоту от уровня точки D, то есть потенциальную энергию автомобиля в этой точке будем считать равной нулю. Тогда получаем

$$\frac{mv_D^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + 2mgR.$$

Подставляя сюда значение $v_A = \sqrt{gR}$ для искомой скорости v_D, находим:

$$v_D = \sqrt{5gR} \approx 70 \text{ м/с} \approx 260 \text{ км/ч}.$$

Если автомобиль въедет в петлю с такой скоростью, то он сможет совершить ее с выключенным мотором.

Определим теперь, с какой силой при этом автомобиль будет давить на дорогу в точке B. Скорость автомобиля в точке B опять легко находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_D^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + mgR(1 + \cos\alpha).$$

Подставляя сюда значение $v_D = \sqrt{5gR}$, находим, что скорость $v_B = \sqrt{gR(3 - 2\cos\alpha)}$.

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, по заданной скорости находим силу давления в точке B:

$$N_B = \frac{mv_B^2}{R} - mg\cos\alpha =$$

$$= 3mg(1 - \cos\alpha) \approx 2 \cdot 10^3 \text{ н}.$$

Аналогично можно найти силу давления в любой другой точке «мертвой петли».

Упражнения

1. Найти угловую скорость искусственного спутника Земли, вращающегося по круговой орбите с периодом обращения $T = 88$ *мин*; Найти линейную скорость движения этого спутника, если известно, что его орбита расположена на расстоянии $R = 200$ *км* от поверхности Земли.

2. Диск радиуса R помещен между двумя параллельными рейками. Рейки движутся со скоростями v_1 и v_2. Определить угловую скорость вращения диска и скорость его центра. Проскальзывание отсутствует.

3. Диск катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Показать, что концы векторов скоростей точек вертикального диаметра находятся на одной прямой.

4. Самолет движется по окружности с постоянной горизонтальной скоростью $v = 700$ *км/час*. Определить радиус R этой окружности, если корпус самолета наклонен на угол $\alpha = 5°$.

5. Груз массы $m = 100$ *г*, подвешенный на нити длины $l = 1$ *м*, равномерно вращается по кругу в горизонтальной плоскости. Найти период обращения груза, если при его вращении нить отклонена по вертикали на угол $\alpha = 30°$.

Определить также натяжение нити.

6. Автомобиль движется со скоростью $v = 80$ *км/ч* по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса $R = 10$ *м* по горизонтальному кругу. При каком минимальном коэффициенте трения между шинами автомобиля и поверхностью цилиндра это возможно?

7. Груз массой m подвешен на нерастяжимой нити, максимально возможное натяжение которой равно 1,5 mg. На какой максимальный угол α можно отклонить нить от вертикали, чтобы при дальнейшем движении груза нить не оборвалась? Чему будет равно при этом натяжение нити в тот момент, когда нить составит угол $\alpha/2$ с вертикалью?

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

НОВЫЕ КНИГИ

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1972 году, представляющие интерес для наших читателей.

В III—IV кварталах 1972 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга—почтой»).

МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука»

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. *Пособие по математике для поступающих в вузы.* (Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 04 к.)

Книга предназначена для лиц, желающих углубить и расширить свои знания по математике перед вступительным экзаменом в высшее учебное заведение. Особенно полезной она может оказаться слушателям подготовительных отделений вузов. Учителя средней школы найдут в ней богатый материал по некоторым узловым темам школьной программы.

В книге изложены отдельные важные теоретические вопросы, подкрепленные большим количеством разобранных конкурсных задач. Особое внимание авторы уделяют логике решений, подробно обсуждают типичные ошибки поступающих. Книга снабжена упражнениями, взятыми из опыта приемных экзаменов.

2. Погорелов А. В., *Элементарная геометрия.* (Объем 12 л., тираж 150 000 экз., цена 34 к.)

Книга представляет собой существенную переработку двух вышедших ранее книг этого же автора «Планиметрия» (1969 г.) и «Стереометрия» (1970 г.). Прежде всего несколько усилена аксиоматика. Вопрос об измерении площадей изложен в форме, близкой к традиционной. Компактно изложены начала стереометрии. Параграфы заканчиваются многочисленными вопросами для повторения, контролирующими прохождение курса, и упражнениями.

Книга может быть рекомендована студентам педвузов, учителям и учащимся средних школ.

3. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В. и др., *Сборник задач по элементарной математике.* (Объем 29 л., тираж 300 000 экз., цена 88 к.)

Книга содержит около 1000 задач по элементарной математике. Рассчитана на лиц, которые знакомы с курсом элементарной математики, но желают повторить этот курс и углубить свои знания без помощи преподавателя. Задачник имеет целью помочь научиться решать математические задачи, поэтому в нем даны решения для большинства задач.

4. Гжегорчик А., *Популярная логика.* (Объем 6 л., тираж 30 000 экз., цена 30 к.)

Небольшая книга, знакомящая читателя с элементами математической логики и ее приложений к различным отраслям современной науки и техники. Автор не касается более трудных вопросов, требующих от читающего специальной математической подготовки.

Книга рассчитана на широкий круг лиц, интересующихся математической логикой — отраслью науки, получившей в наши дни важнейшее прикладное значение.

5. Яглом А. М., Яглом И. М., *Вероятность и информация.* (Объем 25 л., тираж 30 000 экз., цена 97 к.)

Одним из наиболее значительных направлений математической мысли, возникшим в последние десятилетия, является теория информации Клода Шеннона, которая служит математическим фундаментом всей кибернетики. В этой книге, рассчитанной на читателя, обладающего определенным интересом к математике и вопросам ее применения, но, возможно, и не обладающим знаниями, превосходящими курс средней школы, рассказывается о математическом понятии «вероятности» и о возникшей на базе этого понятия шенноновской «мере количества информации», а также о некоторых приложениях теории информации к теории связи, и технике, к языкознанию, и биологии.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, начиная от преподавателей средней школы и студентов младших курсов вузов и кончая инженерами и научными работниками, не являющимися специалистами в области кибернетики или теории вероятностей.

Издательство «Просвещение»

6. Окунев А. К. *Квадратные функции, уравнения и неравенства в курсе математики средней школы.* (Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.)

Содержание пособия концентрируется вокруг квадратной функции и ее приложений в математике и других науках. Квадратные уравнения и неравенства рассматриваются в процессе исследования функции и решения соответствующих задач теоретического и прикладного характера. Исследование функции осуществляется графическим и аналитическим методами, при этом раскрывается взаимосвязь этих методов и выясняются преимущества и недостатки каждого из них. Особое внимание уделено подбору и составлению задач и упражнений, способствующих развитию логического мышления учащихся. Значительное число задач и упражнений решено, а к некоторым даны указания.

Книга представляет интерес для учителей и школьников старших классов.

7. Ястрибенецкий Г. А. *Уравнения и неравенства, содержащие параметры.* (Объем 7 л., тираж 50 000 экз., цена 25 к.)

Пособие посвящено решению уравнений и неравенств, содержащих параметры.

Каждый раздел содержит теоретическое вступление, несколько примеров для иллюстрации методов решения задач и упражнения для самостоятельного решения, к которым в конце книги даны либо ответы, либо указания и решения.

Предлагаемое пособие будет полезным для учителей и школьников старших классов.

ФИЗИКА

Издательство «Наука»

1. Зубов В. Г., Шальнов В. П. *Задачи по физике.* (Объем 16 л., тираж 300 000 экз., цена 55 к.)

Сборник содержит задачи по физике, в основном, в объеме программы средней школы. Некоторые задачи выходят за рамки школьной программы, однако все они снабжены необходимыми пояснениями и могут быть решены на основе знаний, полученных в средней школе.

Задачник предназначен для учащихся старших классов средней школы, студентов техникумов и лиц, готовящихся к поступлению в вузы.

2. а) *Элементарный учебник физики, т. I. Механика, теплота, молекулярная физика,* под ред. Г. С. Ландсберга. (Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 11 к.)

б) *Элементарный учебник физики, т. II. Электричество и магнетизм,* под ред. Г. С. Ландсберга. (Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 к.)

в) *Элементарный учебник физики, т. III. Колебания и волны, оптика, строение атома,* под ред. Г. С. Ландсберга. (Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 13 к.)

Издание завоевало огромную популярность, особенно среди учителей. Оно имеет целью поднять уровень преподавания физики в средней школе. Достоинством курса является глубина изложения физической стороны различных процессов в природе и технике. Изложение материала ведется простым, ясным языком. Книга богато иллюстрирована.

Рассчитана на преподавателей физики и учащихся старших классов средней школы. Может служить ценным пособием для самообразования.

3. *Над чем думают физики,* вып. 8, *Физика твердого тела* (электронные свойства твердых тел), сборник научно-популярных статей. (Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 70 к.)

Сборник переводов статей из американских научно-популярных журналов, посвященных последним достижениям физики твердого тела. Статьи написаны крупнейшими учеными, активно работающими в этой бурно развивающейся области физики. Живой язык и простота изложения делают сборник доступным и интересным для широкого круга читателей (от школьников старших классов, студентов и аспирантов до специалистов по различным разделам физики твердого тела).

4. Яворский Б. М., Пинский А. А. *Основы физики, т. II, Электродинамика, колебания и волны, основы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел, физика ядра и элементарных частиц.* (Объем 35 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 08 к.)

В книге рассмотрены все важнейшие разделы классической и современной физики. Особенностью книги является попытка не разделять классическую и современную физику, и рассматривать их как единую современную науку. Все физические идеи и важнейшие результаты современной физики получены без применения высшей математики.

Рассчитана на учащихся старших классов средней школы, интересующихся физикой, преподавателей физики средней школы и техникумов. Может быть полезна студентам первых курсов вузов и лицам, занимающимся самообразованием.

5. Комаров В. Н. *Новая занимательная астрономия.* (Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.)

Книга в занимательной форме знакомит читателя с наиболее интересными вопросами современной астрономии: необычными способами исследования космических объектов, движением искусственных небесных тел, новыми оригинальными гипотезами и предположениями о физических процессах в космосе и геометрических свойствах Вселенной.

Особое внимание уделяется парадоксальным явлениям, с которыми встречаются исследователи Вселенной: это и необычная постановка вопроса, и необычный подход к решению проблемы, и необычный взгляд на обычное, и необычное сопоставление, казалось бы, несопоставимых вещей.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся наукой, и является как бы продолжением известной книги Я. Перельмана «Занимательная астрономия», построенной на современном материале.

М. Л. Смолянский

ИНФОРМАЦИЯ

ТЕЛЕВИДЕНИЕ ГОТОВИТ В ВУЗ

В октябре 1972 года начинаются занятия на телевизионных физико-математических подготовительных курсах, организованных Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения. Занятия на телекурсах строятся на принципах закрепления, углубления, расширения и систематизации знаний, которые учащиеся приобрели в школе. В течение учебного года зрителям третьей программы Центрального телевидения предлагается цикл передач по математике и физике, в основу которого положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Цикл составлен с учетом возможно более полного освещения вопросов программы, вызывающих у абитуриентов наибольшие трудности.

Работа курсов организована следующим образом. Регулярно (по математике 1—2 раза в неделю, по физике — 1 раз в неделю) по *третьей программе* Центрального телевидения проводятся занятия — лекции и практические занятия по решению задач. Еженедельно слушателям курсов предлагаются обязательные для выполнения домашние задания, состоящие из задач и примеров различной трудности. По математике таких заданий будет 20, причем каждое задание состоит из двух частей — основные задачи и дополнительные задачи; по физике — 40 домашних заданий. Кроме того, предполагается периодически проводить контрольные работы. Домашние задания и контрольные работы будут публиковаться в еженедельнике «Программы телевидения и радиовещания».

Выполнив домашнее задание, слушатель курсов должен выслать на студию открытку — отчет о выполнении работы по специальной форме; выполнив контрольную работу, он должен выслать на студию аналогичную открытку и саму работу. Эти отчеты проверяются сотрудниками курсов и оцениваются в условных баллах по специально разработанной шкале. Наиболее активно и успешно работающие слушатели будут приглашаться для непосредственного участия в телепередачах, посвященных обсуждению контрольных работ.

В 1972/73 учебном году предполагается также проведение *очных* зачетов. Участие в них дает возможность обучающимся объективно проверить уровень своих знаний. Будущие абитуриенты во время зачетов находятся в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах, то есть как бы проходят своеобразную психологическую подготовку. С другой стороны, преподаватели во время очных зачетов могут определить степень восприятия учащимися материала лекций, выявить пробелы в их знаниях и, соответственно, внести необходимые коррективы в свою работу. На очные зачеты вызываются телезрители, набравшие достаточно большое количество баллов. Всего в течение учебного года предполагается провести 4 зачета: 2 по физике — в Московском инженерно-физическом институте, 2 по математике — в Московском экономико-статистическом институте (зачеты по математике будут проводиться при помощи электронно-вычислительных машин).

Слушатели курсов, успешно сдавшие очные зачеты и активно работавшие в течение всего учебного года, получают свидетельства об окончании Телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы.

На телекурсы могут быть зачислены как учащиеся выпускных классов средних общеобразовательных школ и техникумов, так и лица, уже имеющие среднее образование. Чтобы быть зачисленным на курсы, нужно прислать на Центральное телевидение в Главную редакцию научно-популярных и учебных программ заявление.

Возьмите обыкновенную почтовую открытку и на ее лицевой стороне напишите свой домашний адрес, фамилию, имя, отчество. Обратную (чистую) сторону открытки за-

Образец для поступающих на отделение математики

Фотография
3×4

М

АНКЕТА—ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество
(полностью)
2. Год рождения
3. Род занятий
(учусь, работаю)
4. Место учебы
(если учитесь)
5. Место работы, должность и стаж
(если работаете)
6. В какой вуз собираетесь поступать

Прошу принять меня на отделение математики Телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы.

Дата
подпись

полните по приведенному образцу (расположив открытку короткой стороной по горизонтали).

Образец для поступающих на отделение физики

Фотография
3×4

Ф

АНКЕТА—ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество
(полностью)
2. Год рождения
3. Род занятий
(учусь, работаю)
4. Место учебы
(если учитесь)
5. Место работы, должность и стаж
(если работаете)
6. В какой вуз собираетесь поступать

Прошу принять меня на отделение физики Телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы.

Дата
подпись

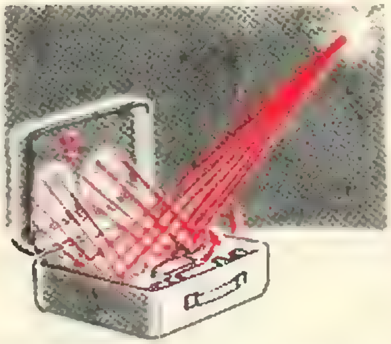
К анкете-заявлению приложите незаклеенный конверт с написанным на нем своим адресом (в этом конверте слушателю, зачисленному на курсы, высылается «Извещение о зачислении» и руководство для занятий с аннотированными программами по математике и физике и с правилами работы курсов), вложите все это в конверт и отправьте по адресу: *Москва, 113162, Шаболовка, 53, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы.*

На конверте сделайте пометку «Ф» или «М», в зависимости от того, на какое отделение вы поступаете. Желающие заниматься на обоих отделениях должны прислать в редакцию соответствующим образом оформленные два заявления, причем в разных конвертах.

И. А. Дьяконов,
А. Г. Мордкович,
И. И. Наслузов

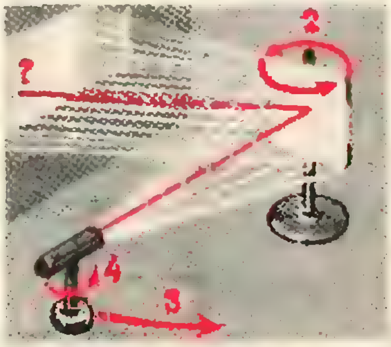
ВРАЩЕНИЕ ПРИ ОТРАЖЕНИИ

1. Кассета магнитофона вращается с некоторой скоростью против часовой стрелки. Она освещается лампочкой и отраженные лучи дают изображение вращающейся кассеты. В какую сторону и с какой скоростью вращается это изображение?



2. Луч света падает на зеркало и отражается от него. Зеркало вращается с некоторой скоростью против часовой стрелки. В каком направлении и с какой скоростью вращается отраженный луч?

3. Зеркало неподвижно, вокруг него с некоторой скоростью против часовой стрелки вращается источник света (например, лазер), луч от которого падает в одну и ту же точку зеркала. В каком направлении и с какой скоростью вращается отраженный луч?



4. Зеркало неподвижно, источник света вращается вокруг своей оси против часовой стрелки. Как вращается отраженный луч?

А. Виленкин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Сравнения»

2. Пусть $ac \equiv bc \pmod{m}$, где НОД $(c, m) = 1$. Тогда $ac - bc \vdots m \Longleftrightarrow a - b \vdots m \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

3. $x \equiv 3 \pmod 5 \Longleftrightarrow 3x \equiv 3 \times 3 = 9 \equiv 4 \pmod 5$.

4. НОД $(3x, 6)$ кратен 3, а НОД $(6, 2) = 2$ и на 3 не делится.

6. а) 4; б) 2.

7. Если $x \not\equiv 0$, $y \not\equiv 0 \pmod 3$, то $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 3$ (проверьте!). Но тогда $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3$.

8. $n = \pm 3 + 7t$, где t — целое число.

9. Имеем $5y = x^2 - 3$. При целых x и y из этого равенства следует, что $x^2 \equiv 3 \pmod 5$. Но квадрат целого числа не сравним с 3 по модулю 5.

10. Указание. $287 \equiv 3 \pmod 4$.

11. $p = 5$. Указание. Используйте модуль 5.

12. Указание. Используйте модуль 8.

13. Это следует из свойств (С) сравнений.

14. При помощи сравнения $100 \equiv -1 \pmod{101}$ для натурального числа $n = a_n \ldots a_2 a_1 a_0$ получаем сравнение — признак делимости на 101:

$$n \equiv (\overline{a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4} + \ldots) - (\overline{a_3 a_2} + \overline{a_7 a_6} + \ldots) \pmod{101}.$$

15. $$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} + \ldots \pmod{11}.$$

16. $S(19783) = 28$, $S(27) = 9$, $9^3 - 28$ не делится на 9.

17. Нет.

К статье «Научимся обращаться с абсолютной величиной»

1. $\sqrt[4]{|x|^3}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $y^2|x|$, xy^3, 10.

2. ± 1.

3. $x \neq -3$.

4. а) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; б) $x > \dfrac{1}{\sqrt{27}}$;

5. $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 2\sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_2 = -2\sqrt{2}$.

6. б) $\pi(2k - 1) + \arccos {}^1/_4 \leqslant x \leqslant \pi(2k + 1) - \arccos {}^1/_4$, где $k = 0, \pm 1, \ldots$

7. а) четная, б) нечетная.

8. $x = \pm {}^1/_2$, $x \geqslant 3$.

9. x — любое действительное число.

10. $x = 0$.

11. $x < -7$, $-5 < x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$.

К статье «Движение по окружности»

1. Угловая скорость искусственного спутника Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{88} \approx 0{,}071 \ \textit{рад/с}.$$

Линейная скорость спутника $v = \omega R$, где R — радиус орбиты. Подставляя сюда $R = R_З + h$, где $R_З \approx 6400$ *км*, находим $v \approx 467 \ \dfrac{\textit{км}}{\textit{с}}$.

2. Здесь возможны два случая (рис. 1). Если угловая скорость диска ω, и скорость его центра v, то скорости точек, соприкасающихся с рейками, будут соответственно равны в случае а) $v_1 = v + \omega R$, $v_2 = v - \omega R$; в случае б) $v_1 = v + \omega R$, $v_2 = \omega R - v$. (Мы приняли для определенности, что $v_1 > v_2$). Решая эти системы, находим:

$$\text{а)}\quad v = \frac{v_1 + v_2}{2}; \qquad \omega = \frac{v_1 - v_2}{2R};$$

$$\text{б)}\quad v = \frac{v_1 - v_2}{2}; \qquad \omega = \frac{v_1 + v_2}{2R}.$$

3. Скорость любой точки M, лежащей на отрезке OB (см. рис. 2), находится по формуле $v_M = v + \omega r_M$, где r_M — расстояние от точки M до центра диска O. Для любой точки N, принадлежащей отрезку OA, имеем: $v_N = v - \omega \cdot r_N$, где r_N — расстояние от точки N до центра. Обозначим через ρ расстояние от любой точки диаметра BA до точки A соприкосновения диска с плоскостью. Тогда очевидно, что $r_M = \rho - R$ и $r_N = R - \rho = -(\rho - R)$, где R — радиус диска. Поэтому скорость любой точки на диаметре BA находится по формуле: $v_\rho = v + \omega(\rho - R)$. Так как диск катится без проскальзывания, то $\omega = \dfrac{v}{R}$ и для скорости v_ρ получаем $v_\rho = \omega\rho$. Отсюда следует, что концы векторов скоростей находятся на прямой, выходящей из точки A и наклоненной к диаметру BA под углом, пропорциональным угловой скорости вращения диска ω.

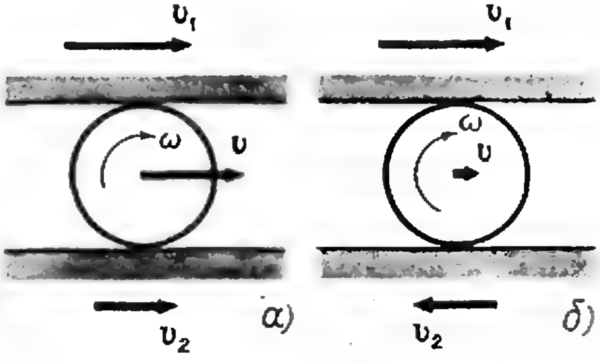


Рис. 1.

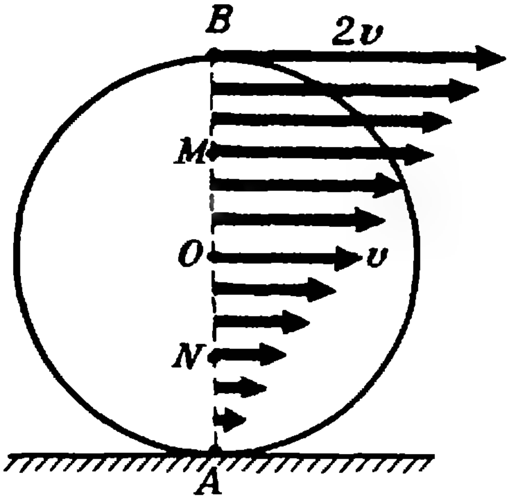


Рис. 2.

Доказанное утверждение позволяет нам сделать вывод, что сложное движение точек, находящихся на диаметре BA, можно в каждый данный момент рассматривать как простое вращение вокруг неподвижной точки A с угловой скоростью ω, равной угловой скорости вращения вокруг центра диска. В самом деле, в каждый момент скорости этих точек направлены перпендикулярно диаметру BA, а по величине равны произведению ω на расстояние до точки A.

Оказывается, что это утверждение справедливо для любой точки диска. Более того, оно является общим правилом. При любом движении твердого тела в каждый момент существует ось, вокруг которой тело просто вращается — мгновенная ось вращения.

4. На самолет действуют (см. рис. 3) сила тяжести $P=mg$ и подъемная сила N, направленная перпендикулярно плоскости крыльев (так как самолет движется с постоянной скоростью, то сила тяги и сила лобового сопротивления воздуха уравновешивают друг друга). Равнодействующая сил P и N должна быть направлена к центру окружности, по которой движется самолет, и создавать центростремительное ускорение $a_ц=\frac{v^2}{R}$. Из рисунка находим: $\frac{mv^2}{R}=mg\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$ или $R=\frac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}\approx 43$ *км*.

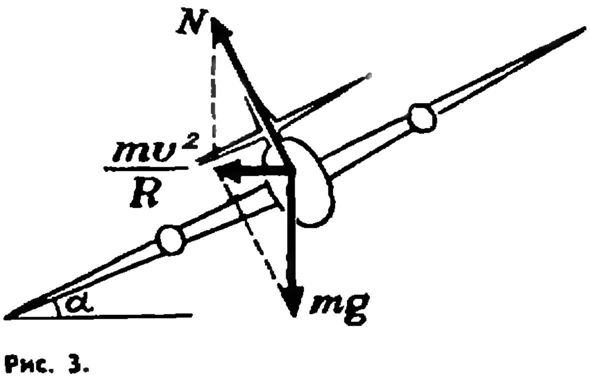


Рис. 3.

5. Равнодействующая силы тяжести $P=mg$ и силы натяжения нити T должна создавать центростремительное ускорение $a_ц=\omega^2R$, где $R=l\cdot\sin\alpha$ — радиус круга, по которому вращается груз. Из рисунка 4 получаем: $m\omega^2R=mg\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда

$$\omega=\sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R}}=\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

Период обращения груза

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}\approx 1{,}4\ с.$$

Натяжение нити $T=\frac{mg}{\cos\alpha}\approx 0{,}5$ *н*.

6. На автомобиль действуют (рис. 5) сила тяжести $P=mg$, сила реакции со стороны цилиндра N и сила трения $F_{тр}$. Так как автомобиль движется по горизонтальному кругу, то силы P и $F_{тр}$ уравновешивают друг друга, а сила N создает центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Максимальное значение силы трения связано с силой реакции N соотношением: $F_{тр}=kN$. В результате получаем систему уравнений: $mg=kN$, $N=\frac{mv^2}{R}$, из которой находится минимальное значение коэффициента трения

$$k=\frac{gR}{v^2}\approx 0{,}2.$$

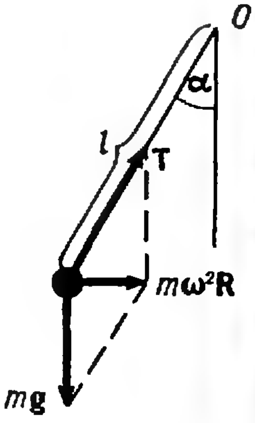


Рис. 4.

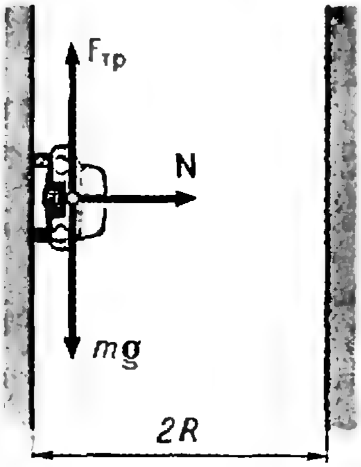


Рис. 5.

7. Груз будет двигаться по окружности радиуса l (рис. 6). Центростремительное ускорение груза $\frac{v^2}{l}$ (v — скорость груза) создается разностью величин силы натяжения нити T и проекции силы тяжести mg направление нити: $\frac{mv^2}{l}=T-mg\cos\beta$.

Поэтому $T=\frac{mv^2}{l}+mg\cos\beta$, где β — угол, образуемый нитью с вертикалью. По мере того, как груз будет опускаться, его

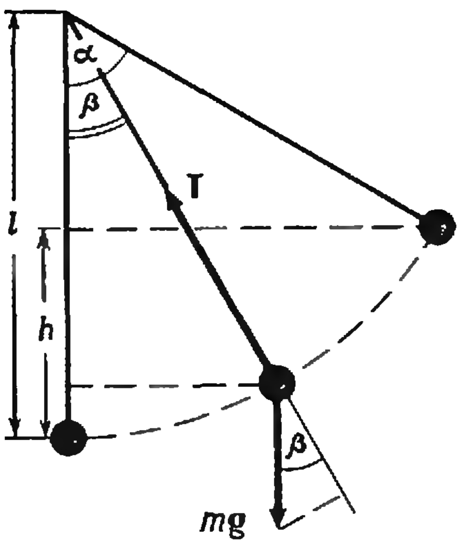


Рис. 6.

скорость будет расти, а угол β будет уменьшаться. Натяжение нити станет максимальным при угле $\beta = 0$ (в тот момент, когда нить будет вертикальной):

$T_{\max} = mg\left(1 + \dfrac{v_0^2}{gl}\right)$. Максимальная скорость груза v_0 находится по углу α, на который отклоняют нить, из закона сохранения энергии: $\dfrac{mv_0^2}{2} = mgh = mgl\,(1 - \cos\alpha)$. Используя это соотношение, для максимального значения натяжения нити получаем формулу: $T_{\max} = mg\,(3 - 2\cos\alpha)$. По условию задачи $T_{\max} = 2mg$. Приравнивая эти выражения, находим $\cos\alpha = 0{,}5$ и, следовательно, $\alpha = 60°$.

Определим теперь натяжение нити при $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$. Скорость груза в этот момент также находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgl\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right).$$

Подставляя значение v_1 в формулу для силы натяжения, находим:

$$T = \frac{mv_1^2}{l} + mg\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= mg\left(3\cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos\alpha\right) \approx 1{,}6\ mg.$$

К «Удивительным равенствам»

(см. стр. 21)

1. Равенство $\dfrac{a-b}{c+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}$ эквивалентно таким (при $c,\ d \neq 0,\ c+d \neq 0$):

$$(a-b)\,cd = (c+d)\,(ad - bc),$$

$$acd - bcd = acd + ad^2 - bc^2 - bcd,$$

$$ad^2 - bc^2 = 0.$$

2. $\dfrac{10a+b}{10b+c} = \dfrac{a}{c}$ или $c = \dfrac{10ab}{9a+b}$.

3. $\log(a+b) = \log a + \log b$,

$$b > 1,\quad a = \frac{b}{b-1}.$$

4. $\log(a-b) = \log a - \log b$,

$$b > 1,\quad a = \frac{b^2}{b-1}.$$

К задаче «Пополнение команды»

(см. стр. 31)

Команду пополнили: Капралов (центральный нападающий), Колесников (защитник), Дымников (левый крайний нападающий), Полянчиков (полузащитник).

К «Задачам на комбинаторику»

(см. стр. 38)

1. $36 \cdot 35 = 1260$.
2. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$.
3. 10^6.
4. $20 \cdot 15 \cdot 10 = 3000$.
5. $(20 \cdot 19) : 2 = 190$.
6. $(30 \cdot 29) : 2 = 435$.
7. $\dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^{50}}$.

К задачам «Вращение при отражении»

(см. стр. 61)

1. По часовой стрелке с той же скоростью.
2. Против часовой стрелки с удвоенной скоростью.
3, 4. По часовой стрелке с той же скоростью.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. Квант № 8, 3-я стр. обл.)

1. Один из вариантов таблицы:

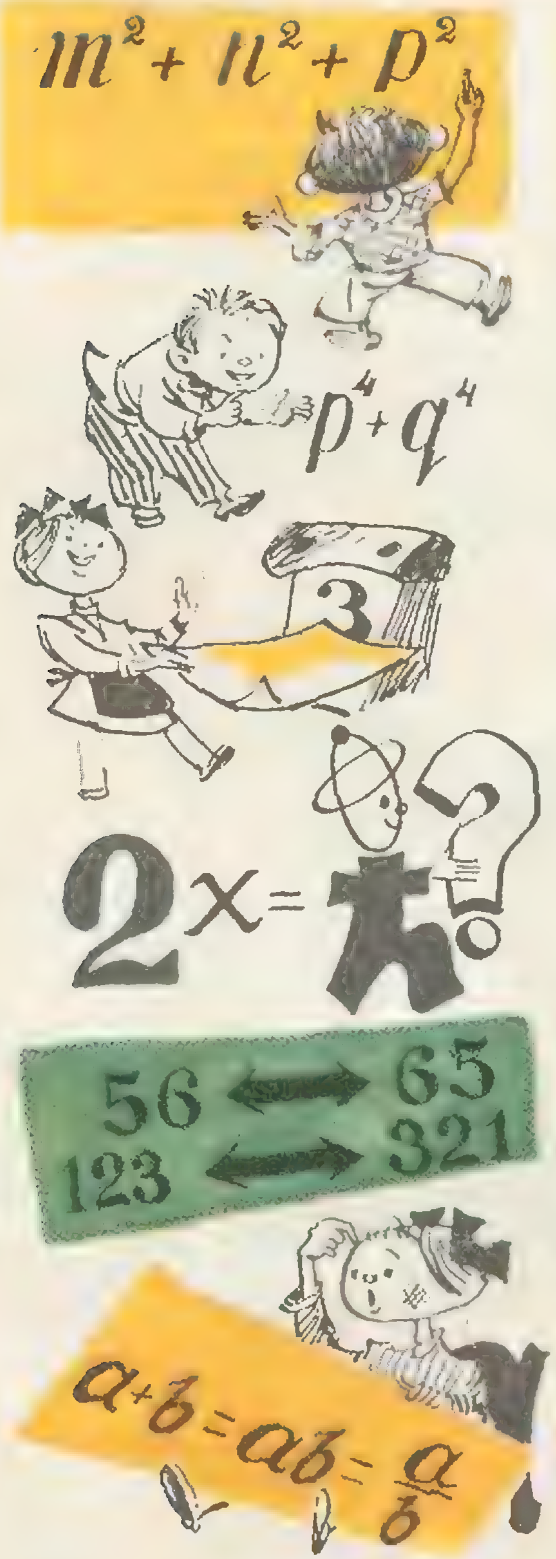
	Д	Т	С	Ш	Очки	Голы
Д	—	2 (1:0)	1 (0:0)	2 (1:0)	5	2—0
Т	0 (0:1)	—	1 (3:3)	2 (2:1)	3	5—5
С	1 (0:0)	1 (3:3)	—	1 (0:0)	3	3—3
Ш	0 (0:1)	0 (1:2)	1 (0:0)	—	1	1—3

2. Указание. При нахождении искомого пути основную роль играют многоугольники с нечетным числом городов на их границе.

3. 74369053×87956=6541204425668.

4. Эскалатор движется с той же скоростью, что и второй друг, от входа до выхода помещается 42 ступеньки.

КВАНТ
ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ



1. Известному советскому математику А. Г. Постникову, находящемуся в расцвете творческих сил, в этом году исполняется $m^2+n^2+p^2$ лет. Родился он в p^4+q^4-м году mn-го числа q-го месяца. Зная, что числа m, n, p, q образуют арифметическую прогрессию, установить дату рождения и возраст ученого.

2. Найти наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 становится квадратом, а при умножении на 3 — кубом целого числа.

3. Расшифровать равенство

$$** + *** = ****,$$

если известно, что оба слагаемых и сумма не изменяются, если все эти три числа прочитать справа налево.

4. Какое число надо вычесть из числителя дроби $\frac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить дробь $\frac{1}{9}$?

5. Найти два таких числа, чтобы их сумма, произведение и частное от деления одного из них на другое были равны.

6. Брат говорит сестре: «Когда тете Кате было столько лет, сколько теперь нам с тобой вместе, то тебе было столько лет, сколько мне сейчас. А вот когда тете Кате было столько лет, сколько тебе сейчас, то тебе тогда было...»

Сколько лет тогда было сестре?

7. Расшифровать равенство:

$$\overline{abcde}\cdot 4=\overline{edcba}.$$

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 9

К нашим читателям!

квант 1
квант 4
квант 2
квант 5
квант 3
квант 6

Объявляется подписка на 1973 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан на учеников 7—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых.

В журнале читатель найдет много задач: задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, олимпиадные задачи, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал в розничную торговлю не поступает.

Цена номера 30 коп. Стоимость годовой подписки 3 руб. 60 коп. Наш индекс 70465.

НОМЕР
10

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

квант

10
ОКТЯБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 Малая теорема Ферма *С. Г. Гиндикин*
10 Закон Джоуля — Ленца *В. А. Фабрикант*
17 Интеграл в геометрии и физике *Ю. И. Ионин*
22 Высота гор и фундаментальные физические постоянные *В. Вайскопф*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

25 Конечные паркеты *В. И. Каплун, В. Г. Лейбович, Е. Л. Папернов*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

31 Бумеранг *Ф. Гесс*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

38 Задачи М166—М170, Ф180—Ф184
40 Решения задач М126—М128, Ф142—Ф147

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

47 Метод решения задач «с конца» *Я. И. Груденов*
52 Работа, энергия, мощность *И. А. Зайцев*
59 Варианты вступительных экзаменов по физике в Московский физико-технический институт в 1972 году
61 Варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

62 Новые книги *М. Л. Смолянский*

ИНФОРМАЦИЯ

64 VI Всесоюзная математическая олимпиада школьников *Л. Г. Лиманов*
69 VI Всесоюзная физическая олимпиада школьников *Т. С. Петрова*
71 Математический бой *В. П. Федотов*
75 Ленинские премии 1972 года *В. А. Лешковцев*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

77 Марки, посвященные изобретателям «русского света»
78 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
(3-я стр. обложки)
СМЕСЬ (стр. 16, 24, 30)

МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

С. Г. Гиндикин

> *Эта теорема, которая заслуживает величайшего внимания как вследствие ее изящества, так и ввиду ее выдающейся пользы, обычно называется — по имени нашедшего ее математика — теоремой Ферма.*
>
> *ГАУСС*

Бесконечные периодические дроби

Вы, вероятно, помните, что если обращать дробь $\frac{m}{n}$ в десятичную, то есть делить m на n, вычисляя последовательно десятичные знаки, то, начиная с некоторого места, эти знаки начнут периодически повторяться.

Известно, что Гаусс, еще будучи гимназистом, долгое время занимался тем, что обращал дроби $\frac{1}{p}$, где p — последовательные простые числа, не равные 2 и 5, в бесконечные десятичные; в каждом случае он с поразительным терпением ожидал, когда знаки начнут повторяться. Ему хотелось понять, как зависит длина периода λ от p. В таблице 1 показано, какая картина получается для простых чисел $p<50$.

Мы видим, что выписывание полного периода, скажем, для $p=47$ — утомительное занятие (46 знаков!). Да и простой закономерности подметить не удается. Однако Гаусс не терял надежды и продолжал вычисления; он выписал полные периоды для всех простых чисел, не превосходящих 1000. Сделать это было не просто, так как, например, для $p=337$ — $\lambda=336$. Хотя простого способа находить λ по p Гауссу обнаружить не удалось, ряд важных наблюдений был сделан. Главное, что удалось подметить, — это то, что λ *всегда является делителем* $p-1$, иногда совпадая с ним ($p=7$, 17, 23, . . .).

Попытаемся теперь обосновать сделанные утверждения. Мы будем иметь дело лишь с чисто периодическими дробями $0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k \ldots$ Число l называется *длиной периода*, если $\alpha_{k+l}=\alpha_k$ для всех k. Длина периода определяется неоднозначно, например, вместе с l этим свойством обладают все его кратные ql. Пусть λ — *минимальная* длина периода (в любой совокупности натуральных чисел существует наименьшее). В таблице 1 указаны значения минимальных длин периодов. Покажем, что всякая длина периода l делится на минимальную λ.

Разделим l на λ с остатком: $l = q\lambda + r$, $0 \leqslant r < \lambda$. Поскольку λ, λq, l — длины периодов, то для всех k имеем: $\alpha_{k+r} = \alpha_{k+r+\lambda q} = \alpha_{k+l} = \alpha_k$, то есть если $r > 0$, то r — длина периода, чего не может быть, так как $r < \lambda$. Значит, $r = 0$.

Таблица 1

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
λ	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46

Длина периода λ бесконечной десятичной дроби, равной $1/p$ $(p<50)$.

Докажем теперь чистую периодичность бесконечной десятичной дроби, соответствующей $\frac{1}{p}$ ($p \neq 2,5$). Вспомним, как строится эта дробь. Остаток a_k, полученный на k-м шаге, умножается на 10 и делится с остатком на p; частное α_{k+1} является $(k+1)$-м знаком дроби, а остаток a_{k+1} используется на следующем шаге. Мы начинаем с $a_0 = 1$. Удобно заметить, что если разделить с остатком 10^k на p, то получится частное $\alpha_1\alpha_2 \ldots \ldots \alpha_k$ и остаток a_k (докажите!). Остаток a_k полностью определяет все последующие знаки $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots$, и если два остатка совпали: $a_k = a_m$, то соответствующие знаки α_n повторяются: $\alpha_{k+1} = \alpha_{m+1}$, $\alpha_{k+2} = \alpha_{m+2}$ и т. д. Тогда *для доказательства чистой периодичности достаточно показать, что на каком-то шаге получится остаток* $a_l = 1$. Остатки обязаны повторяться ($a_k = a_m$ для некоторых $k \neq m$), так как $1 \leqslant a_k \leqslant p - 1$. Более того, всегда можно выбрать k, m так, чтобы $1 \leqslant k < m \leqslant p$, то есть первое повторение наступит не позднее, чем на p-м шаге. Пусть 10^k и 10^m, $k < m$, дают при делении на p одинаковые остатки. Тогда $10^m - 10^k = 10^k (10^{m-k} - 1)$ делится на p. Поскольку p — простое число, отличное от 2 и 5, то первый множитель 10^k не делится на p, а на p должен делиться множитель $10^{m-k} - 1$, то есть 10^{m-k} при делении на p дает остаток 1*). Учитывая, что $1 \leqslant k < m \leqslant p$, получаем $m - k \leqslant p - 1$. Итак, *для всякого простого* $p \neq 2$ и 5 *существует такое* l, $1 \leqslant l \leqslant p - 1$, *что* 10^l *при делении на* p *дает остаток* 1. Это l является длиной периода для $\frac{1}{p}$.

Минимальная длина периода *не превосходит* $p - 1$. Теперь мы хотим показать, что λ — *делитель* $p - 1$. Поскольку λ является делителем любой длины периода, для этого достаточно показать, что $p-1$ — длина периода. Для этого, в свою очередь, покажем, что наименьшее значение k, для которого $10^k - 1$ делится на p, является делителем $p - 1$. Обозначим его через l. Выпишем на карточках числа 1, 2, 3, . . ., $p - 1$. Выберем карточки, на которых написаны остатки от деления чисел 1, 10, $10^2, \ldots, 10^{l-1}$ на p (все эти остатки отличны от нуля). При этом мы выберем l карточек, так как все остатки различны. Действительно, если 10^k, 10^m, $0 \leqslant k < m < l$, имеют одинаковые остатки, то как мы уже отмечали, $10^{m-k} - 1$ будет делиться на p, а поскольку $m - k < l$, то мы приходим к противоречию (l — наименьший показатель для которого $10^k - 1$ делится на p). Отметим еще, что 10^{m+l} и 10^m будут иметь при всех m одинаковые остатки от деления на p ($10^{m+l} - 10^m = 10^m (10^l - 1)$ делится на p). Поэтому, рассматривая 10^k при $k \geqslant l$, мы новых остатков не получим. Возьмем теперь одну из невыбранных карточек; пусть на ней написано число b_2. Выберем все карточки, на которых написаны остатки от деления чисел b_2, $b_2 10$, $b_2 10^2 \ldots, b_2 10^{l-1}$ на p. Как и при $b_1 = 1$, проверяется, что все эти остатки различны. Но теперь нам нужно еще убедиться, что ни одна из нужных нам карточек не была выбрана на первом шаге, то есть числа $b_2 10^k$ и 10^m не могут иметь одинаковые остатки. Предположим, что они имеют одинаковые остатки. Можно считать, что $m \geqslant k$, так как в противном случае можно достаточное число раз прибавить l к m (10^{m+ql} и 10^m имеют одинаковые остатки). Тогда $10^m - b_2 10^k$, а значит, и $10^{m-k} - b_2$ делится на p, то есть b_2 — остаток от деления 10^{m-k} на p, и соответствующую карточку мы должны были выбрать на первом шаге. Мы пришли к противоречию, значит, на втором шаге мы выбираем l новых карточек. Мы будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не выберем все карточки. Поскольку на каждом шаге выбирается ровно l карточек, мы получаем, что первоначальное число карточек ($p-1$) *должно делиться на* l.

---

*) Мы все время будем пользоваться тем, что если произведение ab делится на простое число p, то на p делится, по крайней мере, один из сомножителей a, b, а также тем, что числа a и b имеют одинаковые остатки от деления на c тогда и только тогда, когда $a-b$ делится на c.

Задача 1. *Докажите, что минимальная длина* λ *периода дроби* $\frac{1}{p}$ *совпадает с наименьшим показателем* l, *для которого* 10^k-1 *делится на* p.

Признаки делимости

Полученные результаты о делимости степеней 10 на p имеют еще одно интересное применение. Оказывается, что для любого простого числа $p \neq 2{,}5$ существует признак делимости, обобщающий признак делимости на 3. Напомним рассуждения, относящиеся к $p=3$. Пусть A — натуральное число, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — его цифры, занумерованные справа налево. Тогда $A = a_0 + a_1 10 + \ldots + a_k 10^k$. Поскольку 10^s для всех s при делении на 3 дает остаток 1, то A дает при делении на 3 тот же остаток, что $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$. В частности, A будет делиться на 3 в том и только в том случае, когда $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ делится на 3.

Пусть теперь $p = 11$. Тогда, как мы видели, $l = 2$ и все 10^{2k} при делении на 11 дают остаток 1. Разобьем цифры A на пары справа налево, причем в последнюю группу попадает лишь одна цифра, если число цифр нечетно: $b_0 = a_1a_0$, $b_1 = a_3a_2, \ldots$ Число A следующим образом записывается через b_j: $A = b_0 + b_1 10^2 + b_2 10^4 + \ldots + b_m 10^{2m}$, $0 \leqslant b_j < 100$. Ясно, что A при делении на 11 будет давать тот же остаток, что и сумма двузначных чисел $b_0 + b_1 + \ldots + b_m$.

В общем случае, если $p \neq 2, 5$ — простое число и $10^l - 1$ делится на p, мы разобьем A на l-значные блоки справа налево (в первом слева блоке может быть меньше цифр) так, что $A = c_0 + c_1 10^l + c_2 10^{2l} + \ldots + c_n 10^{nl}$, $0 \leqslant c_j < 10^l$. Тогда A *при делении на* p *дает тот же остаток, что и сумма* l*-значных чисел* $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$; в частности, A *делится на* p *тогда и только тогда, когда эта сумма делится на* p. Этот признак очень прост при $p = 3$; мы видели, что при $p = 11$ приходится разбивать на двузначные блоки, при $p = 37$ — на трехзначные, однако при $p = 7$ — на шестизначные, и вообще говоря, мы можем гарантировать лишь, что приведет к цели разбиение на блоки длины $p - 1$.

Задача 2. *Доказать, что если* $l = 1$ *для некоторого простого* p, *то* $p = 3$; *если* $l = 2$, *то* $p = 11$; *если* $l = 3$, *то* $p = 37$.

Малая теорема Ферма

Если вы просмотрите еще раз наши рассуждения о делимости степеней 10 на p, то убедитесь, что мы пользовались лишь тем, что 10 не делится на p. Фактически мы доказали следующее общее утверждение.

Малая теорема Ферма[*]. *Если* p *— простое число и* a *— число, не делящееся на* p, *то* $a^{p-1} - 1$ *делится на* p.

Это утверждение было сообщено Ферма (1601—1665) без доказательства в письме Френиклю де Бесси от 18 октября 1640 года. На Ферма обнаруженная им закономерность произвела очень большое впечатление. «Меня озарило ярким светом», — писал он, сообщая о нем.

Задача 3. *Докажите, что если* p *— простое число, то* $a^p - a$ *делится на* p.

Эта задача — вариант малой теоремы Ферма, в котором не исключаются a, кратные p.

Теория сравнений

При исследовании делимости целых чисел удобно пользоваться языком теории сравнений, введенным Гауссом. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m (m — натуральное число), если $a - b$ делится на m. Это обозначается так:

$$a \equiv b \pmod{m}. \qquad (1)$$

---

[*] Она так называется в отличие от до сих пор не доказанной Великой теоремы Ферма (см. «Квант» № 8, 1972 года).

В частности, если a делится на m, то $a \equiv 0 \pmod{m}$. Соотношение (1) равносильно тому, что a и b имеют одинаковые остатки при делении на m. Напомним, что под *остатком* от деления a на m понимается такое r, $0 \leqslant r < m$, что $a = mq + r$, где q — целое. Этим условием r однозначно определяется. Остатки еще называют *вычетами по модулю* m. Их совокупность $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ мы обозначим через Z_m.

Сравнения по одному модулю можно почленно складывать и перемножать, если $a \equiv c \pmod{m}$, $b \equiv d \pmod{m}$, то $a + b \equiv c + d \pmod{m}$, $ab \equiv cd \pmod{m}$. Это легко проверяется непосредственно. Если $a - c$ и $b - d$ делятся на m, то на m делится их сумма

$$a - c + b - d = (a + b) - (c + d),$$

а также выражение

$$ab - cd = ab - cb + bc - cd = b(a - c) + c(b - d).$$

На языке остатков это означает, что *остаток* суммы $a + b$ *зависит только от остатков* r_1 и r_2 *слагаемых и совпадает с остатком числа* $r_1 + r_2$; аналогично, *остаток* ab *зависит только от* r_1 *и* r_2 *и равен остатку* $r_1 r_2$. В результате в множестве Z_m возникают операции, которые будем называть соответственно *сложением* и *умножением по модулю* m (или *сложением* и *умножением в* m*-арифметике*).

Итак, чтобы выполнить одну из этих операций в Z_m, *нужно выполнить эти операции в обычном смысле и взять остаток от деления результата на* m. Аналогичным образом определяется вычитание в Z_m (остаток обычной разности). Непосредственно проверяется, что и в m-арифметике вычитание — действие, обратное сложению, то есть

$$a + b = c \Longleftrightarrow c - b = a;$$

$a,\ b,\ c \in Z_m$ (докажите!).

Заметим, что

$$0 - a = m - a \text{ в } Z_m,$$

$$a - b = a + (m - b).$$

Таблица 2

$\boxed{a+b}$

a b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\boxed{ab}$

a b	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\boxed{a-b}$

a b	0	1	2
0	0	1	2
1	2	0	1
2	1	2	0

Сложение, умножение и вычитание по модулю 3 (в 3-арифметике).

Задача 4. *Составить таблицы сложения, умножения и вычитания в 5-арифметике, воспользовавшись таблицей 2 как образцом.*

В теории сравнений особое место занимают *сравнения по простому модулю*. Один из самых замечательных фактов, имеющих место для этого случая, заключается в том, что *в* p*-арифметике* (p — простое) *всегда однозначно выполнено деление на* $b \neq 0$. Покажем это.

Деление мы определяем как действие, обратное умножению, то есть в Z_p $\frac{a}{b} = c$, если $bc = a$.

Ясно, что случай $b = 0$ надо исключить, так как $0c = 0$ при всех c. Пусть $b \neq 0$. Рассмотрим все элементы Z_p вида xb, $x \in Z_p$. Покажем, что при разных x эти элементы различны, то есть что если $0 \leqslant x_2 < x_1 < p$, то $x_1 b - x_2 b = b(x_1 - x_2)$ не делится на p. Действительно, ни b, $0 < b < p$, ни $x_1 - x_2$, $0 < x_1 - x_2 < p$, не делятся на p. Значит, множество xb, $x \in Z_p$, содержит p различных элементов, а потому совпадает с Z_p.

Таким образом, для всякого $a \in Z_p$ существует и единственно значение $x = c$, для которого $cb = a$.

Полученный результат можно переформулировать так: *сравнение* $ax \equiv b \pmod{p}$ *при* $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ *имеет решение, причем все решения сравнимы по модулю* p.

Задача 5. *Составьте таблицу деления в 5-арифметике.*

Задача 6. *Покажите, что если все элементы* Z_m *делятся на* $b \in Z_m$, *то* b *и* m *взаимно просты (то есть их наибольший общий делитель* $(b, m) = 1$). *В частности, если в* Z_m *всегда выполнимо деление на ненулевые элементы, то* m *— простое число.*

Задача 7. *Пусть последняя цифра в* b *отлична от* 0, 2 *и* 5. *Тогда для любой цифры* c *можно указать число, делящееся на* b *и имеющее данную цифру* c *последней.*

В силу малой теоремы Ферма $a^{p-1} = 1$ в Z_p при $a \neq 0$, что эквивалентно сравнению $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ для a, не делящихся на p. Эйлер заметил, что теорема Ферма допускает обобщение на случай составного m. Пусть a взаимно просто с m. Так же как и для простого p, показывается, что $a^k - 1$ для некоторого k делится на m. Пусть l — наименьший показатель, обладающий этим свойством; принято говорить, что a *принадлежит показателю* l *по модулю* m.

Теорема Ферма—Эйлера. *Пусть* a *взаимно просто с* m. *Тогда*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \qquad (2)$$

где $\varphi(m)$ *— число элементов в* Z_m, *взаимно простых с* m.

Величина $\varphi(m)$ называется *функцией Эйлера* (таблица 3).

Доказательство в точности повторяет рассуждение для простого $m = p$. Нужно выписать на карточках $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m и меньших m, а затем на каждом шаге вместе с одной из оставшихся карточек с числом b_j мы выберем карточки, на которых выписаны остатки от деления $b_j, b_j a, \ldots, b_j a^{l-1}$ на m. При этом на каждом шаге будет выбираться точно l карточек, а в результате $\varphi(m)$ должно делиться на l.

Подумайте, что можно сказать, основываясь на теореме Ферма—Эйлера о периоде дробей $1/m$ и о признаках делимости на m, где m — составное число.

Вычисление функции Эйлера

Разложим m на простые множители: $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, $\alpha_j > 0$. Тогда $\varphi(m)$ — количество натуральных чисел k, $0 \leqslant k < m$, которые не делятся ни на одно из простых чисел $p_1, \ldots, p_r$. Нам будет удобно вычислить выражение, более общее, чем $\varphi(m)$. Пусть m_1 и m_2 — взаимно простые делители m и $\psi(m_1/m_2)$ — число таких k, $0 \leqslant k < m$, которые делятся на m_1, но взаимно просты с m_2. Тогда $\psi(1/m) = \varphi(m)$.

Если $m_2 = q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s}$, $\beta_j > 0$, $m_2' = q_1 \ldots q_s$, то $\psi(m_1/m_2) = \psi(m_1/m_2')$ (почему?). Далее ясно, что $\psi(m_1/1)$ — это количество чисел

Таблица 3

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12

Значение функции Эйлера. Проверьте, что $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ и что сумма $\varphi(d)$ по всем делителям d данного числа m равна m.

k, $0 \leqslant k < m$, делящихся на m_1 (1 взаимно проста со всеми k), а потому $\psi(m_1/1) = \frac{m}{m_1}$. Пусть теперь p — простой делитель m, на который не делятся m_1 и m_2. Тогда $\psi(m_1/m_2p) = \psi(m_1/m_2) - \psi(m_1p/m_2)$, поскольку если из совокупности чисел, делящихся на m_1 и взаимно простых с m_2, отбросить числа, делящиеся на p, то мы получим совокупность чисел, делящихся на m_1 и взаимно простых с m_2p. В результате получаем индуктивный способ вычислять $\psi(m_1/m_2)$:

$$\psi(m_1/q_1) = \psi(m_1/1) - \psi(m_1q_1/1) = \frac{m}{m_1} - \frac{m}{m_1q_1} = \frac{m}{m_1}\left(1 - \frac{1}{q_1}\right),$$

$$\psi(m_1/q_1q_2) = \psi(m_1/q_1) - \psi(m_1q_2/q_1) = \frac{m}{m_1}\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right).$$

Далее по индукции можно доказать, что

$$\psi(m_1/q_1\ldots q_s) = \frac{m}{m_1}\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{q_s}\right),$$

где $q_1, \ldots, q_s$ — различные простые делители m, на которые не делится m_1. В частности, учитывая, что $\varphi(m) = \psi(1/m) = \psi(1/p_1 \ldots p_r)$, получаем:

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \quad (3)$$

Отметим, что естественно положить $\varphi(1) = 1$

Задача 8. *Докажите, что если m_1 и m_2 взаимно просты, то*

$$\varphi(m_1m_2) = \varphi(m_1)\cdot\varphi(m_2).$$

Это свойство называется свойством *мультипликативности* функции Эйлера.

Еще одно свойство функции Эйлера было впервые замечено Гауссом. Пусть $d_1, \ldots, d_k$ — все различные делители числа m (включая 1 и m). Тогда

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = m, \quad (4)$$

Для доказательства формулы Гаусса (4) разобьем все числа 1, 2, ..., m на группы $D_1, D_2, \ldots, D_k$, относя n в группу D_s, если $(n, m) = l_s = \frac{m}{d_s}$. Тогда каждое из наших m чисел попадет в одну и только одну группу, причем в D_s попадет ровно $\varphi(d_s)$ элементов. Действительно, $n \in D_s$ тогда и только тогда, когда $n = l_sq$, $1 \leqslant q \leqslant d_s$, причем q взаимно просто с d_s, то есть q пробегает $\varphi(d_s)$ значений. Суммируя число элементов по группам, получаем (4).

Первообразные корни

Число g, не делящееся на p (p — простое число), называется *первообразным корнем* по модулю p, если оно принадлежит показателю $p - 1$ по модулю p, то есть если (см. определение на стр. 6) наименьшее k, при котором $a^k - 1$ делится на p, равно $p-1$.

Мы видели, что для тех p, для которых 10 является первообразным корнем (7, 17, 19, 23, ...), период $\frac{1}{p}$ имел максимально возможную длину $p - 1$, а в признаках делимости приходилось разбивать числа на блоки длины $p - 1$.

Для всякого ли p существует хотя бы один первообразный корень? Первым, кто пытался дать ответ на этот вопрос, был Эйлер, но полные доказательства были получены лишь Лежандром (1752—1833) и Гауссом. Мы воспроизведем здесь рассуждение Гаусса, в котором находится одновременно точное число первообразных корней и, более того, число элементов Z_p, принадлежащих показателю l для произвольного l.

Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть $P(x)$ — многочлен степени l и имеется более l различных* целых r, $0 \leqslant r < p$, *для которых $P(r)$ делится на p. Тогда $P(r) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех r.*

Доказательство будем вести индукцией по l. При $l = 0$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для многочленов степени не выше $l - 1$. Пусть далее $r_0, r_1, \ldots, r_l$, $0 \leqslant r_j < p$, удовлетворяют сравнению $P(r) \equiv 0 \pmod{p}$. Представим $P(x)$ в виде $P(x) = (x - r_0)Q(x) + P(r_0)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $l - 1$, а $P(r_0)$ делится на p. Тогда, поскольку $P(r_j)$ делятся на p, $(r_j - r_0)Q(r_j)$ делится на p при $1 \leqslant j \leqslant l$. Так как $r_j - r_0$ не может делиться на p, то $Q(r_j)$ делится на p, а тогда по предположению индукции $Q(r)$ будет делиться на p при всех r. Следовательно, $P(r)$ делится на p при всех r.

Следствие. *Сравнению $x^l \equiv 1 \pmod{p}$ удовлетворяют не более l элементов Z_p.*

В силу леммы достаточно найти хотя бы одно $x \in Z_p$, не удовлеторяющее сравнению. Можно взять $x = 0$.

Теорема Гаусса. *Пусть p — простое число, l — делитель $(p - 1)$. Тогда показателю l принадлежит $\varphi(l)$ элементов Z_p.*

Следствие. Для всякого простого p *имеется $\varphi(p - 1)$ первообразных корней* (см. табл. 4).

Доказательство теоремы Гаусса. Пусть показателю l (l — делитель $p - 1$) принадлежит некоторое $a \in Z_p$. Рассмотрим числа $1, a, \ldots, a^{l-1}$ и их остатки $b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}$. Уже было показано, что все b_j различны. Ясно, что для любого m имеем:

$$(a^m)^l \equiv (b_m)^l \equiv 1 \pmod{p},$$

то есть $b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}$ — решения сравнения $x^l \equiv 1 \pmod{p}$, причем в силу следствия из леммы других решений у этого сравнения нет. В частности, среди $b_0, \ldots, b_{l-1}$ содержатся все остатки, принадлежащие показателю l. Очевидно, что если m и l имеют общий делитель $d \neq 1$, то $(a^m)^{l/d} \equiv 1 \pmod{p}$, так что b_m не может принадлежать показателю l, а поэтому показателю l может принадлежать не более $\varphi(l)$ элементов Z_p.

Каждый из $p - 1$ ненулевых элементов Z_p принадлежит какому-то показателю l, являющемуся делителем $p - 1$. Пусть $d_1, \ldots, d_k$ — делители $p - 1$ и показателю d_s принадлежит $\psi(d_s)$ элементов Z_p. Тогда $\psi(d_1) + \ldots + \psi(d_k) = p - 1$ и $\psi(d_s) \leqslant \varphi(d_s)$ для всех s. В силу формулы Гаусса (4) $\varphi(d_1) + \ldots + \varphi(d_k) = p - 1$, поэтому $\psi(d_s) + \ldots + \psi(d_k) = \varphi(d_1) + \ldots + \varphi(d_k)$, и, поскольку $\psi(d_s) \leqslant \varphi(d_s)$, обязательно $\psi(d_s) = \varphi(d_s)$ для всех s. Теорема доказана.

Таблица 4

$\boxed{a^k}$

k a	1	2	3	4	5	6	7	$l(a)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	1	2	4	1	2	3
3	3	2	6	4	5	1	3	6
4	4	2	1	4	2	1	4	3
5	5	4	6	2	3	1	5	6
6	6	1	6	1	6	1	6	2

Степени по модулю 7. В последнем столбце для каждого остатка x указано, какому показателю по модулю 7 он принадлежит: 2 остатка принадлежат показателю $6(f(6) = 2)$, то есть являются первообразными корнями, 2 — показателю $3(f(3) = 2)$, 1 — показателю $2(f(2) = 1)$.

Таблица 5

a	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{ind}_3 a$	0	2	1	4	5	3

Индексы в Z_7 — относительно первообразного корня 3.

Приведенное доказательство — типичное доказательство существования. В нем доказывается существование $\varphi(l)$ элементов Z_p, принадлежащих показателю l, в частности, $\varphi(p-1)$ первообразных корней, но явное построение не проводится.

Первообразные корни существуют не только для простых чисел. Можно показать, что они существуют для чисел 2, 4, p^α, $2p^\alpha$, где p — нечетное простое число, и только для них.

Индексы

Применение первообразных корней основано на следующем факте. Пусть g — первообразный корень по модулю p; $a_0, a_1, \ldots, a_{p-2}$ — остатки от деления чисел $1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}$ на p. Тогда все a_j различны и все они отличны от нуля: следовательно, $a_0, \ldots, a_{p-2}$ — это все ненулевые элементы Z_p. В результате всякому ненулевому элементу $b \in Z_p$ отвечает единственное $k \in Z_{p-1}$, для которого $g^k \equiv b \pmod p$; k называется *индексом* b относительно g и обозначается через $\mathrm{ind}_g b$ (табл. 5). Очевидно, что $\mathrm{ind}_g ab = \mathrm{ind}_g a + \mathrm{ind}_g b$; $\mathrm{ind}_g \frac{a}{b} = \mathrm{ind}_g a - \mathrm{ind}_g b$, где слева операции производятся в Z_p, а справа в Z_{p-1}. По этой причине индексы в p-арифметике играют роль, аналогичную логарифмам; при их помощи умножение и деление сводятся к сложению и умножению. В учебниках по теории чисел приводятся подробные таблицы индексов, причем, как и в логарифмических таблицах, приводятся как таблицы для определения индексов по элементам Z_p, так и таблицы для определения элементов по индексам.

Задача 9. *Составить таблицы индексов в 5-арифметике.*

Мы ограничимся одним примером на применение индексов. Рассмотрим сравнение $ax^l \equiv b \pmod p$, $(a, p) = 1$. Вопрос о его разрешимости можно исследовать непосредственно, но если перейти к индексам, то мы получаем относительно $y = \mathrm{ind}_g x$ сравнение первой степени: $ly = c \pmod{p-1}$, $c = \mathrm{ind}_g b - \mathrm{ind}_g a$. Поскольку между ненулевыми остатками и индексами существует взаимно однозначное соответствие, такое же соответствие существует между ненулевыми решениями первого сравнения и решениями второго.

Задача 10. *Покажите, что сравнение* $ax^l \equiv b \pmod p$, $(a, p) = (b, p) = 1$ *однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда* l *и* $p-1$ *взаимно просты.*

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.

Индексы в p-арифметике зависят от выбора первообразного корня g. Однако наибольший общий делитель $d(a) = (\mathrm{ind}_g a, p-1)$ не зависит от g, что следует из следующего утверждения.

Задача 11. *Докажите, что имеет место соотношение* $d(a)l(a) = p-1$, *где* $l(a)$ *— показатель, которому принадлежит* a *по модулю* p.

Указание. Достаточно заметить, что $l(a)$ — это наименьшее натуральное число, для которого $l(a)\,\mathrm{ind}_g a$ делится на $p-1$ ($a^l \equiv g^{l\,\mathrm{ind}\,a} \equiv 1 \pmod p$).

Полученное соотношение позволяет легко найти $l(a)$ по индексу a. В частности, зная индекс 10, в p-арифметике можно найти период $1/p$, не выписывая явно десятичной дроби.

ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА

В. А. Фабрикант

Нагревание проводника при прохождении электрического тока — один из наиболее привычных эффектов. Однако более внимательный анализ механизма возникновения джоулева тепла показывает, что здесь далеко не все так просто.

В статье рассматриваются явления, связанные с эффектом Джоуля—Ленца. В плазме электрического разряда в газах могут существовать в одном и том же объеме две температуры, отличающиеся в сотни раз. Такая плазма представляет собой как бы смесь двух газов с резко различающимися температурами. Эти температуры не могут стать равными из-за того, что электрическое поле нагревает только один из газов и между газами имеется надежная «шуба».

Инженер, рассчитывающий линию дальней электропередачи, и инженер, создающий мощную электропечь, имеют диаметрально противоположные точки зрения на джоулево тепло, выделяющееся в проводнике при прохождении тока. Для первого это — вредный эффект, заставляющий повышать напряжение и мечтать о сверхпроводящем кабеле; для второго — полезный эффект, позволяющий решать трудные технологические проблемы. Однако оба они согласятся, что эффект этот весьма важный.

Закон, по которому проводник нагревается электрическим током, был впервые экспериментально установлен в 1841—42 гг. английским физиком Джеймсом Джоулем и, независимо от него, несколько позднее (в 1842—43 гг.), но с гораздо большей точностью — петербургским академиком Эмилием Христиановичем Ленцем.

Начав исследовать выделение тепла при прохождении тока, Джоуль увлекся более общей проблемой — преобразованием энергии. В частности, он занялся преобразованием работы в тепло, используя в качестве промежуточного звена электрический ток *).

Для первых опытов Джоуль сделал довольно простой прибор, состоявший из стеклянной банки, наполненной водой, в которую опускалась стеклянная трубка с навитым на нее проводником и с термометром для измерения температуры воды. Источником электродвижущей силы служила батарея гальванических элементов. Измерялось повышение температуры воды за определенный промежуток времени при прохождении тока.

Установив основные закономерности нагревания проводника при прохождении тока, Джоуль пришел к мысли, что этот эффект возникает за счет теплопроводности. Согласно его гипотезе, тепло, выделяющееся в гальванической батарее, вследствие теплопроводности распространяется вдоль проводника и нагревает его.

---

*) Попутно Джоуль пришел к выводу, что электрические моторы не смогут конкурировать с паровыми машинами из-за дороговизны получения электрического тока! Вывод для середины XIX века вполне обоснованный.

Для проверки этой гипотезы Джоуль построил гораздо более сложный прибор. Вместо гальванической батареи в этом приборе для получения тока использовался индукционный генератор со статором в виде мощного электромагнита, между полюсами которого вращался в сосуде с водой ротор. Измерялся нагрев воды при замкнутой и разомкнутой обмотке ротора. Разность этих нагревов, очевидно, вызывалась тепловым действием тока, индуцированного в обмотке ротора. Джоуль убедился в ошибочности своей гипотезы о роли теплопроводности и пришел к правильному истолкованию явления нагревания проводников *).

Установление точного закона выделения тепла при прохождении электрического тока было далеко не простой экспериментальной задачей для физика первой половины XIX века. Э. Х. Ленц подошел к решению этой задачи с большой тщательностью как первоклассный экспериментатор. Он начал с создания новых измерительных приборов и их калибровки, что потребовало много труда.

В частности, для измерения тока он построил так называемый мультипликатор — прибор, в котором измеряемый ток проходит сквозь неподвижную обмотку, состоящую из нескольких витков провода. В центре обмотки подвешена магнитная стрелка. Поворот стрелки связан с величиной проходящего сквозь обмотку тока. До мультипликаторов применяли приборы с обмоткой, состоявшей из одного витка. Ясно, что чувствительность мультипликаторов была гораздо выше.

Неприятным свойством мультипликаторов было то, что магнитная стрелка около положения равновесия испытывала очень медленно затухающие колебания. Каждый отсчет занимал много времени. Ленц применил успокоитель, прикрепленный к стрелке и опущенный в вязкое масло. Это чрезвычайно ускорило измерения.

На рисунке 1 приведен чертеж, взятый из статьи Ленца и изображающий прибор для определения количества тепла, выделяемого проводником. KL — термометр; вместо воды в сосуд GH был налит спирт. Электропроводность спирта ниже электропроводности воды, это устраняет опасность возникновения токов между витками проволоки.

Для компенсации потерь тепла во внешнюю среду Ленц применил остроумный прием. Прибор заливался спиртом, имевшим температуру более низкую, чем температура окружающего воздуха. После включения тока нагрев производился до температуры, на столько же градусов превышавшей температуру воздуха, на сколько вначале она была ниже. Тогда до выравнивания температур прибора и воздуха тепло идет от воздуха к прибору, а

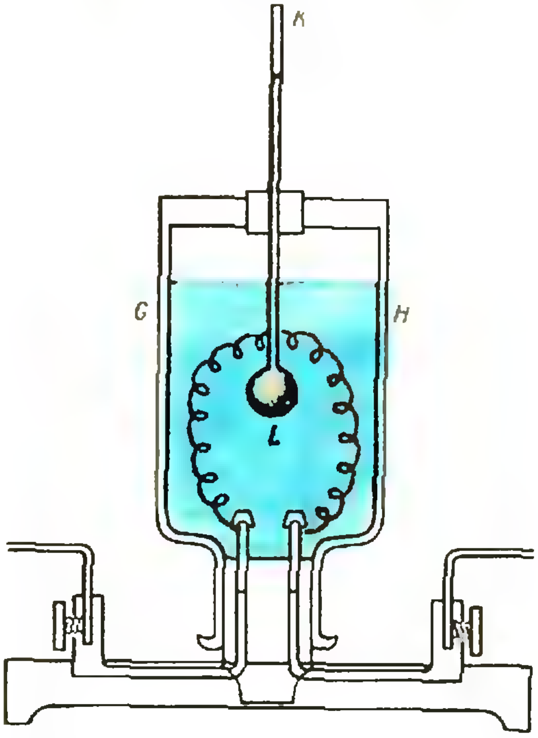


Рис. 1.

---

*) Нагревание воды при вращении ротора с разомкнутой обмоткой явно натолкнуло Джоуля на идею его знаменитого прибора для определения механического эквивалента теплоты. Опыты Джоуля с этим прибором сыграли большую роль в обосновании закона сохранения энергии. Поэтому единица энергии вполне заслуженно носит его имя.

после выравнивания — от прибора к воздуху. Ленц показал, что таким образом потери тепла компенсируются довольно точно.

Проведя большую серию измерений, Ленц пришел к заключению, что установленные в предварительных опытах Джоуля закономерности выполняются с высокой степенью точности. Он так сформулировал эти закономерности:

«1) Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально сопротивлению проволоки.

2) Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально квадрату тока, служащего для нагревания» *).

Обе закономерности могут быть объединены в одной формуле Джоуля — Ленца

$$W = RI^2,$$

где W — мощность выделяемого тепла в ваттах, R — сопротивление в омах, I — сила тока в амперах.

Для единицы объема проводника

$$w = \rho j^2,$$

где ρ — удельное сопротивление, j — плотность тока. Используя закон Ома $j = \frac{E}{\rho}$, можно получить:

$$w = jE$$

или

$$w = \sigma E^2.$$

Здесь E — напряженность электрического поля, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ — проводимость.

Вывод формулы Джоуля—Ленца

При выводе закона Ома из электронных представлений нас интересует только судьба электронов **). Достаточно учесть, что электроны приобретают дополнительную скорость в электрическом поле, вызывающем ток, и теряют эту скорость при столкновении с атомами. Что происходит с атомами при этих столкновениях — для вывода закона Ома не существенно.

Эффект Джоуля — Ленца, наоборот, состоит в увеличении скорости теплового движения атомов за счет энергии, передаваемой электронами атомам при столкновениях.

Обычно элементарный расчет тепла Джоуля — Ленца проводится следующим образом.

Дополнительная скорость электрона равна произведению ускорения в электрическом поле $\frac{eE}{m}$ на время пролета длины свободного пробега τ (интервал времени между двумя столкновениями):

$$u = \frac{e}{m} E\tau. \qquad (1)$$

Дополнительная кинетическая энергия, соответственно, равна:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^2\tau^2}{m} E^2. \qquad (2)$$

Каждый электрон испытывает в секунду $1/\tau$ столкновений с атомами и при каждом столкновении передает атому энергию, равную $\frac{mu^2}{2}$. В единице объема N электронов. Следовательно, в единице объема происходит N/τ столкновений в секунду и атомам передается энергия, равная:

$$W = \frac{N}{\tau}\frac{mu^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^2N\tau}{m} E^2. \qquad (3)$$

Это и есть мощность, выделяемая в виде тепла.

Так как (см. статью «Закон Ома»)

$$\frac{1}{2}\frac{e^2N\tau}{m} = \sigma \qquad (4)$$

(σ — проводимость), то

$$W = \sigma E^2 = jE. \qquad (5)$$

Мы получили формулу Джоуля — Ленца, исходя из электронных представлений. Все как будто в порядке. Приглядимся, однако, внимательнее к приведенному расчету.

---

*) Доложено в Российской Академии Наук 11 августа 1843 г.

**) См. статью Я. А. Смородинского «Закон Ома» («Квант» № 4, 1971).

Роль законов сохранения

Во внешне гладком выводе формулы Джоуля — Ленца есть не очень понятное место. Почему электрон при столкновении отдает атому энергию, как раз равную дополнительной энергии, приобретенной в электрическом поле?

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

При решении *любой физической* задачи надо помнить о строгих законах сохранения. Согласно законам сохранения импульса и энергии электрон при столкновении должен отдавать атому вполне определенную долю своей кинетической энергии. Неясно, почему эта доля *полной кинетической* энергии электрона должна быть как раз равна дополнительной энергии электрона, приобретенной в электрическом поле.

Будем считать, что электроны и атомы сталкиваются как упругие шарики.

Подсчитаем, какую долю полной кинетической энергии должен отдать электрон атому при центральном ударе (рис. 2, *а*).

Пусть до столкновения электрон движется со скоростью v, а атом покоится. Обозначим скорость электрона после столкновения v_1, скорость атома V_1. Тогда по закону сохранения импульса:

$$mv = mv_1 + M V_1, \qquad (6)$$

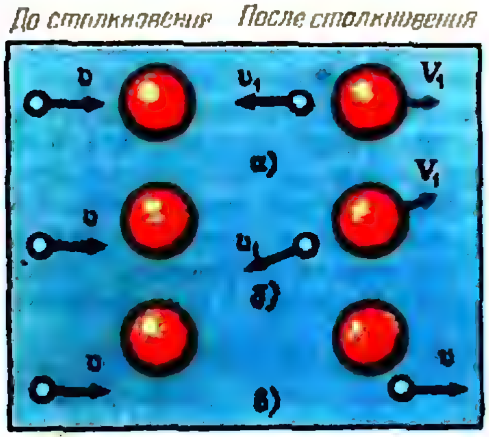


Рис. 2.

а по закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2}. \qquad (7)$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\frac{MV_1^2}{2} = \frac{4Mm}{(m+M)^2} \cdot \frac{mv^2}{2}. \qquad (8)$$

Так как $M \gg m$, в знаменателе можно пренебречь m по сравнению с M. Тогда:

$$\frac{MV_1^2}{2} = \frac{4m}{M} \frac{mv^2}{2}. \qquad (9)$$

При нецентральных ударах (рис. 2, *б*) атом будет получать меньшую долю начальной энергии электрона. При пролете электрона по касательной к «поверхности» атома (рис. 2, *в*) передаваемая энергия будет равна нулю. Средняя доля энергии определится как полусумма максимальной доли и нуля, иными словами, она равна половине максимальной доли. Итак, средняя энергия, получаемая атомами от электронов при каждом столкновении, равна

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{2m}{M} \frac{mv^2}{2}. \qquad (10)$$

Так как m/M порядка 10^{-3} — 10^{-5}, электрон может *отдать атому* только ничтожную часть своей полной кинетической энергии. Это и создает своеобразную «шубу», препятствующую обмену энергией между электронами и атомами.

Из обратимости упругих столкновений во времени следует, что атом, налетающий на электрон, сможет отдать электрону только такую же малую часть своей начальной кинетической энергии. Нетрудно в этом убедиться прямым расчетом.

Другой способ вычисления джоулева тепла

В проводнике движутся не только свободные электроны, но и атомы, совершающие хаотические колебания около своих положений равновесия.

Поэтому надо рассматривать столкновения между двумя коллективами движущихся частиц.

При одних столкновениях электроны отдают часть своей энергии атомам, при других, наоборот, атомы отдают часть своей энергии электронам. Благодаря действию электрического поля электроны все время «подогреваются», получая дополнительную энергию. В результате электронный газ имеет несколько более высокую температуру T_e, чем температура атомов T_a. Поэтому, в среднем, электроны отдают атомам бо́льшую энергию, чем получают от них.

Как уже было показано, при каждом столкновении электрон может отдать $2\frac{m}{M}$ своей кинетической энергии. То же относится и к атомам.

Воспользуемся обычным выражением средней энергии частицы через температуру. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT_e,$$

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{3}{2}kT_a.$$

Поток энергии, определяющий нагрев атомов, равен разности двух потоков энергии — потока, текущего от электронов к атомам, и потока от атомов к электронам. Ясно, что этот результирующий поток энергии должен быть пропорционален числу столкновений электронов с атомами $\frac{N}{\tau}$, коэффициенту передачи энергии $2\frac{m}{M}$ и разности средних энергий электронов и атомов $\frac{3}{2}k(T_e - T_a)$.

Строгий расчет показывает, что никакого численного коэффициента в окончательное выражение для результирующего потока энергии вводить не надо, то есть

$$W = \frac{N}{\tau}\frac{2m}{M}\frac{3}{2}k(T_e - T_a). \qquad (11)$$

В формуле (11) W — это джоулево тепло, но здесь оно выражается иначе, чем в формуле (3).

В отсутствие внешнего электрического поля наступает равновесие между электронами и атомами. Электронная температура равна температуре атомов.

При тепловом равновесии ($T_e = T_a$) результирующий поток энергии должен быть равен нулю. Действие электрического поля на электроны вызывает нарушение этого теплового равновесия.

Приравняем правые части равенств (3) и (11) (мы можем это сделать, так как они характеризуют одну и ту же величину):

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{m}N\tau E^2 = \frac{N}{\tau}\frac{2m}{M}\frac{3}{2}k\,(T_e - T_a). \qquad (12)$$

Отсюда для разности электронной и атомной температур получим:

$$T_e - T_a = \frac{1}{6}\frac{M}{m}\frac{e^2\tau^2}{km}E^2. \qquad (13)$$

Таким образом, в результате действия электрического поля устанавливается определенная разность температур. Мы видим, что эта разность пропорциональна отношению масс M/m.

Это обстоятельство компенсирует обратное отношение масс в формуле (10) и делает законным первоначальный вывод формулы Джоуля — Ленца, в котором M/m не фигурирует вообще.

Следует отметить, что в первые моменты времени после наложения электрического поля на проводник равенство (12) не выполняется. Энергия, полученная электронами от электрического поля, некоторое время превышает энергию, отдаваемую электронами атомам. В результате происходит чрезвычайно быстрый рост T_e, что в свою очередь приводит к росту энергии, отдаваемой электронами атомам. Так будет продолжаться, очевидно, до тех пор, пока энергия, получаемая электронами от поля, и энергия, отдаваемая ими атомам, не сравняются. После этого электроны при столкновениях с атомами будут отдавать им энергию, равную дополнительной кинетической энергии, приобретенной в электрическом поле за время τ между двумя столкновениями. Электронная температура стабилизируется на уровне, определяемом равенством (13).

Примерно то же происходит при отоплении дома зимой. Все тепло, поступающее от отопления в комнаты, уходит сквозь стены дома на улицу. Иначе температура в комнате все время бы повышалась. Отопление необходимо для поддержания перепада температур между комнатами и улицей. Чем меньше теплопроводность стен, тем медленнее тепло уходит из комнаты, тем легче поддерживается перепад температур.

Электронный газ и атомы в проводнике представляют как бы два тела с разными температурами, но перемешанные в одном объеме, причем одно из «тел» подогревается электрическим полем. Тепло, как всегда, переходит от более горячего тела (электронов) к более холодному (атомам).

Теплопроводность «стенки», разделяющей эти два «тела», определяется коэффициентом, стоящим перед разностью температур в формуле (11).

Оценим разность электронной и атомной температур для металлического проводника.

Время τ порядка 10^{-14} *с*, E — порядка 10^{-3} *в/см*. Для разности температур $T_e - T_a$ получаем величину порядка 10^{-9} °C!

Такая ничтожная разность температур достаточна для обеспечения нужного результирующего потока энергии, несмотря на плохой коэффициент передачи энергии при каждом столкновении между электронами и атомами. Объясняется это колоссальным числом столкновений между электронами и атомами: $\frac{N}{\tau}$ порядка 10^{36} c^{-1}.

В полупроводниках и особенно в газовой плазме дело может обстоять совсем иначе.

Неравновесная плазма

Строго говоря, классические электронные представления, использованные нами, не применимы к металлическим проводникам. Поведение электронов в таких проводниках носит сугубо квантовый характер*). Классические представления справедливы в условиях прохождения электрического тока сквозь газы (газовая плазма), но в газах могут иметь место совсем другие соотношения, и законы Ома и Джоуля — Ленца зачастую теряют силу.

При прохождении электрического тока сквозь разреженный газ благодаря большой длине свободного пробега электронов время пробега τ может быть на несколько порядков больше, чем в металлах. Так же на несколько порядков возрастает и E.

В результате электронная температура может достигать десятков тысяч градусов при температуре самого газа (атомов) в несколько сот градусов (например, в люминесцентных или рекламных лампах). Получается смесь двух газов с температурами, отличающимися в десятки и даже сотни раз. Ни о каком тепловом равновесии в таких условиях и речи быть не может. Такая плазма называется неравновесной.

Ясно, что малость отношения m/M благоприятствует установлению большой разности температур электронов и атомов неравновесной плазмы.

В условиях электрического газового разряда низкого давления нарушается закон Ома, так как τ и N зависят от E. Из-за большой энергии электронов могут происходить не только упругие, но и неупругие столкновения электронов с атомами. При неупругих столкновениях кинетическая энергия электронов преобразуется во внутреннюю энергию атомов.

---

*) См. статью Д. А. Франк-Каменецкого «Электрическое сопротивление — квантовое явление» («Квант» № 9, 1970).

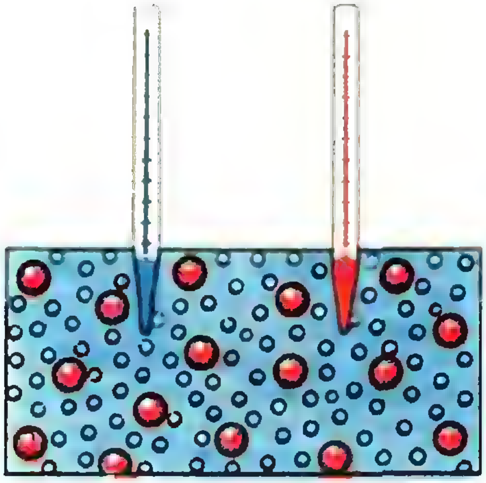


Рис. 3.

Атомы возбуждаются и начинают испускать свет, этим и объясняется свечение газоразрядных ламп. Может происходить даже выбивание внутриатомных электронов (ионизация атомов), что приводит к росту N. При каждом неупругом столкновении электрон теряет гораздо бо́льшую энергию, чем при упругом. Джоулево тепло теперь составляет только часть от полной мощности тока. Иногда джоулево тепло становится даже пренебрежимо малым по сравнению с jE.

Ясно, что в таких случаях формула Джоуля — Ленца неприменима и равенство (12) не выполняется.

Наконец, в некоторых сильноточных разрядных устройствах, создаваемых с целью получения управляемых термоядерных реакций, имеет место обратное соотношение температур (рис. 3). Температура атомов (точнее ионов) оказывается выше электронной температуры. Результирующий поток энергии течет в обратном направлении — от атомов к электронам. В этих условиях электроны не нагревают, а охлаждают атомы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ

Ниже приводятся задачи, предложенные на математическом бое, проводившемся во время слета учащихся физико-математических школ в Ленинграде 7 января 1972 г. (О его правилах рассказано в статье на стр. 71.)

1. Найти целые x и y такие, что $(((x^x-y)^x-y)^x-y)^x+x+y=1972+1000x$.

2. Доказать, что из любых 1972 целых чисел можно выбрать ровно 972, сумма которых делится на 972.

3. Можно ли точки трехмерного пространства раскрасить в три цвета так, чтобы не было ни одного отрезка, целиком закрашенного в один цвет?

4. Доказать, что произведение всех чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2_n и не делится на 2^{n+1}.

5. Построить окружность, которая делит каждую из трех данных равных окружностей на две равные части.

6. Среди треугольников данной площади найти треугольник с наименьшей суммой отношений медиан к соответствующим биссектрисам.

7. Билет имеет шестизначный номер. Билет называется счастливым по-ленинградски, если сумма первых трех его цифр равна сумме трех последних цифр. Билет называется счастливый по-выборгски, если его номер делится на 11. Каких билетов больше: счастливых по-ленинградски или по-выборгски?

8. Можно ли замостить плоскость четырехугольниками, равными данному?

9. Можно ли в сечении куба плоскостью получить правильный пятиугольник?

ИНТЕГРАЛ В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Ю. И. Ионин

В статье «Интеграл» (см. «Квант» № 6, 1972) мы рассказали вам об одном из важнейших разделов математики — интегральном исчислении.

Теперь мы рассмотрим некоторые применения интеграла в геометрии и физике.

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

1. Площадь подграфика

Пусть на отрезке $[A, B]$ числовой оси задана числовая функция f, все значения которой неотрицательны. Подграфиком этой функции называют фигуру, ограниченную графиком функции f, осью абсцисс и прямыми $x = A$ и $x = B$ (рис. 1).

Многие геометрические фигуры являются подграфиками или могут быть из них составлены. Так, прямоугольник высоты h, выделяемый неравенствами $0 \leqslant y \leqslant h$, $A \leqslant x \leqslant B$, можно рассматривать как подграфик постоянной функции $x \to h$ (рис. 2). Круг подграфиком не является, но полукруг можно рассматривать как подграфик функции $x = \sqrt{R^2 - x^2}$, определенной на отрезке $[-R, R]$ (рис. 3).

Итак, пусть на отрезке $[A, B]$ определена неотрицательная числовая функция f. Для каждого отрезка $[a, b]$, содержащегося в отрезке $[A, B]$, обозначим через $S\,[a, b]$ площадь части подграфика функции f, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$. Полученная функция промежутка аддитивна (рис. 4): $S[a, b] + S\,[b, c] = S\,[a, c]$.

Часть подграфика, заключенная между прямыми $x = a$ и $x = b$, содержит прямоугольник, основанием которого служит отрезок $[a, b]$, а высота равна $\min\limits_{[a,b]} f$ и содержится в прямоугольнике с тем же основанием и высотой $\max\limits_{[a,b]} f$. Следовательно, число $S\,[a, b]$ заключено между площадями этих прямоугольников (рис. 5)

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leqslant S\,[a, b] \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)\max_{[a,b]} f.$$

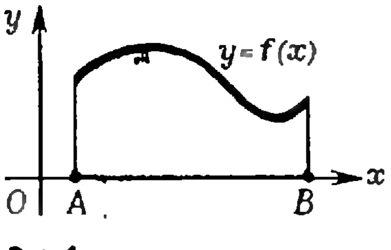


Рис. 1.

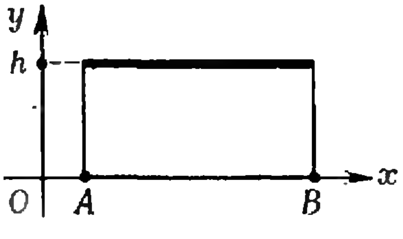


Рис. 2.

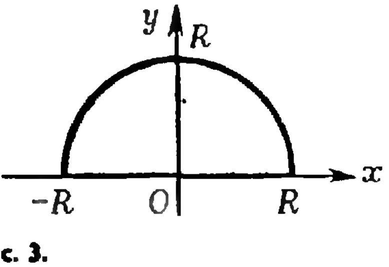


Рис. 3.

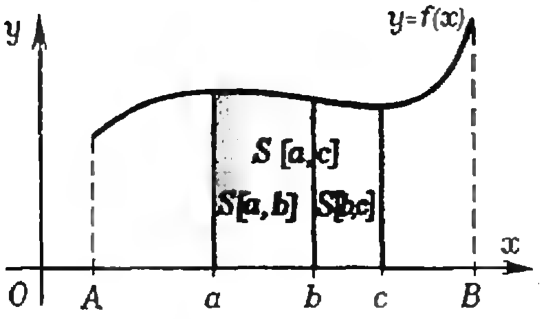


Рис. 4.

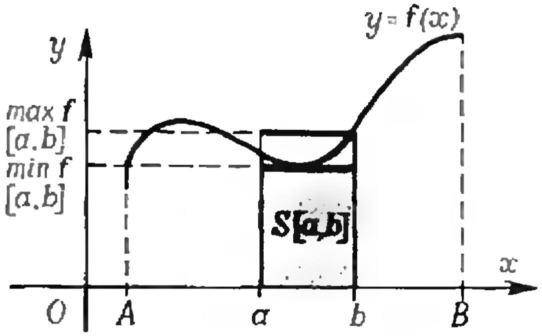
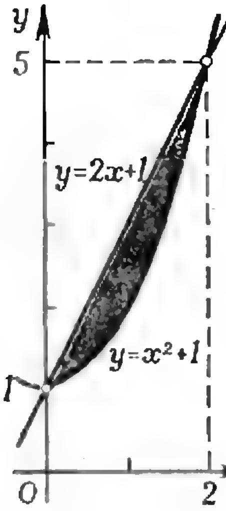


Рис. 5.



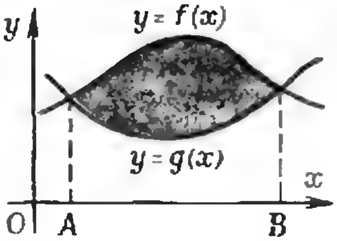


Рис. 6. Рис. 7.

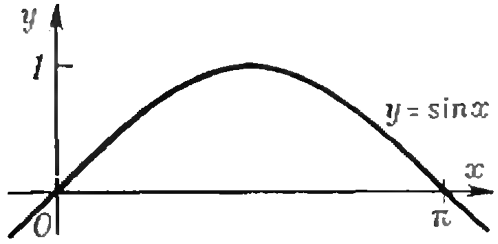


Рис. 8.

Непосредственно из определения интеграла следует, что функция промежутка S — интеграл от числовой функции f. В частности, площадь всего подграфика функции f равна $\int\limits_A^B f(x)\,dx$. Выведенная формула площади подграфика показывает геометрический смысл интеграла: интеграл от неотрицательной функции — это площадь подграфика этой функции. На этом основано использование интеграла для вычисления площадей.

В качестве примера найдем площадь фигуры, отсекаемой от параболы $y=x^2+1$ прямой $y=2x+1$.

Парабола и прямая пересекаются в точках, координаты которых (0, 1) и (2, 5) находятся как решения системы уравнений $y=x^2+1, \quad y=2x+1$.

Искомая площадь (рис. 6) равна разности площадей подграфиков функций $x\to 2x+1$ и $x\to x^2+1$, определенных на отрезке [0, 2]:

$$S=\int\limits_0^2 (2x+1)\,dx-\int\limits_0^2 (x^2+1)dx=$$

$$=\int\limits_0^2 (2x-x^2)\,dx=2\int\limits_0^2 x\,dx-\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{4}{3}.$$

Вообще, если графики функций f и g пересекаются в точках с абсциссами A и B, а для всех чисел x отрезка $[A, B]$ выполнено неравенство $f(x)\geqslant g(x)$, то площадь фигуры, заключенной между этими подграфиками (рис. 7), равна $\int\limits_A^B (f(x)-g(x))dx$.

Упражнение 1. *а) Вычислить площадь подграфика функций $x\to x^2$ на отрезке* [0,1].

б) Вычислить площадь, ограниченную аркой синусоиды и осью абсцисс (рис. 8).

2. Объем тела вращения

Предположим, что подграфик неотрицательной функции f, определенной на отрезке $[A, B]$, вращается вокруг оси абсцисс. Каждому отрезку $[a, b]$, содержащемуся в отрезке $[A, B]$, поставим в соответствие число $V[a, b]$ — объем части образовавшегося тела вращения, заключенной между плоскостями $x=a$ и $x=b$ (рис. 9).

Мы получим аддитивную функцию промежутка V.

Из рисунка 9 видно, что выделенная часть тела вращения содержит прямой круговой цилиндр, высотой которого служит отрезок $[a, b]$, а радиус основания равен $\min\limits_{[a,b]} f$ и содержится в цилиндре с той же высотой и радиусом основания $\max\limits_{[a,b]} f$. Так как объемы этих цилиндров равны соответственно $\pi(b-a)(\min\limits_{[a,b]} f)^2$ и $\pi(b-a)(\max\limits_{[a,b]} f)^2$, то

$$\pi(b-a)(\min_{[a,b]} f)^2 \leqslant V[a, b] \leqslant$$

$$\leqslant \pi(b-a)(\max_{[a,b]} f)^2.$$

Но $\pi(\min\limits_{[a,b]} f)^2$ — это наименьшее значение функции πf^2 на отрезке $[a, b]$, а $\pi(\max\limits_{[a,b]} f)^2$ — ее наибольшее значение на этом отрезке. Следовательно, V — интеграл от этой функции, так что объем всего тела вращения равен

$$\int_A^B \pi f^2(x)\,dx.$$

В качестве примера вычислим объем прямого кругового конуса и объем шара.

Прямой круговой конус высоты H можно рассматривать как результат вращения подграфика линейной функции $x \to kx$, определенной на отрезке $[0, H]$ (рис. 10). Если радиус основания конуса равен R, то

$$kH = R,$$

откуда

$$k = \frac{R}{H}.$$

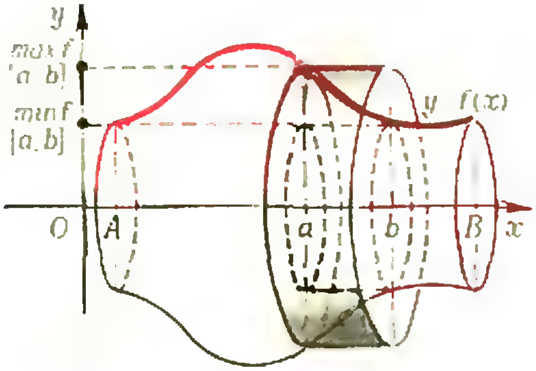


Рис. 9.

Объем конуса равен

$$\int_0^H \pi k^2x^2dx = \pi k^2\int_0^H x^2dx = \frac{1}{3}\pi k^2H^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{H^2}H^3 = \frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Шар радиуса R получается вращением полукруга того же радиуса вокруг основания.

В подходящим образом выбранной системе координат этот полукруг является подграфиком функции

$$x \to \sqrt{R^2-x^2}$$

определенной на отрезке $[-R, R]$. Объем шара, следовательно, равен

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)dx = \pi R^2\int_{-R}^{R} dx - \pi\int_{-R}^{R} x^2dx =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Упражнение 2. *Найти площадь подграфика функции*

$$x \to \cos^2 x$$

на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Упражнение 3. *Найти объем тела, полученного вращением арки синусоиды вокруг оси абсцисс.*

Упражнение 4. *Найти объем тела, полученного вращением графика функции* $x \to x^2$ *на отрезке* $[0, 1]$ *вокруг оси ординат.*

Упражнение 5. *Вычислить*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

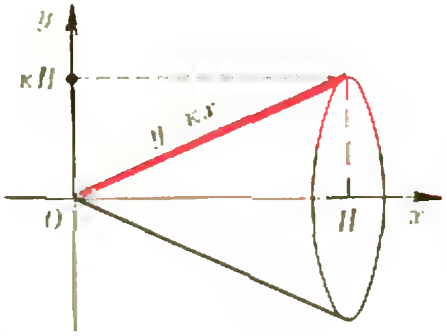


Рис. 10.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

Приведем в заключение несколько примеров применения интеграла в физических задачах.

Задача 1. *Найдите силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массы m и однородным стержнем длины l и массы M. Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно c.*

Вам, конечно, известен закон всемирного тяготения, утверждающий, что сила гравитационного взаимодействия двух точечных масс прямо пропорциональна произведению этих масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Однако в нашем случае одна из взаимодействующих масс точечной не является.

Если стержень разбить на несколько частей, то сумма сил взаимодействия этих частей с массой m равна силе взаимодействия всего стержня с этой массой. Обычно физики дальше пишут: «разобьем стержень на очень маленькие отрезки длины Δx. На отрезок, находящийся на расстоянии x от точки m, действует сила $\frac{mM\Delta x}{lx^2}$, сумма всех этих сил равна. . .». Покажем, как можно оформлять подобные рассуждения строго, пользуясь нашим определением интеграла.

Прямую, на которой лежат стержень и точка, превратим в числовую ось, выбрав в качестве начальной точку, в которой помещена масса m, и направив ось так, чтобы стержень оказался на положительной полуоси. Стержень займет тогда отрезок $[c, c+l]$ этой оси. Каждому отрезку $[a, b]$, содержащемуся в отрезке $[c, c+l]$, поставим в соответствие число $F[a, b]$ — величину силы взаимодействия между этим отрезком стержня и массой m. Ясно, что F — аддитивная функция промежутка. Ясно, что эта сила увеличится, если всю массу отрезка $[a, b]$, равную $\frac{M}{l}(b-a)$, сконцентрировать в ближайшем к массе m конце a этого отрезка, и уменьшится, если эту массу сконцентрировать в точке b. Но в обоих случаях мы придем к взаимодействию двух точечных масс. В первом случае сила взаимодействия окажется равной $\frac{\gamma mM}{la^2}(b-a)$, во втором случае — $\frac{\gamma mM}{lb^2}(b-a)$. Следовательно,

$$\frac{\gamma mM}{lb^2}(b-a)\leqslant F[a, b]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\gamma mM}{la^2}(b-a).$$

Но

$$\frac{\gamma mM}{lb^2}=\min_{[a,\,b]}\frac{\gamma mM}{lx^2},\quad \text{а}\ \frac{\gamma mM}{la^2}=$$
$$=\max_{[a,\,b]}\frac{\gamma mM}{lx^2}.$$

Следовательно, аддитивная функция промежутка F — это интеграл от функции $x\to\frac{\gamma mM}{lx^2}$. Вся сила гравитационного притяжения между стержнем и точкой равна

$$\int\limits_c^{c+l}\frac{\gamma mM}{lx^2}dx=\frac{\gamma mM}{l}\int\limits_c^{c+l}x^{-2}dx=$$
$$=\frac{\gamma mM}{l}(-1)\left[(c+l)^{-1}-c^{-1}\right]=$$
$$=\frac{\gamma mM}{l}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+l}\right)=\frac{\gamma mM}{c(c+l)}.$$

Вы знаете, что силу гравитационного притяжения планет также вычисляют по закону всемирного тяготения. Доказательство справедливости для сферических масс той же формулы, что и для точечных, послужило для Ньютона одним из толчков к созданию интегрального исчисления.

Задача 2. *Найти кинетическую энергию однородного диска радиуса R и массы M, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости.*

Кинетическая энергия движущейся точки зависит от массы и скорости. Хотя диск вращается с постоянной угловой скоростью, более удаленные от центра точки имеют большую линейную скорость и, следовательно, большую кинетическую энергию.

Каждому отрезку $[a, b]$, содержащемуся в отрезке $[0, R]$, поставим в соответствие число $K[a, b]$ — кинетическую энергию кольца с центром в центре диска, внутренним радиусом a и внешним радиусом b. K — аддитивная функция промежутка.

Кинетическая энергия такого кольца увеличится, если всю его массу сконцентрировать на внешнем ободе кольца, и уменьшится, если эту массу сконцентрировать на внутреннем ободе кольца. Так как точки каждого из этих ободов имеют одну и ту же линейную скорость, то кинетическая энергия в первом случае станет равной $\frac{1}{2}\frac{M}{R^2}(b^2-a^2)(\omega b)^2$, а во втором случае — $\frac{1}{2}\frac{M}{R^2}(b^2-a^2)(\omega a)^2$. Таким образом,

$$\frac{M\omega^2a^2}{2R^2}(b^2-a^2)\leqslant K[a,b]\leqslant \frac{M\omega^2b^2}{2R^2}(b^2-a^2).$$

Разложим b^2-a^2 на множители и заменим множитель $b+a$ в левой части неравенства на меньшее число $2a$, а в правой части — на большее число $2b$. Получим:

$$\frac{M\omega^2a^3}{R^2}(b-a)\leqslant K[a,b]\leqslant \frac{M\omega^2b^3}{R^2}(b-a).$$

Но $\frac{M\omega^2a^3}{R^2}=\min\limits_{[a,b]}\frac{M\omega^2x^3}{R^2}$, а $\frac{M\omega^2b^3}{R^2}=\max\limits_{[a,b]}\frac{M\omega^2x^3}{R^2}$.

Следовательно, кинетическая энергия диска равна

$$\int_0^R \frac{M\omega^2x^3}{R^2}dx=\frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R x^3dx=\frac{M\omega^2}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{1}{4}M\omega^2R^2.$$

Задача 3. *Найдите путь, пройденный в равноускоренном движении за время t от начала движения, если ускорение равно a, а начальная скорость равна v_0.*

Ответ этой задачи вам хорошо известен. Получим его средствами интегрального исчисления.

Так как скорость в случае движения играет ту же роль, что плотность в случае массы, то путь — это интеграл от скорости. Скорость в момент времени x равна v_0+ax. Следовательно, искомый путь равен

$$\int_0^t (v_0+ax)\,dx=v_0\int_0^t dx+a\int_0^t x\,dx=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Упражнение 6. *Стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов, с постоянной угловой скоростью ω. Длина стержня равна l, масса M. Стержень однородный. Найти кинетическую энергию.*

Упражнение 7. *Найти количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током*

$$I(t)=I_0\sin(\omega t+\varphi)$$

в течение одного периода в проводнике с сопротивлением R.

В. ВАЙСКОПФ

ВЫСОТА ГОР И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Этот отрывок взят из лекции известного физика-теоретика В. Вайскопфа, которая была прочитана им в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) в 1969 г. Лекция называлась «Современная физика в элементарном изложении». Полностью она была опубликована в журнале «Успехи физических наук», том 103, вып. 1, 1971.

Перевод выполнен В. И. Рыдником.

Мы знаем, что на Земле есть и высокие, и низкие горы. Но почему самая высокая гора (Джомолунгма) имеет высоту лишь около 10 *км*? Почему, скажем, не в пятьдесят раз больше?

В процессах горообразования и выветривания горы разрушаются и многие из них «теряют» высоту. Что, однако, означает существование верхнего «предела» их высоты порядка 10 *км* $= 10^6$ *см*? Оказывается, эта величина определяется самóй физической сущностью твердого вещества скальных пород. Она также связана с такими величинами, как ускорение силы тяжести и число протонов и нейтронов в веществе Земли, составляющее примерно $3 \cdot 10^{51}$.

Итак, почему горы не могут расти до сколь угодно большой высоты? Если гора окажется слишком высокой, она начнет «погружаться» в земную кору под ней, поскольку вещества, составляющие земную кору — гранит, кварц, двуокись кремния — не настолько прочны, чтобы «удержать» гору, высота которой больше определенного предела. Вес такой горы окажется столь большим, что нарушит направленность связей между атомами скальных пород, в результате чего породы расплавятся, станут жидкими и получат возможность растекаться в стороны. Это и вызывает опускание горы. По мере погружения горы в земную кору освобождается часть потенциальной энергии горы в земном поле тяготения. Этот излишек переходит в энергию «ожижения» породы.

Пусть первоначально высота горы была h, и гора опустилась на высоту x (см. рисунок 1; сплошной и штриховой линиями показаны начальное и конечное положения горы). Массу горы примем равной M.

Как уже было сказано, уменьшение потенциальной энергии горы в земном поле тяготения равно энергии «ожижения» массы горы, заключенной в объеме высотой x, т. е.

$$Mgx = E_{\text{ож}} \cdot nxS,$$

или (1)

$$Mg = E_{\text{ож}} \cdot nS,$$

где n — число молекул в единице объема горы, S — площадь основания горы, $E_{\text{ож}}$ — энергия «ожижения» (т. е. скрытая теплота плавления) в расчете на одну молекулу, g — ускорение силы тяжести.

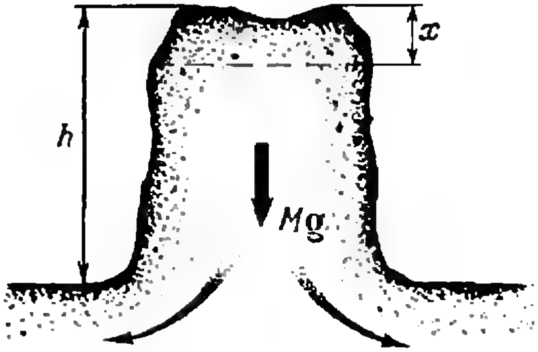


Рис. 1.

Правая часть соотношения (1) имеет определенную величину. Следовательно, для начала «ожижения», т. е. для погружения горы, масса ее M должна быть не меньше некоторого минимального значения. Если M меньше этого критического значения, то гора будет стоять устойчиво. Поэтому массы таких устойчивых гор удовлетворяют условию

$$M \leqslant E_{\text{ож}} \frac{nS}{g}. \qquad (2)$$

Массу горы можно найти по формуле

$$M = hSnm = hSnAm_p,$$

где m — масса молекулы горной породы, A — атомный вес ее, m_p — масса протона, равная $1{,}6 \cdot 10^{-24}$ *г*. Подставляя это выражение для M в соотношение (2), найдем

$$hSnAm_p \leqslant E_{\text{ож}} \frac{nS}{g},$$

то есть

$$h \leqslant \frac{E_{\text{ож}}}{Am_p g}. \qquad (3)$$

Величина h должна быть меньше критического значения $\frac{E_{\text{ож}}}{Am_p g}$; тогда гора не будет «уходить в землю».

Чему равна энергия ожижения $E_{\text{ож}}$? Атомы в жидкости связаны достаточно сильно. Когда твердое тело плавится, связи между атомами в нем почти не рвутся, исчезает лишь их направленность *). Это и обусловливает текучесть жидкости. Твердые тела не могут течь, потому что связи жестко фиксируют атомы относительно их соседей. Энергия, необходимая для нарушения направленности связей, т. е. для плавления, пропорциональна энергии связи атомов B:

$$E_{\text{ож}} = \beta B. \qquad (4)$$

Расчеты для двуокиси кремния SiO_2, составляющего основную часть вещества коры, дают для β значение $\approx 0{,}1$. Величина энергии связи, которая равна энергии, необходимой для вырывания атома из решетки при температуре $T = 0\,°K$, для твердых тел заключена в пределах 2,7—11 *эв***). Молекулярный вес SiO_2 $\mu = 60$. Подставляя в формулу (4) численные значения (вместо A следует взять μ), получим оценку для h: $h \leqslant 40$ *км*.

Эта оценка показывает, что горы могут «устоять» на скальном грунте только в том случае, когда они имеют высоту меньше 40 *км*. В действительности этот верхний предел еще меньше, поскольку горы «теплые», и для их ожижения нужна энергия меньшая, чем рассчитанная по формуле (4). Критическая высота гор на других планетах может оказаться иной из-за того, что там ускорение силы тяжести g будет другим. К тому же горы могут быть образованы из других материалов.

Поскольку величина g не является фундаментальной физической постоянной, исключим ее из расчета. Это можно сделать следующим образом. Сила притяжения между частицей массы m на поверхности Земли и Землей массы $M_з$ равна

---

*) Это рассуждение применимо, строго говоря, только к твердым телам с ковалентными (гомеополярными) связями. Силы связи, действующие в металлах, не обладают направленностью. Поэтому металлы «текучи», пластичны уже в обычных условиях, тогда как ковалентные кристаллы (к ним частично относятся и горные породы) приобретают текучесть лишь при больших внешних давлениях. (Примечание переводчика.)

**) Разумеется, при больших температурах для этого требуется меньшая энергия.

$$mg=\gamma\frac{M_з m}{R_з^2},$$

где $R_з$ — радиус Земли, γ — гравитационная постоянная. Отсюда

$$g=\gamma\frac{M_з}{R_з^2}. \qquad (5)$$

Если не требовать высокой точности, то величины $M_з$ и $R_з$ можно выразить через число нуклонов $N_з$ в составе Земли. Кора Земли состоит в основном из SiO_2 ($A = 60$), а ядро — в основном из железа ($A = 57$). Эти два вещества имеют примерно один и тот же атомный вес, а следовательно, и размеры атомов. Если радиусы атомов считать равными a, то объем Земли будет равен

$$\frac{4}{3}\pi R_з^3=\frac{4}{3}\pi\frac{N_з}{A}a^3,$$

откуда

$$R_з=a\left(\frac{N_з}{A}\right)^{1/3}.$$

Подставляя это в выражение (5), получим

$$g=\gamma\frac{M_з}{R_з^2}=\gamma\frac{N_з m_p}{R_з^2}=\gamma N_з\left(\frac{A}{N_з}\right)^{2/3}\frac{m_p}{a^2}. \qquad (6)$$

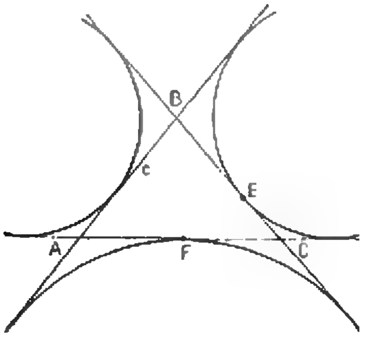
Радиус атомов твердых веществ в хорошем приближении равен $a = fa_0$, где a_0 — радиус атома водорода, а значение коэффициента f заключено в пределах 1—4. Таким образом,

$$g=\gamma N_з\left(\frac{A}{N_з}\right)^{2/3}\frac{m_p}{(fa_0)^2}.$$

В этом выражении неуниверсальной постоянной является число нуклонов $N_з$ в составе Земли *).

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Доказать, что сумма расстояний (на рисунке $CE+CF$) от любой вершины (C) треугольника до точек касания вневписанных окружностей со сторонами,



проходящими через эту вершину, равна третьей стороне ($AB=c$).

С. Н. Федин

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ

В Глазго (Шотландия) и в Москве бытовал анекдот, который англичане приписывали знаменитому английскому физику лорду Кельвину, а москвичи — профессору Московского университета Николаю Алексеевичу Умову.

На экзамене Умов, якобы, спросил студента: «Что такое электричество?». После долгого раздумья студент ответил: «Простите, профессор, забыл. Сегодня утром помнил, а сейчас забыл».

«Вот, господа,— обратился Умов к другим студентам, — величайшая трагедия физики XIX столетия: единственный человек на свете знал, что такое электричество, да и тот забыл!»

---

*) При оценке высоты гор на других планетах величины A и $N_з$ нельзя считать универсальными константами, так как состав элементов в породах, образующих эти планеты, может быть иным, чем у Земли. (Примечание переводчика.)

КОНЕЧНЫЕ ПАРКЕТЫ

В. И. Каплун, В. Г. Лейбович, Е. Л. Папернов

> *Семь раз отмерь — один раз отрежь*

Представьте себе, что вы захотели замостить пол в ванной кафельными плитками или сделать обычный паркет в комнате. При этом ставится единственное условие: чтобы плитки (паркетины) были одинаковыми. Первое, что приходит в голову, — попробовать сделать паркет из правильных многоугольников. О таких паркетах можно прочитать в статье А. Н. Колмогорова «Паркеты из правильных многоугольников» *), где рассматривались бесконечные паркеты, то есть плитками покрывалась вся плоскость. Переход к ограниченным областям (таким, как комната) приводит к существенным осложнениям.

Задача 1. *Докажите, что правильными треугольниками или шестиугольниками нельзя замостить прямоугольную комнату.*

Задача 2. *Придумайте пример прямоугольной комнаты, которую нельзя замостить никакими квадратными плитками.*

Как видите, без «неправильных» фигур нам не обойтись. Они часто делают задачу совсем простой. Например, нетрудно подобрать такую прямоугольную плитку, чтобы с ее помощью можно было покрыть данную прямоугольную комнату (рис. 1). В дальнейшем мы узнаем, как замостить паркетом самые разнообразные области. При этом мы будем пользоваться только многоугольными паркетинами и всегда требовать, чтобы в каждом конкретном случае все они были одинаковыми. Заметим, что если мы покрыли паркетом некоторую фигуру, мы одновременно разбили ее отрезками прямых на многоугольники — плитки. Поэтому в дальнейшем мы будет часто употреблять слова *«разбиение»* и *«разрезание»*. Слову «разрезание» мы для удобства изложения придадим специальный смысл: это разбиение, в котором границы плиток образуют отрезки, разрезающие нашу область «насквозь». На рисунке 2 приведен пример разбиения, не являющегося разрезанием, а на рисунке 3 — пример разрезания.

Посмотрим теперь, как можно разрезать прямоугольник на равные треугольники. Это и будет одной из основных наших задач. Например, проведя диагональ, мы разрежем прямоугольник на два равных треугольника.

Задача 3. *Докажите, что произвольный прямоугольник можно разрезать на любое четное число равных треугольников.*

Возникает естественный вопрос: можно ли разрезать прямоугольник на нечетное число равных треугольников? Ответ на этот вопрос будет следовать из более общих результатов, для получения которых мы

---

*) См. «Квант», № 3, 1970.

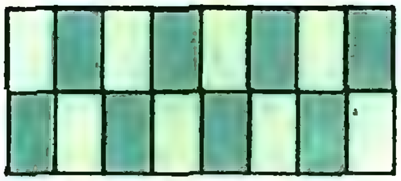


Рис. 1.

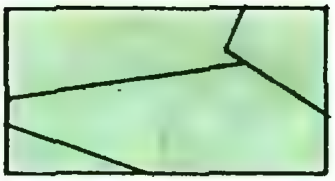


Рис. 2.

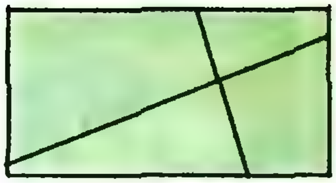


Рис. 3.

докажем одну теорему о разрезании бесконечных областей на равные треугольники.

Для ее формулировки нам понадобится одно важное понятие.

Пусть имеется некоторое семейство прямых на плоскости. Будем говорить, что это семейство обладает **системой направляющих**, если на плоскости можно выделить конечное число таких прямых, что каждая прямая из данной совокупности параллельна одной из них. Так например, направления, выделенные красным цветом на рисунке 4, являются направляющими для приведенного на этом рисунке множества прямых.

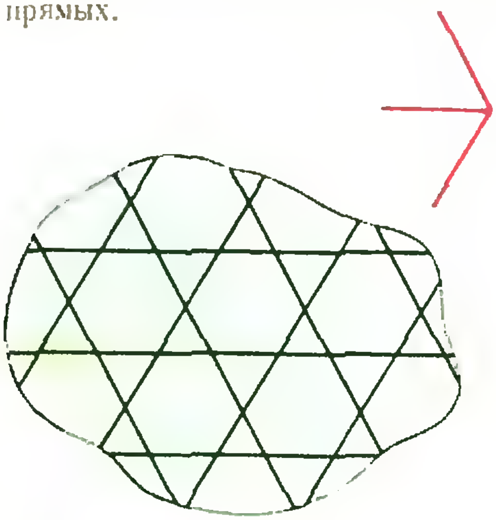


Рис. 4.

Основная **Теорема.** *Пусть плоскость разрезана на равные треугольники; тогда возможны следующие случаи:*

1) если треугольники разрезания — прямоугольные с углами 30°, то система направляющих семейства прямых разрезания состоит либо из 3, либо из 4, либо из 6 элементов;

2) если треугольники разрезания — прямоугольные, но не являются треугольниками из случая 1, то система направляющих может состоять только из 3 или 4 элементов;

3) наконец, если треугольники разрезания не являются прямоугольными, то направляющих всего 3.

Отметим одно свойство разрезаний, которое будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях.

Пусть имеется произвольный треугольник, входящий в разрезание ($\triangle ABC$ на рис. 5). Тогда каждая из сторон этого треугольника определяет одну из прямых разрезания. К каждой из этих прямых по другую сторону приложены еще треугольники. Рассмотрим, например, сторону AC треугольника ABC на рисунке 5 и соответствующую ей прямую l (на которой она лежит). Рассмотрим тот из приложенных к AC треугольников, который имеет с AC общие точки, отличные от точек A и C (такой треугольник, очевидно, существует). Тогда этот треугольник — обозначим его $A'B'C'$ — может занимать по отношению к $\triangle ABC$ только два положения (рис. 5, а и б). Доказательство этого факта (основанное на равенстве треугольников ABC и $A'B'C'$ и на том, что наше разбиение есть

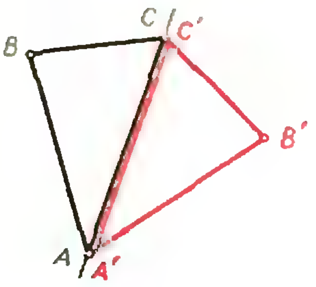


Рис. 5, а.

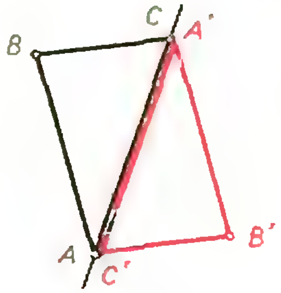


Рис. 5, б.

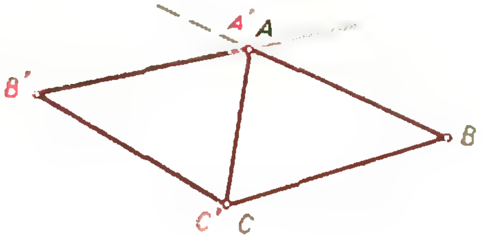


Рис. 6.

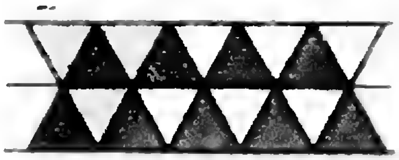


Рис. 7.

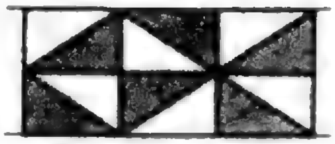


Рис. 8.

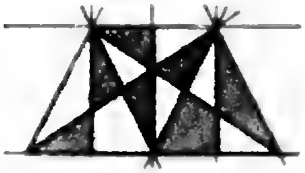


Рис. 9.

разрезание) мы оставляем читателям в виде легкого упражнения, разминки перед более трудными задачами, которые встретятся уже очень скоро.

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим сначала случай 3. Пусть ABC — произвольный треугольник нашего паркета (рис. 6). Пусть, для определенности, угол A у него наибольший (в случае равнобедренного или равностороннего треугольника можно, как будет ясно из дальнейшего, брать произвольный из соответствующих углов). Покажем, что второй треугольник, приложенный к стороне, содержащей вершину A, может образовывать только конфигурацию, представленную на рисунке 5, *б* (в дальнейшем будем писать просто «приложен по типу «б»»). Действительно, так как угол A наибольший, то $\angle A \geqslant 60°$. Следовательно, если треугольник $A'B'C'$ приложен по типу «а», то к другой стороне, содержащей вершину A, приложить треугольник уже нельзя. Доказательство этого несложного факта оставляем читателю. Отдельно рассмотрите случай $\angle A = 60°$.

Отсюда следует (это тоже задача), что паркет может выглядеть только как на рисунке 7 (часть треугольников на нем закрашена для наглядности).

Переходим к случаю 2. Очевидно, что здесь можно составить такой же паркет, как в случае 3. Но в этом случае можно построить еще ровно один (задача!) паркет (см. рис. 8).

В случае 1, конечно, могут быть реализованы оба паркета случая 2 и еще один паркет (опять задача!), который приведен на рисунке 9.

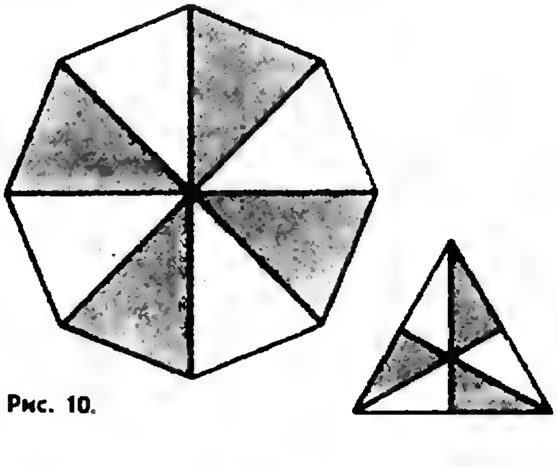


Рис. 10.

Теперь, имея в руках теорему о бесконечных паркетах, можно рассмотреть и разрезания конечных фигур.

Теорема 1. *Если квадрат разрезан на равные треугольники, то треугольники эти — непременно прямоугольные и их четное число.*

Действительно, конечный паркет является либо частью одного из бесконечных, изображенных на рисунках 7—9, либо имеет вид правильного n-угольника (это задача) (рис. 10).

В квадратной комнате, очевидно, треугольный паркет может иметь вид, только как на рисунках 7—9. Но стороны квадрата сами обязаны быть прямыми разрезания, так что случай 3 отпадает. Следовательно, разбиение состоит из прямоугольных треугольников. (Заметим, что когда треугольники на рис. 8 — равнобедренные, мы получаем паркет типа рис. 10.). Если паркет имеет вид, как на рисунке 7, то среди образующих направлений только два взаимно перпендикулярны. Они-то и должны совпадать с направлениями сторон квадрата. В этом случае каждый из катетов треугольника разрезания должен целое число раз укладываться на стороне квадрата. Пусть сторона квадрата равна a, а катеты укладываются в ней соответственно n и m раз. Тогда площадь квадрата a^2, а площадь треугольника разбиения $\frac{a^2}{2mn}$. Отсюда число треугольников разбиения равно $2mn$. Это, очевидно, четное число. Разбор паркета типа рис. 8 мы предоставляем читателю. (Не забудьте рассмотреть случай равнобедренного треугольника — ведь тогда имеются две пары взаимно перпендикулярных направляющих.)

Отметим, наконец, что паркет типа рис. 9 на квадрате реализовать нельзя. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть длина гипотенузы треугольника разрезания равна a, тогда катеты соответственно равны $\frac{a}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Но если какой-нибудь прямоугольник выложен паркетом типа рис. 9, то (докажите!) одна из его сторон равна $k\frac{\sqrt{3}}{2}a$, а другая $n\frac{3}{2}a$, где n и k — целые числа. Но тогда

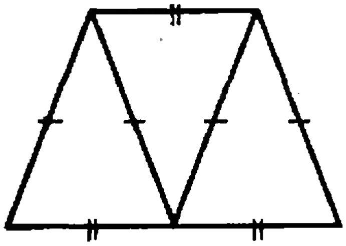


Рис. 11.

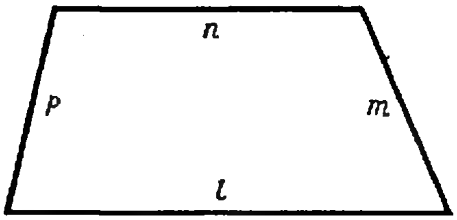


Рис. 12.

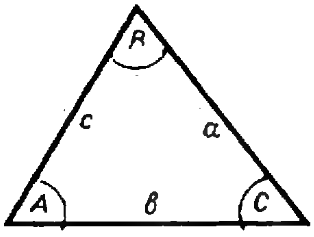


Рис. 13.

стороны прямоугольника оказываются несоизмеримыми, а поэтому квадрат получиться не может.

Теорема 2. *Если прямоугольник разрезан на равные треугольники, то все эти треугольники — прямоугольные и их четное число.*

Доказательство этой теоремы не отличается существенно от доказательства теоремы 1. Попробуйте доказать ее самостоятельно.

Убедившись, что паркеты для прямоугольника не столь уж разнообразны, естественно задать вопрос: а как обстоит дело с другими фигурами, например, с треугольником? Ясно, что равнобедренный треугольник можно разрезать на два равных треугольника. А другие?

Задача 4. *Докажите, что если треугольник разрезается на два равных треугольника, то он равнобедренный.*

Задача 5. *Дан произвольный треугольник; на сколько равных треугольников можно его разрезать?*

Все-таки и треугольник, как видно, можно разрезать. Можно подумать, что так обстоит дело для всех многоугольников.

Однако это не так. Простейшим примером неразрезаемой фугуры мы сейчас и займемся.

Рассмотрим вопрос о разрезании трапеций. На рисунке 11 приведен пример трапеции, которую можно разрезать на равные треугольники. Покажем, однако, что имеются трапеции, которые нельзя не только разрезать, но и разбить на равные треугольники. Существование таких трапеций основано на существовании несоизмеримых отрезков. Напомним, что отрезки a и b несоизмеримы, если отношение их длин — иррациональное число *). Назовем отрезки $a_1, \ldots, a_n$ *взаимно несоизмеримыми*, если никакой a_r не представим в виде $a_r = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$, где $k_1, \ldots k_n$ — рациональные числа $(k_r = 0)$.

Возьмем трапецию со сторонами l, m, n, p (рис. 12), где отрезки l, m, n, p взаимно несоизмеримы. Допустим, что ее можно разбить на равные треугольники. Рассмотрим сторону l. Наше разбиение разделит ее на части, каждая из которых — одна из сторон треугольника разбиения (рис. 13). Поэтому $l = k_1a + k_2b + k_3c$, где k_1, k_2, k_3 — целые неотрицательные числа. Аналогичные рассуждения для остальных сторон трапеции дают систему равенств

$$\left.\begin{aligned} l &= k_1a + k_2b + k_3c,\\ m &= k_4a + k_5b + k_6c,\\ n &= k_7a + k_8b + k_9c,\\ p &= k_{10}a + k_{11}b + k_{12}c \end{aligned}\right\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_{12}$ — целые неотрицательные числа. Мы допустили, что разбиение осуществимо. Значит, при данных $k_1, k_2, \ldots, k_{12}$ эти равенства можно рассматривать как систему уравнений относительно a, b и c.

Задача 6. *Покажите, что в общем случае из попарной несоизмеримости чисел $a_1, \ldots, a_n$ не следует их взаимная несоизмеримость.*

Задача 7. *Покажите, что совместное решение первых трех уравнений имеет вид*

$$\left.\begin{aligned} a &= r_1l+r_2m+r_3n,\\ b &= r_4l+r_5m+r_6n,\\ c &= r_7l+r_8m+r_9n \end{aligned}\right\}$$

где $r_1, \ldots, r_9$ — рациональные числа.

Подставив значения a, b и c в четвертое уравнение, получим $p =$

---

*) В дальнейшем отрезок и его длина обозначаются одинаково.

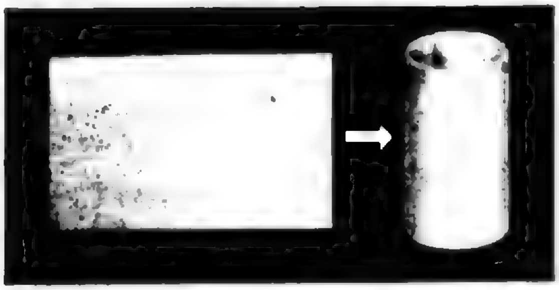


Рис. 14.

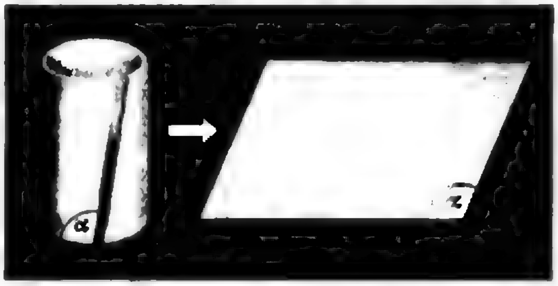


Рис. 15.

$= r_{10}l + r_{11}m + r_{12}n$, где r_{10}, r_{11}, r_{12} — рациональные числа. Но отрезки l, m, n взаимно несоизмеримы. Мы пришли к противоречию; следовательно, трапецию со взаимно несоизмеримыми сторонами разбить на равные треугольники невозможно.

Задача 8. *Покажите, что трапецию со сторонами $n = \sqrt{2}$, $m = \sqrt{3}$, $l = \sqrt{7}$, $p = \sqrt{5}$ нельзя разбить на равные треугольники.*

Возьмем теперь прямоугольник и склеим из него цилиндр (рис. 14). Если мы разрежем полученный цилиндр под каким-либо углом к основанию, то получим параллелограмм (рис. 15). Тем самым задача разрезания цилиндра прямыми эквивалентна разрезанию параллелограмма. Но тут ситуация во многом аналогична прямоугольнику: на четное число его разрезать легко, на нечетное число равных треугольников разрезать параллелограмм нельзя, а можно ли разбить его на нечетное число треугольников, неизвестно. Мы видели, что для трапеции возможность разбиения связана с разрешимостью определенной системы уравнений. Для параллелограмма мы имеем только три независимых уравнения, соответствующие трем величинам, определяющим параллелограмм, то есть двум сторонам и углу при основании. Поэтому задача усложняется. Важно отметить, что угол α при основании зависит целиком от нас, и мы можем выбирать его, как нам удобно.

Интересными свойствами по отношению к разрезаниям обладает другая фигура, которую можно склеить из прямоугольника — *лист Мёбиуса*. Лист Мёбиуса получается, если мы склеиваем прямоугольник $ABCD$ (рис. 16) следующим образом: приклеим AB к CD так, чтобы A склеилось с C, а B с D, то есть AB «переворачивается». Лист Мёбиуса обладает рядом замечательных свойств.

(См., например, «Энциклопедия элементарной математики», М., 1966, т. 5, стр. 500).

Если мы сделаем разрез под острым углом к краю поверхности, то получим равнобедренную трапецию (рис. 17). В ней угол α произволен и $a + b = AD + BC$. Нетрудно подобрать α так, чтобы $3b = 4a$, тогда, проведя шесть разрезов, мы получим 7 равных треугольников.

Задача 9. *Покажите, что лист Мёбиуса можно разрезать на любое число равных треугольников.*

Теперь, когда читатель ознакомился с некоторыми идеями и методами разрезания, мы предоставляем ему самостоятельно заняться теорией разрезаний и разбиений. Приведем ряд возможных задач из этой области.

Задача 10. *Докажите, что всякий прямоугольный треугольник разрезается на любое, начиная с двух, число треугольников, подобных первоначальному.*

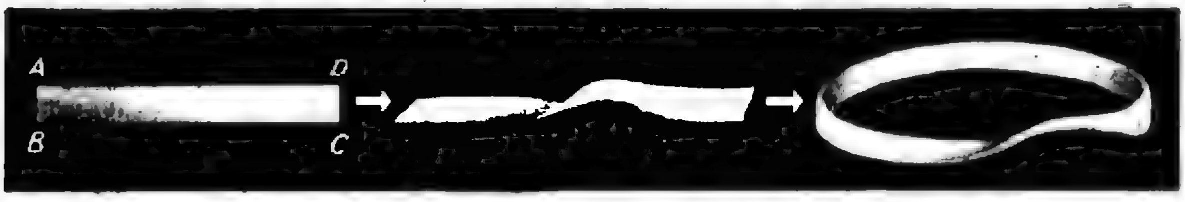


Рис. 16.

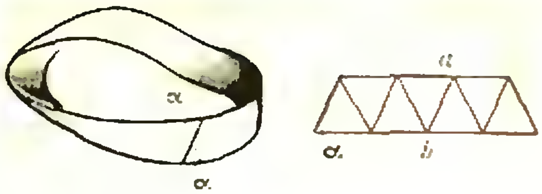


Рис. 17.

Задача 11. *Докажите, что всякий равнобедренный треугольник разрезается на любое, начиная с двух, число подобных треугольников.*

Задача 12. *Можно ли это утверждать для разрезания на треугольники, подобные первоначальному?*

Задача 13. *Покажите, что любой треугольник можно разрезать на четыре треугольника, подобных первоначальному.*

Задача 14. *Покажите, что любой треугольник разбивается на любое число треугольников, подобных первоначальному, начиная с шести.*

Задача 15. *Покажите, что если треугольник разбивается на три подобных треугольника, то это либо прямоугольный, либо равнобедренный треугольник.*

Задача 16. *Можно ли это утверждать для разрезания на пять подобных треугольников?*

Задача 17. *Докажите, что если какая-либо фигура разбивается на n подобных треугольников, то можно указать такое число m, что она будет разбиваться на любое число подобных треугольников, большее m.*

Задача 18. *Покажите, что существуют четырехугольники, которые не разбиваются на подобные треугольники.*

В заключение упомянем о некоторых нерешенных проблемах.

Проблема 1. *Можно ли разбить прямоугольник на нечетное число равных треугольников?*

Проблема 2. *Тот же вопрос для произвольного параллелограмма. (Мы предполагаем, что ответ на оба эти вопроса отрицателен.)*

Проблема 3. *Существует ли трапеция, которую нельзя разбить на подобные треугольники?*

(Интересно было бы получить какое-либо продвижение в решении этой проблемы путем улучшения метода, использованного нами для решения задачи о разрезании трапеции на равные треугольники)

Проблема 4. *Исследуйте разрезания других «многоугольных областей». Найдите необходимые и достаточные условия существования разрезания.*

Проблема 5. *Исследуйте разрезания многогранников на пирамиды.*

ЗАДАЧИ

1. Сумма первых n натуральных чисел равна трехзначному числу с равными цифрами. Найти n.

К. Тажиев

2. Дан треугольник ABC (см. рис. 1), $AB=BC$, $MNKL$ — квадрат. В каждую точку помещен вес: A — 1 кг, B — 1 кг, C — 1 кг, N — 2 кг, K — 2 кг, M — 1 кг, L — 1 кг.

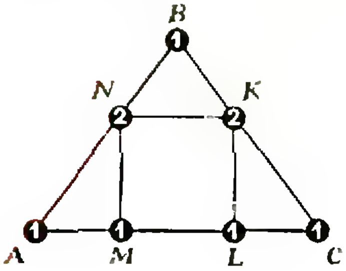


Рис. 1.

С помощью одной лишь линейки найти центр тяжести этой системы.

3. Дана окружность (см. рис. 2) и прямая l, пересекающая окружность в точках M и N; K — середина MN. Задан еще угол α. Построить окружность, касающуюся внутренним образом исходной окружности, проходящую через точку K, причем так, чтобы $\measuredangle KAB = \alpha$.

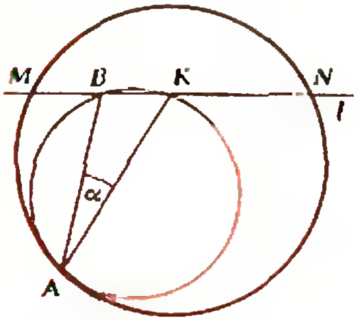


Рис. 2.

ЛАБОРАТОРИЯ КВАНТА

БУМЕРАНГ

Ф. Гесс

По-видимому, трудно найти человека, которого не удивила бы траектория, описываемая бумерангом. И, конечно, многим очень хотелось бы сделать бумеранг и разобраться, почему же он возвращается. Но бумеранг не только игрушка. Тяжелый бумеранг довольно опасен. Поэтому мы предлагаем нашим читателям сделать бумеранг из легких материалов, например, из картона.

Ниже мы публикуем сокращенный вариант статьи, опубликованной в ноябрьском номере журнала «Scientific American» за 1968 г. Статья переведена и подготовлена к печати В. И. Бахминым.

Представьте себе, что брошенный вами кусок дерева летит по круговой траектории, потом возвращается и спокойно ложится у ваших ног. Абсурд! Однако именно так ведет себя бумеранг, конечно, если вы его правильно изготовите и бросите как надо.

Впервые бумеранг был сделан туземными жителями Австралии. Читатель, вероятно, немного разочаруется, узнав, что большинство австралийских бумерангов не возвращаются. Бумеранги можно грубо разделить на два типа: военные и возвращающиеся. Бумеранги первого типа используются как оружие, для войны или охоты. Хороший военный бумеранг летит очень далеко, но не возвращается. Возвращающиеся же бумеранги используются почти исключительно для игры.

На самом деле разобраться во всех существующих типах бумерангов не так просто, как может показаться. В Австралии существует множество видов туземного оружия. У разных племен форма бумеранга различна (рис. 1).

По внешнему виду нелегко заключить, возвращается ли данный бумеранг. Как правило, возвращающийся бумеранг менее массивен, и угол между его плечами более острый. Обычно он бывает длиной от 25 до 75 сантиметров, шириной от трех до пяти сантиметров и толщиной от половины до полутора сантиметров. Угол между плечами бумеранга может меняться от 80 до 140 градусов. Вес достигает 300 граммов.

Характерная банановидная форма большинства бумерангов едва ли влияет на его способность возвращаться. Бумеранги в форме букв *X*, *V*, *S*, *T*, *H*, *Y* (видимо, возможны и другие формы) можно сделать так, что они будут возвращаться. Важно,

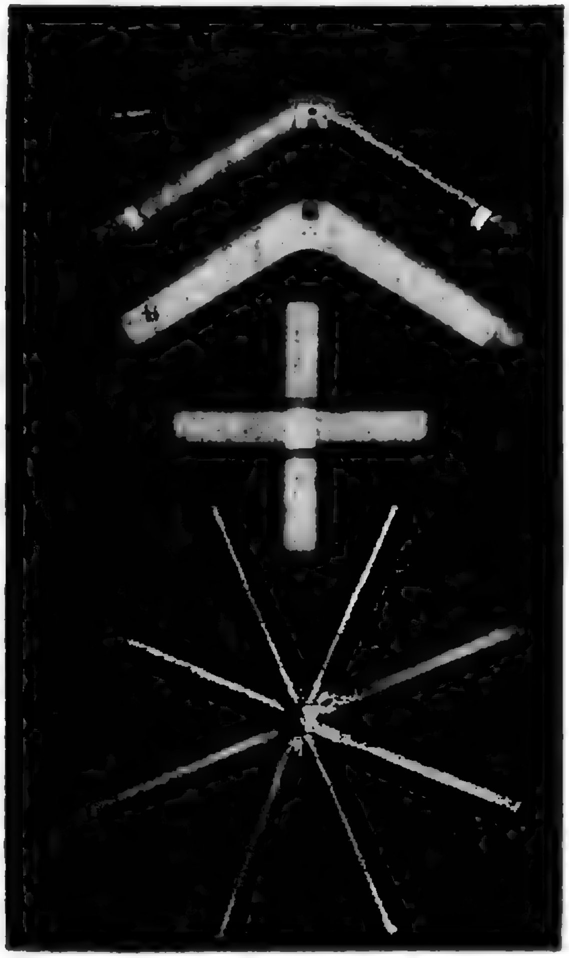


Рис. 1.

чтобы плечи бумеранга были с одной стороны более выпуклыми, чем с другой (рис. 2). Оба плеча бумеранга должны лежать более или менее в одной плоскости. Лучше всего сделать бумеранг из куска дерева скругленной формы, следуя структуре его волокон.

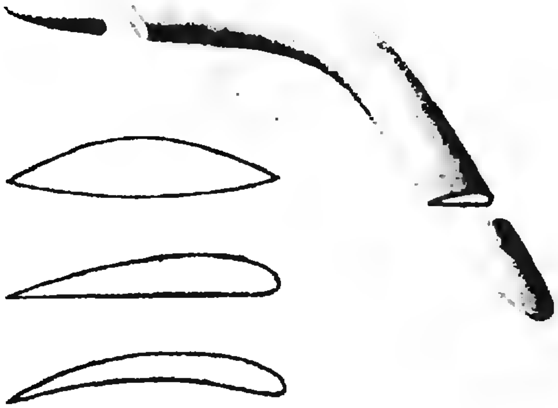


Рис. 2.

Но можно использовать и другой материал, например, фанеру, пластмассу или картон.

Как бросать возвращающийся бумеранг? Обычно его берут правой рукой за один из концов и держат вертикально, чуть повернув влево выпуклую сторону. При этом оба конца бумеранга направлены либо вперед (так бросают австралийцы), либо назад. Вы можете выбрать любой способ. Затем, размахнувшись правой рукой, бросают бумеранг вперед в горизонтальном направлении или чуть вверх. Для успеха необходимо, во-первых, чтобы плоскость бумеранга при броске была почти вертикальной или немного наклонена вправо, но только не горизонтальна. Во-вторых, бумеранг нужно заставить быстро вращаться. Этого можно добиться, если в момент броска резко задержать движение правой руки вперед. По инерции бумеранг сразу же начнет вращаться вокруг точки, за которую его держал метатель, и, следовательно, приобретет одновременно поступательную и вращательную скорости.

Сначала кажется, что бумеранг улетает, но вскоре его траектория отклоняется влево, а часто и вверх. Затем он делает широкую, более или менее округлую петлю и падает где-то у ног бросавшего, иногда, впрочем, описывая перед этим еще одну небольшую петлю. Вторая петля бывает искривлена в другую сторону, так что вся траектория в этом случае имеет форму восьмерки (рис. 3). Великолепное зрелище, когда бумеранг, описав петлю и теряя скорость, парит некоторое время над вашей головой и потом медленно спускается.

Каждый бумеранг характеризуется легкостью метания, видом траектории и способностью к парению. Кроме того, любой бумеранг может описывать разные орбиты в зависимости от способа бросания. Точность возвращения во многом зависит от мастерства метателя. Дальность полета может быть 40 метров, а может быть и вдвое меньше, высота полета — около 15 метров, хотя может быть и

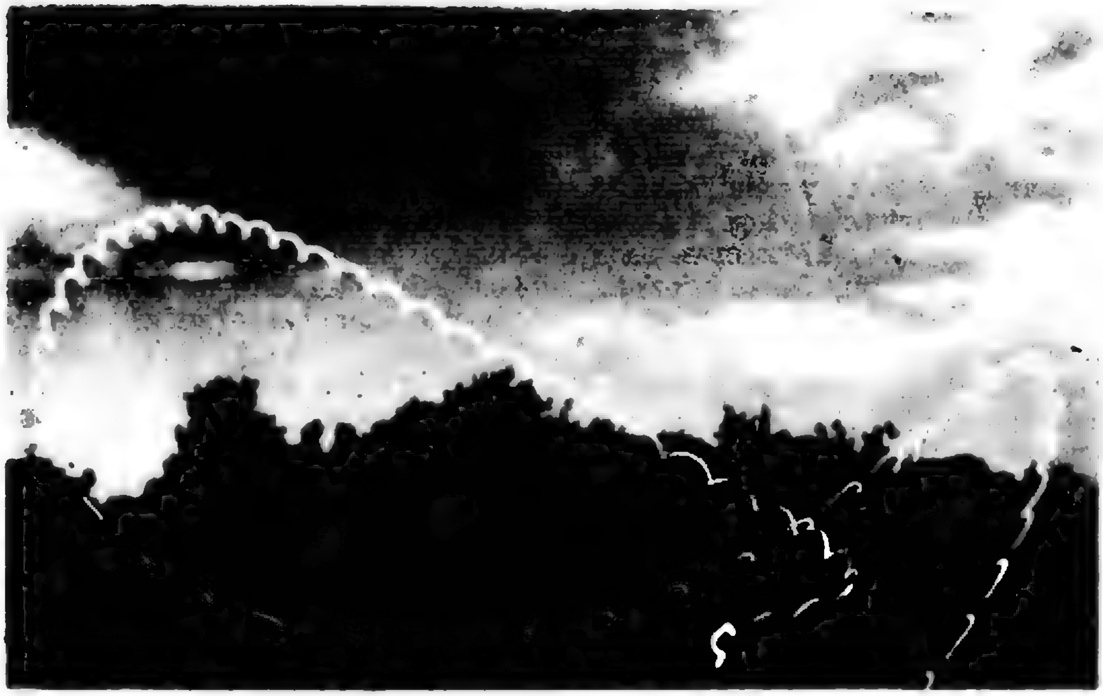


Рис. 3.

1,5 метра. Современные австралийские бумеранги пролетают расстояние более 100 метров, при этом они неплохо возвращаются. К сожалению, сам я не смог сделать бумеранг, летающий далее, чем на 50 метров.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что метатель не левша и бумеранг у него тоже «правый». Если смотреть на обычный «правый» бумеранг во время полета с выпуклой стороны, он будет вращаться против часовой стрелки. Поэтому можно говорить о ведущем и ведомом краях каждого плеча бумеранга. У бумеранга туземцев оба края каждого из плеч более или менее острые. Но у современного бумеранга ведущий край плеча тупой, как ведущий край крыла самолета. Иногда плечи бумеранга немного изгибают, так что концы его ведущих краев слегка приподнимаются.

Объяснить явления, происходящие с бумерангом, можно только рассматривая его взаимодействие с воздухом. Ведь в вакууме он не может описать ничего, кроме параболы. Однако эта задача очень сложна, поэтому попробуем взглянуть на проблему проще.

Если бросить бумеранг горизонтально, заставив вращаться в вертикальной плоскости, то каждое его плечо будет рассекать воздух. Из-за необычного профиля плеч возникает сила **F**, с которой воздух давит на плечи бумеранга в направлении от более плоской к более выпуклой части (рис. 4). Эта сила подобна подъемной силе, действующей на крыло самолета. Кроме того, со стороны воздуха на плечо бумеранга действует сила сопротивления **Q**. При броске правой рукой сила **Q** будет направлена справа налево. Но одной этой силы недостаточно для того, чтобы заставить бумеранг повернуть влево.

Скорость плеча бумеранга относительно воздуха не постоянна.

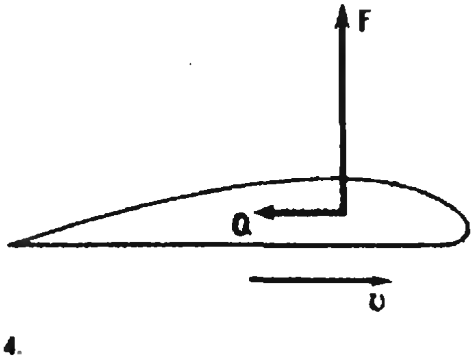


Рис. 4.

Когда плечо находится в верхней половине описываемой окружности, поступательная скорость бумеранга **v** складывается со скоростью вращения **u**, а когда в нижней, то скорости направлены противоположно, так что результирующая скорость уменьшается или даже совсем исчезает в некоторой точке (рис. 5). Таким образом, бумеранг испытывает действие не только силы, направленной справа налево, но и момента сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, поворачивающего его вокруг горизонтальной оси и стремящегося переместить верхнюю часть бумеранга влево. Но этого перемещения в действительности почти не происходит, так как бумеранг вращается настолько быстро, что ведет себя как гироскоп *).

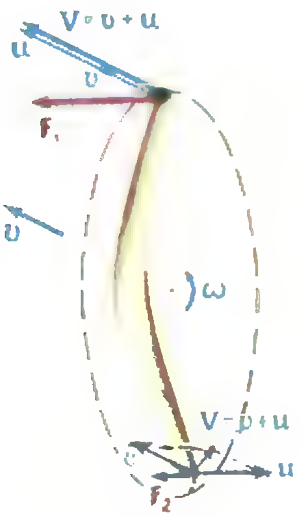


Рис. 5.

Но гироскоп (который представляет собой быстро вращающийся маховик) обладает следующим свойством: под действием силы, пытающейся его повернуть, гироскоп поворачивается не в направлении действия этой силы, а вокруг оси, перпендикулярной как оси вращения, так и оси, вдоль которой направлен поворачивающий его момент. В нашем случае бумеранг начнет поворачиваться влево. Это движение называется прецессией.

Итак, бумеранг поворачивается влево, так что плоскость его постепенно составляла бы все больший угол с направлением движения, если бы не быстро увеличивающиеся гироскопические силы, которые вновь направляют полет параллельно плоскости бумеранга. В результате траектория искривляется влево, и угол между плоскостью бумеранга и направлением его движения поддерживается очень небольшим.

Часто плоскость бумеранга, почти вертикальная в начале полета, в конце концов становится почти горизонтальной, бумеранг как бы «ложится». Давайте разберем этот вопрос подробнее.

Каждое плечо бумеранга будем рассматривать как крыло самолета. Такое крыло движется вперед и в то же время вращается вокруг центра тяжести бумеранга. Будем считать, что движение, перпендикулярное плоскости бумеранга, отсутствует. У крестообразного бумеранга центр тяжести лежит на пересечении лопастей, но у обычного бумеранга это не так. Там одно плечо находится перед центром масс, а другое — позади. Мы назовем эксцентриситетом плеча расстояние от него до центра масс. Каждую точку крыла омывает воздушный поток, меняющийся непрерывно по величине и направлению относительно этой части крыла. Бывает так, что воздушный поток направлен навстречу несущему краю крыла. Это легко понять, если представить медленно вращающийся бумеранг, несущийся с большой поступательной скоростью, и взглянуть на его плечо, направленное вниз. Что же за силы действуют в этом случае на лопасть бумеранга?

Давайте сначала рассмотрим случай попроще: лопасть движется по прямой с постоянной скоростью **V** относительно воздуха (рис. 6). Разложим аэродинамическую силу на две составляющие — подъемную силу **F**

---

*) См. «Квант» № 12, 1970, «Почему устойчив велосипед» и «Квант» № 10, 1971, «Механика вращающегося волчка».

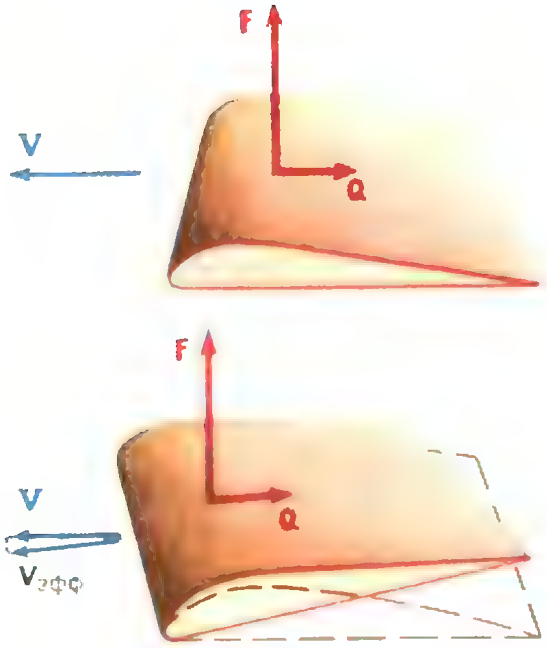


Рис. 6.

(перпендикулярную **V**) и силу сопротивления **Q** (направленную против **V**). Обе они, как оказывается, пропорциональны V^2. Если крыло не перпендикулярно направлению скорости, то у **V** появляется составляющая, параллельная крылу, которая никак не влияет на движение. Поэтому можно заменить скорость **V** ее составляющей, перпендикулярной крылу, или эффективной скоростью $\mathbf{V}_{\text{эфф}}$. В этом случае силы пропорциональны $(V_{\text{эфф}})^2$.

Каждая точка плеча бумеранга принимает участие в поступательном движении. Скорость же относительно воздуха меняется от точки к точке, так как бумеранг вращается. При скорости вращения ω и расстоянии от оси вращения r (ось проходит через центр масс бумеранга) скорость точки $u = \omega r$. Для каждой точки плеча можно, сложив **v** и **u**, найти результирующую скорость **V**. Ее составляющая, перпендикулярная плечу бумеранга, есть $\mathbf{V}_{\text{эфф}}$ (рис. 7). Конечно, величина $\mathbf{V}_{\text{эфф}}$ для каждой точки плеча будет непрерывно меняться во время вращения. Очевидно, что вклад каждой точки плеча бумеранга в подъемную силу и силу сопротивления в каждый момент вращения пропорционален $(V_{\text{эфф}})^2$.

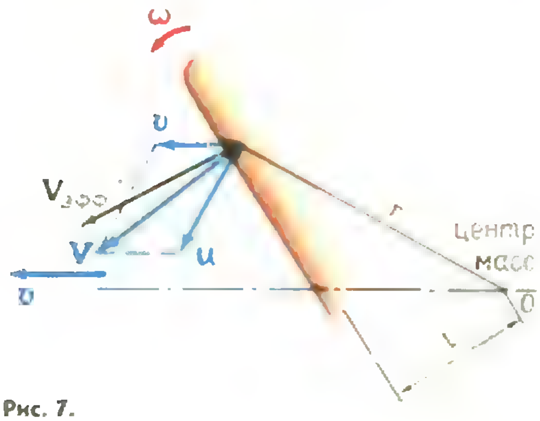


Рис. 7.

Итак, на каждое из плеч бумеранга действует средняя подъемная сила **F** (силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ на каждое плечо соответственно), средний момент этой силы $\mathbf{M}_1$ относительно горизонтальной оси, параллельной скорости бумеранга, который заставляет бумеранг отклоняться влево, и момент $\mathbf{M}_2$ — относительно оси, перпендикулярной скорости **V**, который заставляет бумеранг «ложиться» (рис. 8). Кроме этого, на бумеранг действует средняя сила сопротивления **Q**, которая уменьшает поступательную скорость бумеранга, и средний момент этой силы $\mathbf{M}_Q$, замедляющий скорость вращения ω. Оказывается, ни одна из этих величин, кроме $\mathbf{M}_2$, не зависит от эксцентриситета, а $\mathbf{M}_2$

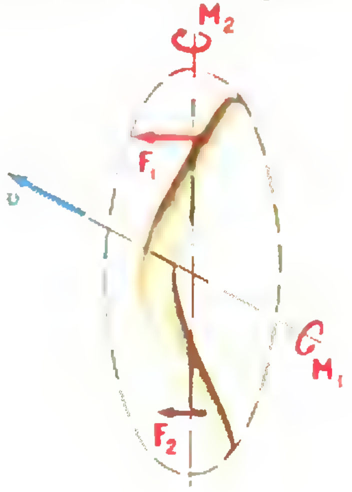


Рис. 8.

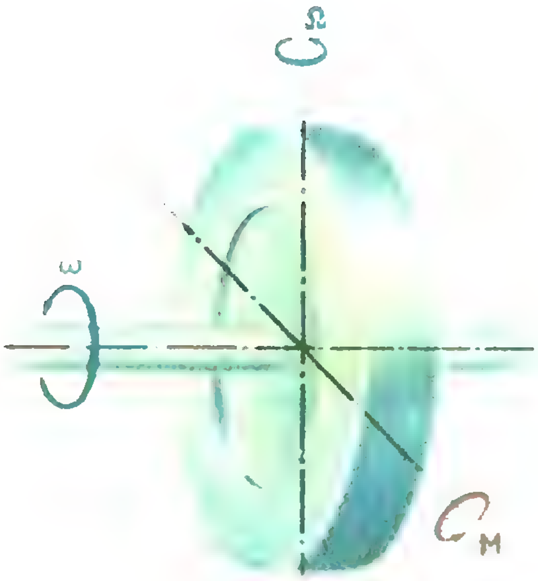


Рис. 9.

строго пропорциональна величине эксцентриситета.

Силы и моменты, действующие на бумеранг в целом, получаются сложением величин для каждого плеча. Вклады в M_2 от разных плеч бумеранга могут частично или полностью уничтожить друг друга.

Теперь мы переходим к важному вопросу: как будет двигаться бумеранг под влиянием всех этих сил и моментов (и силы тяжести, конечно)?

Как уже упоминалось раньше, средний момент M_1 вызывает гироскопическую прецессию бумеранга. Давайте посмотрим на гироскоп повнимательнее. Если гироскоп вращается вокруг своей оси со скоростью ω и на него действует момент M, направленный вдоль оси, перпендикулярной оси вращения, то гироскоп начинает прецессировать, причем ось прецессии перпендикулярна как оси вращения, так и оси момента M (рис. 9). Угловая скорость прецессии обозначается Ω. Между ω, Ω, M и моментом инерции гироскопа I *) существует очень простая связь, а именно:

$$\Omega = M/I\omega.$$

Для бумеранга момент M пропорционален ωV, так что скорость прецессии Ω должна быть пропорциональна

$$\frac{\omega V}{I\omega} = \frac{V}{I}.$$

Следовательно, скорость прецессии не зависит от скорости вращения бумеранга ω.

Можно вывести еще более странное заключение. Скорость прецессии пропорциональна V/I; коэффициент пропорциональности зависит от формы бумеранга. Следовательно, можно написать

$$\Omega = CV,$$

где C — характерный параметр бумеранга. Теперь пусть скорость бумеранга вдвое больше.

Следовательно, положение его плоскости будет тоже изменяться в два раза быстрее. Это показывает, кроме всего прочего, что бумеранг полетит по той же кривой.

Таким образом, диаметр орбиты бумеранга, грубо говоря, не зависит ни от скорости вращения бумеранга, ни от его поступательной скорости. Это означает, что длина пути бумеранга — величина более или менее постоянная. Параметры орбиты бумеранга пропорциональны его моменту инерции; они становятся меньше, если профиль плеча бумеранга вызывает большую подъемную силу. Поэтому, если вы хотите, чтобы буме-

Рис. 10.

---

*) См. «Квант» № 1, 1971, «Вращательное движение тел».

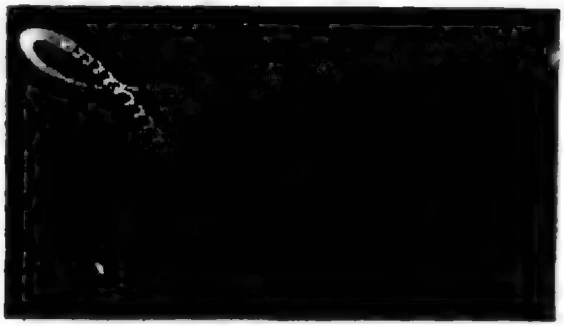


Рис. 11.

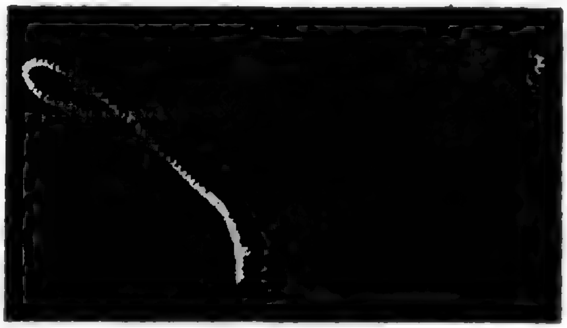


Рис. 12.

ранг описал малую орбиту (например, в комнате), он должен быть сделан из легкого материала. Для очень больших орбит нужен тяжелый бумеранг с профилем, дающим малую подъемную силу (и, конечно, с наименьшим возможным сопротивлением).

В принципе у нас есть все необходимое, чтобы составить уравнение движения идеального бумеранга. Эти уравнения могут быть решены численно на вычислительной машине, и мы получим координаты, скорость и ориентацию бумеранга в каждый момент.

Как теперь сравнить вычисленные пути с действительной траекторией бумеранга? Для объективности необходимо в течение всего полета регистрировать местоположение бумеранга. Это можно сделать при помощи двух фотоаппаратов. Для фиксирования начальных данных необходима специальная метательная машина. Понятно, что у меня не было возможности делать такие эксперименты, но я ухитрился зафиксировать фотоаппаратом одну проекцию траектории полета бумеранга. На конце плеча моего экспериментального бумеранга была прикреплена крошечная электрическая лампочка, питающаяся от двух маленьких полуторавольтовых батареек, помещенных в отверстие, сделанное в центральной части бумеранга (см. снимок на рисунке 10). Таким образом, бумеранг в течение полета нес с собой источник света, достаточно сильный, чтобы его можно было ночью сфотографировать. Одна из полученных таким образом траекторий показана на рисунке 11. Для сравнения на рисунке 12 приведена теоретически вычисленная орбита.

Так как фотоаппарат был расположен недалеко, та часть траектории, где бумеранг пролетал совсем близко от объектива, кажется на фотографии увеличенной. При расчете соответствующей теоретической орбиты был принят во внимание эффект перспективы. Читатель может для себя решить, находит ли он удовлетворительным соответствие между теорией и экспериментом. Во всяком случае, основной внешний вид и особенности траектории бумеранга воспроизводятся этой теорией достаточно хорошо.

В «Кванте» № 6 следующие опечатки:

стр.			напечатано	должно быть
51	левая колонка	5 строка снизу	100 $м^3$	1000 $м^3$
53	правая колонка	10 строка снизу	$\frac{4\sqrt[4]{x}+x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}}-\sqrt{4+x-\sqrt{x}}$	$\frac{4\sqrt[4]{x}+x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}}+\sqrt{4+x-4\sqrt{x}}$
74	левая колонка	3 строка снизу	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{2}$
74	правая колонка	15 строка снизу	$0<a<68$	$0<a<148$

(Окончание см. стр. 74)

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач Вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М182, М186» или «... Ф198».

Решения задач по каждому из предметов — математике и физике, а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах.

Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с Вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

ЗАДАЧИ

М166. а) Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристских похода. В первом походе мальчиков было меньше $^2/_5$ общего числа участников этого похода и во втором — тоже меньше $2/5$. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $4/7$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

б) Пусть в i-м походе ($i=1, 2, \ldots, n$) мальчики составляли α_i часть общего количества участников этого похода. Какую наибольшую долю могут составлять мальчики на общей встрече всех туристов (всех, кто был хотя бы в одном из n походов)?

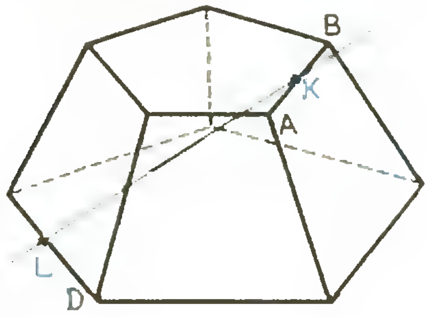


Рис. 1.

М167. Докажите, что в любой арифметической прогрессии

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

составленной из натуральных чисел, найдется бесконечно много членов, в разложение которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

Дж. Пойа

М168. В правильной усеченной пирамиде (рис. 1) точка K — середина некоторой стороны AB верхнего основания, L — середина некоторой стороны CD нижнего основания.

Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую KL равны по длине.

Г. Нотен

М169. Пусть $k<n$ — натуральные числа. Расставьте числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ в таблицу $n \times n$ так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в k-м столбце была а) наименьшей; б) наибольшей.

Н. Б. Васильев

М170. а) Пусть M и N — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами AB и AC, P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Докажите, что угол BPC — прямой.

б) Докажите более общий факт: если точка O, расположенная внутри треугольника ABC, такова, что $\measuredangle BOC - \measuredangle BAO = 90°$, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB и AC, P — точка пересечения прямых BO и MN, то $\measuredangle BPC = 90°$ (рис. 2).

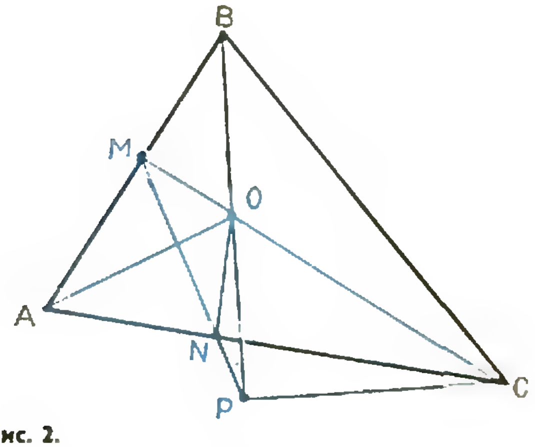


Рис. 2.

Ф180. В закрытом кубическом сосуде с ребром 1 *см* имеется n молекул газа. Стенки кубика таковы, что молекула газа, попав на стенку, остается на ней 10^{-2} *с*. Оценить, сколько молекул газа находится на стенках.

Сосуд находится при комнатной температуре.

А. А. Боровой

Ф181. Подводная лодка, погружаясь вертикально, излучает короткие звуковые импульсы сигнала гидролокатора длительностью τ_0 в направлении дна. Длительность отраженных сигналов, измеряемых гидроакустиком на лодке, равна τ. Какова скорость погружения лодки?

Скорость звука в воде V. Дно горизонтально.

Ф182. В однородное электрическое поле, напряженность которого равна E, внесли металлический шар. Известно, что плотность поверхностных зарядов на «полюсе» шара в точке A (рис. 3) равна σ_0. Определить плотность поверхностных зарядов в точке B, направление на которую из центра шара составляет угол α с направлением внешнего электрического поля.

Ю. А. Дрейзин

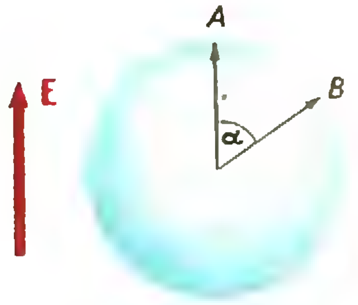


Рис. 3.

Ф183. Спутник движется вокруг Земли по почти круговой орбите со скоростью v. Изменение его орбиты связано с тем, что на спутник действует со стороны микрочастиц сила трения $F = A \cdot v^{\alpha}$, где A и α — константы. Найти α, если известно, что радиус орбиты спутника меняется очень медленно.

Ф184. Оцените, на какую высоту вы смогли бы подпрыгнуть на Луне.

И. Ш. Слободецкий

ЗАДАЧНИК КВАНТА

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М126—М128

М126

Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r, каким-то образом разрезан на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.

Пусть S — площадь данного многоугольника, p — половина его периметра; S_i, p_i, r_i — соответственно площади, полупериметры и радиусы вписанных окружностей треугольников, на которые он разрезан ($i=1, 2, \ldots, n$). Тогда $S=pr$, $S_i=p_ir_i$ и $p>p_i$ для всех i (нетрудно доказать, что периметр многоугольника больше периметра любого выпуклого многоугольника, в нем содержащегося). Поэтому

$$r_1+r_2+\cdots+r_n=\frac{S_1}{p_1}+\frac{S_2}{p_2}+\cdots+\frac{S_n}{p_n}>\frac{S_1}{p}+\frac{S_2}{p}+\cdots+\frac{S_n}{p}=\frac{S}{p}=r.$$

Последнее равенство иллюстрируется рисунком 1.

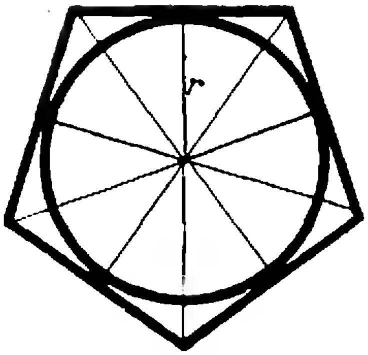


Рис. 1.

М127

Для каждого натурального числа n обозначим через $s(n)$ сумму его цифр (в десятичной записи). Назовем натуральное число m особым, если его нельзя представить в виде $m=n+s(n)$, где n — какое-то натуральное число. (Например, число 117 не особое, поскольку $117=108+s(108)=108+9$, а число 121, как нетрудно убедиться, — особое.) Верно ли, что особых чисел существует лишь конечное число?

Ответ: это утверждение неверно; особых чисел бесконечно много.

Идея наиболее естественного решения состоит в следующем. Рассмотрим все числа n от 1 до какого-то N. Среди них найдется некоторое количество R_N таких n, для которых $n+s(n)>N$. Поэтому среди чисел от 1 до N заведомо не больше $N-R_N$ чисел, представимых в виде $n+s(n)$, то есть по крайней мере R_N чисел — особые (мы здесь даже не учитываем то, что некоторые числа представимы в виде $n+s(n)$ более, чем одним способом). Остается убедиться в том, что, выбирая соответствующим образом N, можно получить сколь угодно большое R_N.

Такая идея встречается в решениях *Б. Бикташева* и *А. Вайнтроба* из Москвы, *А. Григоряна* из Баку, *И. Маджулиса* из Риги и некоторых других читателей. Чтобы довести ее до полного решения, докажем, что среди чисел n от 1 до $N=10^{10^k+k}$ существует более 10^k таких, для которых $n+s(n)>N$. Действительно, если $n<N$ и $n\geqslant N_1=(10^{10^k}-1)\,10^k=9\ldots90\ldots0$ (10^k девяток и k нулей), то

$$n+s(n)\geqslant(10^{10^k+k}-10^k)+9\cdot10^k>N,$$

а количество чисел n таких, что $N_1\leqslant n\leqslant N$, равно $N-N_1+1=10^k+1$.

Другое решение (наиболее аккуратно оно проведено в работах *А. Печковского* из Москвы и *Л. Пугача* из Днепропетровска) — указание способа, позволяющего построить конкретную последовательность особых чисел. Вот одна такая последовательность:

$$m_1 = 9+11 = 20,$$
$$m_2 = 20+101 = 121,$$
$$m_3 = 121+1001 = 1122,$$

где $m_k = m_{k-1}+10^k+1$.

Докажем по индукции, что все эти числа — особые. Предположим, для m_{k-1} это верно ($k \geq 3$), а для m_k — нет: $m_k = n+s(n)$.

Прежде чем пользоваться этим предположением, докажем, что десятичное разложение числа m_k выглядит так:

$$m_k = 10^k+a_{k-1}\,10^{k-1} + \ldots + a_0,$$

где цифра $a_{k-1} \neq 0$, то есть что $11\cdot10^{k-1} < m_k < 2\cdot10^k$. Левое неравенство очевидно, а правое проверяется по индукции: $m_k = m_{k-1} + 10^k + 1 < 2\cdot10^{k-1} + 10^k + 1 = 12\cdot10^{k-1}+1 < 2\cdot10^k$.

Теперь можно доказать, что десятичная запись числа n тоже начинается с единицы: $n = 10^k+b_{k-1}\cdot10^{k-1}+ \ldots + b_1\cdot10+b_0$, то есть что $10^k < n < 2\cdot10^k$. Здесь правое неравенство очевидно, а левое доказывается от противного если $n < 10^k$, то $s(n) < 9k$ и $n+s(n) < 10^k+9k < 10^k+10^{k-1} = 11\cdot10^{k-1} < m_k$ ($9k < 10^{k-1}$ при $k \geq 3$).

Обозначим число $n-10^k$ (число n с отброшенной первой цифрой, равной единице) через n^*. Тогда, очевидно, $s(n^*) = s(n)-1$ и поэтому

$$n^*+s(n^*) = n-10^k+s(n)-1 =$$
$$= m_k-10^k-1 = m_{k-1}.$$

Таким образом, получается, что число m_{k-1} — не особое Противоречие с предположением доказывает справедливость индукционного перехода от $k-1$ к k. То, что числа m_1 и m_2 — особые, установить нетрудно.

M128

Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части

Пусть BK — медиана треугольника ABC — делится вписанной окружностью на равные отрезки $BM = MN = NK = x$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и T — точка касания вписанной окружности со стороной BC (рис. 2)

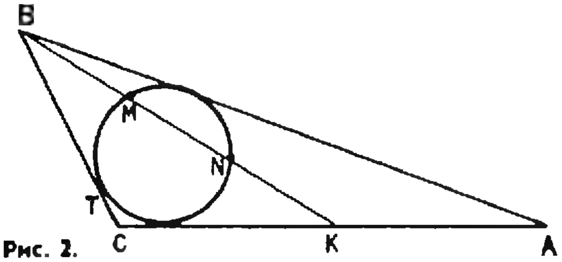


Рис. 2.

Нам понадобятся следующие два соотношения, справедливые для любого треугольника ABC.

$$a+c-b = 2BT,$$
$$2a^2+2c^2-b^2 = 4BK^2$$

(первое выводится из равенств $BT+CT=a$, $BT-CT = c-b$; второе легко доказать, достроив треугольник до параллелограмма $ABCD$). Из второго равенства находим

$$2a^2+2c^2 - b^2 = 36x^2. \qquad (1)$$

Поскольку $BT^2 = BM\cdot BN$, то

$$(a+c-b)^2 = 8x^2. \qquad (2)$$

Наконец, поскольку точки B и K, очевидно, одинаково удалены от центра вписанной окружности, то $BC = KC$, откуда

$$b = 2a. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и (2), находим

$$c^2 - a^2 = 18x^2, \quad (c-a)^2 = 8x^2.$$

Из этих равенств получим (ясно, что $c-a \neq 0$, $x \neq 0$).

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{9}{4}, \quad \text{откуда} \quad \frac{c}{a} = \frac{13}{5}.$$

Ответ: $a:b:c = 5:10:13$.

Нетрудно проверить, что в треугольнике с таким отношением сторон медиана стороны b действительно разделится вписанной окружностью на три равные части (при проверке удобно пользоваться теми же формулами, которые применялись выше).

Правильные решения некоторых из задач **M121 — M128** прислали: *Б. Ашавский* (Москва) **M126**; *В. Астапкович* (Борисов БССР) **M124**; *В. Береза* (Горький) **M122 — M123**; *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.) **M123**; *А. Бикташев* (Москва) **M126 — M128**; *А Богданов* (Глазов Удмуртской АССР) **M128**; *А. Бочаров* (Николаев) **M126 — M128**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **M126**; *А. Бруттер* (Кишинев) **M128**; *О. Бурлаков* (Ташкент) **M128**; *А. Вайнтроб* (Москва) **M126 — M128**; *Т. Галкина* (Куйбышев) **M126**; *Л. Генринович* (Ташкент) **M126**, **M128**; *А. Гордиенко* (с. Полтавченское Краснодарского края) **M122**, **M126**; *А. Григорян* (Баку) **M126**; *В. Гринман* (Москва) **M124**; *А. Демидов* (Москва) **M124**; *В. Дробитько* (Херсон) **M126**; *В. Евдокимов* (Ярославль) **M123**; *А. Едренкин* (Москва) **M126**; *М. Жуков* (Баку) **M128**; *А. Жумадильдаев* (Алма-Ата) **M122 — M124**; *В. Зарубин* (п. Летний отдых Московской обл.) **M126**; *В. Заблоцкий* (Донецк) **M128**; *Э. Зейман* (Оргеев Молдавской ССР) **M126**; *Т. Златкус* (Советск Калининградской обл.), **M128**; *И. Игнатьев* (с. Сарманово Татарской АССР) **M128**; *М. Илларионов* (Воронеж) **M121 — M124**, **M126**, **M128**; *С. Иоанниди* (Тбилиси) **M128**; *М. Кауль* (Фрунзе) **M121**, **M122**, **M124**; *А. Квасов* (Москва) **M122 — M124**, **M126**; *А. Кисилев* (Москва) **M122**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **M123**, **M124**, **M126**; *В. Клейменов* (Улан-Удэ) **M126**; *В. Колосов* (Киев)

М122 — М124, М126; *О. Комлев* (Москва) **М126, М128**; *В. Кореняко* (Воронеж) **М121 — М125**; *А. Костянский* (Орджоникидзе) **М122**; *Ю. Котлерис* (Рига) **М126**; *С. Котко* (Воронеж) **М123, М126, М128**; *Г. Левин* (Куйбышев) **М126**; *Г. Ли* (с. Йик Верхнечирчикского р-на Ташкентской обл.) **М126**; *С. Лягушин* (Днепропетровск) **М126, М128**; *И. Маджулис* (Рига) **М126, М128**; *А. Макаричев* (Львов) **М121, М126, М128**; *С. Малков* (Иваново) **М126, М128**; *Г. Матвеев* (Ленинград) **М126, М128**; *В. Меерсон* (Николаев) **М128**; *И. Меджибовский* (Москва) **М122, М126, М128**; *Л. Миллер* (Уфа) **М126**; *А. Мосолов* (Москва) **М123**; *С. Муровенко* (Москва) **М121, М122, М124**; *Р. Нарсия* (Тбилиси) **М128**; *С. Овчинников* (Ленинград) **М126**; **М128**; *Г. Оганнисян* (Ереван) **М123, М126**; *Е. Онегин* (Скопин Рязанской обл.) **М126**; *В. Орлов* (Астрахань) **М128**; *И. Печковский* (Москва) **М126 — М128**; *В. Папави* (Тбилиси) **М122**; *Б. Папишник* (Баку) **М126, М128**; *М. Прегер* (Томск) **М121 — М123**; *Л. Пугач* (Днепропетровск) **М126 — М128**; *А. Райнин* (Ленинград) **М123**; *Ю. Рацин* (Рига) **М121, М123, М126, М127**; *А. Ребурак* (Ангарск) **М128**; *В. Сандригайло* (д. Турейск Могилевской обл.) **М126**; *А. Сеин* (Тюмень) **М126**; *А. Семенов* (Долгопрудный Московской обл.) **М124, М128**; *В. Сервах* (Фрунзе) **М126**; *А. Слинкин* (Москва) **М122, М126**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **М122 — М124, М126, М128**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **М122, М124, М126**; *А. Смирнов* (Горький) **М126, М128**; *В. Соболев* (Ленинград) **М123, М124**; *А. Соколовский* (Кривой Рог) **М126, М128**; *М. Сокольчик* (Минск) **М121 — М124, М126 — М128**; *Т. Сулейманов* (п. Ильич Пахтааральского р-на Ташкентской обл.) **М126, М128**; *П. Сургучев* (Рига) **М126, М128**; *С. Табачников* (Москва) **М126**; *А. Тагиев* (Баку) **М126, М128**; *Я. Телер* (Ташкент) **М128**; *О. Трунов* (Джелал-Абад) **М126**; Э. Туркевич (Черновцы) **М121 — М124, М126, М128**; *Б. Фришлинг* (Тбилиси) **М121 — М123, М124, М126**; *Ю. Хачатурян* (Баку) **М126, М128**; *В. Хлебопрос* (Киев) **М126, М127**; *М. Хорошин* (Чернигов) **М128**; *С. Цанава* (Тбилиси) **М126, М128**; *С. Цецохо* (Новосибирск) **М122 — М124; М126, М128**; *А. Цицуашвили* (Тбилиси) **М121, М123**; *С. Черемшинцев* (Ленинград) **М126**; *А. Черняк* (Минск) **М122 — М126, М128**; *А. Чигогидзе* (Тбилиси) **М123, М124, М126**; *В. Шелюбский* (Минск) **М123**; *А. Шерстюк* (Николаев) **М121, М123, М124, М126**; *А. Ширяев* (Минск) **М126**; *Ф. Шмидель* (Москва) **М121 — М124**; *А. Шпарлинский* (Москва) **М126, М128**; *Н. Якубов* (Фрунзе) **М128**; *Т. Ярославцева* (Брянск) **М128**.

Н. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф142—Ф147

Ф142

Стальной шарик, подвешенный на нитке длины l, отклонили так, что нить приняла горизонтальное положение, и отпустили. В тот момент, когда нить составляла угол $\alpha = 30°$ с вертикалью, шарик ударился о неподвижную стальную плиту (рис. 3). На какую высоту поднимется шарик после удара о плиту, если удар можно считать абсолютно упругим?

Пусть скорость шарика в момент его удара о плиту равна v. Эта скорость направлена перпендикулярно нити. Так как удар шарика — абсолютно упругий и, следовательно, мгновенный, то при ударе шарик ведет себя как свободный, не связанный с нитью. Поэтому скорость шарика при ударе меняется только по направлению, так что угол отражения шарика от плиты равен углу падения. Это означает, что после удара о плиту скорость шарика равна v и направлена под углом α к перпендикуляру к плите.

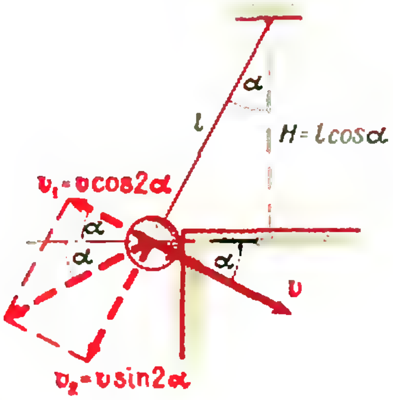


Рис. 3.

Разложим скорость шарика на две составляющие — вдоль нити и перпендикулярно ей. Первая из составляющих вызывает деформацию нити и не влияет на высоту подъема шарика. Поэтому для вычисления высоты подъема шарика можно считать, что после удара о плиту он движется со скоростью $v_1 = v\cos 2\alpha$, перпендикулярной нити. Энергия шарика сразу после удара равна $\frac{mv_1^2}{2}$, при подъеме шарика на высоту h она становится равной mgh. (Часть полной кинетической энергии шарика $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$ после удара перейдет в энергию колебаний шарика вдоль нити или, в конечном счете, в тепло. Величина этой потери равна $\frac{mv_2^2}{2}$.)

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh \quad \text{или} \quad \frac{v^2\cos^2 2\alpha}{2} = gh.$$

Найдем теперь скорость v шарика в момент его столкновения с плитой. Вначале шарик находился на высоте $H = l\cos\alpha$ над плитой. Изменение потенциальной энергии шарика при движении из первоначального положения до столкновения с плитой равно кинетической энергии, приобретенной шариком:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\cos\alpha.$$

Отсюда

$$v^2 = 2\,gl\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$h = \frac{v^2\cos^2 2\alpha}{2g} = l\cos\alpha\cos^2 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}\,l.$$

Ф143

Самолет садится на палубу авианосца, имея скорость 100 *км/ч*. Зацепившись за канат торможения, самолет пробегает до полной остановки 50 *м*. Определить перегрузки, если коэффициент упругости каната не меняется по мере его растяжения.

При торможении самолета на него со стороны каната действует сила $F = kx$, где x — удлинение каната, k — коэффициент его упругости. Эта сила увеличивается по мере растяжения каната. Увеличивается и ускорение

$$a = \frac{F}{M} = \frac{k}{M}\,x,$$

сообщаемое силой F самолету (M — масса самолета).

Но с ускорением a движется не только самолет, но и летчик, удерживаемый ремнями на сидении. Это ускорение сообщает летчику сила T, действующая на него со стороны ремней. Если масса летчика равна m, то

$$T = ma = \frac{mk}{M}\,x.$$

Эта сила максимальна при $x = L = 50$ *м*,

$$T_{\max} = \frac{mkL}{M}. \qquad (1)$$

В выражение для T входит коэффициент упругости каната. Найдем его.

Кинетическая энергия самолета в момент посадки, очевидно, равна работе силы F. Эта сила меняется с расстоянием x, пройденным самолетом по палубе авианосца. Нарисуем график зависимости F от x (рис. 4). Очевидно, работа силы F на пути L равна площади треугольника под графиком зависимости F от x, то есть $A = \frac{1}{2}kL\cdot L = \frac{kL^2}{2}$. Следовательно,

$$\frac{kL^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}. \qquad \text{Отсюда} \qquad k = \frac{Mv^2}{L^2}.$$

Подставляя выражение для k в формулу (1), получим

$$T_{\max} = m\,\frac{v^2}{L} = mg\,\frac{v^2}{Lg} \approx 1{,}5mg.$$

Со стороны сидения и ремней на летчика действуют взаимно-перпендикулярные силы: сила нормальной реакции сидения N и сила натяжения ремней T. Равнодействующая этих сил равна по абсолютной величине весу летчика P (вес — это сила, с которой летчик действует на сидение и ремни):

$$R = \sqrt{T_{\max}^2 + (mg)^2} \approx 1{,}8\ mg.$$

Это означает, что вес пилота в 1,8 раза больше его веса в обычных условиях.

Ф144

Каким должен быть коэффициент трения стержня о пол для того, чтобы он мог стоять так, как показано на рисунке 5? Длина нити, удерживающей стержень, равна длине стержня.

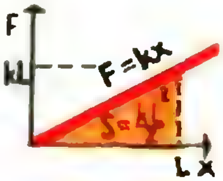


Рис. 4.

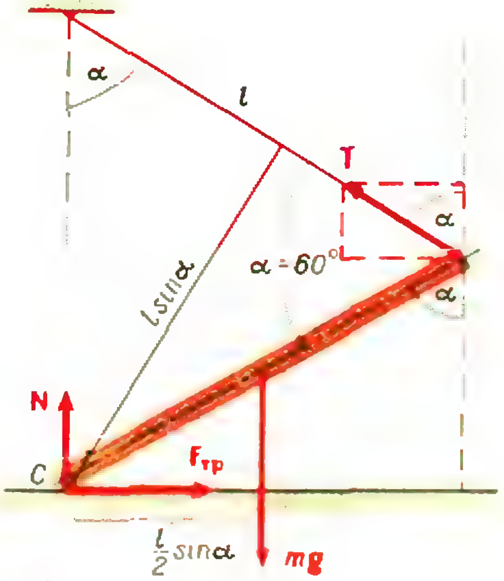


Рис. 5.

Так как стержень находится в равновесии, то суммы проекций всех действующих на него сил на вертикальное и горизонтальное направления должны быть равны нулю. Силы, действующие на стержень, показаны на рисунке 5. Значит,

$$F_{\text{тр}} - T\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$
$$N + T\cos\alpha - mg = 0.$$

Запишем еще условие того, что стержень не вращается вокруг точки C. Для этого должна быть равна нулю сумма моментов всех сил относительно точки C:

$$Tl\sin\alpha - mg\,\frac{l}{2}\sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что $T = \frac{1}{2}mg$. Перепишем, учитывая это, уравнения (1). Учтем еще и то, что при наименьшем коэффициенте трения, когда еще возможно равновесие стержня, $F_{\text{тр}} = kN$:

$$kN - \frac{1}{2}mg\sin\alpha = 0,$$

$$N + \frac{1}{2}mg\cos\alpha - mg = 0$$

Отсюда

$$kN = \frac{1}{2}mg\sin\alpha,$$

$$N = mg\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Следовательно,

$$k = \frac{\sin\alpha}{2 - \cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ф145

Идеальный газ сначала переходит из состояния 1 (P_1, V_1, T_1) в состояние 2 (P_2, V_1, T_2). Затем из состояния 2 газ медленно адиабатически (без подвода тепла) переходит в состояние 3 (P_3, V_3, T_3). Известно, что при переходе $2 \to 3$ газ совершает работу, равную количеству тепла, сообщенному газу при переходе $1 \to 2$. Показать, что $T_3 = T_1$. Изобразить процессы $1 \to 2$ и $2 \to 3$ на плоскости VT.

Так как при процессе $1 \to 2$ $V = V_1 = \text{const}$, то газ не совершает работы и изменение внутренней энергии газа ΔW_1 равно количеству тепла Q, сообщенному газу:

$$Q = \Delta W_1. \qquad (1)$$

Процесс $2 \to 3$ — адиабатический ($Q = 0$), значит, работу газ совершает за счет внутренней энергии. Поэтому работа A, совершенная газом, равна изменению его внутренней энергии

$$A = \Delta W_2. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим, что

$$\Delta W_1 = \Delta W_2.$$

Но внутренняя энергия газа пропорциональна его абсолютной температуре. Это означает, что при процессе $2 \to 3$ и процессе $1 \to 2$ температура газа изменилась одинаково. Следовательно, $T_1 = T_3$.

Графики процессов приведены на рисунке 6. Так как при процессе $1 \to 2$ внутренняя энергия газа увеличилась, то $T_2 > T_1$. Поскольку при процессе $2 \to 3$ газ совершал работу, то $V_3 > V_1$.

Очевидно, наш ответ справедлив только в том случае, если $V_{1 \to 2} = \text{const}$.

Ф146

Имеется батарея с э. д. с. $E = 100$ *в* и внутренним сопротивлением $r = 2$ *ом*. На нагрузке нужно получить напряжение $U = 20$ *в*, причем при изменении сопротивления нагрузки R от 50 *ом* до 100 *ом* напряжение на ней должно меняться не более чем на 2%. Придумайте простую схему для питания нагрузки и рассчитайте параметры этой схемы.

Одна из простейших схем — это последовательное включение сопротивления R нагрузки, сопротивления R_1 и источника (рис. 7). В этом случае, если сопротивление нагрузки равно 50 *ом*, то для того, чтобы напряжение на нагрузке было равно 20 *в* (то есть составляло 1/5 часть от э. д. с. источника E), сумма сопротивления источника и сопротивления R_1 должна быть 200 *ом*. Но в этом случае при сопротивлении нагрузки 100 *ом* напряжение на ней будет составлять

$$U = E\,\frac{R}{R_1 + R + r} = \frac{100}{3}\ \text{в} \approx 33{,}3\ \text{в}.$$

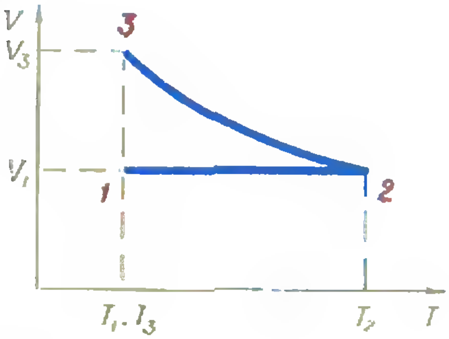


Рис. 6.

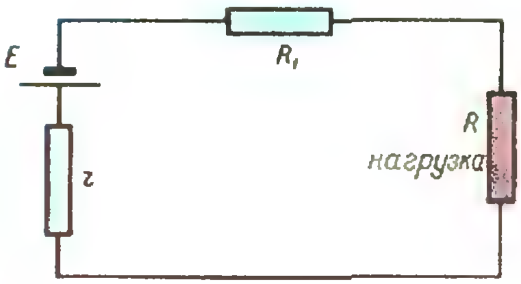


Рис. 7.

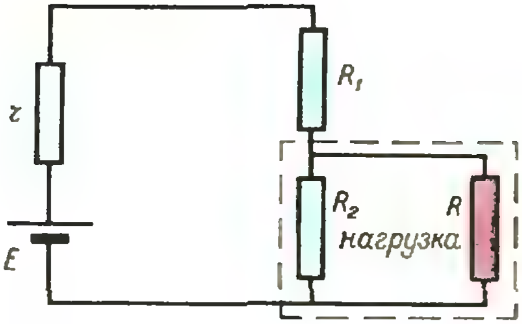


Рис. 8.

Следовательно, при такой схеме подключения нагрузки к источнику изменение напряжения на нагрузке составляет много больше 2%.

Другая схема — это схема «делителя» (рис. 8). Ясно, что при малом по сравнению с сопротивлением нагрузки сопротивлении R_2 общее сопротивление участка цепи, обведенного на рисунке рамкой, изменяется мало при изменении сопротивления нагрузки. Мало меняется и напряжение на нагрузке.

Рассчитаем параметры «делителя». Напряжение на нагрузке равно

$$U = IR_2',$$

где $I = \dfrac{E}{R_1 + r + R_2'}$ — ток в цепи и

$R_2' = \dfrac{R_2R}{R_2 + R}$ — сопротивление участка, обведенного рамкой.

$$U = \frac{E}{R_1 + r + \dfrac{R_2R}{R_2+R}} \cdot \frac{R_2R}{R_2 + R}. \qquad (1)$$

В данной схеме э. д. с. источника делится между сопротивлением R_2' и сопротивлением R_1+r. Чем больше сопротивление R_2', тем больше напряжение на нагрузке. С другой стороны, сопротивление R_2' увеличивается при увеличении сопротивления нагрузки R. (График зависимости R_2' от R показан на рисунке 9.) Если при сопротивлении нагрузки $R = 50$ *ом* напряжение на нагрузке равно 20 *в*, то при сопротивлении нагрузки $R = 100$ *ом* напряжение на ней должно быть на 2% больше, то есть 20,4 *в*. Подставляя численные значения всех известных величин в формулу (1), мы получаем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{100}{2 + R_1 + \dfrac{50R_2}{R_2+50}} \cdot \frac{50R_2}{R_2 + 50} &= 20, \\ \frac{100}{2 + R_1 + \dfrac{100R_2}{R_2+100}} \cdot \frac{100R_2}{R_2 + 100} &= 20{,}4, \end{aligned}\right|$$

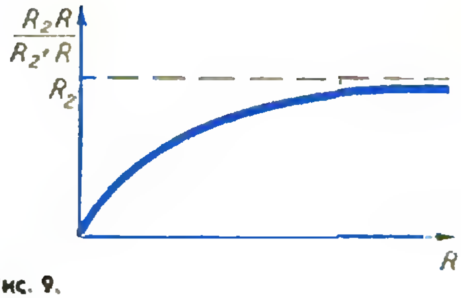


Рис. 9.

или

$$\left.\begin{aligned} 250\frac{R_2}{R_2+50} &= 2 + R_1 + 50\frac{R_2}{R_2+50}, \\ 490\frac{R_2}{R_2+100} &= 2 + R_1 + 100\frac{R_2}{R_2+100}. \end{aligned}\right\}$$

Исключая из этой системы R_1, найдем R_2:

$$R_2 = 5{,}5 \text{ ом}.$$

Теперь, подставив это значение R_2 в любое из уравнений системы, найдем

$$R_1 \approx 17{,}8 \text{ ом}.$$

Ф147

В модели атома Резерфорда и Бора электроны вращаются вокруг ядра на определенных круговых орбитах. При переходе электрона с одной орбиты на другую, более близкую к ядру, атом испускает фотон. Какова энергия и частота фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиуса $r_1 = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ *см* на орбиту радиуса $r_2 = 5{,}3 \cdot 10^{-9}$ *см*?

Найдем вначале энергию атома в том случае, когда электрон находится на орбите радиуса r. Она складывается из потенциальной энергии

$$W_п = \varphi e = -\frac{e^2}{r}$$

(φ — потенциал электрического поля ядра на расстоянии r от него, e — заряд электрона) и кинетической энергии электрона

$$W_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Так как электрон вращается по окружности под действием кулоновской силы

$$F = \frac{e^2}{r^2},$$

и сила F сообщает ему центростремительное ускорение $\dfrac{v^2}{r}$, то

$$F = m\frac{v^2}{r}, \text{ или } \frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Из этого равенства следует, что

$$mv^2 = \frac{e^2}{r}.$$

Следовательно, кинетическая энергия электрона равна

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r}\,.$$

Теперь можно найти полную энергию электрона на орбите радиуса r:

$$W = W_к + W_п = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}\,.$$

Энергия фотона, испущенного атомом, равна:

$$E = W_1 - W_2 = -\frac{e^2}{2r_1} - \left(-\frac{e^2}{2r_2}\right) = \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 16{,}3\cdot 10^{-12}\ эрг.$$

Так как энергия фотона связана с его частотой ν формулой $E = h\nu$, где h — постоянная Планка, то

$$\nu = \frac{E}{h} = 2{,}6\cdot 10^{15}\ с^{-1}\,.$$

Редакция получила более 600 писем. Почти во всех письмах приведены правильные решения задач **Ф139, Ф143, Ф144**. Правильные решения остальных задач прислали следующие читатели: *А. Айрапетян* (Ереван) **Ф142, Ф145, Ф147**; *А. Андреев* (Ленинград) **Ф145, Ф146**; *Ш. Атакулов* (Фергана) **Ф145, Ф146**; *А. Аляев* (Арзамас) **Ф147**; *А. Асасян* (Ереван) **Ф147**; *В. Беликов* (Москва) **Ф 142**; *И. Братовская* (Усолье-Сибирское) **Ф145**; *А. Баевский* (Гомель) **Ф138, Ф142**; *В. Буркин* (Стерлитамак) **Ф147**; *М. Большаков* (Саратов) **Ф146, Ф147**; *А. Блинов* (Москва) **Ф142**; *М. Бренерман* (Казань) **Ф145**; *Бардина* (Новокузнецк) **Ф145, Ф147**; *А. Бортников* (Краснодар) **Ф142**; *О. Белкин* (Оренбург) **Ф147**; *А. Бакуляев* (Москва) **Ф142**; *Т. Вайнтрауб* (Кишинев) **Ф145—Ф147**; *В. Воробьев* (Кутаиси) **Ф147**; *В. Векштейн* (Киев) **Ф145**; *И. Васищак* (Киев) **Ф140**; *А. Варчнов* (Жуковский Московской обл.) **Ф145**; *И. Ваксер* (Минск) **Ф142**; *Ю. Горный* (Хадыженск Краснодарского края) **Ф147**; *С. Гранин* (Дзержинск) **Ф145**; *О. Глущенко* (Глухов Сумской обл.) **Ф142**; *А. Гофман* (Москва) **Ф140**; *Б. Герасимов* (Сарапул) **Ф147**; *С. Григорян* (Ереван) **Ф147**; *А. Григорьев* (Грозный) **Ф147**; *С. Городников* (Грозный) **Ф145**; *С. Дик* (Жодино Минской обл.) **Ф145**; *В. Деревегин* (Донецк) **Ф145, Ф147**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф142, Ф145**; *В. Дашкевич* (Кировск Могилевской обл.) **Ф145**; *А. Давыдков* (Ленинград) **Ф142**; *А. Даниэль* (Ленинград) **Ф145**; *А. Дорофеев* (с. Фокино Горьковской обл.) **Ф142**; *С. Егоров* (Климовск Московской обл.) **Ф147**; *А. Едренкин* (Москва) **Ф145, Ф147**; *В. Железный* (Ленинград) **Ф146**; *Б. Зиндельс* (Киев) **Ф145**; *А. Збоев* (пос. Медведок Кировской обл.) **Ф140**; *В. Заболоцкий* (Донецк) **Ф142, Ф147**; *Н. Змушко* (пос. Ружаны Брестской обл.) **Ф145**; *А. Израилевич* (Свердловск) **Ф147**; *П. Крышеник* (Ужгород) **Ф147**; *В. Колесников* (Челябинск) **Ф142**; *С. Корнеев* (Новокузнецк) **Ф145**; *А. Кречетников* (Сумы) **Ф140**; *В. Каганер* (Москва) **Ф140—Ф142,Ф147**; *Т. Кигизина* (с. Пески Поворинского р-на Воронежской обл.) **Ф147**; *А. Карнаух* (Белгород) **Ф147**; *А. Каюпченко* (Белово Кемеровской обл.) **Ф147**; *А. Кошор* (Минск) **Ф145**; *О. Киселева* (Печора Коми АССР) **Ф142**; *С. Колонков* (Магнитогорск) **Ф147**; *В. Коротких* (Новокузнецк) **Ф147**; *С. Кондратьев* (Сызрань) **Ф147**; *А. Конюхин* (Ногинск Московской обл.) **Ф142, Ф145**; *А. Кондрашов* (Алма-Ата) **Ф147**; *С. Курень* (з/с Кущевский Краснодарского края) **Ф147**; *В. Кириллов* (Горький) **Ф145, Ф147**; *Е. Курманбаев* (Семипалатинск) **Ф147**; *И. Камынин* (Ленинград) **Ф142**; *Л. Когин*(Черновцы) **Ф145**; *Г. Левин* (Куйбышев) **Ф145**; *Г. Лутингер* (Черновцы) **Ф147**; *Е. Липовецкий* (Кишинев) **Ф147**; *А. Лукашев* (Москва) **Ф147**; *С. Лукащук* (Челябинск) **Ф145**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф142, Ф145, Ф146**; *В. Лихолин* (Миргород Полтавской обл.) **Ф142**; *С. Лягушин* (Днепропетровск) **Ф138**; *А. Лунев* (д. Поздняково Курской обл.) **Ф142, Ф147**; *В. Лурье* (Челябинск) **Ф145**; *В. Левитас* (Киев) **Ф145, Ф147**; *В. Легезе* (Славянск) **Ф147**; *В. Ларин* (Подольск) **Ф147**; *А. Логунов* (Москва) **Ф145**; *Е. Михеев* (Гатчина Ленинградской обл.) **Ф145**; *Ю. Мурзакаев* (с. Осянгулово Башкирской АССР)**Ф147**; *В. Малышев* (Александров Владимирской обл.) **Ф142**; *М. Марон* (Куйбышев) **Ф142. Ф147**; *А. Мельник* (с. Серединцы Хмельницкой обл.) **Ф145—Ф147**; *И. Мацяс* (Макеевка) **Ф147**; *В. Муханов* (Канаш) **Ф145**; *В. Мухрыгин* (Краснодар) **Ф142**; *С. Молотков* (Златоуст) **Ф147**; *Д. Наумов* (Баку) **Ф145**; *С. Новиков* (Свердловск) **Ф147**; *В. Неклюдов* (Ижевск) **Ф147**; *В. Нарожный* (Ростов-на-Дону) **Ф145**; *В. Овчаров* (Сумы) **Ф147**; *С. Овчинников* (Ленинград) **Ф145**; *А. Петровский* (Сортавало КАССР) **Ф145, Ф147**; *Г. Поляков* (Бармино Горьковской обл.) **Ф147**; *В. Подвигин* (Куйбышев) **Ф145, Ф147**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск Татарской АССР) **Ф145**; *И. Пикуш* (Орджоникидзе) **Ф138**; *С. Петров* (Ст. Русса Новгородской обл.) **Ф147**; *А. Папин* (Гомель) **Ф142**; *В. Переседов* (Похвистнево Куйбышевской обл.) **Ф145, Ф147**; *В. Приходько* (Новокузнецк) **Ф147**; *А. Романюк* (с. Куснище Волынской обл.) **Ф147**; *В. Рыкин* (с. Солоновка Смоленского р-на Алтайского края) **Ф147**; *М. Ригмант* (Магнитогорск) **Ф145, Ф147**; *А. Редченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.) **Ф138, Ф147**; *А. Резник* (Донецк) **Ф145, Ф147**; *А. Рубашкин* (Ленинград) **Ф142**; *В. Рекрут* (Киев) **Ф142**; *М. Ройзин* (Тбилиси) **Ф147**; *В. Ровинский* (Смела УССР) **Ф147**; *С. Свинолупов* (Белебей Башкирской АССР) **Ф145**; *В. Сидельников* (пос. Тим Курской обл.) **Ф145**; *М. Сидоров* (Москва) **Ф142, Ф147**; *А. Сергеев* (Ленинград) **Ф142, Ф145**; *В. Степанов* (Москва) **Ф140**; *Я. Симкин* (Москва) **Ф145—Ф147**; *О. Сахаров* (Ломоносов Ленинградской обл.) **Ф145, Ф147**;

И. Ш. Слободецкий

(окончание списка в «Кванте» № 11, 1972)

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Я. И. Груденов

Метод решения задач «с конца»

Обычно решение задачи или доказательство теоремы мы проводим от известного к неизвестному, от данного к искомому. Но можно действовать и иначе. Здесь мы рассмотрим метод решения задач «с конца», когда рассуждения проводятся от неизвестного к известному, от искомого к данному.

Общая схема

Пусть требуется доказать некоторое утверждение A. Предположим, что оно верно, и на основе данных задачи и известных теорем попытаемся получить из A верное следствие. При этом возможно несколько случаев.

1. Получено неверное следствие. Это означает, что наше предположение о справедливости утверждения A ошибочно. Решение задачи на этом закончено — мы обнаружили, что A неверно.

2. Получено верное следствие. В этом случае следует обязательно проверить обратимость рассуждений, потому что из неверного утверждения (например, $a = -a$, $a \neq 0$) тоже можно получить верное следствие ($a^2 = a^2$).

а) Если все расссуждения обратимы, то A верно.

б) Если среди рассуждений есть необратимые (например, на некотором этапе мы возвели равенство в квадрат), то приходится применять другие методы отыскания решения задачи.

3. Если верное следствие получить не удается, то также приходится перейти к другим методам.

Два указания

1. В получаемых промежуточных выражениях желательно уменьшать число параметров, а затем упрощать эти выражения.

2. Если задача не содержит лишних условий *), то необходимо использовать все данные задачи.

Примеры

Пример 1. *В прямоугольном треугольнике ABC катет AC в 3 раза больше катета AB. Точками K и M катет AC разделен на три равные части. Доказать, что $\measuredangle AMB + \measuredangle AKB + \measuredangle ACB = 90^\circ$.*

Решение. Пусть $\measuredangle AMB = \alpha$, $\measuredangle AKB = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$ (рис. 1). Предположим, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \qquad (1)$$

или, так как $\alpha = 45^\circ$,

$$\beta + \gamma = 45^\circ. \qquad (1a)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \operatorname{tg} 45^\circ, \qquad (2)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma} = 1. \qquad (2a)$$

---

*) Нахождение лишнего условия является большим плюсом решения, но обычно конкурсные задачи лишних условий не содержат.

Равенство (2) или (2а) верно, так как

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{AB}{AK}=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3}$$

и

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Учащиеся на этом обычно заканчивают решение задачи, что является грубой ошибкой. Начиная обращать преобразования, мы замечаем, что из справедливости равенства (2) следует вовсе не равенство (1а), а зависимость

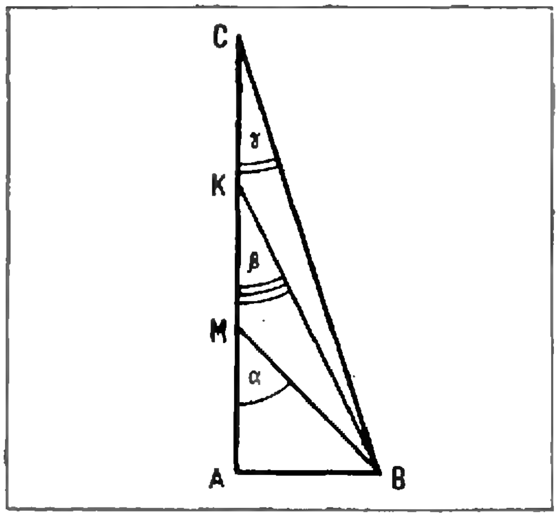


Рис. 1.

$$\beta+\gamma=45^\circ+180^\circ\cdot n,$$

где $n=0;\quad \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$

Но из треугольников AKB и ACB мы находим, что $0<\beta<45^\circ$; $0<\gamma<45^\circ$, следовательно,

$$0<\beta+\gamma<90^\circ. \qquad (3)$$

Поэтому из соотношений (2) и (3) следует, что $\beta+\gamma=45^\circ$, и, так как $\alpha=45^\circ$, то $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

Пример 2. *Доказать, что во всяком треугольнике* $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$, *где* a, b, c *— стороны треугольника,* S *— его площадь,* R *— радиус описанного круга.*

Решение. Предположим, что верно равенство:

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}. \qquad (4)$$

Уменьшим число параметров:

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot\frac{1}{2}\,b\cdot c\cdot\sin A},\qquad R=\frac{a}{2\cdot\sin A},$$

откуда

$$2R=\frac{a}{\sin A},$$

что верно по теореме синусов. Все преобразования легко обратить, следовательно, равенство (4) доказано.

Пример 3. *Стороны треугольника* a, b, c $(a<b<c)$ *образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что* $ac=6Rr$, *где* R *— радиус описанного, а* r *— радиус вписанного в треугольник круга.*

Решение. Пусть верно равенство $ac=6Rr$. Уменьшим число параметров, выразив R и r через стороны треугольника: $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр. Получим:

$$ac=6\cdot\frac{abc}{4\cdot S}\cdot\frac{S}{p},\qquad 1=\frac{3b}{2p},$$

$$a+b+c=3b,\ \frac{a+c}{2}=b,$$

что верно, так как a, b, c составляют арифметическую прогрессию.

Все эти преобразования можно провести в обратном порядке, следовательно, доказываемое соотношение верно.

Пример 4. *Доказать, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон* (теорема Птолемея).

Решение. Предположим, что верно равенство (рис. 2):

$$AC\cdot BM=AM\cdot BC+AB\cdot CM. \qquad (5)$$

Уменьшим число параметров, выразив все отрезки через какие-либо другие элементы. Необходимость использования при этом всех данных задачи (четырехугольник — вписанный) наталкивает нас на мысль применить теорему синусов:

$$\begin{aligned} AC &= 2R\cdot\sin(\varphi+\beta);\\ BM &= 2R\cdot\sin(\alpha+\varphi)\\ AM &= 2R\cdot\sin\alpha;\\ BC &= 2R\cdot\sin\beta;\\ AB &= 2R\cdot\sin\varphi;\\ CM &= 2R\cdot\sin[\pi-(\alpha+\beta+\\ &+\varphi)] = 2R\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi).\end{aligned}$$

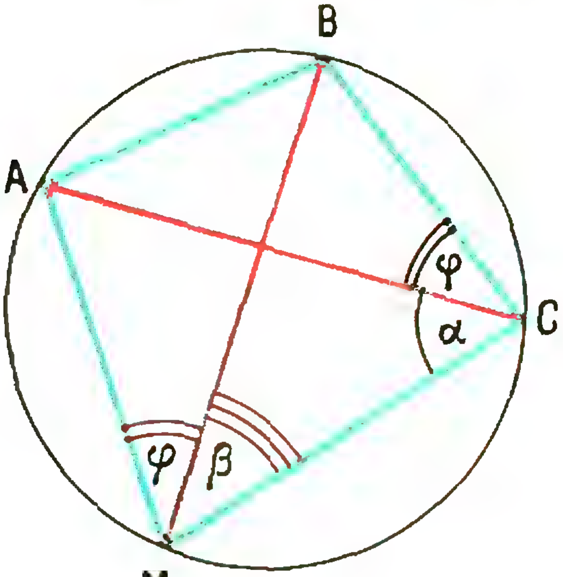


Рис. 2.

Подставляя эти выражения в равенство (5) и сокращая на $4R^2\neq0$, имеем:

$$\sin(\varphi+\beta)\cdot\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\times\\ \times\sin\beta+\sin\varphi\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi).$$

Последнее равенство *справедливо* для любых углов α, β и φ (проверьте это самостоятельно, расписав функции суммы углов через функции углов).

Обратный переход не составляет труда, поскольку по условию четырехугольник — вписанный. Следовательно, соотношение (5) верно.

Пример 5. *Стороны треугольника связаны соотношением*

$$a^2 = bc + c^2.$$

Доказать, что угол A вдвое больше угла C.

Решение. Предположим, что

$$\sphericalangle A = 2\sphericalangle C. \qquad (6)$$

Чтобы использовать соотношение, данное в условии задачи, углы в равенстве (6) *целесообразно выразить* через стороны треугольника:

$$\sin A = \sin 2C = 2\sin C\cdot\cos C, \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2+b^3-c^2}{2ab};\\ \sin C &= \frac{c}{2R},\\ \sin A &= \frac{a}{2R};\end{aligned}\right| \qquad (8)$$

где R — радиус описанного круга. Подставляя найденные выражения в равенство (7) и упрощая, получим:

$$a^2b = c(a^2+b^2-c^2).$$

Уменьшим число параметров, воспользовавшись условием задачи:

$$(bc+c^2)\,b = c\,[(bc+c^2)+b^2-c^2],$$

что верно.

При попытке обратить рассуждения нам *потребуется перейти* от равенства (7) к равенству (6), но это не всегда возможно. Например, если $A = 88^\circ$, $2C = 92^\circ$, то $\sin A = \sin 2C$, но $A\neq 2C$. Из равенства (7) будет следовать равенство (6), если только углы A и $2C$ принадлежат интервалу монотонности синуса. Однако из условия задачи $a^2 = bc + c^2$ мы имеем лишь, что $a > c$ и $\sphericalangle A > \sphericalangle C$, то есть $0 < A < 180^\circ$, $0 < 2C < 180^\circ$.

Но все же наши *рассуждения не пропали* бесполезно. Так как углы A и $2C$ заключены в интервале $(0, 180^\circ)$, то есть в интервале монотонности косинуса, то лучше было бы перейти *от равенства (6) к равенсту* $\cos A = \cos 2C$. Проверьте, что этот способ позволяет получить решение задачи.

Пример 6. *Доказать, что*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha, \qquad (9)$$

если

$$3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta). \qquad (10)$$

Решение. *Предположим*, что равенство (9) верно. Чтобы воспользоваться условием (10), надо в равенстве (9) перейти к синусам соответствующих аргументов:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

откуда

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha \times \times \cos(\alpha+\beta);$$

$$\left(\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n\right);$$

$$\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta] =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta)+\sin(-\beta)];$$

$$3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta),$$

что верно по условию задачи.

Эти преобразования можно провести в обратном порядке (при всех допустимых значениях аргументов), поэтому равенство (9) верно.

Пример 7. *Доказать, что при всех допустимых значениях* α *имеет место неравенство*

$$|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| > |\sin\alpha+\cos\alpha|. \quad (11)$$

Решение. Предположим, что неравенство (11) верно. Уменьшим число функций:

$$\left|\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right| > |\sin\alpha+\cos\alpha|; \quad (12)$$

$$\frac{1}{|\sin\alpha\cdot\cos\alpha|} > |\sin\alpha+\cos\alpha|. \quad (13)$$

Чтобы сравнить по величине эти выражения, желательно выразить их через одну функцию, например, через синус:

$$\frac{2}{|\sin 2\alpha|} > \sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|. \quad (14)$$

Но $|\sin 2\alpha| \leqslant 1$, $\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$, поэтому $\frac{2}{|\sin 2\alpha|} \geqslant 2$, а $\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}$, и неравенство (14) верно при всех допустимых значениях α.

Из неравенства (14) следует (13), а значит, и (12), а из неравенства (12) следует (11), поэтому неравенство (11) верно при всех $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$.

Приведенные рассуждения показывают, что можно доказать более сильное неравенство

$$|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| \geqslant \sqrt{2}|\sin\alpha+\cos\alpha|.$$

Пример 8. *Доказать, что во всяком треугольнике*

$$h_a > \sqrt{p(p-a)}, \quad (15)$$

где h_a *— высота, опущенная на сторону* a, p *— полупериметр треугольника.*

Решение. Пусть верно неравенство (15). Уменьшим число параметров:

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\frac{1}{2}a} > \sqrt{p(p-a)}.$$

Мы воспользовались формулами

$$S_\Delta = \frac{1}{2}h_a\cdot a,$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} > \frac{1}{2}a.$$

Обе части неравенства положительны — их можно возвести в квадрат

$$(p-b)(p-c) > \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} > \frac{a^2}{4},$$

$$a^2+ab-ac+ac+bc-c^2- -ab-b^2+bc > a^2,$$

$$2bc-c^2-b^2 > 0,$$

$$-(b-c)^2 > 0,$$

что неверно. Следовательно, наше предположение о справедливости неравенства (15) ложно.

На этом решение задачи можно считать оконченным, ибо мы доказали, что формула (15) неверна. Впрочем, доказав, что формула (15) неверна, мы тем самым доказали, что всегда верна формула

$$h_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}.$$

Попробуйте выяснить, когда в последней формуле имеет место равенство. Здесь наш метод решения задачи «с конца» превратился в метод «от противного».

С описанным методом имеет некоторое сходство такой прием решения геометрических задач, когда искомые и другие неизвестные элементы (отрезки, углы и т. д.) обозначают буквами $x, y, z, \ldots$ и оперируют с ними как с известными.

Пример 9. *В сегмент, дуга которого содержит 120°, вписан квадрат. Найти сторону квадрата, если радиус окружности равен R.*

Решение. Пусть $ABCK$ — квадрат, $\smile EF = 120°$, O — центр окружности (рис. 3). Обозначим

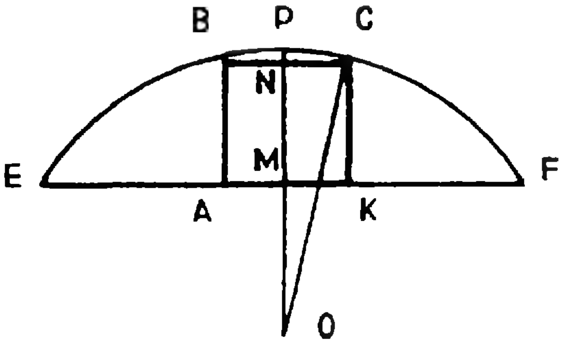


Рис. 3.

BC через $2x$ и проведем $OP \perp EF$. Тогда $ON = \sqrt{R^2 - x^2}$, $OM = \frac{1}{2}R$, $MN = 2x$,

$$OM = ON - MN.$$

Имеем уравнение

$$\frac{R}{2} = \sqrt{R^2 - x^2} - 2x,$$

решив которое, получим $x = \frac{R(\sqrt{19} - 2)}{10}$.

Ответ: $\frac{R(\sqrt{19} - 2)}{5}$.

Многие учащиеся допускают ошибки не только при решении задач, но и при изложении теоретических вопросов. Вот как, например, они доказывают известное тождество:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

(при $x > 0$ и $y > 0$).

«Перенесем $\log_a y$ в левую часть и воспользуемся ранее доказанной теоремой:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) + \log_a y = \log_a x;$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a x;$$

$$\log_a x = \log_a x.$$

Получили верное равенство, а значит, исходная формула доказана».

Ясно, что этими рассуждениями формула еще не доказана. Учащиеся обычно даже не понимают сущности допускаемой ошибки и в оправдание ссылаются на школьный учебник, где формула доказана, мол, точно так же. Для них осталась незамеченной ссылка в учебнике на равносильность формул.

Упражнения

1. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20°. Доказать, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

2. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, образуют угол, равный полусумме двух других углов.

3. Доказать неравенство

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} > 1 + \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

4. Доказать неравенство $(x + y)(x + y + 2\cos x) + 2 \geqslant 2\sin^2 x$. При каких значениях x и y достигается равенство?

5. В треугольнике ABC углы A, B и C образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Доказать, что

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

6. Доказать, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log_{10} \pi} > 4.$$

7. Доказать, что максимальная полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $\frac{M^2}{24}$, где M — сумма длин всех ребер параллелепипеда.

8. Верно ли, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с произведением оснований?

9. Проверьте, верно ли доказано следующее неравенство:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1?$$

«Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta - 2\sin\alpha - 2\sin\beta + 2 \geqslant 0,$$

или

$$(\sin\alpha - 1)^2 + (\sin\beta - 1)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \geqslant 0,$$

которое очевидно».

10. Верно ли, что $\sin(\cos\varphi) = \cos(\sin\varphi)$?

РАБОТА, ЭНЕРГИЯ, МОЩНОСТЬ

И. А. ЗАЙЦЕВ

Если на движущееся тело действует постоянная сила **F** под углом α к направлению перемещения **s** (рис. 1), то эта сила совершает работу

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha, \qquad (1)$$

где F и s — модули векторов **F** и **s**.

Работа силы равна произведению модулей векторов силы и перемещения тела на косинус угла между ними.

Рассмотрим подробно эту хорошо известную формулу. Если угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$ и работа силы положительна. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то есть когда сила **F** перпендикулярна перемещению тела **s**, работа, совершенная силой **F**, равна нулю. (В частности, равна нулю работа силы, сообщающей телу центростремительное ускорение. При равномерном движении тела по окружности сила, действующая на него, перпендикулярна скорости тела.) Если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и работа силы отрицательна. Разберемся, что это означает.

Возьмем простой случай, когда сила **F** параллельна вектору перемещения тела. В этом случае тело движется с ускорением $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$, направление которого совпадает с направлением вектора силы. Если направление вектора силы совпадает с направлением перемещения тела, то скорость тела увеличивается, а сила **F** совершает положительную работу. Если же вектор силы направлен противоположно вектору перемещения тела, то ускорение тела направлено противоположно вектору скорости и абсолютное значение скорости тела уменьшается. Но работа силы в этом случае, как следует из формулы (1), отрицательна $\left(\alpha > \frac{\pi}{2} \text{ и } \cos\alpha < 0\right)$. Следовательно, отрицательна работа той силы, которая тормозит движение тела, уменьшает его скорость.

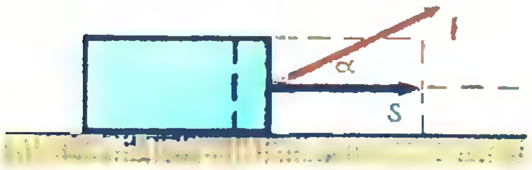


Рис. 1.

Произведение $F \cdot \cos\alpha$ — это величина проекции вектора силы на ось, вдоль которой направлен вектор перемещения тела (рис. 1). Поэтому можно сказать, что работа силы **F** равна произведению модуля вектора перемещения тела и проекции вектора силы **F** на ось, параллельную вектору перемещения.

Воспользовавшись этой формулировкой, можно легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если на тело действует несколько сил, то полная работа, совершенная этими силами, равна сумме работ, совершенных отдельными силами.*

Действительно, если на тело действует несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , то эти силы можно всегда заменить их равнодействующей $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots$ Поэтому общая работа всех сил равна работе равнодействующей:

$$A = R \cdot s \cdot \cos\alpha = s \cdot \text{пр.}\mathbf{R}.$$

Так как проекция вектора **R** на любую ось равна сумме проекций на эту ось векторов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots$, то

$$A = s\,(\text{пр.}\,\mathbf{F}_1 + \text{пр.}\,\mathbf{F}_2 + \ldots) = A_1 + A_2 + \ldots$$

В частности, если на тело действуют две силы, равные по абсолютной величине и направленные в противоположные стороны, то их работа равна нулю. Одна из этих сил совершает некоторую положительную работу, другая — такую же отрицательную.

Нетрудно доказать еще одну теорему.

Теорема 2. *Если тело совершает последовательно несколько перемещений:* $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots$, *так что* $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \ldots = \mathbf{s}$, *то работа силы* $\mathbf{F}$ *равна*

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha,$$

где α — *угол между векторами* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{s}$. Заметим, что произведение $s \cdot \cos\alpha$ равно проекции вектора перемещения тела на вектор силы (рис. 2) (правильнее сказать — проекции вектора перемещения тела на ось, параллельную вектору силы). Полная работа, совершенная силой F, равна

$$A = F \cdot \text{пр.}\,\mathbf{s}_1 + F \cdot \text{пр.}\,\mathbf{s}_2 + \ldots$$

Но сумма проекций векторов $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots$ на любую ось равна проекции на эту ось вектора $\mathbf{s}$. Следовательно,

$$A = F \cdot \text{пр.}\,\mathbf{s}.$$

Теперь мы можем сделать вывод: если тело двигалось так, что его полное перемещение равно нулю (тело вернулось в ту же точку, из которой начало двигаться) и во время движения на тело действовала постоянная сила $\mathbf{F}$, то работа силы равна нулю.

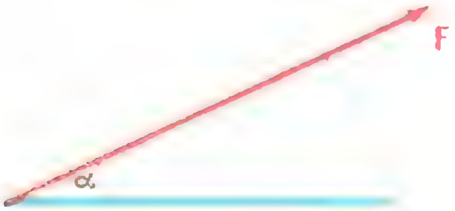


Рис. 2.

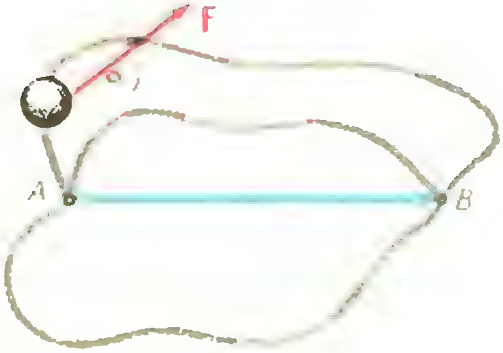


Рис. 3.

Задача 1. *Доказать, что работа постоянной силы не зависит от траектории движения тела.*

Как бы ни двигалось тело от точки A к точке B, его перемещение равно вектору $\mathbf{AB}$ (рис. 3). Следовательно, работа силы $\mathbf{F}$ равна $F \cdot AB \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{F}$. Это произведение не зависит от траектории тела.

До сих пор сила, действующая на тело, была постоянна. Рассмотрим теперь работу переменной силы. В этом случае мы уже не можем воспользоваться формулой (1). Для того чтобы определить работу переменной силы, нужно разбить все движение тела на малые перемещения, такие, чтобы силу на этих перемещениях можно было считать постоянной. На каждом из таких перемещений $\Delta\mathbf{s}_i$ работа равна

$$A_i = F_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos\alpha_i.$$

Полная работа равна сумме работ на отдельных перемещениях:

$$A = \sum A_i.$$

Ясно, что при таком вычислении работы мы получим приближенный результат. Если, скажем, на перемещении $\Delta\mathbf{s}_i$ сила меняется на 1% (вернее, не сила, а произведение $F \cdot \cos\alpha_i$), то точность наших вычислений тоже будет составлять 1%. Если нам нужна бо́льшая точность, то движение тела следует разбить на еще меньшие перемещения.

Практически важен случай, когда тело движется прямолинейно, а сила, действующая на тело, меняется по

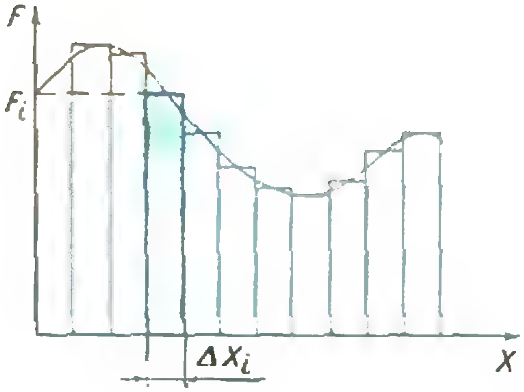


Рис. 4.

абсолютной величине, в то время как ее направление остается все время одним и тем же. Пусть, например, тело перемещается из одной точки в другую по прямой, а сила **F**, действующая на тело, направлена всегда вдоль этой прямой, но меняется от точки к точке так, как показано на графике зависимости силы от координаты x (рис. 4). Найдем работу этой силы. Разобьем движение тела на маленькие участки Δx_i. На каждом из таких участков силу будем считать постоянной и равной некоторому среднему значению F_i. Тогда работа на участке Δx_i —

$$A_i \approx F_i \cdot \Delta x_i,$$

то есть равна площади прямоугольника со сторонами F_i и Δx_i. Работа на всем пути, очевидно, равна сумме площадей таких прямоугольников. Так как при уменьшении участков Δx_i площадь всех заштрихованных прямоугольников будет стремиться к площади фигуры под графиком силы, то ясно, что работа силы равна в данном случае площади фигуры под графиком зависимости силы от координаты. Если этот график проходит ниже оси X, сила **F** отрицательна. Это означает, что вектор силы направлен противоположно вектору перемещения тела. Отрицательна и работа этой силы. Значит, при вычислении работы площадь фигуры теперь уже «над графиком силы» нужно взять со знаком минус. Точно так же работу нужно считать отрицательной, если график силы лежит выше оси X, но изменение координаты тела отрицательно.

Итак, мы знаем, как находить работу переменной силы. Найдем таким способом работу силы упругости пружины.

Задача 2. *Пружина, находящаяся между телом и упором (рис. 5), сжата на длину Δl. Жесткость пружины k. Тело может без трения двигаться по гладкой плоскости. В начальный момент концы пружины соединены нитью. Затем нить пережигают. Какую работу совершает сила упругости пружины к тому моменту, когда тело проходит положение «равновесия», при котором пружина не деформирована?*

Какую работу совершает сила упругости к моменту, когда тело оказывается справа от положения равновесия на расстоянии Δl_1 от него.

Нарисуем график зависимости силы упругости пружины от положения тела (его координаты x) в системе координат, начало которой совпадает с положением тела в тот момент, когда пружина не деформирована, а направление оси OX совпадает с направлением движения тела после пережигания нити (рис. 6). Сила

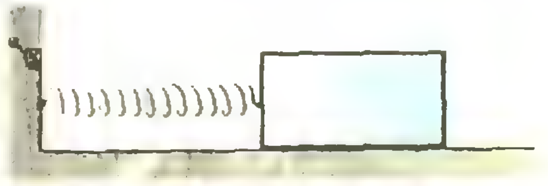


Рис. 5.

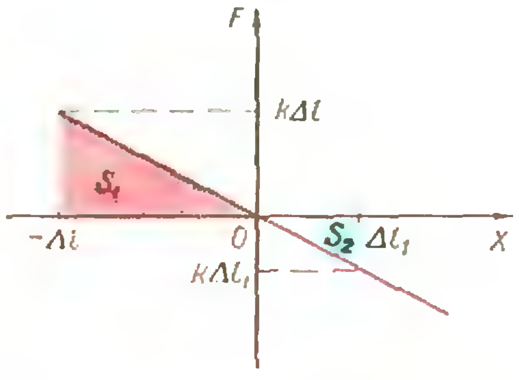


Рис. 6.

упругости пружины пропорциональна деформации пружины:

$$F = -kx.$$

Когда координата тела отрицательна, сила положительна, и наоборот.

Работа A_1, совершенная силой упругости пружины к тому моменту, когда тело окажется в положении равновесия, равна площади S_1 розового треугольника

$$A_1 = \frac{k\Delta l \cdot \Delta l}{2} = k\,\frac{(\Delta l)^2}{2}.$$

При дальнейшем движении тела направление силы упругости пружины противоположно направлению движения тела; работа отрицательна. Чтобы найти работу силы упругости к моменту, когда координата тела станет равной Δl_1, нужно из площади розового треугольника вычесть площадь синего:

$$A_2 = k\,\frac{(\Delta l)^2}{2} - k\,\frac{(\Delta l_1)^2}{2}.$$

При $\Delta l = \Delta l_1$ $A_2 = 0$.

Рассмотрим теперь другой вопрос — как меняется состояние движущегося тела, если на него действует сила **F**, совершающая работу A. Будем считать, что тело движется прямолинейно и сила **F** направлена вдоль линии движения тела. Если перемещение тела равно **s**, то

$$A = F \cdot s.$$

Сила F сообщает телу ускорение $a = \frac{F}{m}$, где m — масса тела. Поэтому

$$A = mas.$$

Но как мы знаем из кинематики, $as = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$, где v_0 — начальная, а v — конечная скорости тела. Следовательно,

$$A = \frac{m\,(v^2 - v_0^2)}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Величина $\frac{mv^2}{2}$ — это кинетическая энергия тела. Следовательно, работа силы **F** равна изменению кинетической энергии тела.

Задача 3. *На тело, описанное в предыдущей задаче, кроме силы упругости действует еще сила трения тела о плоскость. Масса тела равна m, коэффициент трения тела о плоскость равен f. Каким в этом случае будет максимальное отклонение тела Δl_1 от положения, при котором пружина не растянута?*

В тот момент, когда координата тела $x = \Delta l_1$, скорость тела равна нулю, так же как и в начальный момент движения тела. Следовательно, равно нулю и изменение кинетической энергии тела, и работа сил, действующих на тело.

Сила упругости пружины совершает работу

$$A_1 = \frac{k(\Delta l)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_1)^2}{2},$$

а сила трения — работу

$$A_2 = -mgf\,(\Delta l + \Delta l_1).$$

(Работа этой силы отрицательна, так как она направлена против движения тела.) Поэтому

$$\frac{k\,(\Delta l)^2}{2} - \frac{k\,(\Delta l_1)^2}{2} - mgf\,(\Delta l + \Delta l_1) = 0,$$

или

$$\frac{k}{2}\,(\Delta l + \Delta l_1)\,(\Delta l - \Delta l_1) = mgf\,(\Delta l + \Delta l_1),$$

отсюда

$$\Delta l_1 = \Delta l - \frac{2mgf}{k}.$$

До сих пор, говоря о работе, мы подчеркивали, что это работа силы. Но, как мы знаем, сила действует на данное тело со стороны другого тела. Поэтому вместо того, чтобы говорить о работе силы, можно говорить о работе тела, действующего на движущееся тело с данной силой, или просто о работе тела.

Движущееся тело может совершать работу, например, поднимать другое тело. При этом скорость движущегося тела и его кинетическая энергия будут меняться, причем работа, совершенная движущимся телом, равна изменению его кинетической энергии.

Теперь рассмотрим другой случай. Пусть у нас имеются два тела M_1 и M_2, которые притягиваются друг к другу, причем тело M_2 закреплено неподвижно, а тело M_1 движется из точки B (в которой оно было неподвижно) в точку A (рис. 7). (На рисунке показана только сила, действующая на тело M_1.) Двигаясь под действием силы F, тело M_1 может совершить работу

$$A = F \cdot s$$

(для простоты мы считаем, что сила F постоянна).

Но тело M_1 не обладало запасом кинетической энергии и совершило работу благодаря взаимодействию с телом M_2. Поэтому говорят, что тело M_1 обладает энергией, которая определяется относительным положением тел M_1 и M_2. Эту энергию называют потенциальной энергией. Если кинетической энергией обладает тело, то потенциальную энергию уже нельзя отнести к конкретному телу. Потенциальной энергией обладает система тел. Часто, правда, когда перемещение одного из тел и изменение его кинетической энергии мало по сравнению с изменениями движения второго тела, говорят, что потенциальная энергия относится к одному телу — к тому, которое совершает большее перемещение. Например, говорят о потенциальной энергии тела, взаимодействующего с Землей, вместо того чтобы говорить о потенциальной энергии системы тело — Земля.

Потенциальной энергией обладает и может совершить работу любое упруго деформированное тело (система, состоящая из частей упруго деформированного тела), тело, взаимодействующее с Землей (система тело — Земля) и вообще любая система тел, взаимодействующих друг с другом силами упругости или силами тяготения или электрическими кулоновскими силами.

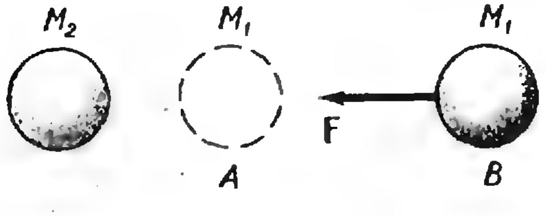


Рис. 7.

Потенциальная энергия, которой обладает тело, имеет важное отличие от кинетической энергии. Если тело неподвижно ($v=0$), то его кинетическая энергия равна нулю и тело не может совершить работу за счет изменения его кинетической энергии — ведь кинетическая энергия равна $\frac{mv^2}{2}$ и не может быть отрицательной. Если она равна нулю, то уменьшиться уже не может. В то же время, если тело находится на высоте H над поверхностью Земли, то, падая, оно может совершить работу, равную работе силы тяжести:

$$A = mgH.$$

Поэтому можно сказать, что тело обладает потенциальной энергией mgH. Но тело может упасть и в шахту глубиной h. Тогда оно сможет совершить работу $mg(H + h)$ и нам нужно считать, что потенциальная энергия равна $mg(H + h)$. Так чему же она равна на самом деле?

Дело в том, что потенциальная энергия определяется, если мы задали положение тел, при котором, как мы считали, потенциальная энергия равна нулю. Это, однако, не означает, что, двигаясь из этого положения, тело не может совершить работу. Просто потенциальная энергия тела будет уменьшаться, становясь отрицательной. Какое из положений тела принять за положение «нулевой потенциальной энергии» — не имеет значения: во все законы и уравнения входит изменение потенциальной энергии, а оно как раз и не зависит от выбора «нуля» потенциальной энергии. Для кинетической энергии «нулем» — «нулевым состоянием» — является состояние, в котором тело неподвижно.

Итак, работа, которую может совершить тело, вначале неподвижное, равна изменению его потенциальной энергии. Если тело M_1 взаимодействует только с телом M_2, то есть движется только под действием силы **F**, то его потенциальная энергия уменьшается, то есть уменьшается его возможность совершить работу. Зато в этом случае увеличивается кинетическая энергия тела, причем изменение кинетической энергии равно работе силы **F**, а изменение потенциальной энергии тоже равно работе силы **F**, но оно отрицательно.

Это означает, что *изменение потенциальной энергии равно по величине изменению кинетической энергии, так что их сумма остается все время постоянной.*

Мы пришли к очень важному выводу — к закону сохранения механической энергии изолированной системы. Изолированной, так как нам было важно, чтобы на тело M_1 не действовали другие тела, кроме тела M_2, то есть чтобы тела M_1 и M_2 составляли изолированную систему. Если на данную систему действуют внешние по отношению к ней силы, то полная энергия системы меняется на величину работы этих сил.

Решим теперь несколько задач.

Задача 4. *Веревка перекинута через блок, так что концы веревки находятся на одинаковой высоте от земли (рис. 8). Затем блок слегка поворачивают и веревка начинает соскальзывать с блока под действием силы тяжести. Какую скорость будет иметь веревка в тот момент, когда она полностью слетит с блока? Длина веревки l, масса m.*

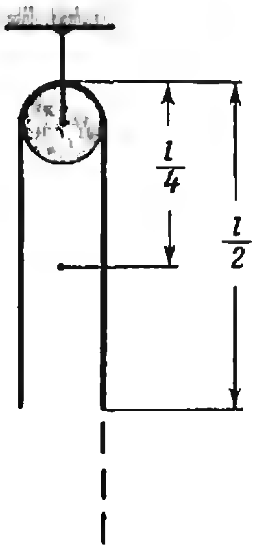


Рис. 8.

В начальный момент центр масс веревки находится на расстоянии $\frac{l}{4}$ от блока. В тот момент, когда веревка соскользнет с блока, ее центр масс будет находиться на расстоянии $\frac{l}{2}$ от блока. При этом потенциальная энергия системы веревка — Земля изменится на величину

$$mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{4}\right)=mg\frac{l}{4}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$mg\frac{l}{4}=\frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{gl}{2}}.$$

Задача 5. *Сила F поднимает груз массы m на высоту H. Какую работу совершает эта сила? Как меняется потенциальная энергия тела?*

Работа силы F равна $F\cdot H$, а изменение потенциальной энергии — величине mgH, m — масса тела. Разница $FH-mgH$ пошла на увеличение кинетической энергии тела.

Задача 6. *Какую мощность должен иметь насос для того, чтобы перекачивать Q литров воды за 1 секунду из колодца, глубина которого h, на поверхность земли? Площадь сечения трубы, через которую перекачивается вода, s.*

Вода должна иметь в трубе скорость $v=\frac{Q}{s}$. Это означает, что насос должен за время t совершить работу, равную изменению потенциальной энергии массы воды $m=Q\rho t$:

$$\Delta W_п = mgh$$

(ρ — плотность воды) и изменению

ее кинетической энергии

$$\Delta W_{к} = \frac{mv^2}{2};$$

$$A = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{Q^3\rho t}{2s^2} + Q\rho tgh.$$

Мощность насоса равна работе, которую он совершает за 1 секунду:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Q^3\rho}{2s^2} + Q\rho gh.$$

Энергия, так же как и работа, зависит от выбора системы координат. Это естественно — ведь от системы координат зависит как скорость тела, так и его перемещение.

Решим в заключение задачу, в которой выбор системы координат существен.

З а д а ч а 7. *Два одинаковых по величине и знаку заряда q находятся на расстоянии R друг от друга. На какое минимальное расстояние r могут сблизиться эти заряды, если в начальный момент один из зарядов покоится, а другой движется ему навстречу со скоростью v?*

Часто эту задачу решают, пользуясь системой координат, связанной с зарядом, который вначале покоился. В этой системе координат энергия системы вначале равна сумме ее потенциальной энергии $W_п = \frac{q^2}{R}$ и кинетической энергии движущегося заряда $\frac{mv^2}{2}$

$$W = \frac{q^2}{R} + \frac{mv^2}{2}.$$

В тот момент, когда заряды находятся на минимальном расстоянии друг от друга, они в этой системе координат неподвижны и энергия системы равна ее потенциальной энергии $\frac{q^2}{r}$. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{q^2}{r} = \frac{q^2}{R} + \frac{mv^2}{2},$$

отсюда

$$r = R\frac{1}{1 + \frac{mv^2R}{2q^2}}.$$

Однако, это решение неверное. Система координат, связанная с движущимся неравномерно зарядом, неинерциальна. В ней нельзя пользоваться ни II законом Ньютона, ни законом сохранения энергии.

Решим эту задачу, воспользовавшись неподвижной системой координат. Здесь в начальный момент заряды имеют скорости

$$v_1 = 0 \text{ и } v_2 = v,$$

а энергия системы равна

$$\frac{q^2}{R} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{q^2}{R} + \frac{mv^2}{2}.$$

Из закона сохранения импульса следует, что в тот момент когда расстояние между зарядами минимально, оба заряда движутся с одинаковыми скоростями, равными $\frac{v}{2}$. Энергия системы равна

$$\frac{q^2}{r} + \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} + \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \frac{q^2}{r} + \frac{mv^2}{4}.$$

Из закона сохранения энергии найдем:

$$r = R\frac{1}{1 + \frac{mv^2R}{4q^2}}.$$

Упражнения

1. Колесо катится без проскальзывания со скоростью v. Найти кинетическую энергию этого колеса. Масса колеса равна m.

2. Шарик радиуса $r = 15$ *мм* и массой $m = 5$ *г* погружен в воду на глубину $h = 30$ *см*. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $h_1 = 10$ *см*. Какая часть механической энергии шарика перешла в тепло из-за трения шарика о воду?

3. Найти, воспользовавшись законом сохранения энергии, скорость истечения жидкости из отверстия у дна сосуда, если уровень жидкости находится на высоте h от дна.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ФИЗИКЕ В МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ В 1972 ГОДУ

Билет 1

1. При скоростном спуске лыжник шел вниз по склону $\varphi = 45°$, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $k = 0{,}1$. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости: $F_c = \alpha v^2$, где α — постоянная величина, равная $0{,}7\ \frac{н}{(м/с)^2}$. Какую максимальную скорость мог развить лыжник, если его масса $m = 90$ *кг*?

2. На VT-диаграмме изображен замкнутый процесс (цикл), который совершает некоторая масса азота (рис. 1). Известно, что минимальное давление газа в этом процессе $P_{\min} = 3{,}28$ *атм*. Определить массу газа и его давление в точке *1*. Величины T_1, T_2, V_1 и V_2 указаны на рисунке.

3. Две параллельные сетки подключены к батарее с э. д. с. $E = 10$ *в*, как показано на рисунке 2. Слева под углом 45° к сеткам падает параллельный пучок электронов с начальной энергией $U_0 = 10$ *эв*. На какой угол α отклонится пучок, пройдя сетки?

4. Две собирающие линзы с одинаковыми фокусными расстояниями F расположены на расстоянии $F/2$ друг от друга (рис. 3). С помощью этой системы получены два изображения Солнца — одно образовано лучами, которые после преломления в первой линзе миновали вторую, другое — лучами, прошедшими последовательно через обе линзы. При каком отношении диаметров линз освещенности изображений будут равны?

Билет 2

1. Палочка массы m одним концом упирается в угол между стеной и полом. В стене на высоте, равной длине палочки, просверлено гладкое отверстие, через которое проходит нить, привязанная к верхнему концу палочки. Другой конец нити перекинут через блок и на нем висит некоторый груз (рис. 4). Какова должна быть величина груза, чтобы палочка из любого начального положения всегда прижималась к стене?

2. Сосуд емкостью $V = 10$ литров откачивается насосом, имеющим производительность $a = 100$ *л/мин*. До какого наилучшего вакуума может быть откачан сосуд, если из-за имеющейся в нем течи давление в откаченном сосуде поднимается на $\Delta p = 1$ *мм рт. ст.* за время $t = 1$ *час* 40 *мин* (при остановленном насосе)? Температуру воздуха в сосуде считать неизменной.

Примечание. Производительность вакуумных насосов принято характеризовать объемом газа, который удаляется из откачиваемого сосуда в 1 *с*.

3. В схеме, изображенной на рисунке 5, положение движка «*А*» подобрано так, что ток $I_2 = 0$. Чему равен при этом ток I_1?

4. В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса $r_1 = 5$ *мк* при содержании вещества $\gamma = 0{,}04$ *г* в кубометре воздуха дальность видимости составляет $l_1 = 50$ *м*. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиуса $r_2 = 10$ *мк*, если видимость сокращается до $l_2 = 20$ *м*?

√Билет 3

1. Космонавты, высадившиеся на Луну, должны возвратиться на базовый космический корабль, который летает по круговой орбите на высоте, равной радиусу Луны $R_Л = 1740$ *км*. Какую начальную скорость

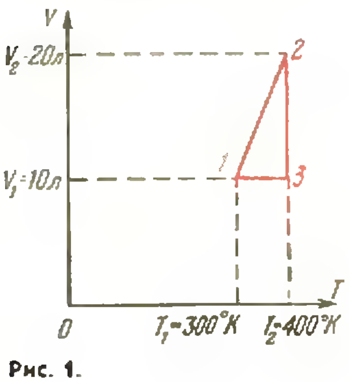


Рис. 1.

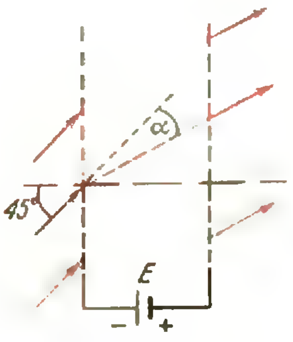


Рис. 2.

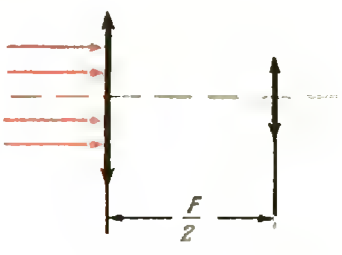


Рис. 3.

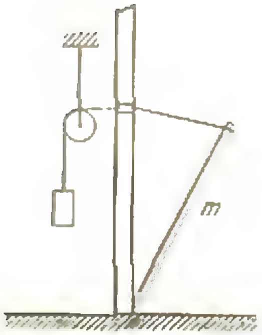


Рис. 4.

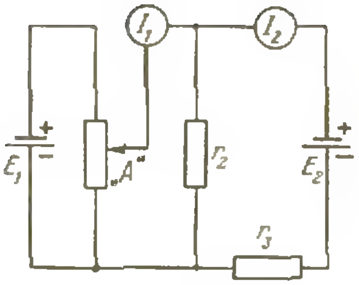


Рис. 5.

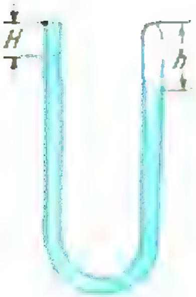


Рис. 6.

с на поверхности Луны необходимо сообщить лунной кабине, чтобы стыковка с базовым кораблем стала возможной без дополнительной коррекции величины скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g = 1{,}7$ *м/с²*.

Примечание. Потенциальная энергия тела массы m, удаленного на расстояние r от центра планеты с массой M, определяется соотношением $W = -\gamma \frac{Mm}{r}$, где γ — гравитационная постоянная.

2. На рисунке 6 изображена одна из простейших конструкций термометра, «запоминающего» максимальную температуру, до которой нагревали прибор во время опыта. Длинная U-образная трубка, запаянная с одного конца, заполнена при температуре $T_0 = 273°$ K ртутью, как показано на рисунке. В правом колене над ртутью находится некоторое количество воздуха, высота столба которого $h = 24$ *см*. При нагревании прибора воздух, расширяясь, вытесняет часть ртути. После охлаждения до первоначальной температуры T_0 уровень ртути в левом открытом колене понизился на $H = 6$ *см*. Определить температуру, до которой нагревался прибор. Атмосферное давление $p_A = 760$ *мм рт. ст.* Давлением паров ртути и ее тепловым расширением пренебречь.

3. Элемент атомной батареи электрического тока представляет собой сферический конденсатор. На внутреннюю сферу нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ *м/с*. Определите э. д. с. этого элемента. Отношение заряда α-частицы к ее массе $q/M =$

$$4{,}8 \cdot 10^7 \ \frac{к}{кг}.$$

4. На дне сосуда, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек, наклонившийся над сосудом, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии наилучшего зрения $d = 25$ *см*, когда расстояние от глаза до поверхности воды составляет $h = 5$ *см*. Определить глубину сосуда. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Билет 4

1. Штанга массы m и длиной l закреплена нижним концом на шарнире (рис. 7). К верхнему концу штанги привязана нить, переброшенная через блок, укрепленный на высоте H от шарнира и на одной с ним вертикали. Какой минимальный груз нужно подвесить на другой конец нити, чтобы штанга устойчиво стояла в вертикальном положении?

2. Водород, содержащийся в баллоне объемом $V = 100$ *л* под давлением $p = 100$ *атм*, используется для наполнения метеорологических шаров — зондов, имеющих мягкую оболочку. Каждый шар — зонд должен иметь подъемную силу $F = 2$ *кГ*. Сколько шаров можно наполнить водородом из одного баллона? Температура воздуха в баллоне и шарах равна температуре окру-

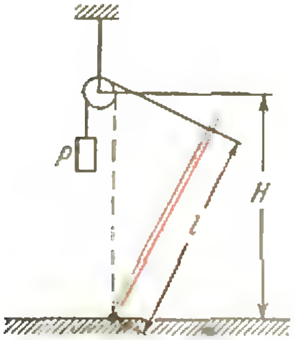


Рис. 7.

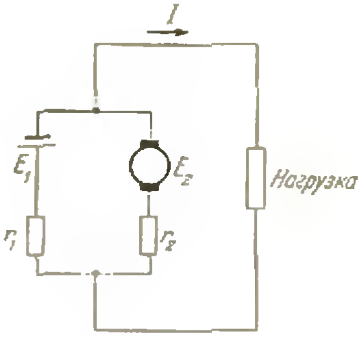


Рис. 8.

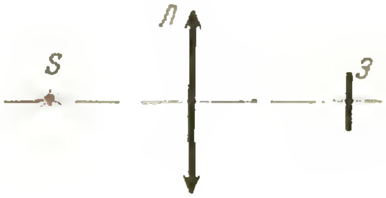


Рис. 9.

жающего воздуха $T=300^\circ$ К. Молекулярный вес воздуха принять равным 29.

3. Источниками электрического тока в системах электрического оборудования современных автомобилей являются генератор постоянного тока и соединенный с ним параллельно аккумулятор (рис. 8). Э.д.с. аккумулятора $E_1=12$ *в*, э.д.с. генератора, $E_2=14$ *в*, и его внутреннее сопротивление $r_2=0{,}05$ *ом*. При каком токе I, потребляемом нагрузкой, аккумулятор начнет разряжаться?

4. На расстоянии l от небольшого экрана (рис. 9) находится точечный источник света S. Между источником и экраном поместили собирающую линзу *Л* так, что источник расположен в фокусе линзы. Оказалось, что освещенность экрана не изменилась. Какая часть световой энергии теряется при прохождении линзы? Фокусное расстояние линзы $F=\frac{2}{3}l$.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1972 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Отделение общей геологии геологического факультета

1. Решить уравнение:

$$2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\log_4 x + \log_{1/4} y^3 = -1, \\ \log_4 x^4 - \log_{1/4} y = 5. \end{cases}$$

3. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 50 *км*, навстречу друг другу одновременно вышли 2 пешехода. Через 5 часов встретились. После встречи скорость первого пешехода, идущего из A в B, уменьшилась на 1 *км/ч*, а скорость второго пешехода, идущего из B в A, возросла на 1 *км/ч*.

Известно, что первый пешеход прибыл в пункт B на 2 часа раньше, чем второй прибыл в пункт A. Определить первоначальную скорость первого пешехода.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{13}{2-x} > x+4.$$

5. Дан треугольник ABC, в котором $AB=6$ *см*, $BC=7$ *см*, $AC=5$ *см*. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке d. Определить площадь треугольника AdC.

Отделение геофизики геологического факультета

1. Поезд метро состоит из нескольких вагонов, причем в каждом вагоне находится одинаковое число пассажиров. Количество пассажиров в одном вагоне превосходит число вагонов на 9. Когда на станции во 2-й вагон вошло 10 человек, и из остальных вышло по 10 человек, то число пассажиров во 2-м вагоне оказалось равным числу пассажиров, оставшихся во всех остальных вагонах. Сколько пассажиров было первоначально в каждом вагоне?

2. Решить уравнение:

$$3\,\mathrm{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{x+1}.$$

4. Трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN. Диагональ KM трапеции равна 4 *см*, а боковая сторона KL равна 3 *см*. Определить длину основания LM.

5. Три шара попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с катетом, равным 3 *см*, и противолежащим углом 30°. Определить радиусы данных шаров.

НОВЫЕ КНИГИ

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1972 году, представляющие интерес для наших читателей.

В III—IV кварталах 1972 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).

МАТЕМАТИКА

Издательство «МИР»

1. **Эббинхауз Г., Якобс К., Ман Ф., Хермес Г.,** *Машины Тьюринга и рекурсивные функции.* (Объем 12 л., тираж 40 000 экз., цена 86 к.)

Эта коллективная монография немецких математиков содержит элементарное изложение теории машин Тьюринга и рекурсивных функций — важного раздела современной математической логики, нашедшего широкое применение в кибернетике. Помимо основ этой теории, книга содержит ряд существенных результатов, включая достижения последнего времени (в частности, результаты Колмогорова о связи машин Тьюринга с основаниями теории вероятностей). Изложение ведется строго, но доступно, содержит много примеров и пояснений.

Монографию с интересом прочтут читатели разных категорий, начиная от учащихся старших классов школ с математической специализацией и кончая научными работниками и преподавателями высшей школы.

2. **Дэвис М.** *Теория игр.* (Объем 12 л., тираж 75 000 экз., цена 60 к.)

Теория игр — одна из молодых и бурно развивающихся областей современной математики. Ее предмет — формальное изучение конфликтных ситуаций в самом широком смысле слова. Идеи и методы теории игр находят приложение в экономике, военном деле, биологии и других отраслях знания.

Книга М. Дэвиса представляет собой увлекательное популярное введение в теорию игр. Наиболее яркая особенность книги состоит в том, что автор, начиная с основных, первичных понятий теории игр, доводит читателя до весьма современных и тонких идей, неизменно выдерживая общедоступный стиль изложения, не требующий от читателя математической подготовки. В шести разделах книги рассмотрены соответственно игры одного лица, конечные антагонистические игры, теория полезности, игры двух лиц с ненулевой суммой и игры многих лиц.

Книга представляет интерес для самых широких кругов читателей, желающих познакомиться с основными идеями теории игр. Ее с удовольствием прочтут и математики.

3. **Сойер У.** *Путь в современную математику.* (Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 55 к.).

Профессор У. Сойер известен советским читателям по книге «Прелюдия к математике» и статье «Алгебра» в сборнике «Математика в современном мире».

В книге «Путь в современную математику», обсуждая идеи реформы математического образования, автор делает попытки выделить новые вопросы современной математики для включения в школьную программу.

Рассматривая отдельные темы математики (отображения, матрицы, векторные пространства и др.), которые приобретают важное значение в научной и инженерной практике, автор показывает, как многие из этих идей и понятий естественно возникают и развиваются из тем традиционной математики.

Сойер адресует свою книгу молодежи, но она будет с интересом прочитана не только студентами и школьниками, но и преподавателями, особенно в связи с перестройкой школьных учебных программ.

Издательство «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

4. **Зорин В. В.** *Пособие по математике для поступающих в вузы.* (Объем 12 л., цена 59 к.)

Пособие разъясняет основные понятия элементарной математики. Все пояснения даются применительно к тем требованиям, которые предъявляются к поступающим в вузы.

Пособие предназначается для лиц, готовящихся к конкурсным экзаменам в вуз.

5. **Соломоник В. С., Милов П. Н.** *Сборник вопросов и задач по математике.* (Объем 15 л., тираж 50000 экз., цена 67 к.)

Книга составлена в соответствии с программой приемных экзаменов для поступающих в средние специальные учебные заведения после окончания восьми классов средней школы. Включены примеры и задачи по арифметике, алгебре и геометрии.

Почти все разделы начинаются с краткого теоретического материала. Имеются также вопросы, позволяющие уяснить, насколько основательно усвоена теория.

ФИЗИКА

Издательство «МИР»

6. Липсон Г. *Великие эксперименты в физике.* (Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 72 к.)

Книга известного английского физика Г. Липсона содержит описание экспериментов, которые знаменовали собой гигантские шаги в познании окружающего мира. В ней охвачены практически все важнейшие разделы физики — от простого механического движения до строения атома, а также те эксперименты, которые привели к пересмотру представлений классической физики.

Книга написана живо и эмоционально. Она рассчитана на самые широкие круги читателей — от школьников и студентов до научных работников.

7. Сегре Э. *Энрико Ферми — физик.* (Объем 18 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 50 к.)

Биография всемирно известного ученого, одного из основоположников ядерной физики и атомной энергетики Энрико Ферми, написана его учеником и ближайшим сотрудником Эмилио Сегре. Книга раскрывает образ Э. Ферми как ученого: в ней рассказывается о стиле его работы, о проблемах, которыми он занимался, о взаимоотношениях с сотрудниками и учениками. Высокий научный уровень книги сочетается с популярным изложением.

Книга интересна самым различным читателям — от специалистов — физиков до студентов и старших школьников.

8. Грегори Р. *Разумный глаз.* (Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 55 к.)

Автор книги — профессор бионики в Эдинбургском университете, один из крупнейших в мире специалистов по психологии зрения.

Отвечая на вопрос: «каким образом мозг извлекает сведения о внешнем мире из некоторого узора пятен света на сетчатке глаза?» и многие другие, Грегори рассказывает о связи между важнейшими факторами восприятия.

Материал богато иллюстрирован рисунками, которые позволяют читателю проверить предлагаемые ему сведения.

Книга представляет интерес для любителей научно-популярной литературы.

9. Кемпфер Ф. *Основы современной физики.* (Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 80 к.)

Преподавателям физики как средней, так и высшей школы с каждым годом становится все труднее «угнаться» за стремительным ростом своей науки. Единственно возможный выход состоит в перестройке структуры изложения физики, максимальном ее приближении к структуре современной науки.

Предлагаемая книга профессора Кемпфера, известного советским читателям по русскому переводу его фундаментальной монографии «Основные положения квантовой механики» («Мир», 1967), представляет собой удачную попытку решения этой нелегкой задачи. Пользуясь весьма скромным математическим аппаратом, автор оригинально систематизировал, критически осмыслил и изящно изложил основные представления, на которых строится физика.

Книга адресована очень широкому кругу читателей, в первую очередь студентам младших курсов и школьникам, для которых она вполне доступна.

Издательство «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

10. Гринбаум М. И. *Самодельные приборы по физике.* (Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 35 к.)

В книге приведены описания различных приборов по физике, которые могут быть изготовлены в условиях школы. Даются рекомендации к применению этих приборов в практике школьного физического эксперимента.

11. Коган Б. Ю. *Задачи по физике.* (Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 60 к.)

Сборник состоит из задач повышенной трудности, которые учитель может использовать на факультативных занятиях, при проведении олимпиад, в кружковой работе, а также рекомендовать учащимся при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

Первая часть сборника содержит условия задач и основные теоретические сведения по курсу элементарной физики.

Во второй части приводятся решения всех задач, а в конце сборника — ответы ко всем задачам.

Издательство «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

12. Милковская Л. Б. *Повторим физику.* (Объем 27,5 л., тираж 200000 экз., цена 88 к).

Настоящее пособие предназначено для молодежи, готовящейся к поступлению в вузы самостоятельно или на заочных курсах. Его содержание соответствует программе по физике для поступающих в вузы. Оно отличается от пособий этого рода тем, что каждая его глава содержит систематическое изложение темы, вопросы для повторения, примеры решения задач и задачи для самостоятельных упражнений.

В пособие включены некоторые вопросы, связанные с современными достижениями физики.

13. Гольдфарб Н. И. *Сборник вопросов и задач по физике.* (Объем 18 л., тираж 75000 экз., цена 75 к.)

Предлагаемое пособие представляет собой систематический сборник вопросов и задач по физике по всем разделам программы вступительных экзаменов в вузы с повышенными требованиями по физике.

В него включены вопросы и задачи по физике, которые предлагались в различных вузах физического профиля.

М. Л. Смолянский

VI Всесоюзная математическая олимпиада школьников

Л. Г. Лиманов

Весной во всех городах Союза прошли городские и районные олимпиады. Их победители и победители конкурса журнала «Квант»*) встретились на областных и республиканских олимпиадах.

12 апреля в Челябинске открылась 6-я Всесоюзная олимпиада школьников по математике. В ней приняли участие победители областных и республиканских олимпиад, а также школьники, получившие I и II премии 5-й Всесоюзной олимпиады (236 десятиклассников, 196 девятиклассников и 131 восьмиклассник).

Челябинск радушно встретил своих гостей. Успешному выполнению напряженной шестидневной программы олимпиады помогло то, что челябинцы очень тщательно подготовились к ее проведению.

Школьники разместились во втором и четвертом интернатах. 13 и 14 апреля в классах интернатов они решали задачи. Каждый день на решение отводилось около пяти часов. Вот задачи, которые были им предложены (большинство из них вы уже видели в «Задачнике «Кванта», см. «Квант» №№ 7, 8, 1972 г.).

Восьмой класс

Первый день

1. **M156** («Квант» № 8).
2. **M154** («Квант» № 7).
3. *Найти наибольшее целое число x такое, чтобы число* $4^{27}+4^{1000}+4^{x}$ *являлось полным квадратом.*

Второй день

4. **M151** («Квант» № 7).
5. *Семиугольник* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ *вписан в окружность. Доказать, что если центр этой окружности лежит внутри семиугольника, то сумма углов при вершинах* A_1, A_3 *и* A_5 *меньше* 450°.
6. **M153** («Квант» № 7).

Девятый класс

Первый день

1. **M152** («Квант» № 7).
2. **M158** («Квант» № 8).
3. **M154** («Квант» № 7).
4. **M155** («Квант» № 7).

Второй день

5. *Пусть* x, y *— положительные числа,* s *— наименьшее из чисел* x, $y+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. *Найти наибольшее возможное значение* s. *При каких* x *и* y *оно достигается?*
6. *Точка O, лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждыми двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Доказать, что эта точка равноудалена от вершин многоугольника.*
7. **M159** («Квант» № 8).

Десятый класс

Первый день

1. **M152** («Квант» № 7).
2. **M158**. («Квант» № 8).
3. *O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника ABCD. Доказать, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников AOB и COD, перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения высот треугольников BOC и AOD.*
4. **M155** («Квант» № 7).

Второй день

5. **M151** («Квант» № 7).
6. **M157** («Квант» № 8).
7. **M160** («Квант» № 8).

Разберем задачи, не вошедшие в «Задачник «Кванта».

Восьмой класс

Задача 3. *Предположим, что* $x \geqslant 27$. *Тогда, поскольку* 4^{27} *является квадратом, нам нужно отыскать максимальное* x_1, *для которого выполняется равенство* $1+4^{973}+4^{x_1}=n^2$. Его можно записать так: $1+4^{973}=(n+2^{x_1})(n-2^{x_1})$. Отсюда, так как $n+2^{x_1}\leqslant 1+4^{973}$ и $n-2^{x_1}\geqslant 1$, следует, что $2\cdot 2^{x_1}\leqslant 4^{973}$ и $x_1\leqslant 1945$. Как легко видеть, это значение x_1 подходит: $1+4^{973}+4^{1945}=(1+2^{1945})^2$. Окончательно, $x=x_1+27=1972$. (Это и не удивительно, ведь олимпиада происходила именно в 1972 году).

---

*) Школьники, успешно решавшие задачи из «Задачника «Кванта» (см. «Квант» № 3, 1972 г.).

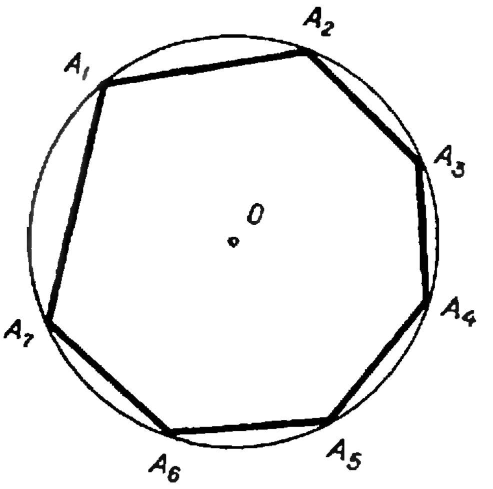


Рис. 1.

Задача 5. *Нам нужно доказать, что* $\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5<450°$. Для вписанных углов A_1, A_3 и A_5 верны следующие равенства*)

$$\angle A_1=180°-\frac{\smile A_2A_7}{2},$$

$$\angle A_3=180°-\frac{\smile A_4A_2}{2},$$

$$\angle A_5=180°-\frac{\smile A_6A_4}{2} \text{ (см. рис. 1).}$$

Поэтому

$$\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=$$
$$=3\cdot 180°-\frac{\smile A_6A_7}{2}=2\cdot 180°+\frac{\smile A_7A_6}{2}.$$

Но дуга $A_7\ A_6$ не может быть больше полуокружности, поскольку в противном случае центр окружности O не лежал бы внутри нашего семиугольника. Следовательно,

$$\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=360°+$$
$$+\frac{\smile A_7A_6}{2}<360°+90°=450°.$$

Девятый класс

Задача 5. Проще всего решать эту задачу с конца — сперва догадаться до ответа, а потом доказать, что он правильный. Угадать ответ можно с помощью таких соображений. Пусть при некоторых значениях $x=x_0$ и $y=y_0$ значение s максимально и равно s_0. Предположим, что числа x_0, $y_0+\frac{1}{x_0}$, $\frac{1}{y_0}$ не равны между собой. Пусть, например, $s_0<y_0+\frac{1}{x_0}$. Увеличим x_0 чуть-чуть так, чтобы для нового значения x, равного x'_0, сохранилось неравенство $s_0<y_0+\frac{1}{x'_0}$. После этого уменьшим чуть-чуть y — вновь так, чтобы для нового значения y, равного y'_0, сохранилось неравенство $s_0<y'_0+\frac{1}{x'_0}$. Мы пришли к таким значениям x'_0 и y'_0, что для них s больше s_0. Аналогично рассматриваются случаи $s_0<x_0$ и $s_0<\frac{1}{y_0}$. Поэтому $x_0=y_0+\frac{1}{x_0}=\frac{1}{y_0}=s_0$, откуда $x_0=\sqrt{2}$, $y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_0=\sqrt{2}$. Эти рассуждения не вполне строги, и дело тут не в словах «чуть-чуть», а в том, что мы предположили, что есть набор x_0, y_0, для которого s принимает максимальное значение. (Этот факт далеко не очевиден.) Однако, догадавшись до ответа $s_0=\sqrt{2}$, совсем просто довести решение до конца. Действительно, пусть для некоторого набора x_1, y_1, $s>\sqrt{2}$. Тогда $x_1>\sqrt{2}$, $\frac{1}{y_1}>\sqrt{2}$, откуда,

$$\frac{1}{x_1}+y_1<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}, \text{ то есть}$$

s для этого набора меньше $\sqrt{2}$. Полученное противоречие и показывает, что максимальное значение s равно $\sqrt{2}$ и что оно достигается только при $x=\sqrt{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 6. Проведем индукцию по числу вершин. Для треугольника (см. рис. 2) доказать утверждение задачи совсем просто. Действительно, сумма углов α, β и γ равна 360°, поэтому хотя бы два из этих углов — тупые. Но тупой угол не может прилегать к основанию в равнобедренном треугольнике. Поэтому $OA=OB=OC$. Многие школьники, решавшие задачу таким образом, после

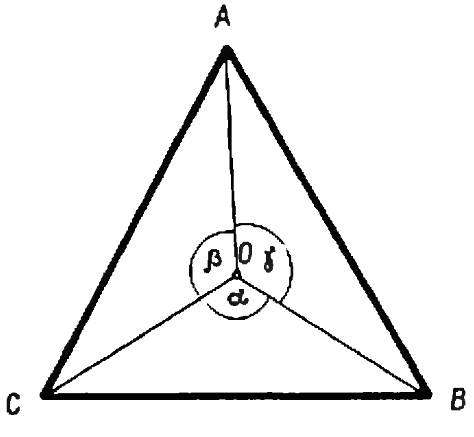


Рис. 2.

---

*) Отсчет дуг производится против часовой стрелки.

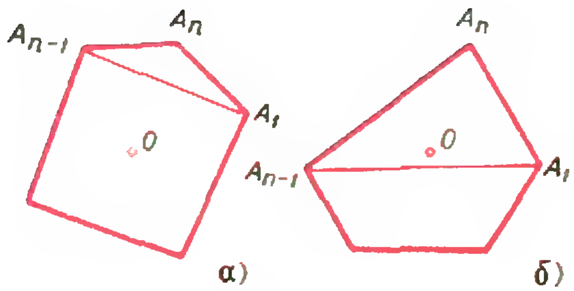


Рис. 3.

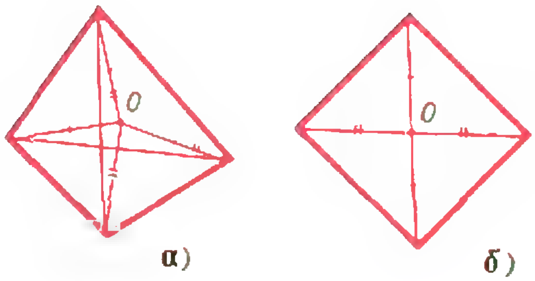


Рис. 4.

этого рассуждали так: проведем теперь диагональ $A_{n-1}A_1$ (см. рис. 3, *а*) и, воспользовавшись индуктивным предположением, будем считать, что отрезки $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{n-1}$ равны между собой. Они упускали при этом случай, изображенный на рисунке 3, *б*. Довести доказательство до конца можно следующим образом. Для четырехугольника утверждение задачи верно (см. рис. 4, *а*, *б*). Пусть у многоугольника больше четырех сторон. Отыщем такой треугольник $A_k A_{k+1} A_{k+2}$, что точка O ему не принадлежит (рис. 5). Проведем теперь такую диагональ через вершину A_{k+1}, что точка O на ней не лежит*). Тогда из индуктивного предположения вытекает, что расстояние от точки O до любой из вершин равно длине отрезка OA_{k+2}.

Вот набросок другого решения (см. рис. 6). Докажем что отрезки OA_1 и OA_2 равны. (Если угол A_1OA_2 — тупой, то отрезки OA_1 и OA_2 равны. Поэтому будем считать этот угол острым.) Если в желтой зоне есть вершина, то поскольку углы A_1OA_l и A_2OA_l — тупые, отрезки OA_1 и OA_2 равны OA_l, откуда $OA_1 = OA_2$. Если же в желтой зоне вершин нет, то в синей и красной зонах есть по вершине. Отсюда следуют такие равенства $OA_1 = OA_m$, $OA_2 = OA_k$ и $OA_k = OA_m$ (поскольку угол A_1OA_2 — острый, угол A_kOA_m — тупой).

Десятый класс

Задача 3. Рассмотрим четырехугольник с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и DOA. Ясно, что он подобен четырехугольнику с вершинами в серединах сторон четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 7, *а*). Опустим теперь перпендикуляры из вершин A, B, C и D на диагонали (рис. 7, *б*). Нам нужно доказать, что $K_1M_1 \perp K'M'$ (см. рис. 7, *в*). Поскольку $KM \parallel K_1M_1$, мы будем доказывать, что $KM \perp K'M'$. Четырехугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$ — параллелограммы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому достаточно доказать, что они подобны — из этого будет следовать, что их диагонали тоже перпендикулярны, так как тогда один будет получаться из другого поворотом на 90° и растяжением. Очевидно, что углы, отмеченные красной дужкой, равны между собой. Обозначим их величину через α, а длины диагоналей через l и m. Тогда, как легко видеть, $KL = \frac{l}{2}$, $LM = \frac{m}{2}$, $K'L' = l\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $L'M' = m\,\mathrm{tg}\,\alpha$, что и доказывает подобие четырехугольников $KLMN$ и $K'L'M'N'$.

14 апреля, 14^{30}, работы сданы. 15 апреля, пока члены жюри проверяют их, школьники свободны. Всего один день, а для 560 человек это и прослушанные лекции, и аллея Дружбы, посаженная школьниками, и знакомство с городом, и много интересных встреч и бесед.

16 апреля был особенно напряженный день и для участников, и для жюри. С 10 часов начался индивидуальный разбор работ. Во время индивидуального разбора участникам выдают карточки с результатами. Если школьник не согласен с полученными оценками, он разбирает свою работу с членом жюри. Хотя как правило, оценки не меняются и участник соглашается с тем, что они поставлены справедливо, бывают случаи, когда оценки повышаются. Однако индивидуальный разбор полезен не только для тех, чьи оценки улучшились, он помогает ребятам понять, что является решением задачи, что такое строгие рассуждения, как оформлять решения задач логически. Индивидуальный разбор закончился только в пять вечера, а с 11 до 15 для освободившихся участников читали лекции В. А. Алексеев, Н. Н. Константинов, Ж. Н. Раббот и другие члены жюри. В 17^{30} началась встреча с членами редколлегии журнала «Квант», входящими в состав жюри. Нам приятно отметить, что на эту встречу пришло большинство участников олимпиады и руководителей команд и что почти все пришедшие оказались подписчиками нашего журнала. На 17^{00} было назначено заседание жюри по подведению итогов олимпиады. Вовремя оно, конечно, не началось. Только после того, как председатель

---

*) Разумеется, если сразу отбросить вырожденные равнобедренные треугольники (треугольники с углом 180°), то есть понимать условие задачи так, что точка O не лежит ни на одной из диагоналей, то рассуждение можно упростить. Жюри не считало такое толкование условия ошибкой.

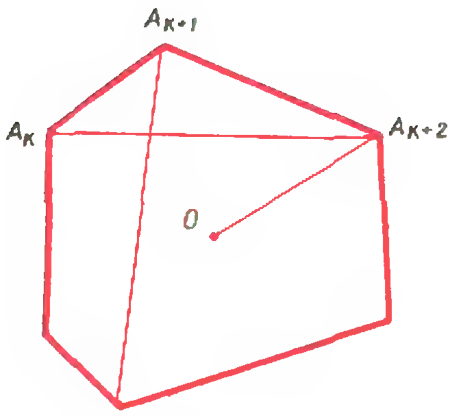


Рис. 5.

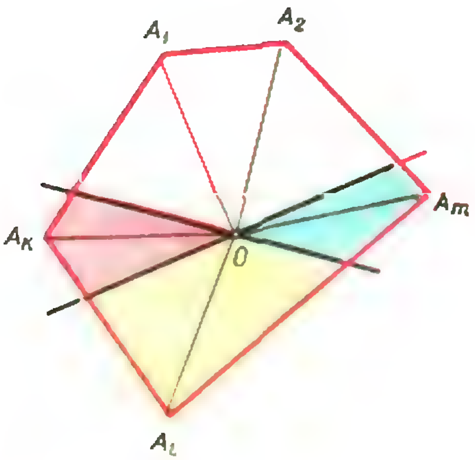


Рис. 6.

жюри, доктор физико-математических наук В. М. Алексеев «силой» прервал встречу с «Квантом» — это произошло около семи часов, — жюри начало работу.

И, наконец, 17 апреля — последний день олимпиады.

С 11 до 14 часов между командами ленинградского и московского интернатов был проведен математический бой (правила математического боя и предлагавшиеся на нем задачи смотрите в заметке на стр. 71). Москвичи победили с небольшим перевесом.

В 16 часов в Оперном театре состоялось закрытие олимпиады. Председатель жюри В. М. Алексеев вручает грамоты и премии победителям. Всего успешно прошли олимпиаду 238 участников.

Первые премии

получили восьмиклассники: *Сергей Фомин* (г. Ленинград, ФМШ), *Михаил Баум* (г. Симферополь, шк. № 40), *Михаил Гусаров* (г. Ленинград, шк. № 188), *Евгений Фалькин* (г. Чита, шк. № 38), *Виктор Козырев* (г. Ленинград, ФМШ), *Андрей Брилов* (г. Москва, шк. № 2), *Александр Мерков* (г. Москва, шк. № 91),; девятиклассники: *Сергей Конягин* (г. Саратов, шк. № 19), *Дмитрий Лещинер* (г. Москва, шк. № 2), и десятиклассники: *Сергей Белкин* (г. Москва, шк. № 7), *Владимир Бурков* (г. Москва, ФМШ), *Александр Шаповалов* (г. Москва, ФМШ), *Владимир Шварц* (г. Ленинград, ФМШ).

Вторые премии

— восьмиклассники: *Игорь Савицкий* (г. Ленинград, ФМШ), *Владимир Перцель* (г. Свердловск, шк. № 70), *Константин Морозов* (г. Фрунзе, шк. № 61), *Леонид Данилов* (г. Ижевск, шк. № 30), *Ольга Губа* (г. Вологда, шк. № 8), *Георгий Герасимов* (г. Саратов, шк. № 19), *Дмитрий Тюкавкин* (г. Иркутск, шк. № 11), *Леонид Трахтенберг* (г. Иваново, шк. № 55), *Евгений Шустин* (г. Борза Читинской обл., шк. № 240), *Светлана Рубинштейн* (г. Москва, шк. № 2), *Николай Щербина* (г. Днепропетровск, шк. № 67); девятиклассники: *Аркадий Вайнтроб* (г. Москва, ФМШ), *Наум Гольцман* (г. Москва, шк. № 179), *Павел Грозман* (г. Симферополь, шк. № 40), *Сергей Захаров* (г. Магнитогорск, шк. № 4), *Владимир Макеев* (г. Ленинград, ФМШ), *Елена Чеховая* (г. Киев, шк. № 38) и десятиклассники: *Андрей Гольберг* (г. Москва, шк. № 2), *Юрий Колмаков* (г. Москва, ФМШ), *Владимир Кореняко* (г. Воронеж, шк. № 58),

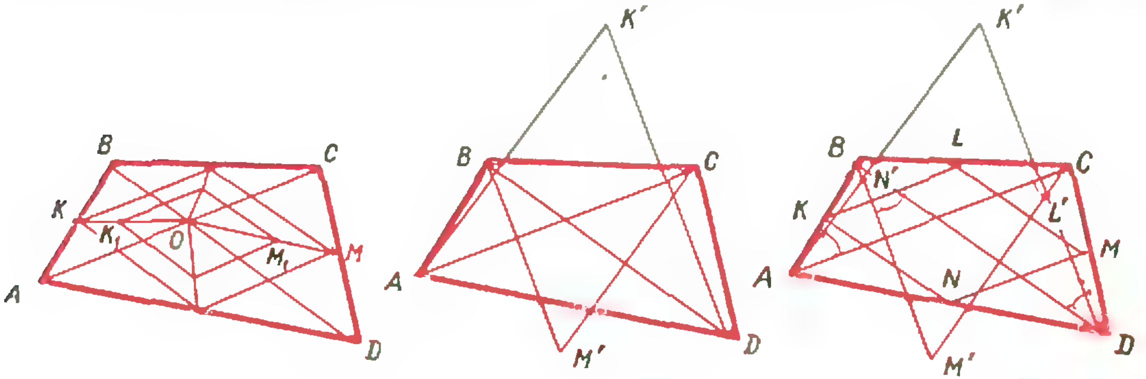


Рис. 7. а) б) в)

Школьники спят, а жюри работает.

Сергей Ландо (г. Пермь, шк. № 9), *Николай Макаров* (г. Ленинград, шк. № 239), *Александр Меркурьев* (г. Ленинград, ФМШ), *Александр Ронкин* (г. Харьков, шк. № 27), *Алексей Степанов* (г. Ленинград, ФМШ), *Ованнес Худавердян* (г. Ереван, ФМШ), *Аркадий Черняк* (г. Минск, шк. № 50).

Третьи премии

— восьмиклассники: *Сергей Кузнецов* (г. Чебоксары, шк. № 16), *Виктор Паньков* (г. Минск, шк. № 93), *Сергей Карташов* (г. Скопино Рязанской обл., шк. № 1), *Игорь Старобинец* (г. Горький, шк. № 82), *Калле Кульбок* (ЭССР, Ныоская С. Ш.), *Эдуард Гольднер* (г. Кишенев, шк. № 37), *Александр Сергеев* (г. Ленинград, ФМШ), *Сергей Шульга* (г. Киев, ФМШ), *Сергей Пономаренко* (г. Чертков, Тернопольской обл., шк. № 1); девятиклассники: *Александр Асташов* (г. Львов, шк. № 5), *Алексей Герусов* (г. Вольногорск. Днепропетровской обл. шк. № 3), *Виктор Будаев* (г. Смоленск, шк. № 7), *Петр Карликов* (г. Киев, шк. № 38), *Артур Лалаян* (г. Красноводск, Туркменской ССР, шк. № 12), *Леонид Островецкий* (школа с. Держановка Носовского района Черниговской обл.), *Аркадий Питман* (г. Одесса, шк. № 116), *Криста Поолакене* (Ныоская школа г. Тарту Эстонской ССР), *Леонид Пугач* (г. Днепропетровск, шк. № 80), *Оганес Саркисян* (г. Ереван, шк. № 1), *Андрей Серебрянников* (г. Тюмень, шк. № 8), *Александр Талалай* (г. Москва, шк. № 91), *Александр Тюлягин* (г. Кировоград, шк. № 34), *Сергей Федоришин* (г. Симферополь, шк. № 40), *Автандил Цицуашвили* (г. Тбилиси, ФМШ), *Александр Шерстюк* (г. Николаев, шк. № 2), *Семен Элимелах* (г. Брянск, шк. № 5), *Игорь Шнайдман* (г. Херсон, шк. № 20) и десятиклассники: *Евгений Гундарь* (г. Ворошиловград, шк. № 17), *Николай Ефимов* (г. Смоленск, шк. № 26), *Юрий Зуйков* (г. Донецк, шк. № 17), *Михаил Илларионов* (г. Воронеж, шк. № 58), *Виктор Кобельский* (г. Севастополь, шк. № 33), *Андрей Коган* (г. Москва. ФМШ), *Сергей Куксин* (г. Харьков, шк. № 7), *Юрий Медведев* (г. Ангарск, Иркутской обл., шк. № 10), *Александр Михайлов* (г. Стучка, ср. школа), *Михаил Перпер* (г. Кишинев Молдавской ССР, шк. № 34), *Сергей Стеценко* (г. Запорожье, шк. № 28), *Ефим Шварцман* (г. Москва, ФМШ).

Последнее заседание жюри.

Отзывы первой степени получили 20 восьмиклассников, 15 девятиклассников и 32 десятиклассника. Отзывы второй степени получили 30 восьмиклассников, 27 девятиклассников, 35 десятиклассников.

Кроме этого, участники получили 16 специальных премий. Одна из них — премия от журнала «Квант» — была вручена восьмикласснику *Евгению Фалькину*.

Олимпиада закрыта. До встречи в будущем году.

VI Всесоюзная физическая олимпиада школьников

Т. С. Петрова

VI Всесоюзная физическая олимпиада школьников проходила в этом году в Тбилиси. В ней приняли участие 561 ученик из восьмых, девятых и десятых классов разных городов СССР. Участники VI Всесоюзной олимпиады — это победители республиканских и областных олимпиад 1972 года, победители V Всесоюзной олимпиады, проходившей в 1971 году в Новосибирске; среди участников олимпиады были и победители конкурса, проводившегося журналом «Квант» *).

12 апреля в зале заседаний Верховного совета Грузинской ССР состоялось торжественное открытие VI Всесоюзной физической олимпиады. Больших успехов ее участникам пожелал председатель жюри олимпиады академик Академии наук Грузинской ССР Э. Л. Андроникашвили.

13 апреля проходил первый тур олимпиады — теоретический. Восьмиклассникам было предложено 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач. На решение задач всем участникам отводилось 5 часов. Задачи теоретического тура олимпиады были опубликованы в разделе «Задачник «Кванта» нашего журнала (№№ 7, 8 за 1972 год).

14 апреля у участников олимпиады был день отдыха. Они осмотрели город, побывали в старинных крепостях в окрестностях Тбилиси, совершили экскурсию по Военно-Грузинской дороге.

В этот день жюри олимпиады проверяло работы участников. 156 участников, успешнее других справившиеся с задачами теоретического тура, получили право участвовать во втором туре олимпиады — экспериментальном. Среди них было 54 десятиклассника, 53 девятиклассника и 49 восьмиклассников. Точнее, восьмиклассников было 48, так как за восьмой класс в команде Московской области выступал семиклассник Сергей Коршунов, допущенный к участию в экспериментальном туре.

15 апреля все «олимпийцы» принимали участие во Всесоюзном коммунистическом субботнике.

16 апреля состоялся экспериментальный тур олимпиады. Каждый участник этого тура должен был по существу провести небольшое самостоятельное исследование, подтверждающее физические законы, позволяющее определить физические свойства вещества, устанавливающее связь между этими свойствами.

Среди экспериментальных задач, предложенных восьмиклассникам, была задача на определение ускорения свободного падения, задача на построение графика зависимости силы упругости от удлинения резинового жгутика (с этой задачей блестяще справился Сергей Коршунов, о котором мы уже говорили; его экспериментальная работа была признана лучшей по восьмым классам). Девятиклассникам были предложены задачи на определение плотности жидкости и на определение зависимости силы сопротивления жидкой среды от размеров движущихся в ней тел.

Десятиклассники решали задачи на определение диэлектрической проницаемости, на определение эффективного значения силы переменного тока и на измерение магнитного поля проводника с током.

Кроме выполнения самого эксперимента, от участника экспериментального тура требовалось умение правильно оформить отчет о выполненной работе, оценить погрешности эксперимента, точность полученных результатов. Все это учитывалось при оценке задач экспериментального тура.

17 апреля на торжественном закрытии VI Всесоюзной физической олимпиады были объявлены имена победителей.

Дипломы I степени

получили следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Сергей Коршунов* (ученик 7-го класса школы № 1 г. Монино Московской обл.), *Дмитрий Топтыгин* (Москва, школа № 2); по 9 классам: *Андрей Ушаков* (Ленинград, школа № 30); по 10 классам: *Сергей Лягушин* (Днепропетровск, школа № 23).

Дипломы II степени

получили следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Анатолий Курганов* (Житомир, школа № 21), *Сергей Мачерет* (Киев, школа № 145); по девятым классам — *Юрий Лурье* (Грозный, школа № 1), *Александр Теохаров* (Алма-Ата, школа № 4), *Олег Теряев* (Днепропетровск, школа № 23), *Владимир Щебетков* (Смоленск, школа № 7); по 10 классам — *Владимир Белов* (Вологда, школа № 8), *Лев Вайдман* (Ленинград, школа № 45), *Сергей Кацур* (Кишинев, школа № 34), *Сергей Подковырин* (Майкоп, школа № 19), *Игорь Плетнев* (Москва, школа № 18), *Игорь Теплов* (Коммунарск, школа № 22).

---

*) Познакомиться с условиями конкурса нашего журнала вы можете в первом номере «Кванта» за 1972 год. Победители этого конкурса допускаются на областные олимпиады.

Дипломы III степени

были присуждены восьмиклассникам — *Анатолию Арзамасцеву* (Чита, школа № 4), *Серику Буркитбаеву* (Джамбул, школа № 8), *Владимиру Брауну* (Ленинград, школа № 45), *Виктору Игнатьеву* (Могилев, школа № 4), *Андрею Кирилюку* (Полтава, школа № 6), *Александру Кузнецову* (Саратов, школа № 13), *Тыну Луману* (Таллин, школа № 1), *Ашоту Мавсмяну* (физико-математическая школа г. Еревана), *Виктору Никифорову* (Чебоксары, школа № 2), *Виталию Скворцову* (Ленинград, школа № 121), *Игорю Ткачеву* (Хмельницкий, школа № 9), *Александру Фикселю* (Владивосток, школа № 23); девятиклассникам — *Геннадию Гилю* (Ровенская школа), *Владимиру Каганеру* (Москва, школа № 2), *Игорю Корепанову* (Днепропетровск, школа № 23), *Вадиму Мирному* (Москва, школа № 2), *Андрею Медведеву* (Свердловск, школа № 68), *Михаилу Осипову* (Москва, школа № 2), *Александру Скрипченко* (Николаев, школа № 35), *Александру Турчину* (Киев, школа № 145), *Юрию Яконенко* (г. Сокаль Львовской области, школа № 2); десятиклассникам — *Сергею Андрееву* (Хмельницкий, школа № 16), *Константину Агладзе* (Тбилиси, школа № 42), *Павлу Кузнецову* (Горький, школа № 40), *Вадиму Ваховскому* (Сахалинская область, Долинский крайОНО, пос. Сокол, школа № 4), *Вячеславу Дремову* (г. Горловка Донецкой области, школа № 73), *Леониду Дзагурову* (Таллин, школа № 15), *Михаилу Дежурко* (г. Пинск Брестской области, школа № 3), *Игорю Ицкевичу* (Харьков, школа № 27), *Александру Зуеву* (г. Перевальск, школа № 1), *Сергею Заславскому* (Днепропетровск, школа № 23), *Борису Кузьмину* (Москва, школа № 18), *Григорию Кантору* (Киров, школа № 53), *Виктору Лахину* (Ворошиловград, школа № 17), *Рубену Мкртчяну* (Ереван школа № 1), *Яану Пруумланну* (г. Вяльянди Эстонской ССР, школа № 1), *Евгению Склянину* (Ленинград, школа № 30), *Сергею Соболеву* (Кострома, школа № 32), *Владимиру Оганнесяну* (Армянская ССР, Абовянский р-н, с. Вохчаберд), *Александру Черняку* (Воронеж, школа № 58).

27 восьмиклассников, 34 девятиклассника и 24 десятиклассника получили грамоты за успешное выступление на олимпиаде.

Кроме дипломов и грамот, многим участникам были присуждены специальные призы от различных организаций. В частности, приз Кировского районного отдела народного образования г. Тбилиси за лучшие результаты среди участниц олимпиады получила ученица 8 класса школы № 24 г. Семипалатинска *Татьяна Забродская*. Специальный приз журнала «Пионер» был вручен самому юному участнику олимпиады *Сергею Коршунову*. *Александру Фикселю*, ученику 8 класса школы № 23 г. Владивостока, за оригинальное решение задач теоретического тура был вручен специальный приз журнала «Квант» — комплекты журнала за 1970 и 1971 годы с подписями главного редактора журнала академика И. К. Кикоина и первого заместителя главного редактора академика А. Н. Колмогорова.

Оргкомитет олимпиады, жюри, ученые Тбилисского Государственного университета, Тбилисского Политехнического института и Педагогического института, где подготавливались задачи экспериментального тура, работники Тбилисского отдела народного образования приложили много сил, чтобы олимпиада прошла четко, организовано, с большой пользой для ее участников.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
БОЙ

В. П. Федотов

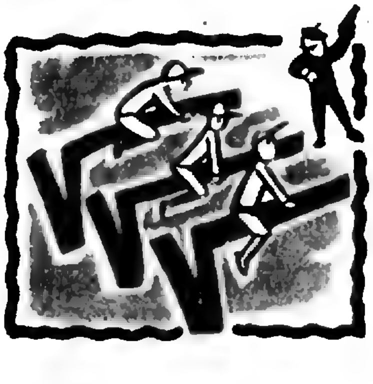
В «Кванте» № 5 в информации о слете учащихся физико-математических школ мы упоминали о том, что на слете проводился математический бой — соревнование, ставшее популярным в физико-математических школах. В этом номере мы публикуем правила математического боя и задачи математического боя, состоявшегося на 6-ой Всесоюзной математической олимпиаде в Челябинске.

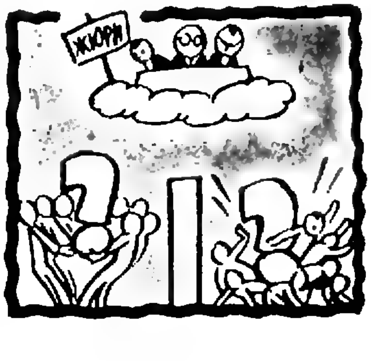
В математическом бое участвуют 2 или 3 команды, состоящие из 8—12 членов каждая, один из них является капитаном. Подготовку боя и судейство ведет жюри, которое заранее отбирает задачи и (обычно столько же, сколько членов в команде) и утверждает правила и регламент боя, а во время боя присуждает командам очки. Наиболее интересно проходит бой трех команд, поэтому мы изложим правила математического боя для трех команд, а затем расскажем об особенностях боя двух команд.

Подготовительная часть

Первые 2—5 часов команды находятся в различных помещениях и решают задачи. При этом ни одна из команд не должна получать информацию о том, какие задачи решены противниками.

На этом этапе команда выступает как единое целое: все ее члены вместе решают задачи, и если задача решена кем-либо из них, то остальным решать ее уже не надо. Распределением задач руководит капитан. Однако в дальнейшем по каждой задаче команду будет представлять один человек, поэтому капитан должен распределить решенные задачи между членами команды (при этом один человек может выступать по нескольким задачам). Кроме того, нужны «специалисты» по нерешенным задачам, знакомые со всеми трудностями и тонкостями задачи и способные опровергнуть неправильное решение противника.





Бой

Когда кончается время на подготовку, команды собираются вместе в зале и начинается бой, который состоит из туров (по каждой задаче). Прежде всего жюри с помощью легких дополнительных вопросов, конкурса капитанов или жеребьевкой присваивает командам номера *A*, *B*, *C* (в дальнейшем роли команд меняются в соответствии с заранее составленным расписанием, если ни одна из команд не отказывается от вызова).

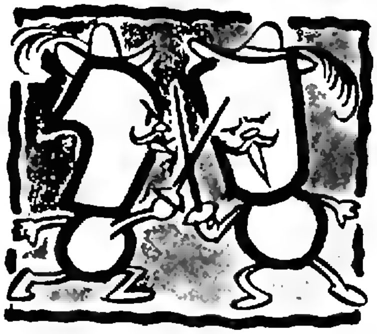
После этого жюри предоставляет право команде *A* вызвать команду *B* на любую задачу, которая решена командой *A* и еще не рассказывалась. Если команда *A* не имеет таких задач, то она может отказаться от вызова, но при этом она лишится права выступать до конца боя. Поэтому иногда команда сознательно делает вызов на нерешенную задачу. Если это в дальнейшем обнаруживается, то классифицируется как «некорректный вызов» и соответствующим образом карается.

Далее возможны 9 вариантов, собранные в таблицу 1.

Команда *B* может принять вызов, либо может отказаться рассказывать решение. В случае отказа проверяется корректность вызова: решение обязана рассказать команда *A*. Если команда знает решение, но не может четко рассказать его или подозревает, что в решении есть ошибки, часто бывает выгоднее отказаться отвечать. Одна из команд *A* или *B* назначает отвечающего решение, другая—оппонента. Команда *C* сразу же назначает

9 вариантов распределения ролей 3 команд в туре

A	*B*	*A*	*C*	*B*	отв.	опп.	рец.	штраф
вызов *B*	принят	—	—	—	*B*	*A*	*C*	—
вызов *B*	отказ	принят	—	—	*A*(?)	*B*	*C*	?
вызов *B*	отказ	отказ (некорр. вызов)	принят	—	*C*	*B*	*A*	*A*
вызов *B*	отказ		отказ	—	—	—	—	*A*
отказ	вызов *C*	—	принят	—	*C*	*B*	*A*	—
отказ	вызов *C*	—	отказ	принят	*B*(?)	*C*	*A*	?
отказ	вызов *C*	—	отказ	отказ (некорр. вызов)	—	—	—	*B*
отказ	отказ	—	принят	—	*C*	*B*	*A*	—
отказ	отказ	—	отказ	—	—	—	—	—



рецензента. Если вызов некорректен и команда A сразу же отказалась рассказывать решение, то отвечает C, оппонирует B, а рецензирует A.

При ответе жюри предоставляет слово отвечающему и дает право оппоненту в любом месте прервать отвечающего, чтобы задать ему вопрос или попросить его повторить неясное место. Ни рецензент, ни жюри, ни остальные члены команд (а тем более болельщики) не имеют права вмешиваться в диалог отвечающего и оппонента или задавать вопросы. Только в случае, если дискуссия между отвечающим и оппонентом затянется и уйдет в сторону, жюри имеет право прервать ее и передать слово рецензенту. Рецензент обычно не задает вопросов отвечающему и оппоненту, а лишь комментирует ход решения и оппонирование. Только после окончания выступления рецензента члены жюри получают право задавать вопросы отвечающему.

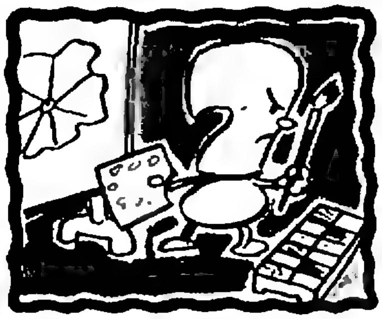
Каждая задача независимо от ее трудности оценивается в 12 очков, которые распределяются между отвечающим, оппонентом и рецензентом в зависимости от содержания их выступлений. Если был обнаружен некорректный вызов, то из этих же 12 очков выделяются штрафные очки. За некорректный вызов команды A каждая из команд B и C получает от 2 до 6 очков. Такой способ наказания команды A пришлось ввести после того, как несколько боев закончились с отрицательным счетом.

Очень часто все 12 очков получает одна команда: либо команда B рассказывает несложную задачу, так что A и C нечего добавить, либо A вызывает B на заведомо сложную задачу, B отказывается, а затем ни B, ни C не могут сказать ничего существенного по поводу решения, комментировать которое они еще не подготовлены.

Массу неприятностей жюри доставляет проблема некорректных вызовов. Команда A, вынужденная отвечать в случае отказа B, может рассказывать либо заведомо неверное, но «правдоподобное» решение, либо неполное, частичное или незаконченное решение. Так как бывает трудно отличить хорошо замаскированную сознательную ошибку в решении от «настоящей», то принято считать некорректным любой вызов, при котором у команды A будет обнаружена существенная ошибка в решении или вообще отсутствие решения. Величина штрафа зависит от того, кем была замечена ошибка: самим отвечающим, оппонентом, рецензентом или жюри. Решение считается верным, если никому из членов жюри не удастся обнаружить ошибку в нем до того, как будет объявлен счет по этой задаче; если ошибка будет найдена после объявления счета, то счет все равно останется прежним. Однако, если жюри сомневается в решении, но не может сразу указать ошибку, то счет не объявляется до тех пор, пока специально выделенный для этого член жюри не убедится в наличии или отсутствии ошибки.

* * *

Если в бою участвуют только две команды, то правила значительно упрощаются — нет рецензирования и не нужно заботиться о расписании вызовов. Здесь команда, вызвавшая некорректно, наказывается еще и тем,



что она обязана повторить вызов. Кроме того, жюри имеет право часть очков не распределять между командами вообще.

Расписание ролей команд надо составлять так, чтобы каждая команда могла вызвать каждую другую. Если бой ведется по 6 (или 12) задачам, то в 6 турах как раз получаются все перестановки 3 команд ($3!=6$): *ABC*, *BCA*, *CAB*, *ACB*, *CBA*, *BAC*.

Задачи математического боя в Челябинске на Всесоюзной математической олимпиаде *)

1. *Дана последовательность* $\{a_n\}$ *и функция* f *такая, что* $f(n+1)-f(n)\geqslant n+1$. *Известно, что* $a_n\leqslant a_{n+1}+a_{f(n)}$. *Докажите, что можно указать такие члены* $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$, *что* $a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_k}>100$.

2. *В сыре, имеющем форму куба* $n\times n\times n$, *вырезана сферическая дырка диаметра* 1. *Найти минимальное число плоских разрезов, позволяющих наверняка ее обнаружить.*

3. *Каждая страна на плоскости состоит из одного или двух кусков. Докажите, что карту можно правильно раскрасить* 12 *цветами.*

4. *В треугольнике* ABC *построены внутренним образом равнобедренные треугольники* ABC', BCA', ACB'. *Доказать, что прямые* CC_1, BB_1 *и* AA_1, *перпендикулярные* $A'B'$, $A'C'$ *и* $B'C'$ *соответственно, пересекаются в одной точке.*

5. *Для всякого* n *можно указать такое* m, *что из* m *человек можно выбрать* n *попарно знакомых или* n *попарно незнакомых.*

6. *Даны числа* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, *причем* $a_0=a_n=0$, $a_i>0$ *при* $i\neq 0$, n *и* $\frac{a_{s-1}+a_{s+1}}{2}\geqslant a_s\cos\frac{\pi}{k}$.

Доказать, что $n\geqslant k$.

7. *Дана функция* f *на отрезке* $[ab]$, *причем*

$$f+f''>0,\quad f(a)=f(b)=0,$$
$$f(x)>0 \text{ на } (ab).$$

Доказать, что $b-a\geqslant\pi$ *).

8. *Пусть* a *и* n — *натуральные числа, большие* 1. *Доказать, что*

$$a^n-a\neq\sum_d\frac{a^n-1}{a^d-1},$$

где суммирование ведется по некоторым делителям d *числа* n.

---

*) Эту часть статьи подготовил к печати председатель жюри математического боя Л. Г. Лиманов.

*) f'' — вторая производная функции f. Считается, что она существует во всех точках отрезка $[a, b]$.

В «Кванте» № 6 следующие опечатки:

стр.			напечатано	должно быть
75	правая колонка	14 строка снизу	$5a\pm\sqrt{a^2+4a}$	$5a-\sqrt{a^2+4a}$
77	левая колонка	8 строка снизу	$20\sqrt{21}$, $20\sqrt{21}$	$10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$
77	правая колонка	7 строка сверху	S	$2S$

Ленинские премии 1972 года

Из четырнадцати Ленинских премий в области науки и техники, присужденных в 1972 году, три относятся к области физики и одна — к области математики. Это является бесспорным свидетельством успешного развития физико-математических наук в нашей стране. Любопытно отметить, что две Ленинских премии присуждены за исследования, выполненные в одном и том же научном центре — Ленинградском физико-техническом институте имени А. Ф. Иоффе.

Коллектив научных работников, возглавляемый доктором физико-математических наук Жоресом Ивановичем Алферовым (В. М. Андреев, Д. З. Гарбузов, В. И. Корольков, Д. Н. Третьяков и В. И. Швейкин) удостоен Ленинской премии «*за фундаментальные исследования гетеропереходов в полупроводниках и создание новых приборов на их основе*».

Широкое использование полупроводников в области радиоэлектроники оказалось возможным благодаря тому, что физики научились создавать в одном и том же полупроводниковом материале два разных типа носителей электрического тока — электроны и дырки *). Объединив два кусочка одного и того же полупроводникового вещества с различными носителями тока, мы получаем так называемый $p — n$-переход, являющийся основой большинства полупроводниковых приборов.

Физики давно уже предсказывали, что если бы удалось осуществить $p — n$-переход между различными по химической природе полупроводниковыми материалами (в таком случае его называют гетеропереходом), то при этом открылись бы совершенно новые возможности для полупроводниковой радиоэлектроники. Попытки осуществления гетеропереходов неоднократно предпринимались во многих крупных научных центрах и промышленных лабораториях США, Японии, Англии и других стран. Однако там не удалось преодолеть огромных трудностей, связанных с необходимостью образования достаточно совершенной границы раздела между двумя разнородными кристаллическими структурами. Ведь на этой границе должны выполняться многие очень жесткие условия совместимости (механические, кристалло-химические, тепловые и другие), иначе электроны и дырки не будут переходить из одного материала в другой.

Впервые эти трудности были успешно преодолены коллективом сотрудников ФТИ им. А. Ф. Иоффе во главе с Ж. И. Алферовым. Им удалось осуществить несколько разных типов гетеропереходов и разработать многослойные элементы для разнообразных полупроводниковых устройств.

Появилась возможность создания новых типов полупроводниковых приборов, в частности, таких, которые образуют техническую базу новой области физики, получившей название оптической электроники.

Работы ученых ФТИ получили широкое международное признание. В 1971 году Франклиновский Институт (США) присудил Ж. И. Алферову медаль Стюарта Баллантайна, являющуюся одной из высших международных наград за работы в области прикладной физики.

Вторая Ленинская премия присуждена группе сотрудников Ленинградского физико-технического института имени А. Ф. Иоффе (В. В. Афросимов, В. М. Дукельский, Н. В. Федоренко) и Института атомной энергии имени И. В. Курчатова (О. Б. Фирсов, В. А. Беляев) за цикл работ «*Элементарные процессы и неупругое рассеяние при атомных столкновениях*».

При обычных температурах и давлениях атомы и молекулы газа сталкиваются подобно биллиардным шарам, не изменяя своей структуры. Такие столкновения принято называть упругими. Если же энергию сталкивающихся частиц существенно увеличить, то резко изменится и характер столкновений. Часть кинетической энергии взаимодействующих частиц пойдет на возбуждение их электронных оболочек, и если энергия велика, то на отрыв электронов от атомов. Такие столкновения молекул и атомов называют неупругими. Неупругие столкновения могут быть весьма разнообразными по своему характеру. Чтобы изучить происходящие при этом процессы, надо иметь возможность исследовать элементарные акты соударений отдельных частиц. Однако до недавних пор физикам удавалось следить лишь за конечными результатами многочисленных соударений большого числа взаимодействующих частиц.

---

*) Подробно об этом рассказано в статье М. А. Федорова «Полупроводниковые диоды и триоды», опубликованной в журнале «Квант» № 6 за 1971 год.

Два десятилетия назад группа ленинградских физиков приступила к решению этой чрезвычайно сложной проблемы. Прежде всего они разработали экспериментальные методы, которые позволяют следить за состоянием отдельных частиц в процессе неупругих соударений. Эти методы дают возможность измерять энергии, массы, заряды взаимодействующих частиц и следить за направлениями их движения.

При помощи этих методов были произведены многолетние систематические исследования, которые необычайно расширили и углубили наши представления о неупругом взаимодействии атомов и молекул. Оказалось, что прежняя теория таких процессов неверна. Потребовалась новая теория. Ее разработали участники этих исследований. В проведенных экспериментах была открыта многоэлектронная ионизация, при которой атом в одном столкновении теряет сразу несколько электронов. Выяснилось, что потери энергии взаимодействующих частиц при столкновениях имеют дискретный характер. Энергия, передаваемая при соударении, может приобретать не любые значения в допустимом интервале, а лишь некоторые строго определенные значения. Оказалось, что сталкивающиеся атомы образуют на ничтожную долю секунды систему, похожую на молекулу. И хотя такая «молекула» существует очень короткое время ($\sim 10^{-15}$ *с*), за это время в электронных оболочках ее атомов происходит глубокая перестройка, приводящая к потере многих электронов. Немало таких неожиданных новых физических явлений обнаружилось в ходе экспериментов.

Знание механизма элементарных актов неупругих соударений имеет огромное значение для радиоэлектроники, изучения процессов, происходящих в газовых лазерах, магнитогидродинамических генераторах, а также в атмосфере Земли и далеких космических просторах. Оно представляет большую ценность для развития химии высоких температур и решения проблемы управляемых термоядерных реакций. В частности, благодаря описанным выше исследованиям удалось создать метод надежного определения основных характеристик горячей плазмы — так называемую «корпускулярную диагностику» плазмы.

Третья Ленинская премия за работы в области физики присуждена академику АН УССР Алексею Зиновьевичу Петрову за цикл работ *«Инвариантно-групповые методы в теории гравитации»*.

Бурное развитие представлений о природе Вселенной, связанное с созданием новых областей астрономии (радиоастрономии, рентгеновской астрономии и т. п.), а также с прорывом человечества в Космос, чрезвычайно обострило интерес к проблемам гравитации. Эти проблемы изучаются общей теорией относительности, которую часто называют теорией пространства, времени и тяготения. Общая теория относительности чрезвычайно углубила наши представления о природе пространства, времени и тяготения и их взаимной связи. Она показала, что тяжелые тела своим притяжением искривляют окружающее их пространство, подобно тому, как камень прогибает натянутое полотно, на котором он лежит. Тяжелые тела замедляют ход времени в своих окрестностях.

Общая теория относительности еще весьма далека от завершения и продолжает успешно развиваться в наши дни.

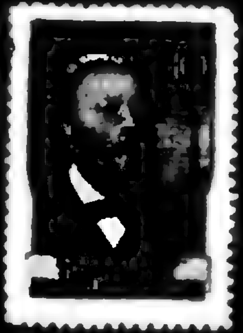
Очень существенный вклад в развитие этой теории внесли работы А. З. Петрова. Его основные научные достижения сконцентрированы в двух монографиях: «Пространства Эйнштейна» и «Новые методы в общей теории относительности». В первой работе А. З. Петров рассмотрел все возможные варианты полей тяготения (различные виды искривления пространства тяжелыми телами), допускаемые общей теорией относительности, и создал их строгую математическую классификацию. При этом ему удалось найти новые решения основного уравнения этой теории.

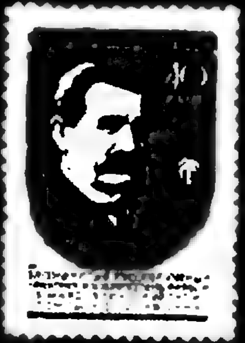
Во второй работе А. З. Петров исследовал допустимые виды симметрии различных полей тяготения. С этими видами симметрии связаны законы сохранения различных физических величин. Благодаря исследованиям А. З. Петрова мы знаем теперь, какие из законов сохранения имеют место в системах с разными полями тяготения.

Ленинской премии удостоены также многолетние исследования одного из крупнейших советских математиков академика Ивана Матвеевича Виноградова, подытоженные в монографии *«Метод тригонометрических сумм в теории чисел»*. На основе этого метода, предложенного и обоснованного И. М. Виноградовым, удалось получить много важных результатов, относящихся к распределению простых чисел. Например, удалось решить проблему Гольдбаха о возможности представления нечетных чисел в виде суммы трех простых чисел. Эта проблема не имела своего решения в течение двух веков.

Метод, разработанный И. М. Виноградовым, позволил сделать много фундаментальных выводов не только в аналитической теории чисел, но и в теории функций, теории вероятностей, математическом анализе и приближенных вычислениях.

В. А. Лешковцев





МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ИЗОБРЕТАТЕЛЯМ «РУССКОГО СВЕТА»

В этом году исполняется 125 лет со дня рождения двух замечательных русских электротехников-изобретателей П. Н. Яблочкова (1847—1894) и А. Н. Лодыгина (1847—1923).

Еще в 1823 году русский физик Владимир Васильевич Петров впервые описал открытое им «световое явление» — электрическую дугу между двумя углями, дающую «весьма яркого цвета свет и пламя», от которого «темный покой довольно ясно освещен быть может».

Однако в то время практического применения для освещения дуга Петрова не получила, так как для ее нормального горения требовалось непрерывное наблюдение за углями. Кто-то должен был все время управлять этим светом, сближать угли по мере их сгорания.

Впервые в 1875 году создал пригодную для практического использования «электрическую свечу» Павел Николаевич Яблочков, портрет которого вы видите на марке, выпущенной в 1951 году в серии «Ученые нашей Родины».

Справа от портрета изображена «свеча». Это два вертикально поставленных угля, разделенных глиняной обмуровкой, способной сгорать с такой же скоростью, как и угли. Получился источник электрического света, не требующий специального обслуживания и регулирования. Верхние концы углей соединялись тонкой запальной пластиночкой. При включении тока пластинка накалялась и сгорала, зажигая свечу. Свеча давала ровный и устойчивый свет в течение почти двух часов.

Парижские и лондонские газеты и журналы восторженно писали: «Русским светом» ярко освещены теперь театр Татле, магазины Лувра, площадь Оперы в Париже, порт в Гавре, набережная Темзы в Лондоне, столичные цирки. В одном только Париже тысяча «русских свечей» вытеснила с улиц 70 тысяч газовых рожков».

В Петербурге «свечи Яблочкова» начали использоваться для освещения только в 1879 году. Однако они уже были обречены, так как другим выдающимся русским электротехником Александром Николаевичем Лодыгиным, портрет которого вы видите на марке из той же серии, была создана более удобная, чем «свеча», электрическая лампа накаливания. Эта первая в мире лампа накаливания изображена на марке справа от портрета.

В лампе А. Н. Лодыгина электрический ток накаливал тонкий угольный стержень, помещенный под стеклянным колпаком. Срок службы первых ламп был 30—40 минут. После применения вакуума и других усовершенствований срок службы ламп был доведен до 700—1000 часов.

В 1890-х годах Лодыгин первый создал лампы накаливания с металлическими нитями, в частности, вольфрамовыми. Эти лампы оказались значительно экономичней, чем лампы с угольными волосками.

П. Н. Яблочкову и А. Н. Лодыгину принадлежит еще ряд трудов по электротехнике, однако основная их заслуга в том, что они первые в мире осуществили практическое применение электричества для освещения.

А. В. Алтынис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Интеграл»

(см. «Квант» № 9, стр. 2)

1. Пусть c — любое число из отрезка $[a, b]$. В роли F можно взять функцию

$$F(x) = \begin{cases} T[c, x], & \text{если } x > c; \\ 0, & \text{если } x = c; \\ T[x, c], & \text{если } x < c. \end{cases}$$

Можно показать, что функция F определяется условием $\Delta F = T$ с точностью до прибавления к ней произвольной постоянной.

3. На любом отрезке $[-\alpha, \alpha]$, где $\alpha > 0$

$$\Delta H\,[-\alpha, \alpha] = 1.$$

Если бы нужная функция — «плотность» δ — существовала, то должно было выполняться неравенство

$$\max_{[-\alpha,\,\alpha]} \delta \geqslant \frac{1}{2\alpha}.$$

В то же время в физике оказалось очень удобно рассматривать «плотность» δ функций промежутка даже в тех случаях, когда настоящих ограниченных функций f не существует. Возникла целая новая математическая теория «обобщенных функций», и «обобщенная плотность» для функции H получила даже специальное название — «δ-функция Дирака»

4. Поскольку на любом отрезке $[a, b]$ (при $a \neq b$) встречаются как рациональные, так и иррациональные числа, то наименьшее значение функции Дирихле на любом таком отрезке равно 0, а наибольшее — 1. Пусть теперь α — произвольное число из отрезка $[0, 1]$.

Определим функцию промежутка T по закону:

$$T\,[a, b] = \alpha\,(b - a).$$

Эта функция промежутка аддитивна:

$$T\,[a,b] + T\,[b,c] = \alpha\,(b - a) + \alpha\,(c - b) = \alpha\,(c - a) = T\,[a,c].$$

Средняя плотность функции T на любом отрезке равна α и заключена между числами 0 и 1, то есть между наименьшим и наибольшим значениями функции Дирихле на этом отрезке. Выбирая различные значения α, мы будем получать разные аддитивные функции промежутка, удовлетворяющие неравенствам с одной и той же функцией f — функцией Дирихле.

5. а) 1-й способ.

$$\int_{-2}^{1} (x-1)^3\,dx = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\,dx = \int_{-2}^{1} x^3\,dx - 3\int_{-2}^{1} x^2\,dx + 3\int_{-2}^{1} x\,dx - \int_{-2}^{1} 1\,dx = \frac{1^4 - (-2)^4}{4} - 3\,\frac{1^3 - (-2)^3}{3} + 3\,\frac{1^2 - (-2)^2}{2} - (1 - (-2)) = -\frac{81}{4}$$

(использовались формулы (7), (8) и (6)).

2-й способ.

$$\int_{-2}^{1} (x-1)^3\,dx = \int_{-3}^{0} x^3 dx = \frac{0^4 - (-3)^4}{4} = -\frac{81}{4}$$

(использовались формулы (10) и (6)).

б) $$\int_a^b \sin x\,dx = \int_a^b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_{\pi/2-b}^{\pi/2-a} \cos x dx = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos a - \cos b.$$

в) $$\int_a^b \cos^2 x dx = \int_a^b \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b dx + \frac{1}{2}\int_a^b \cos 2x dx = \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{4}\int_{2a}^{2b} \cos x dx = \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{4}(\sin 2b - \sin 2a).$$

г) $$\int_0^2 |x - 1|\,dx = \int_0^1 |x - 1|\,dx + \int_1^2 |x - 1|\,dx = \int_0^1 (1 - x)\,dx + \int_1^2 (x - 1)\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x dx + \int_1^2 x dx - \int_1^2 dx = 1.$$

К статье «Интеграл в геометрии и физике»

1. а) $\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$, б) $\int\limits_0^\pi \sin x dx = 2$.

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$.

3. $\int\limits_0^\pi \pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$.

4. Поскольку график вращается вокруг оси ординат, а не оси абсцисс, нужно от функции $x \to x^2$ перейти к обратной функции $x \to \sqrt{x}$. Поэтому нужно вычислить

$$\int\limits_0^1 \pi x dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Этот интеграл численно равен площади части плоскости между графиком функции $x \to \sqrt{1-x^2}$ и осью абсцисс над отрезком $[0, 1]$. Поэтому он равен четверти площади круга радиуса 1. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

6. $E = \int\limits_0^l \frac{M\omega^2x^2}{2l} dx = \frac{M\omega^2l^2}{6}$.

7. $Q = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I^2(t) R dt = \frac{\pi}{\omega} RI_0^2$.

К статье «Конечные паркеты»

1. Покажите, что в этом случае нам удастся покрыть вершину прямого угла.

2. Например, прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

3. Для того, чтобы разрезать прямоугольник на $2k$ равных треугольников, разрежем его сначала на k равных прямоугольников параллельными прямыми.

4. Воспользуйтесь основным свойством разрезания.

5. Необходимо отдельно рассмотреть случаи равностороннего, прямоугольного с углами 30° и 60°, равнобедренного и произвольного треугольников.

6. В качестве примера можно взять $n=3$: $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=2-\sqrt{2}$, $a_3=2$.

9. Нужно подобрать соответствующий угол α для первого разреза.

10 и 11. Вспомните свойство высоты, опущенной из вершины прямого угла.

14. Разбив треугольник прямыми, параллельными основанию, на треугольник и трапеции, используйте возможность разбиения трапеций на нечетное число равных треугольников.

15. Покажите, что в данном случае разбиение совпадает с разрезанием и что полученные треугольники — прямоугольные.

17. Воспользуйтесь результатом задачи 14.

К статье «Метод решения задач с конца»

1. В доказываемом равенстве уменьшить число параметров, выразив a через b.

5. Вычислить углы треугольника; воспользовавшись теоремой синусов, от доказываемого равенства перейти к тригонометрическому равенству.

6. В доказываемом неравенстве перейти к логарифму по основанию π. Учесть, что $\pi < 3{,}15$.

7. В неравенстве $S_{полн} \leqslant \frac{M^2}{24}$ удобно выразить все величины через ребра параллелепипеда.

8. Исходя из проверяемого соотношения, легко убедиться, что оно неверно.

Внесите необходимые изменения и докажите полученную теорему.

9. Следует еще указать на обратимость всех преобразований.

10. Нет.

К статье «Работа, энергия, мощность»

1. mv^2.

2. $\frac{1}{4}$.

3. $\sqrt{2gh}$.

К «Вариантам вступительных экзаменов по математике 1972 года»

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Химический факультет

(см. «Квант» № 9, стр. 50)

1. 6 *км/ч*. 2. $x=-1$.

3. $AM:MD=3:4$.

4. $\frac{1}{4}\sqrt{(b^2-a^2)(a^2+h^2)}$.

5. $\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}(k+1)$;

$x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$

Географический факультет и почвенное отделение биолого-почвенного факультета
(см. «Квант» № 9, стр. 50)

1. 24 и 21.
2. $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$.
3. $0<x<1/2$, $1<x<32$.
4. $x=2$, $y=2$.
5. $\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}+8}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$.

Биологическое отделение биолого-почвенного факультета
(см. «Квант» № 9, стр. 50)

1. За 2 часа.
2. 1.
3. $x=1/3$.
4. $x_1 = \frac{k}{2}$, $k = 1, 3, 4, 5, \ldots$

   $x_2 = \frac{1}{4} + m$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$
5. $\frac{(a+c)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$.

Отделение общей геологии геологического факультета

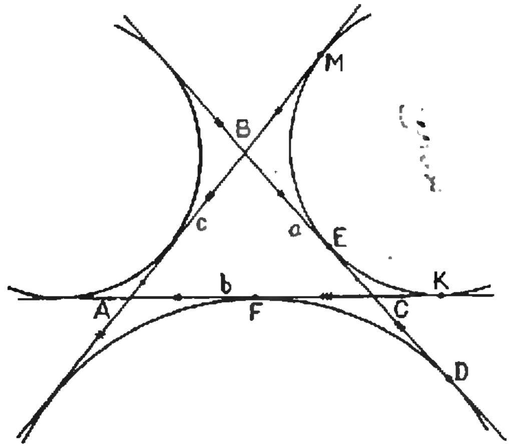
1. $-1^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6} + k\pi$;
2. $x = 4$, $y = 5$;
3. 6 *км/час*;
4. $x < 2$;
5. $\frac{5\cdot\sqrt{6}}{2}$.

Отделение геофизики геологического факультета

1. 15;
2. $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$;
3. $x < -1$, $\frac{\sqrt{13}-3}{2} < x < 2$;
4. $\frac{7}{5}$;
5. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; $\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$.

К «Геометрической задаче»
(см. стр. 22)

При доказательстве будем использовать только следующее, хорошо известное свойство: две касательные, проведенные из внешней точки к окружности, равны.



Отсюда $AM=AK$, $BM=BE$, $CE=CK$, $AB+BM=AC+CK$, $AB+BE=AC+CE$, но $(AB+BE)+(AC+CE)=2p$, $AB+BE=AC+CE=p$, Остается отметить на рисунке равные отрезки.

«Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 9, 3-я стр. обл.)

1. $m=3$, $n=4$, $p=5$, $q=6$*).
2. 72.
3. 22+979=1001.
4. 437.
5. $\frac{1}{2}$, -1.
6. В тот год сестра родилась.
7. 21978×4=87912.

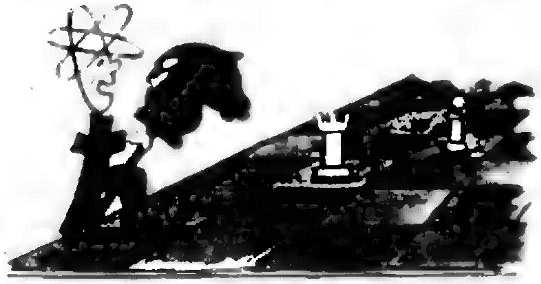
---

*) Задача была составлена в 1971 году.

КВАНТ
для младших школьников

1. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, пришельцы — всегда лгут. Путешественник нанял туземца-островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал, что тот говорит, что он — абориген.

Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?



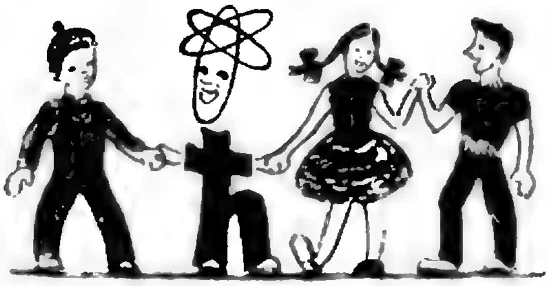
2. Можно ли ходом коня попасть из левой нижней клетки шахматной доски в правую верхнюю клетку, побывав при этом на каждой клетке один и только один раз?

3. Кончилась Великая Отечественная война. Как-то повстречались два товарища. Разговорились.

— Давненько мы с тобой не виделись. Сколько же теперь лет твоему сыну? — спросил один.

— Знаешь, любопытнейшая игра чисел, — ответил второй. Сын мой родился в том самом году, который был точным квадратом моего возраста в год его рождения. А сейчас ему столько лет, сколько составляет сумма цифр года моего рождения.

Сколько лет отцу-математику?



4. Доказать, что из всех людей, живших когда-либо на свете и живущих сейчас, число людей, сделавших в течение всей своей жизни нечетное число рукопожатий, есть число четное.

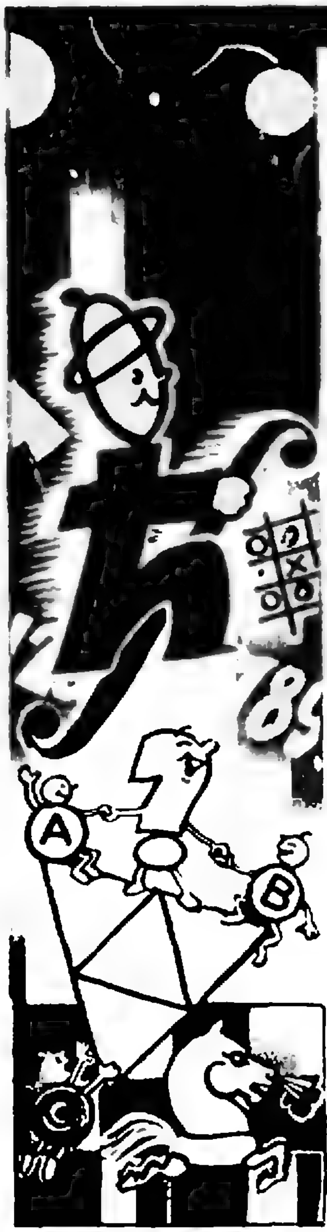
5. $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q.$

Делимое, делитель и частное — точные квадраты. Найти их.

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 10

К нашим читателям!



Продолжается подписка на 1973 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», материалы, помогающие лучше понять физику и математику, применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателям поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Постоянно помещаются рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке и в розничную продажу не поступает.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

НОМЕР
11

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

11
НОЯБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ

2 Клетчатые доски и полимино *А. Ю. Сойфер*
11 О структуре льда *В. Г. Брэгг*
18 Машина учится распознавать *А. С. Варпаховский*
22 У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная»
24 CETI в вопросах и задачах *Л. М. Гиндилис*
29 Ракетой к Солнцу *В. И. Левантовский*
31 Гений XVIII века *А. Я. Яковлев*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

34 Лучи света *Х. Рачлис*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

40 Задачи М171—М175, Ф183—Ф187
42 Решения задач М129—М134, Ф148—Ф152

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

52 Расстояния между скрещивающимися прямыми *М. Л. Крайзман*

ИНФОРМАЦИЯ

58 XIV Международная математическая олимпиада школьников *В. А. Скворцов, И. С. Петраков, С. Белкин, В. Шварц*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

61 Лаборатория в ванной комнате *В. А. Лешковцев*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

62 Марки, посвященные Л. Эйлеру *А. В. Алтыкис*

63 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
(3-я стр. обложки)

СМЕСЬ (стр. *21, 39*)

Клетчатые доски и полимино

А. Ю. Сойфер

Профессор Южнокалифорнийского университета С. Голомб — автор ряда работ по теории информации, теории кодирования, математической статистике и их приложениям к теории математических машин и генетике. Но не эти работы, представляющие безусловный интерес для специалистов, определили широкую популярность имени профессора Голомба — ею он обязан прежде всего придуманной им в часы досуга игре, точнее, целой серии игр, связанных с так называемым «полимино». Голомб опубликовал в 1965 году книгу «Полимино», содержащую много красивых и интересных математических задач. Часть этих и им подобных задач известна нашему читателю по недавно вышедшей в издательстве «Мир» книге Мартина Гарднера «Математические головоломки и развлечения» *) (главы 12 и 46), а также по серии публикаций в разделе «Психологический практикум» журнала «Наука и жизнь» за 1967—1968 гг., где, в частности, описаны голомбовские игры «пентамино» и «гексатрион» и ряд связанных с ними задач.

«История» полимино начинается со статьи Голомба «Шахматные доски и полимино», которую он, будучи еще аспирантом Гарвардского университета, опубликовал в 1954 году в журнале American Mathematical Monthly («Американский математический ежемесячник»). Публикуемый отрывок из этой статьи («А. М. М.», 61 № 10. Перевод И. И. Яглома), введет вас в круг основных понятий, связанных с полимино, даст примеры «типичных» задач на полимино. В идущей далее статье пойдет речь уже о некоторых более общих задачах на ту же тему. Итак, слово С. Голомбу.

Мы начнем с хорошо известной задачи:

дана шахматная доска, из которой вырезана пара противоположных угловых клеток (рис. 1) *и дана коробка домино, каждая косточка которого покрывает ровно две клетки шахматной доски. Возможно ли покрыть эту доску с помощью 31-й косточки домино?*

Ответ на этот вопрос гласит: «Нет»; для доказательства достаточно рассмотреть обычную раскраску шахматной доски (рис. 1). Каждая положенная на доску и покрывающая два квадрата косточка домино покроет один светлый и один темный квадрат, а n косточек домино — n светлых и n темных квадратов, то есть поровну тех и других. Но изображенная на рисунке 1 шахматная доска содержит больше темных клеток, чем светлых. Поэтому ее и нельзя покрыть косточками домино.

Мы по-прежнему будем использовать в качестве «игрового поля» обычную шахматную доску размера 8 × 8, но обобщим домино в «полимино» — и наши теоремы охватят все простейшие типы полимино, изображенные на рисунке 2. Более точно: мы определим n-мино как совокупность n квадратов шахматной доски, сгруппированных «по принципу ладьи», то есть так, что поставленная на любую клетку n-мино ладья может за конечное число ходов перейти на любую другую клетку того же n-мино.

---

*) Издательство «Мир», М., 1971.

Сначала мы рассмотрим тримино. Ясно, что шахматную доску размера 8 × 8 нельзя покрыть тримино, так как 64 не делится на 3. Попытаемся вместо этого покрыть шахматную доску 21-м тримино и одним мономино.

Шахматную доску нельзя покрыть 21-м прямым тримино и одним мономино, расположенным в верхнем левом углу доски. Чтобы доказать это, мы раскрасим теперь доску в три цвета: a, b и c (рис. 3). Как видите, у нас получилось 21 поле цвета a, 22 поля цвета b и 21 поле цвета c. Каждое прямое тримино покрывает одно поле цвета a, одно поле цвета b и одно поле цвета c, то есть прямые тримино всегда покрывают одинаковое число a-клеток, b-клеток, и c-клеток. Верхний левый угол — это a-клетка и после покрытия ее мономино у нас останутся неравные количества a-, b- и c-клеток. Следовательно, покрыть оставшиеся 63 клетки прямыми тримино невозможно.

Точно так же мы убеждаемся, что после покрытия мономино любой a- или c-клетки оставшуюся часть доски нельзя покрыть прямыми тримино. Остается рассмотреть лишь b-клетки. Но если мономино покрывает, например, b-клетки, расположенную в нижнем левом углу, то в силу симметрии доски относительно изображенной на рисунке 3 прямой x мы приходим к уже рассмотренной задаче покрытия прямыми тримино доски, в верхнем левом углу которой лежит мономино. Верхний левый угол доски — это a-клетка, и в этом случае покрытие невозможно; значит, оно невозможно и тогда, когда мономино лежит в нижнем левом углу.

Таким образом, устанавливается, что для того, чтобы покрытие было возможно, мономино должно покрывать непременно такую b-клетку, которая относительно прямых x и y (см. рис. 3). симметрична также b-клеткам. Единственные такие клет-

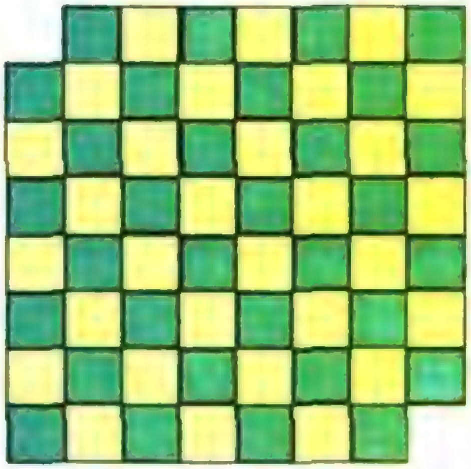


Рис. 1.

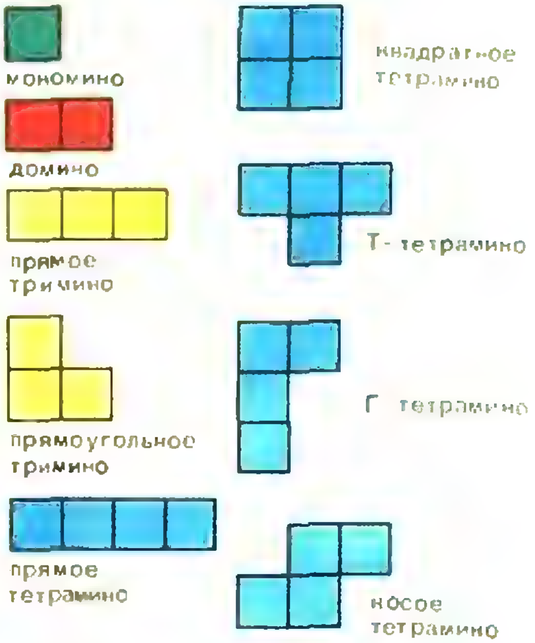
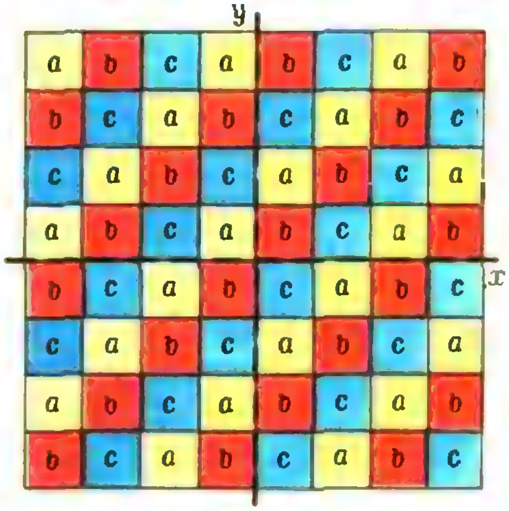


Рис. 2.



a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c

Рис. 3.

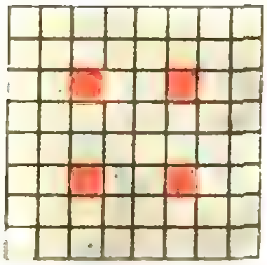


Рис. 4.

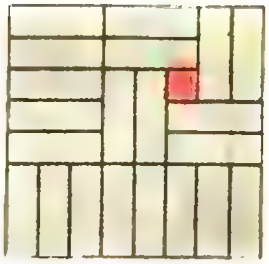


Рис. 5.

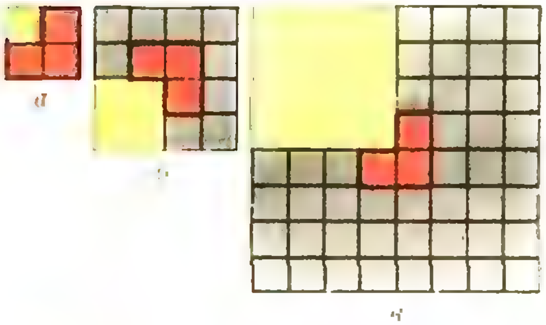


Рис. 6.

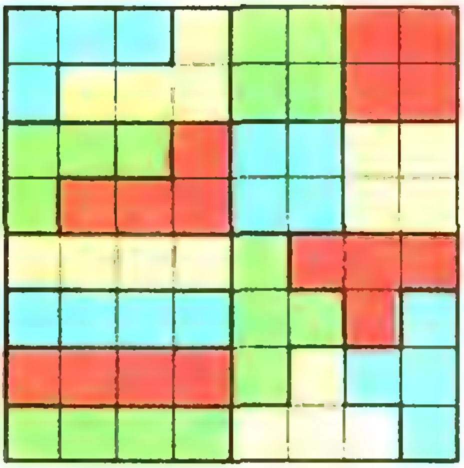


Рис. 7.

ки — это те, что закрашены на рисунке 4. А из рисунка 5 следует, что если мономино покрывает одну из этих клеток, то оставшуюся часть доски действительно можно покрыть прямыми тримино.

Итак, *необходимое и достаточное условие возможности покрытия шахматной доски одним мономино и 21-м прямым тримино состоит в том, что мономино покрывает одну из закрашенных на рисунке 4 клеток.*

До сих пор мы имели дело с «доказательствами невозможности». Следующий результат имеет противоположный характер: *независимо от того, какую клетку шахматной доски занимает мономино, оставшиеся клетки могут быть покрыты 21-м прямоугольным тримино.*

Доказательство проводится по индукции для шахматной доски «общего вида» размером $2^n \times 2^n$. Для доски 2 × 2 ясно, что где бы ни лежало на ней мономино, оставшиеся три клетки можно покрыть прямоугольным тримино (рис. 6, *а*). Взяв теперь доску размером 4 × 4, мы разделим ее на четыре части, размером каждая 2 × 2 (рис. 6, *б*). Пусть мономино покрывает клетку, скажем, желтой части на рисунке 6, *б*. Так как каждая четверть доски — это доска размера 2 × 2, то ее можно покрыть одним тримино и одним мономино, покрывающим произвольную клетку этой доски. В желтой части доски мономино уже есть; что же касается остальных трех четвертей, то мы расположим на них мономино в центральных (для большой доски) клетках — после этого мы сможем заменить наши мономино на одно прямоугольное тримино (см. тот же рисунок 6, *б*). Итак, мы покрыли шахматную доску размером 4 × 4 одним (произвольно расположенным) мономино и пятью прямоугольными тримино.

Случай доски 8 × 8, как и самый общий случай, рассматриваются аналогично (см. рис. 6, *в*).

Теперь перейдем к тетрамино. Шахматную доску легко полностью покрыть прямыми, квадратными, Т-тетрамино или Г-тетрамино — это ясно из рисунка 7. С другой стороны, покрыть доску косыми тетрамино невозможно — ведь косые тетрамино невозможно расположить на доске даже так, чтобы полностью покрыть ряд клеток, примыкающих к какой-либо одной стороне доски...

* * *

Продолжим занятия полимино, начатые знакомством со статьей профессора Голомба.

Вы уже видели, что некоторые задачи на полимино вовсе не предполагают непременно, что речь идет о «стандартной» шахматной доске 8 × 8; мы рассматривали и доски $2^n \times 2^n$ для произвольного натурального числа n. Так пойдем теперь дальше и будем говорить о произвольных квадратных досках $n \times n$ и, более того, о произвольных прямоугольных досках $m \times n$.

Задача 1. *Найти все такие пары натуральных чисел (m, n), что клетчатую доску $m \times n$ можно было бы выложить линейным k-мино.*

I-й способ решения.

Если хотя бы одно из чисел m, n делится на k, то доску $m \times n$ можно выложить линейным k-мино (проверьте!).

Предположим, что ни одно из чисел m, n не делится на k, а доска $m \times n$ тем не менее уложена линейным k-мино. Раскрасим доску k цветами диагональным способом, циклически меняя цвета: 1-й, 2-й, . . ., k-й, 1-й, 2-й, . . . (рис. 8).

Раскрашенная таким способом доска имеет интересное свойство: как бы на ней ни было расположено линейное k-мино, горизонтально или вертикально, оно покрывает ровно по одной клетке каждого из k цветов. Итак, по предположению доска покрыта линейным k-мино, а каждое k-мино покрывает одинаковое число клеток каждого цвета (по одной клетке); следовательно, и вся доска содержит одинаковое число клеток каждого из k цветов.

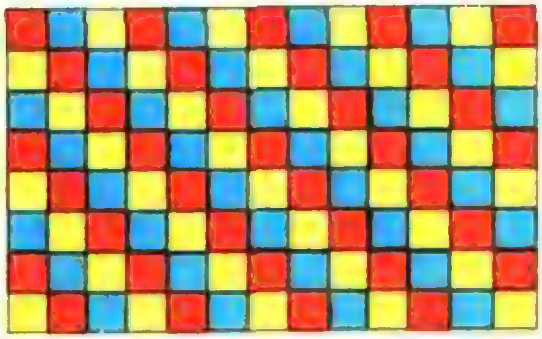


Рис. 8. Диагональная раскраска при $k=3$.

Нетрудно доказать (докажите!), что для любых натуральных чисел m и k найдутся такие целые неотрицательные числа q и r_1, что $r_1 \leqslant \frac{k}{2}$ и имеет место хотя бы одно из следующих равенств:

$$m = kq + r_1$$

или

$$m = kq - r_1.$$

Рассмотрим два случая.

1. $m = kq + r_1$. Разрежем данную доску на две прямоугольные доски: $kq \times n$ и $r_1 \times n$. Доску $kq \times n$ можно выложить линейным k-мино, так что она содержит одинаковое число клеток каждого цвета. А так как в данной доске также содержится равное число клеток каждого цвета, то этим свойством обладает и доска $r_1 \times n$.

2. $m = kq - r_1$. В этом случае дополним данную доску до клетчатой доски размером $kq \times n$ (приложив к ней прямоугольную доску размером $r_1 \times n$) и распространим раскраску данной доски до диагональной раскраски доски $kq \times n$. Получившуюся доску $kq \times n$ можно выложить линейным k-мино, поэтому она содержит одинаковые количества клеток каждого цвета. Исходная доска содержит также равные количества клеток каждого цвета, следовательно, то же можно сказать и о доске $r_1 \times n$.

Итак, в обоих случаях мы получили клетчатую доску размером $r_1 \times n$, раскрашенную диагональным способом и содержащую одинаковые количества клеток каждого цвета. Повернем теперь эту доску на 90°, то есть рассмотрим доску $n \times r_1$, к которой и применим все рассуждения, с помощью которых установлено, что интересующие нас доски содержат одинаковое число клеток каждого цвета. В результате мы получим, что доска $r_2 \times r_1$, где $0 < r_2 \leqslant \frac{k}{2}$ и $0 < r_1 \leqslant \frac{k}{2}$ также содержит равные количества клеток каждого цвета.

Но, с другой стороны, цветных диагоналей в такой доске всего

$$r_2+r_1-1\leqslant\frac{k}{2}+\frac{k}{2}-1<k,$$

так что в ней не будет ни одной клетки хотя бы одного из употребленных для раскраски цветов. *Противоречие!*

Итак, доску $m\times n$ можно выложить линейным k-мино тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел m, n делится на k.

Эту задачу можно решить, используя иную раскраску.

2-й способ решения.

Предположим, что ни одно из чисел m, n не делится на k, а доска $m\times n$ выложена линейным k-мино.

Разделим с остатком m и n на k:

$$m=kq_1+r_1;\quad 0<r_1<k,$$
$$n=kq_2+r_2;\quad 0<r_2<k.$$

Раскрасим доску k цветами следующим образом: 1-й столбец — 1-м цветом, 2-й — 2-м, . . ., k-й — k-м, $(k+1)$-й — 1-м и т. д., m-й — r_1-м цветом (рис. 9).

Раскрашенная таким способом доска имеет следующее свойство: если линейное k-мино положить на доску вертикально, то оно будет покрывать k клеток одного цвета, а если горизонтально — то ровно по одной клетке каждого цвета. Доска, по предположению, выложена k-мино; поэтому

$$S_1\equiv S_2\equiv\ldots\equiv S_k \pmod{k},$$

где S_l $(l=1, 2, \ldots, k)$ есть число клеток l-го цвета, содержащихся в доске.

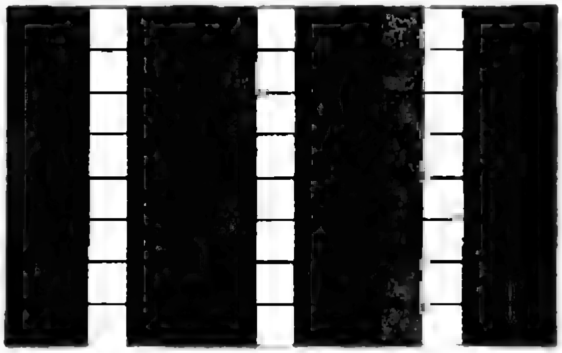


Рис. 9. Столбцевая раскраска при $k=4$.

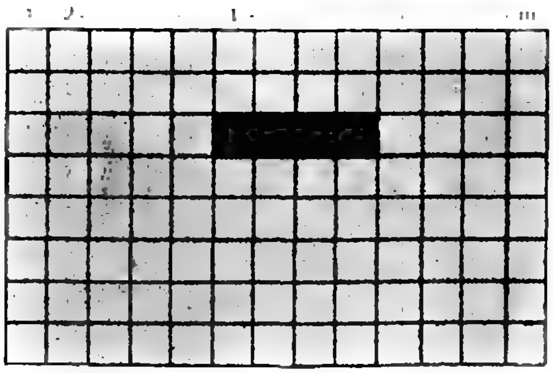


Рис. 10.

С другой стороны, как легко подсчитать,

$$S_{r_1}-S_{r_1+1}=n;$$

следовательно,

$$S_{r_1}-S_{r_1+1}\equiv r_2 \pmod{k},$$

так что

$$S_{r_1}\not\equiv S_{r_1+1} \pmod{k}.$$

Полученное противоречие показывает, что для существования искомой укладки необходимо $m \vdots k$ или $n \vdots k$*).

Уж не подумали ли вы, что решения задач об укладке доски полимино непременно связано с тем или иным способом раскрашивания доски? Ничего подобного!

3-й способ решения.

Предположим, что доска $m\times n$ выложена линейным k-мино и

$$m=kq+r_1;\quad 0<r_1<k;$$
$$n\equiv r_2 \pmod{k};\quad 0<r_2<k.$$

Будем говорить, что k-мино «растет из l-го столбца», если оно расположено горизонтально и начинается в l-м столбце (рис. 10).

Обозначим через t_l количество k-мино, растущих из l-го столбца. По предположению доска выложена k-мино; поэтому

$$
\begin{gathered}
t_1\equiv r_2 \pmod{k},\\
t_2\equiv 0 \pmod{k},\\
t_3\equiv 0 \pmod{k},\\
\cdots\cdots\cdots\\
t_k\equiv 0 \pmod{k},\\
t_{k+1}\equiv r_2 \pmod{k},\\
t_{k+2}\equiv 0 \pmod{k},\\
\cdots\cdots\cdots\\
t_{kq+1}\equiv r_2 \pmod{k}.
\end{gathered}
$$

---

*) $m \vdots k$, как обычно, означает, что m делится на k.

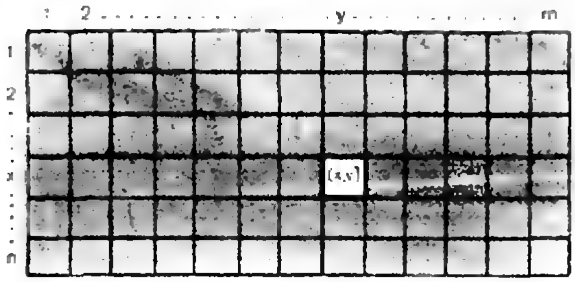


Рис. 11.

С другой стороны, ясно, что k-мино, растущее из $(kq+1)$-го столбца, «вырастет» за пределы прямоугольника, откуда $t_{kq+1}=0$. Мы и здесь пришли к противоречию, показывающему, что для существования укладки доски $m \times n$ k-мино необходима делимость хотя бы одного из чисел m, n на k.

Для дальнейших задач нам понадобится «система координат» на доске, мы занумеруем строки и столбцы доски (см. рис. 11).

Каждая клетка теперь задается парой чисел (x, y), где x и y — соответственно номера строки и столбца, в которых эта клетка расположена.

Задача 2. *Имеется прямоугольная клетчатая доска $m \times n$ и линейное k-мино. Клетку доски (x, y) будем называть «удачно расположенной», если фигуру F, получающуюся из доски в результате вырезания этой клетки, можно выложить линейным k-мино. Найти множество M всех удачно расположенных клеток доски.*

При $k=1$, очевидно, M совпадает с множеством всех клеток доски. Допустим, что $k=2$. Предположим, что из прямоугольника вырезана одна клетка и полученная фигура F выложена домино; тогда $(mn-1)$ — четное число, следовательно, m и n нечетны. Устроим на данной доске шахматную раскраску. Мы считаем, для определенности, что в левом нижнем углу — черная клетка (рис. 12).

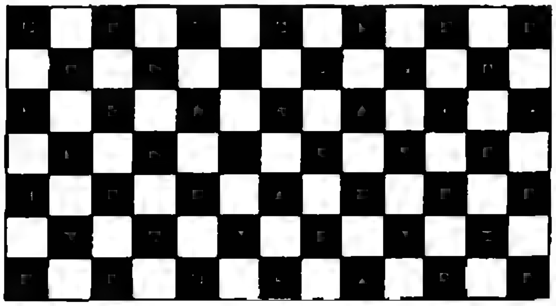


Рис. 12.

Как бы ни было расположено домино, оно покрывает одну белую и одну черную клетки; следовательно, в фигуре F черных и белых клеток одинаковое число. Во всей же доске черных клеток на одну больше чем белых, поэтому вырезанная клетка могла быть только черной.

Множество черных клеток в нашей системе координат запишется как множество клеток (x, y), для которых $x \equiv y \pmod 2$ (проверьте!).

Рисунки 13 и 14 иллюстрируют возможность укладки в случае, когда вырезана произвольная черная клетка.

Итак, при $m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$ множество M удобно расположенных клеток совпадает с множеством таких

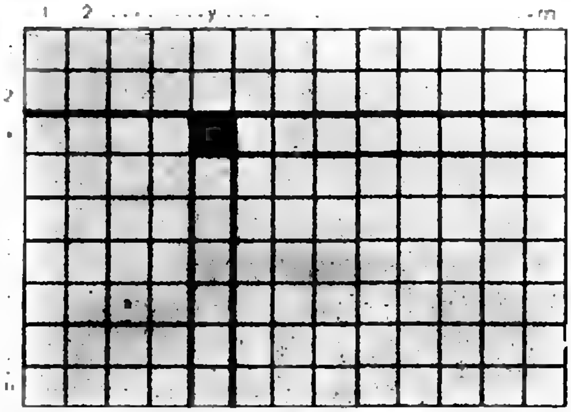
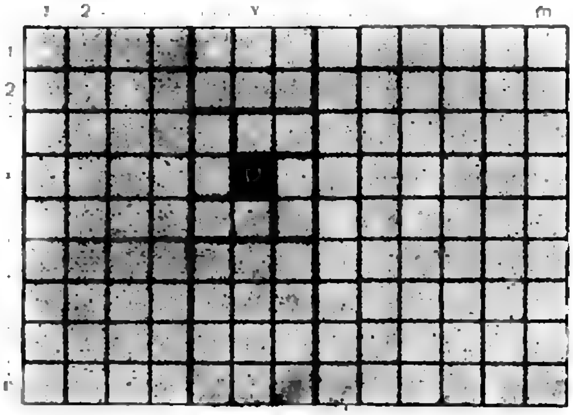


Рис. 13.

$m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$
$x \equiv y \equiv 1 \pmod 2$



$m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$
$x - y \equiv 0 \pmod 2$

Рис. 14.

клеток (x, y), что $x \equiv y \pmod 2$; если хотя бы одно из чисел m, n кратно 2, то доска $m \times n$ удачно расположенных клеток не имеет.

Пусть теперь $k > 2$. В этом случае $1 \not\equiv -1 \pmod k$.

Предположим, что полученная после вырезания клетки (x, y) фигура F уложена линейным k-мино. Устроим на данной доске столбцевую циклическую раскраску в k цветов (см. рис. 9). Мы уже отмечали свойство доски, раскрашенной таким способом: если линейное k-мино расположено на доске вертикально, то оно покрывает k-клеток одного цвета, а если горизонтально, то ровно по одной клетке каждого цвета. По предположению, фигура F выложена линейным k-мино; поэтому

$$P_1 \equiv P_2 \equiv \ldots \equiv P_k \pmod k, \qquad (1)$$

где P_l $(l = 1, 2, \ldots, k)$ — количество клеток l-го цвета в фигуре F.

Пусть

$$m = kq_1 + r_1 \quad (0 \leqslant r_1 < k),$$
$$n = kq_2 + r_2 \quad (0 \leqslant r_2 < k).$$

Обозначим через S_l $(l = 1, 2, \ldots, k)$ число клеток l-го цвета во всей доске. Легко подсчитать, что

$$S_1 = \ldots = S_{r_1} = n(q+1), \qquad (2а)$$
$$S_{r_1+1} = \ldots = S_k = nq. \qquad (2б)$$

Фигура F содержит ровно на одну клетку меньше, чем вся доска, поэтому из соотношений (1) и (2) следует, что возможны лишь два случая: либо $r_1 = 1$ и вырезанная клетка — первого цвета, либо $r_1 + 1 = k$ и вырезанная клетка — k-го цвета.

1 случай. Вырезанная клетка (x, y) — первого цвета, то есть $y \equiv 1 \pmod k$, $r_1 = 1$, $m \equiv 1 \pmod k$, и кроме того,

$$S_1 - 1 \equiv S_2 \equiv S_3 \equiv \ldots \equiv S_k \pmod k,$$

откуда $n(q+1) - 1 \equiv nq \pmod k$, то есть $n \equiv 1 \pmod k$.

Итак, $m \equiv n \equiv y \equiv 1 \pmod k$.

2 случай. Вырезанная клетка (x, y) — k-го цвета, то есть $y \equiv 0 \pmod k$, $r_1 = k - 1$, $m \equiv -1 \pmod k$ и, кроме того,

$$S_1 \equiv S_2 \equiv \ldots \equiv S_{k-1} \equiv S_k - 1 \pmod k,$$

откуда $nq - 1 \equiv n(q+1) \pmod k$, то есть $n \equiv -1 \pmod k$.

Итак,

$$m \equiv n \equiv -1 \pmod k; \quad y \equiv 0 \pmod k.$$

Повернём теперь данную доску на 90°, то есть рассмотрим доску $n \times m$ и применим к ней изложенные выше рассуждения. Вот окончательные выводы: если $m \equiv n \equiv 1 \pmod k$, то координаты удачно расположенной клетки (x, y) должны удовлетворять соотношению $x \equiv y \equiv 1 \pmod k$. Если же $m \equiv n \equiv -1 \pmod k$, то координаты удачно расположенной клетки (x, y) должны удовлетворять соотношению

$$x \equiv y \equiv 0 \pmod k.$$

В остальных случаях удачно расположенных клеток доска $m \times n$ не имеет.

Рисунки 15 и 16 показывают, что если $m \equiv n \equiv 1 \pmod k$, то любая клет-

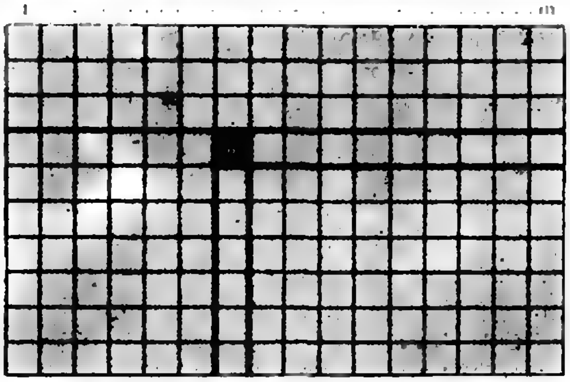


Рис. 15. $m \equiv n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k)$
$x \equiv y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k)$

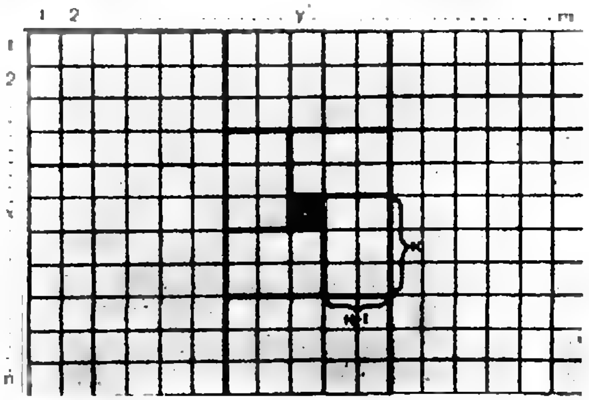


Рис. 16. $m \equiv n \equiv -1 (\mathrm{mod}\ k)$
$x \equiv y \equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)$

Удачно расположенные клетки			Примечания
k	m, n	координаты удачно расположенных клеток	При иных наборах m, n, k доска не содержит ни одной удачно расположенной клетки
$k=1$	m, n—любые натуральные числа	$x \leqslant n$, $y \leqslant m$	
$k=2$	$m \equiv n \equiv 1 \equiv -1 \pmod 2$	$x \equiv y \pmod 2$; $x \leqslant n$, $y \leqslant m$	
$k>2$	$m \equiv n \equiv 1 \pmod k$	$x \equiv y \equiv 1 \pmod k$; $x \leqslant n$, $y \leqslant m$	
	$m \equiv n \equiv -1 \pmod k$	$x \equiv y \equiv 0 \pmod k$; $x \leqslant n$, $y \leqslant m$	

ка (x, y), для которой $x \equiv y \equiv 1 \pmod k$, удачно расположена; если же $m \equiv n \equiv -1 \pmod k$, то удачно расположена любая клетка (x, y), для которой $x \equiv y \equiv 0 \pmod k$.

Итак, задача решена.

Ответ удобно записать в виде таблицы (см. таблицу сверху).

Мы видим, что если доска $m \times n$, при $k > 2$ и содержит удачно расположенные клетки, то их количество v сравнительно с числом всех клеток доски невелико; докажите, что

$$v = \frac{[m + (-1)^r (k-1)][n + (-1)^r (k-1)]}{k^2},$$

где $r=1$, если $m \equiv n \equiv 1 \pmod k$, и $r=-1$, если $m \equiv n \equiv -1 \pmod k$.

Но число таких клеток можно увеличить! Склеим пару противоположных сторон нашей доски: мы получим клетчатый цилиндр (рис. 17).

Задача 3.

а) Из прямоугольной клетчатой доски $m \times n$ склеили цилиндр. Найти множество всех удачно расположенных клеток цилиндра для линейного k-мино.

б) Если $m \neq n$, то, в зависимости от того, какую пару противоположных сторон мы склеили, можно получить два различных цилиндра. Какой из этих цилиндров имеет большее число удачно расположенных клеток?

Пойдем теперь дальше и склеим основания нашего цилиндра (рис. 18).

Полученная фигура, называемая *тором*, имеет безусловное «преимущество» по сравнению с клетчатой доской или клетчатым цилиндром: все ее клетки равноправны. В частности, если клетчатый тор имеет хотя бы одну удачно расположенную клетку, то все его клетки являются удачно расположенными.

Тороидальная клетчатая доска имеет и другие достоинства. Решим, к примеру, следующую задачу.

Задача 4.

а) Найти все такие натуральные числа n, что квадратную доску $n \times n$ можно уложить прямоугольным тримино, изображенным на рисунке 19.

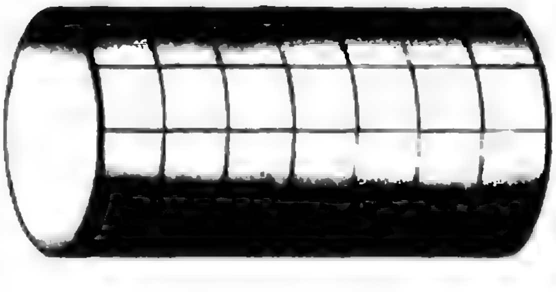


Рис. 17.

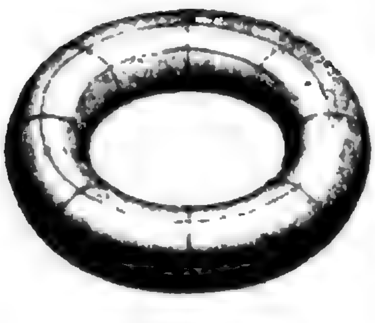


Рис. 18.

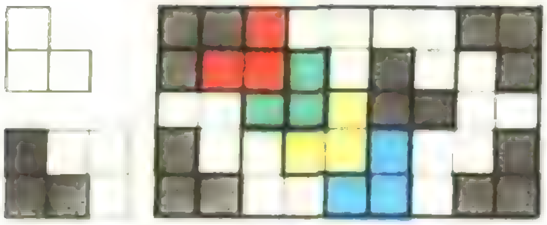


Рис. 19, 20, 21.

б) Найти все такие натуральные числа n, что тороидальную доску, полученную из квадратной клетчатой доски $n\times n$, можно выложить тримино, изображенным на рисунке 19.

Так как тримино состоит из трех клеток, то для возможности укладки доски $n\times n$ тримино необходимо, чтобы n было кратно 3.

Прямоугольник размером 2×3, конечно, можно уложить тримино (рис. 20). Сложнее уложить прямоугольник размером 5×9 (рис. 21). Теперь не представляет большого труда доказать (докажите!), что квадрат $n\times n$ можно уложить тримино при $n = 3k$, где $k = 2, 3, \ldots$

Докажите, что квадрат 3×3 нельзя уложить нашим тримино. Что же касается тороидальной доски, склеенной из квадрата $n\times n$, то ее можно выложить тримино при любом n, делящемся на 3.

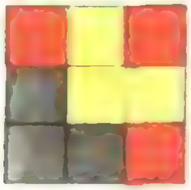


Рис. 22.

Для доказательства этого факта нам осталось показать, что тороидальную доску 3×3 можно выложить тримино. Рисунок 22 показывает возможность такой укладки (при склеивании тора красные клетки соберутся, образовав тримино требуемого вида).

Упражнения

1. *Имеется прямоугольная клетчатая доска $m\times n$ и домино. Пара различных клеток доски называется «хорошей», если фигуру, получающуюся из доски в результате вырезания этих двух клеток, можно уложить домино. Найти все хорошие пары клеток.*

2. *Имеется прямоугольная клетчатая доска $m\times n$ и натуральное число k, $k < \frac{mn}{2}$. Играют двое. Первый играющий вычеркивает любую клетку доски, затем второй вычеркивает любую клетку, отличную от вычеркнутой; очередной ход играющего состоит в вычеркивании любой клетки доски, отличной от ранее вычеркнутых. После того как играющие сделали поочередно по k ходов, определяется победитель. Выиграл второй, если фигура, полученная после вырезания всех вычеркнутых клеток, может быть уложена домино; в противоположном случае победителем считается первый играющий.*

Найдите стратегию игры для одного из играющих, позволяющую ему выиграть вне зависимости от игры противника.

3. *а) Найти все такие натуральные числа n, что квадратную клетчатую доску $n\times n$ можно уложить Т-тетрамино (см. рис. 2).*

б) Изменится ли результат, если вместо плоской доски укладывать цилиндрическую? тороидальную?

4. *а) Найти все такие натуральные числа n, что квадратную клетчатую доску $n\times n$ можно уложить Г-тетрамино.*

б) Изменится ли результат, если вместо плоской доски укладывать цилиндрическую? тороидальную?

5. *а) Из прямоугольной клетчатой доски $m\times n$ склеили цилиндр. При каком условии его можно уложить линейным k-мино?*

б) Если $m \neq n$, то из доски $m\times n$ можно склеить два различных цилиндра. Может ли случиться так, что один из них можно уложить линейным k-мино, а другой — нет?

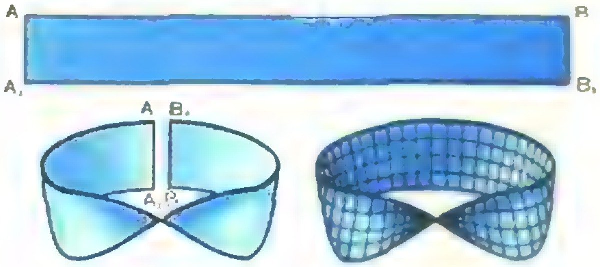


Рис. 23.

6. *Прямоугольную доску (на которой клетчатая сетка имеется с обеих сторон) перегнули и склеили, как показано на рисунке 23. Получился лист Мёбиуса.*

а) При каком условии лист Мёбиуса, склеенный из доски $m\times n$, можно уложить линейным k-мино?

б) Если $m \neq n$, то из клетчатой доски $m\times n$ можно склеить два различных листа Мёбиуса. Может ли случиться так, что один из них можно уложить линейным k-мино, а другой — нет?

О СТРУКТУРЕ ЛЬДА

В. Г. Брэгг

Статья известного английского физика Вильяма Брэгга «О структуре льда» появилась в 1938 году. В 1939 году эта статья в переводе Н. А. Шишакова была опубликована в журнале «Успехи физических наук». Ниже мы приводим сокращенный вариант этой статьи.

Публикацию подготовил И. Ш. Слободецкий.

В последние годы при изучении кристаллического характера льда и снега выяснились некоторые факты, которые позволяют получить новые объяснения старых проблем. Одной из них является движение льдов и снегов на горах, всегда служившее предметом удивления. Чтобы определить характер величественных движений Альпийских ледников, в середине XIX века были предприняты попытки систематических измерений. При этом оказалось, что лед течет, приспосабливаясь к извилинам и спускам в долинах, подобно воде. Тогда же было установлено, что середины ледников движутся быстрее краев. Объяснение этой любопытной пластичности льда, являющегося в то же время очень хрупким веществом, наталкивалось в те времена на великие трудности, но теперь эту задачу можно считать решенной.

Оказывается, что имеется удивительная связь между величественными картинами движения ледников и мельчайшими деталями строения молекул воды и кристаллов льда.

Предметом внимания прежних наблюдателей была также удивительная правильность в строении снежинок, в особенности бросающаяся в глаза при наблюдении их в северных странах. Однако только в конце прошлого столетия этот факт подвергся систематическим наблюдениям, послужившим затем предметом классификации. При этом крайне изумительным и загадочным казалось совершенное сходство между всеми шестью лучами в любой снежинке и в то же время огромное различие в строении различных снежинок. Примеры их представлены на рисунке 1.

В последнее время расположение атомов и молекул в кристаллах льда

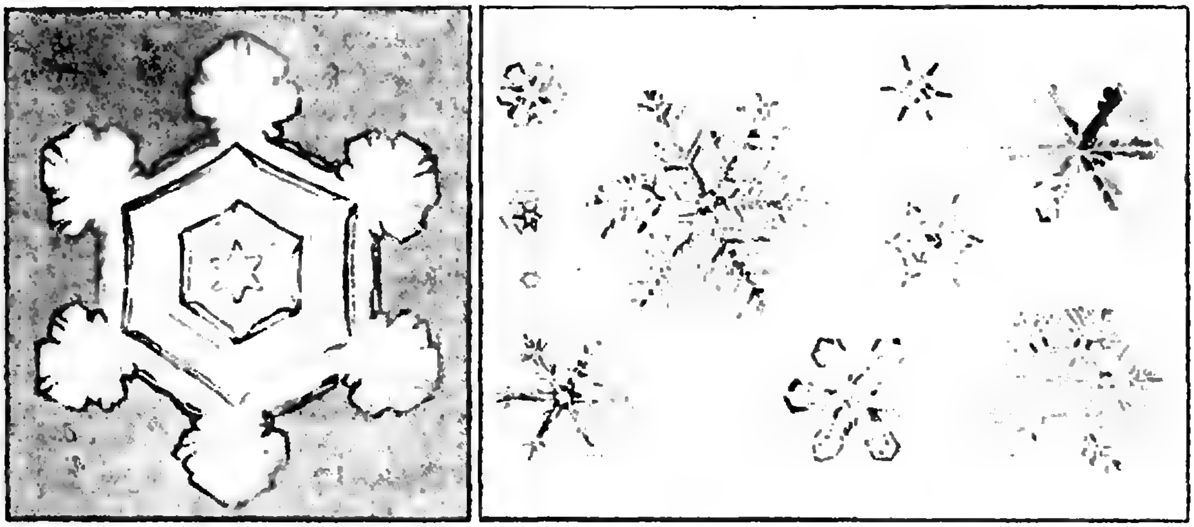


Рис. 1.

и снега сделалось предметом чрезвычайного интереса для химиков и физиков. Это и понятно, так как известные вещества земной поверхности наполовину образованы из кислорода, причем два его соединения с водородом — вода H_2O и гидроксил OH — играют фундаментальную роль в огромном множестве процессов в природе.

Основные черты кристаллической структуры обыкновенного льда были выяснены при помощи рентгеновских методов исследования лет пятнадцать назад. Атомы кислорода в кристаллах льда расположены так же, как шары, изображенные на рисунке 2. Структура в целом является гексагональной (в одной из плоскостей атомы кислорода образуют правильные шестиугольники).

Первая попытка физического объяснения так называемой пластичности льда была предпринята Тиндалем и Гексли в 1857 году. В основу объяснения было положено наблюдавшееся Фарадеем замечательное явление смерзания приведенных в соприкосновение кусков льда. Такое смерзание происходит при самом слабом контакте в том случае, когда куски находятся в воде (рис. 3). Фарадей говорил, что молекулы воды переходят от жидкости к твердому телу гораздо легче в том случае, когда они окружены значительной уже затвердевшей массой. Тонкий слой воды вблизи мест соприкосновения обоих кусков затвердевает и скрепляет их вместе, даже если бы он и не мог замерзнуть сам по себе, находясь вдали от массы льда. Согласно такому взгляду замерзание зависит не только от температуры, но также и от окружающих условий. Аналогично, водяной пар внутри трещины, то есть между двумя поверхностями, будет конденсироваться и превращаться в лед гораздо легче, чем на открытом месте, где контакт возможен лишь с одной поверхностью льда.

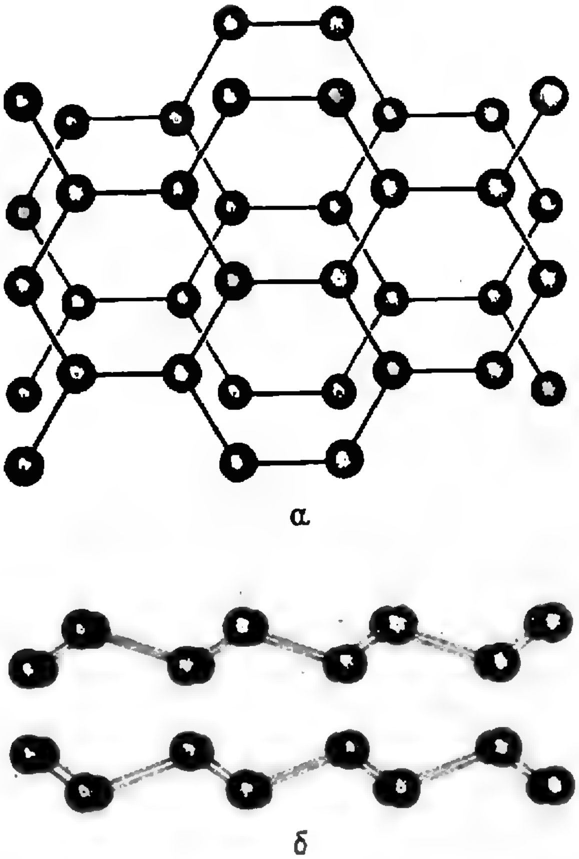


Рис. 2.

Рис. 3.

Лед, находящийся под напряжением, трескается. Тиндаль и Гексли предполагали, что трещины «залечиваются» вследствие осаждения пара или жидкости, происходящих от окружающих частей льда. Поэтому ледяной массив может приспосабливаться к форме своего ложа и ледник в целом как бы течет.

Джемс Томсон в 1860 году предложил иное объяснение этого явления. Признав факт, который наблюдался Фарадеем, Томсон тем не менее отверг прежнее его объяснение; скрепление кусков льда друг с другом он приписывал действию давления, которое оказывают куски

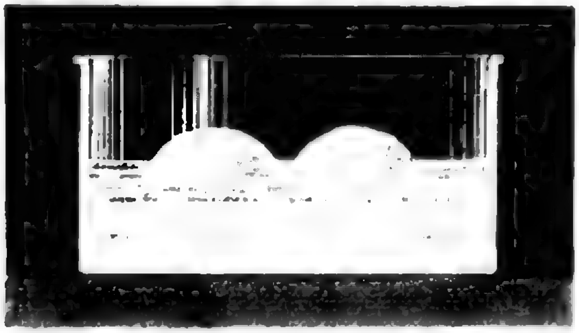


Рис. 4.

друг на друга. Действительно, если вода при замерзании расширяется, то всякое давление, поскольку оно препятствует этому расширению, должно препятствовать и замерзанию, а это эквивалентно понижению точки замерзания. Поэтому при 0° лед под давлением должен плавиться. Это в действительности и наблюдается на опыте. Если какой-либо острый предмет, например, кончик ножа, поместить на кусок льда, то острие проникает вглубь не потому, что лед режется или крошится, а потому, что лед плавится под давлением. Согласно Томсону при сдавливании вместе двух кусков льда в месте соприкосновения должно происходить плавление; получающаяся при этом вода вытесняется и где-нибудь поблизости вновь замерзает, поскольку она уже не находится более под давлением.

Тиндаль продемонстрировал эффект смерзания ледяных кусочков следующим образом. Лед разбивался на мелкие куски, которые затем подвергали сдавливанию в специальной форме. В результате получалась сплавленная прозрачная масса льда. Таким путем, подвергая порошок льда давлению в несколько сотен килограммов на 1 $см^2$, можно изготовлять ледяные чашечки и другие предметы разнообразной формы.

Объяснение явления течения ледников, казалось бы, становится теперь очевидным. Согласно Томсону и Тиндалю изменение формы движущегося ледника происходит в результате плавления льда в местах сильных давлений и последующего затвердевания освобождающейся при этом плавлении воды.

Конечно, утверждение Томсона, что лед плавится под давлением, является совершенно правильным. Однако нельзя согласиться с его предположением, что фарадеевское смерзание плавающих кусков льда основано на этом же принципе. Томсон утверждал, что уже при простом соприкосновении кусков возникает некоторое давление благодаря капиллярному действию *). Это давление и является причиной эффекта Фарадея. Чтобы показать неосновательность возражений Томсона, Фарадей в 1860 году поставил свой опыт при таких условиях, когда капиллярное действие отсутствует. Он сделал из льда несколько дисков, придав им плоско-выпуклую форму, и пустил их плавать по воде выпуклой стороной кверху. При таких условиях куски могли касаться друг друга только под водой (рис. 4). При слабом их соприкосновении друг с другом они смерзались вместе настолько прочно, что для приведения всей массы в движение на воде достаточно было воздействовать лишь на какую-либо одну точку. Деревянные же диски при соприкосновении как по ватерлинии, так и под водой и, следовательно, при наличии капиллярного действия друг на друга, не обнаруживали никаких признаков скрепления.

Несмотря на это, как принцип Фарадея, так и принцип Томсона не дали удовлетворительного объяснения движению ледников. Например, они не объясняли процесса смерзания льда при тех низких температурах, при которых существуют некоторые ледники мира. Впрочем, и сам Фарадей указывал, что два куска льда не смерзаются под давлением, если они охлаждены ниже нуля.

Много лет спустя эти вопросы вновь были подняты Мак-Коннеллом, которому долгое время приходилось жить в Давосе в Швейцарии. Некоторые из предварительных опытов

---

*) За счет сил поверхностного натяжения пленки воды, находящейся между касающимися друг друга кусками льда.

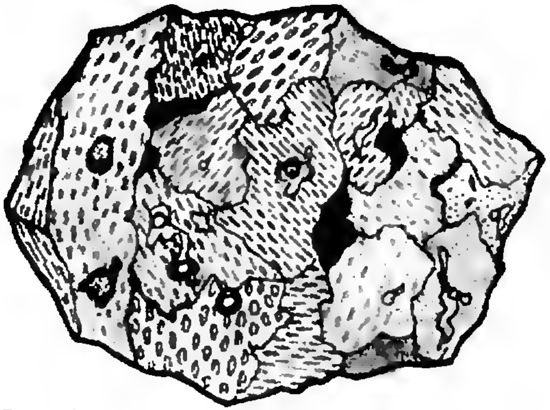


Рис. 5.

привели его к заключению, что секрет пластичности льда может быть объяснен лишь при изучении свойств монокристаллов льда. Большинство же разновидностей льда, в особенности искусственный лед и ледниковая масса, представляют собой конгломерат из отдельных небольших кристаллов (рис. 5). Монокристаллы достаточно большой величины были вырезаны Мак-Коннелом из льда, образовавшегося на поверхности озера или в открытом сосуде. В опытах Мак-Коннела изучались упругие и пластические деформации при следующих условиях:

1. Образец брался в виде пластинки длиной 10—15 сантиметров и примерно по 2—3 сантиметра в ширину и толщину и располагался на двух опорах естественной поверхностью льда кверху.

2. Тот же образец поворачивался на прямой угол так, что «поверхность озера» становилась вертикальной.

3. В качестве образца брался длинный столб, который в исходном массиве был вертикальным.

В первом случае образец оказался согнутым, как обыкновенный стержень (рис. 6). Во втором случае деформация оказалась такой же по характеру, как в первом случае, но значительно меньше по величине. В третьем случае деформация приобрела совершенно своеобразный характер (рис. 7), показывая, что на этот раз имеет место движение вдоль некоторых плоскостей скольжения. Скольжение вертикально расположенных стеклянных пластинок, соединенных друг с другом при помощи масла или другой вязкой среды (рис. 8), служит хорошей моделью такой деформации. Эта модель достаточно хорошо иллюстрирует явление. В третьем случае процесс деформирования продолжался непрерывно и неопределенно долго, то есть деформация являлась пластической. Наоборот, в первых двух случаях деформация была упругой, так как она не изменялась со временем и оказывалась пропорциональной нагрузке.

Чтобы получить более ясное представление об эффекте скольжения у льда, обратимся к модели его структуры, изученной при помощи рентгеновских лучей. Оказывается, что кристалл льда можно рассматривать как совокупность параллельных слоев, соединенных друг с другом при помощи связей, перпендикулярных этим слоям. Каждый слой имеет складчатое строение (см. рис. 2, *б*);

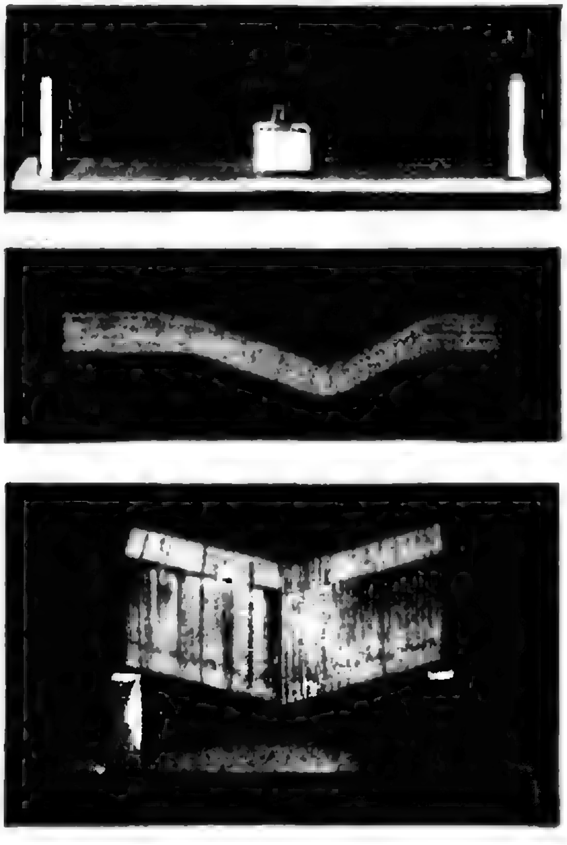


Рис. 6, 7, 8.

надо полагать, что он должен иметь значительную внутреннюю прочность и сравнительно малую способность сопротивляться смещению в собственной плоскости по отношению к смежным слоям. При таком скольжении связи, перпендикулярные слоям, разрываются между двумя атомами и немедленно восстанавливаются между другой парой атомов. С этим движением можно сравнить движение щетки по грубой поверхности: отдельные щетинки попеременно то уступают действию силы, то снова разгибаются, чтобы найти затем новый контакт. Эти слои в кристалле льда оказываются параллельными поверхности льда на поверхности озера или сосуда.

Возвращаясь к опытам Мак-Коннела, мы можем сказать, что описанная в третьем случае установка кристалла действительно хорошо воспроизводится слоями стекла, которые скользят друг относительно друга. В первых же двух случаях изгибание образцов льда происходит аналогично изгибанию деревянной полоски под нагрузкой. При этом деформация получается меньшей, когда полоска положена на ребро, чем тогда, когда она положена плашмя.

В противоположность металлам кристаллы льда не упрочняются при холодной обработке. Слои при скольжении относительно друг друга остаются неискаженными и не разорванными, так что условия существования кристаллов не изменяются. В металле же происходит нарушение прежнего расположения атомов и условия становятся более сложными.

Смерзание кусков льда друг с другом и плавление льда под давлением представляют собой следствия особенностей строения льда, которое в свою очередь является следствием специального характера связей, удерживающих атомы и молекулы льда вместе. Последние годы ознаменовались значительными успехами в наших знаниях об атомных связях. Для настоящей цели достаточно отметить, что в некоторых случаях один атом присоединяет к себе другие атомы только в некоторых особых точках его поверхности. Более правильным было бы выразить эту мысль, сказав, что точки, которыми атомы связываются друг с другом, распределены по поверхности атомов согласно определенному правилу. В частности, атом углерода привязывает к себе четыре других атома в точках, которые лежат на поверхности в четырех вершинах правильного тетраэдра. В других случаях (например, в случае жидкой ртути) не существует такого закономерного расположения точек связи. И действительно, внутренние свойства жидкости определяются отсутствием таких направляющих связей, которые создают структуру, или маскировкой их другими более сильными связями.

Можно представить себе такие крайние случаи. В одном из них существуют только силы первого рода. Это значит, что атомы имеют взаимное притяжение только в том случае, когда они прилаживаются друг к другу имеющимися на их поверхностях контактными точками. Совокупность таких атомов могла бы быть либо твердым телом либо группой атомов, не связанных взаимным притяжением. В последнем случае при наличии достаточной тепловой энергии группа атомов должна была бы образовать газ. Можно, однако, считать, что при таких обстоятельствах могло иметь место случайное сцепление. Если запас тепла уменьшится, то такое соединение атомов становится более частым и более постоянным, из-за чего в отдельных местах начинается затвердевание. Каждая группа соединенных таким образом атомов становится кристаллом, если, конечно, процесс идет не настолько быстро, чтобы образование настоящего кристаллического расположения сделалось невозможным. Атомы или молекулы должны стремиться занять готовые для них места на уже сформировавшихся кристаллах. Таким путем растут кристаллы из паров без образования жидкости как промежуточной фазы.

В другом крайнем случае можно представить себе атомы или молекулы, которые не имеют направленного притяжения. Если тепловые колебания недостаточно сильны для того, чтобы атомы или молекулы были изолированы друг от друга, то они собираются вместе и образуют жидкость, вязкость которой будет зависеть от того, насколько легко могут двигаться отдельные молекулы среди роя других молекул. При дальнейшем охлаждении вязкость может возрастать непрерывно или внезапными скачками, вплоть до той степени, когда эта совокупность молекул сможет быть названа твердым телом.

Естественные вещества лежат между этими двумя крайностями, причем лед, по-видимому, ближе к первой из них, чем другие вещества. Действительно, его кристаллы образуются непосредственно из пара. С другой стороны, молекулы водяного пара непрерывно отрываются от кристаллов в результате действия тепла или по другой причине и смешиваются с молекулами окружающей среды. Лед «сублимируется». Легкость или трудность конденсации и отрыва молекул должны определяться каким-то соотношением между плотностью пара, температурой и поверхностными условиями. В трещинах шансы на конденсацию выше, чем на открытых местах, так как в трещинах, начиная с их ребер, молекулы находятся под двойным действием. Отрыв молекул с большей вероятностью происходит с выпуклой поверхности. Этот эффект совершенно аналогичен эффекту зависимости упругости пара от формы жидкости, с которой пар соприкасается, как на это и было указано Фарадеем. В трещине равновесие между сублимацией и осаждением должно быть иным, чем снаружи, причем последнее возрастает за счет первого. Иными словами, упругость пара понижается, то есть температура точки замерзания повышается.

При обычных давлениях вода имеет наибольшую плотность вблизи 4° С. При дальнейшем понижении температуры вплоть до температуры замерзания, плотность становится все меньшей и меньшей. Очевидно, что некоторые из молекул образуют комплексы, которые занимают большее пространство, чем те же молекулы, взятые в отдельности, так как межатомные силы заставляют атомы принимать определенное расположение в пространстве. При этом совсем нет необходимости считать эти комплексы постоянными: по всей вероятности, они постоянно возникают, распадаются и возникают вновь.

Рассмотрим теперь снежные хлопья. Два главных факта, требующих объяснения, таковы: бесконечное разнообразие гексагональных форм и симметрия каждой снежинки. Шестиугольная форма снежинок, очевидно, находится в связи с гексагональной формой кристаллов льда, но все же всегда было очень трудно объяснить, почему шесть лучей каждой снежинки так похожи один на другой и в то же время так сильно отличаются от лучей всякой другой снежинки. Удовлетворительное объяснение можно дать следующим путем.

Весь вопрос может быть рассмотрен в свете тех же эффектов сублимации и осаждения, как и в случае смерзания кусков льда. Когда такая шестиугольная конструкция вырастает из некоторого ядра в атмосфере водяного пара или в жидкости, содержащей растворенную воду, то характер роста должен зависеть от условий, при которых этот рост происходит. Если в окружающем пространстве много пара или температура низка, то рост идет быстро и лучи снежинок стремятся проникнуть в окружающее пространство, в котором еще содержатся многочисленные молекулы воды. Рост идет на концах лучей и на вспомогательных ветвях, которые образуют с первыми угол в 60°. Если же снежинка переносится в пространство с малой плот-

Рис. 9.

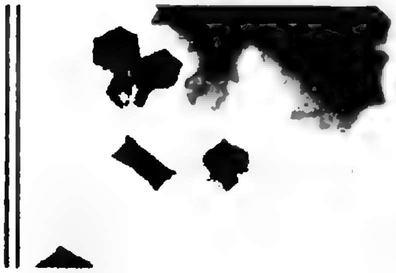


Рис. 10.

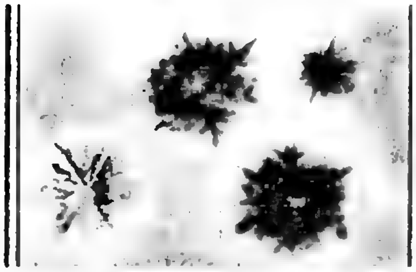


Рис. 11.

ностью пара или с более высокой температурой, то происходит обратный процесс. Молекулы гораздо легче отрываются от концов ветвей, чем от центральных областей снежинки, и отлагаются на ней не с прежней скоростью. Благодаря этому снежинка утолщается в центральной части, а ее ветви укорачиваются и даже закругляются. Так как снежинки размером невелики, часто не более нескольких миллиметров в диаметре, то условия вокруг каждой из них можно считать одинаковыми во всех точках. Если удлиняется один луч, то удлиняются также и остальные лучи. При всем этом, падая на Землю, снежинки могут встречать самые разнообразные местные условия, в соответствии с чем они могут приобретать множество различных форм, в то время как лучи каждой отдельной снежинки останутся совершенно сходными.

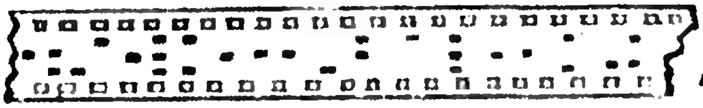
Согласно этому объяснению большое разнообразие форм снежинок основано на существовании двух противоположных процессов: быстрого роста ветвей, ведущего к перистой их форме, и уплотнение в центрах этой перистой структуры. В первом процессе рост в большей степени преобладает над сублимацией, чем во втором, так что оба они скорее различаются по степени, чем по качеству. Форма каждой снежинки говорит нам о тех изменениях в атмосферных условиях, которые пришлось ей пережить.

Еще более медленный рост кристаллов льда может быть осуществлен, если выдерживать лед при температуре как раз ниже температуры замерзания в одной части откачанного сосуда и предоставлять ему сублимироваться на металлическую пластинку в другой части сосуда, поддерживаемой при значительно более низкой температуре. Кристаллы принимают форму шестиугольных призм.

Изображенные на рисунке 9 перистые формы были получены при быстром охлаждении смеси глицерина, спирта и сравнительно больших количеств воды. Более плотные шестиугольные призмы на рисунке 10 получены более медленным охлаждением такой же смеси, но с меньшим количеством воды. Если полученные таким образом призмы заставить плавиться или возгоняться, то в некоторый момент появляется стадия более открытой структуры, весьма напоминающей естественные снежинки в некоторых их формах (рис. 11).

Тиндалем был произведен прекрасный опыт, при помощи которого ему удалось продемонстрировать структуру льда. Этот опыт называется «получением ледяных цветов». Пучок света от дугового фонаря пропускается через кусок льда. В различных точках этого куска, где имеются загрязнения или неправильности, тепло задерживается и вызывает плавление. Получающиеся в этом случае пустоты имеют гексагональную форму, так как разрушение структуры идет в направлении, как раз противоположном росту. Эти фигуры представляют собой, так сказать, отрицательные снежинки. При помощи подходящей аппаратуры эти фигуры могут быть спроектированы на экран. Если на пути лучей от фонаря ко льду поместить кювету с водой, то тепловые лучи поглощаются, и рост таких пустот в кристалле прекращается.

Машина учится распознавать



А. С. Варпаховский

Как вы, очевидно, знаете, для решения любой задачи на электронной вычислительной машине (ЭВМ) машине необходимо «сообщить» исходные *данные* решаемой задачи и *программу* действий, которые требуется произвести над этими данными *). Получив такие сведения, ЭВМ выполняет предписанные действия над данными («думает») и в результате получает искомое решение.

Нынешние ЭВМ научились очень неплохо «думать», но все еще крайне неповоротливы в отношении восприятия («чтения») необходимых предварительных сведений: они напоминают первоклассника, хорошо успевающего по арифметике, но сильно отстающего по чтению.

Всякая ЭВМ строится из некоторого (очень большого!) числа «элементов», которые могут находиться в двух различных состояниях; для наглядности можно представлять себе каждый такой элемент как лампочку, которая либо выключена (состояние 0), либо включена (состояние 1). Поэтому все, что сообщается машине, нужно сначала «перевести» на язык нулей и единиц. Любые сведения — будь то набор чисел, система уравнений или шахматная позиция — «записываются» в машине в виде подходящих последовательностей нулей и единиц. Чтобы хранить и записывать нужные сведения, ЭВМ снабжается специальным устройством — памятью. Память ЭВМ представляет собой набор ячеек из некоторого определенного числа элементов каждая (скажем, шести). В любой ячейке можно записать какую-нибудь последовательность из нулей и единиц (число различных таких последовательностей равно $2^6=64$).

Допустим, например, что машине нужно «сообщить» число 19. Для этого числу 19 приписывается сначала определенный код в виде последовательности нулей и единиц: 010011 *). Затем данный код наносится на специальную ленту (перфоленту): в нужных местах этой ленты пробиваются отверстия. Наконец, лента вводится в машину, которая в соответствии с отверстиями на ленте переводит в требуемые состояния элементы ячейки, отведенной для записи данного числа. Процесс схематически изображен на рисунке 1.

Легко представить, сколько времени идет на изготовление ленты, каким трудоемким оказывается весь процесс, когда машине требуется сообщить большое число данных. Как же упростить и автоматизировать передачу данных машине? Нельзя ли давать машине нужные ей сведения в обычной форме (скажем, в виде напечатанного текста), предоставив кодирование самой машине? В принципе, конечно, можно. Но для этого

---

*) См., например, статьи Р. С. Гутера «Что умеют машины» («Квант» № 5, 1970) и «Язык человека и язык машины» («Квант» № 10, 1971).

*) Этот код есть, конечно, не что иное, как запись числа 19 в двоичной системе счисления; см., например, статью Р. С. Гутера «Вычислительные машины и системы счисления» («Квант» № 9, 1971).

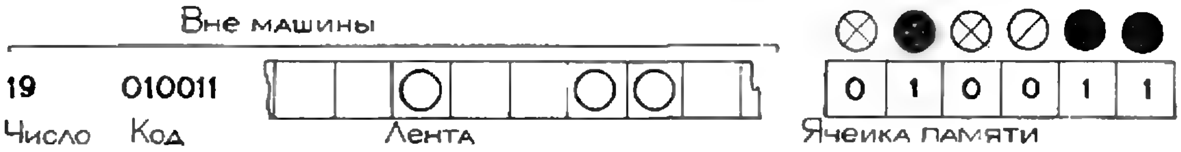


Рис. 1.

машина должна уметь различать все символы («буквы») того «алфавита», из которых составлен соответствующий текст.

Несмотря на кажущуюся простоту, такая задача по *распознаванию* букв очень сложна. Пока не может быть даже и речи о том, чтобы машина «читала» любые индивидуальные рукописные тексты. Мы поэтому будем здесь говорить прежде всего о «чтении» печатных текстов — с буквами строго определенной формы и размера.

Рассмотрим сначала текст, составленный всего из двух «букв» — нуля и девятки. Поле, занимаемое одной буквой, разобьем на участки (клетки); некоторые из клеток окажутся закрашенными (хотя бы частично), другие останутся незакрашенными (см. рис. 2).

В поле буквы выделим некоторую определенную зону, которая — клетка за клеткой — «просматривается» машиной (на рисунке 2 выбранная зона обзора обведена жирной линией).

Машина отличает достаточно плотно и достаточно полно закрашенные клетки от прочих и подсчитывает общее число этих клеток в зоне своего обзора. Ясно, что в нашем примере при «осмотре» нуля закрашенных клеток должно быть меньше, чем при «осмотре» девятки. Поэтому признак для отличения нуля от девятки можно «запрограммировать» в машине следующим образом: если число закрашенных клеток в зоне меньше некоторого данного числа m, машине предписывается заполнить соответствующую ячейку памяти кодом нуля, в противном случае — кодом девятки.

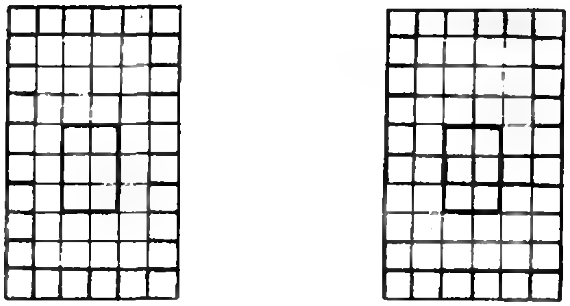


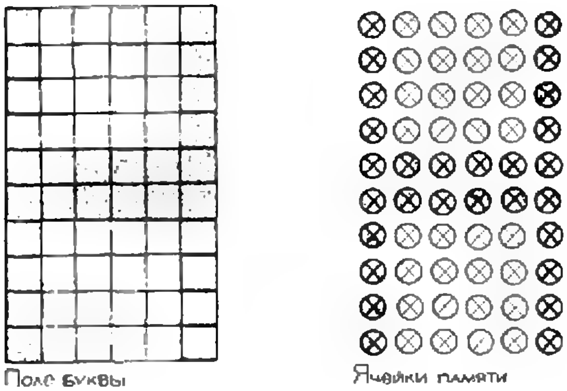
Рис. 2.

Такая процедура может показаться слишком длинной и утомительной, но не нужно забывать о чудесном быстродействии машины — десятки и сотни тысяч операций в секунду; машина будет «узнавать» букву за ничтожные доли секунды! Хуже то, что такой способ не гарантирует абсолютной правильности чтения,— наличие случайных разрывов в начертании буквы, неплотность закраски и другие дефекты могут привести к ошибке.

Весь процесс, конечно, усложняется при переходе к большему количеству букв — здесь приходится последовательно применить несколько признаков для различения отдельных букв.

Скажем, добавив к нулю и девятке тройку, мы позволим машине на основе прежнего признака решить только такой вопрос: «ноль или не ноль». В последнем случае («не ноль») потребуется применить какой-нибудь дополнительный признак для отличения девятки от тройки.

В случае, когда букв много и форма каждой буквы строго определена (например, берутся все буквы машинописного шрифта определенного образца), можно поступать иначе. ЭВМ предварительно снабжается «эталонами» (образцами) всех букв, которые ей потребуется различать. Для этого ЭВМ «запоминает», какие клетки поля каждой буквы должны быть закрашены, а какие — нет. Скажем, эталон буквы «н» можно записать



Поле буквы

Ячейки памяти

Рис. 3.

в 10 последовательных ячейках памяти, как показано на рисунке 3.

Тем же способом в память машины вводятся и все другие эталоны. В процессе чтения каждая читаемая буква проверяется последовательно всеми эталонами. При проверке очередным эталоном машина сравнивает содержимое каждой клетки (закрашенность или незакрашенность этой клетки) с состоянием соответствующего элемента ячейки памяти и подсчитывает общее число «разночтений». После сравнения со всеми эталонами машина выбирает тот из них, для которого число разночтений — наименьшее; код выбранной буквы заносится в очередную ячейку памяти, и машина переходит к чтению следующей буквы.

Такое механическое чтение заранее определенного шрифта было бы достаточно надежным, хотя ошибки не исключены даже в этом случае. Нетрудно, например, представить себе, что буква «С» может из-за различных неправильностей оказаться «ближе» к эталону буквы о», чем к своему собственному. Дополнительные трудности связаны с введением заглавных (больших) букв и знаков пунктуации (точки, запятой и пр.).

Главное неудобство данной системы чтения заключается в ее негибкости: стоит немного изменить шрифт, и чтение перестает быть правильным. Происходит это потому, что при таком способе чтения ЭВМ различает буквы не по характерным особенностям их формы, а по конкретному способу их написания. Буква «о» из другого шрифта может значительно отличаться от эталонной соотношением своих частей: быть более узкой, иметь более крутые закругления и т.п. Число разночтений (при сравнении с эталонной буквой «о») окажется тогда очень большим, и машина может «спутать» букву «о» с какой-нибудь другой буквой. Следовательно, при переходе на другой шрифт нужно вводить в машину новые эталоны, заставляя машину каждый раз как бы заново «учить» алфавит.

Желательно, конечно, заставить машину правильно распознавать буквы исключительно по их строению, структуре — так, чтобы даже значительные различия в соотношении частей букв не влияли на результат чтения. Здесь, однако, как раз кроются основные трудности, которые особенно наглядно проявляются при чтении рукописных текстов. Например, букву «а» даже один и тот же человек пишет по-разному в разных случаях, не говоря уже о разных людях. И если человек, разбирая какой-либо текст, прибегает к помощи многочисленных смысловых, логических и грамматических связей, то машина такой помощи, вообще говоря, лишена и должна рассчитывать только на свое «зрение».

Чтобы отчетливее представить, какие здесь возникают проблемы и как можно подойти к их решению, остановимся на простом примере рукописного текста, записанного азбукой Морзе. В этом случае символов всегда два: «точка» и «тире» (не считая всевозможных различных по длине пропусков между символами и группами символов). Главное затруднение состоит в том, что некоторые «точки» у одного «морзиста» могут оказаться длиннее некоторых «тире» у другого. По этой причине нельзя заранее снабдить машину точным предписанием: все знаки, длина которых меньше данного числа *l*, должны считаться точками, все прочие знаки — тире. Можно, однако, сделать так, чтобы по достаточно длинному тексту одного морзиста машина сама определила такое пограничное число *l*. Ведь у всякого морзиста длины всех

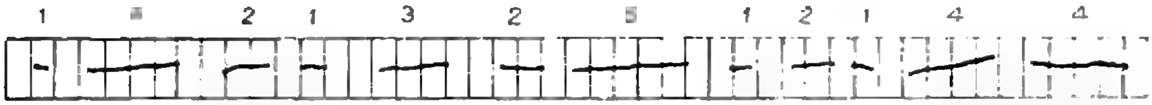


Рис. 4.

точек будут близки к определенному числу l_1, а длины всех тире — к некоторому определенному числу l_2. Если найти эти два числа l_1 и l_2 и положить $l = \frac{l_1 + l_2}{2}$, то можно ожидать, что почти все точки окажутся короче l, а почти все тире — длиннее l. Для определения же чисел l_1 и l_2 машина «просматривает» какой-нибудь большой кусок текста и отмечает длины всех встречающихся в нем знаков. Например, в случае текста, показанного на рис. 2, машина находит, что знаки длины 1*) встретились 4 раза, длины 2 — 3 раза, длины 3 — 1 раз, длины 4 — 3 раза, длины 5 — 1 раз:

Длина знака	1	2	3	4	5
Число знаков	4	3	1	3	1

Получается, что самый частый короткий знак — это знак длины 1, а самый частый длинный знак имеет длину 4. Эти два числа машина «принимает» в качестве l_1 и l_2 и вычисляет $l = \frac{1 + 4}{2} = 2,5$.

Теперь машина будет считать точками все знаки, длина которых меньше 2,5, а все другие знаки будет считать тире. Время от времени для большей надежности машина может производить перерасчет чисел l_1, l_2 и l.

Такой способ распознавания точек и тире (с некоторыми усовершенствованиями) был испробован на конкретной машине и дал прекрасные результаты: более 90% символов машина прочитала правильно.

Конечно, решающие успехи в этой области еще впереди; но кое-что уже сделано, и ученые продолжают интенсивно работать в этой области. Задача научить машину читать привлекает внимание многих исследователей как одна из наиболее важных, интересных и трудных задач в совершенствовании ЭВМ. Общая же задача «распознавания образов» справедливо считается едва ли не важнейшей задачей современной кибернетики **).

Несостоявшийся обед

Дорофей Мартьяныч Дубодумов, переехав на лето на дачу, решил дать обед и пригласить всех восьмерых своих соседей.

«— Что вы, что вы,— замахали на него руками.— Разве вы не знаете, что Порфирий Аполлинариевич никогда не примет приглашения, если вы позовете Афанасия Мефодиевича или Амвросия Евлампиевича, или если одновременно будут приглашены Авдотья Пафнутьевна и Никодим Гаврилович. Амвросий Евлампиевич и Афанасий Мефодиевич, правда, не будут возражать против каких-либо приглашений, зато Авдотья Пафнутьевна придет только в том случае, если будет приглашен и Никодим Гаврилович, который ни за что не примет приглашения, если на обеде будет Афанасий Мефодиевич. Розалия Леопольдовна наносит визиты только в сопровождении Акакия Акакиевича. Клеопатра Ивановна не будет возражать против приглашения Розалии Леопольдовны только в том случае, если будет приглашен Порфирий Аполлинариевич, но если не будет приглашена Розалия Леопольдовна, тогда Клеопатра Ивановна будет и против приглашения Никодима Гавриловича. Чтобы принял приглашение Акакий Акакиевич, надо пригласить либо Авдотью Пафнутьевну, либо Клеопатру Ивановну, кроме того, он откажется от приглашения, если на обеде будет Никодим Гаврилович без Порфирия Аполлинариевича, а о том, что Акакий Акакиевич не придет, если будет приглашен Афанасий Мефодиевич или Амвросий Евлампиевич, так даже и говорить не стоит».

(Окончание см. стр. 39)

---

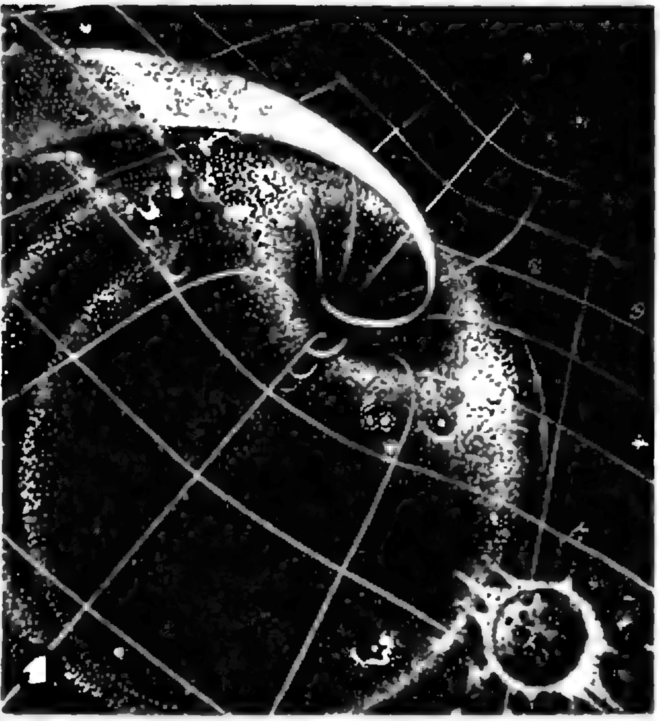
*) Все длины округляются до ближайшего целого числа.

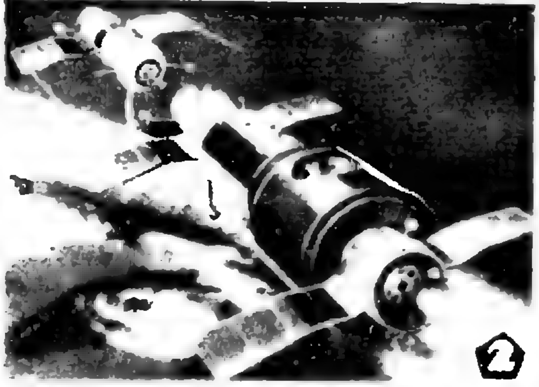
**) Подробнее см., например, книгу М. М. Бонгарда «Проблема узнавания» (М., изд-во «Наука», 1967).

IOANNES KEPLERVS
1571
1630
ИОГАНН КЕПЛЕР

ЗЕМЛЯ и ВСЕЛЕННАЯ

1


①


②

③

④

1. Невидимые миру звезды — «черные дыры». — стали предметом поиска. Их открытие будет иметь первостепенное научное значение. («Земля и Вселенная», № 2, 1972).

2. Так в июне 1971 года происходило сближение транспортного космического корабля «Союз-11» с орбитальной станцией «Салют». («Земля и Вселенная», № 2 и № 3, 1972).

3. Тридцать миллионов лет назад на севере Сибири произошла космическая катастрофа, в результате которой возник Попигайский кратер. («Земля и Вселенная», № 5, 1971).

4. «Медвежий» — пример пульсирующего ледника, причины неожиданных перемещений которого пытаются выяснить гляциологи. («Земля и Вселенная», № 3, 1972).

У НАС В ГОСТЯХ ЖУРНАЛ „ЗЕМЛЯ и ВСЕЛЕННАЯ“

В январе 1965 года вышел из печати первый номер нового научно-популярного журнала Академии наук СССР «Земля и Вселенная». Журнал призван удовлетворять огромный интерес к проблемам исследования космоса, астрономии и физики Земли, возникший в последние десятилетия.

Основные задачи журнала:

— пропагандировать важнейшие научные достижения, показывая мировоззренческое значение наук о Земле и космосе, а также их тесную связь с другими областями знания;

— вскрывать антинаучную сущность всякого рода сенсационных «гипотез» и «теорий» в области астрономии и геофизики, распространение которых дискредитирует советскую науку;

— оказывать помощь преподавателям и лекторам;

— содействовать широкому участию любителей в массовых наблюдениях и исследованиях, важных для астрономии, геофизики и геодезии;

— способствовать широкому развитию любительского телескопостроения.

За годы своего существования журнал опубликовал много интересных материалов, посвященных исследованиям Луны и планет Солнечной системы, квазарам, пульсарам, реликтовому излучению и другим загадочным объектам, открытым радиоастрономами. Он рассказал об изучении нашей Галактики и процессов, происходящих в других галактиках, о новых разделах астрономии (рентгеновская астрономия, нейтринная астрономия и т. д.), о причинах землетрясений, цунами, движении земных материков.

Материалы, публикуемые в журнале «Земля и Вселенная», имеют различный уровень трудности. Часть из них рассчитана на хорошо подготовленных читателей; другая не требует никакой специальной подготовки.

Мы помещаем две статьи постоянных авторов журнала. Статья Л. М. Гиндилиса связана с весьма сложной проблемой, и некоторые ее выводы, касающиеся теории фотонных ракет, нашим читателям придется принять «на веру». Но сама проблема поисков космических цивилизаций настолько интересна, что мы охотно публикуем эту статью. Статья В. И. Левантовского посвящена одной любопытной задаче современной космонавтики. По своему характеру она значительно ближе к материалам, публикуемым в нашем журнале.

CETI В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Л. М. Гиндилис

Сейчас много говорят и пишут о проблеме связи с внеземными цивилизациями. Специалисты коротко называют ее CETI, по первым буквам английских слов Communication with Extraterrestrial Intelligence, что в переводе на русский язык означает «связь с внеземным разумом». Пишут не только в фантастических произведениях, но и в серьезных, вполне серьезных научных работах. Этой теме уже не раз были посвящены научные семинары, совещания, конференции. Недавно в Армении, в Бюраканской астрофизической обсерватории, прошла I Международная конференция по этой проблеме. В ее работе приняли участие многие выдающиеся советские и зарубежные ученые — специалисты в области астрономии, физики, биохимии, биологии, истории, философии, социологии, кибернетики, теории информации и связи. В течение нескольких дней они обсуждали возможности обнаружения внеземных цивилизаций, проблему установления контакта с внеземным разумом*). Действительно, можно ли установить контакт с разумными обитателями других миров, отдаленных от нас гигантскими расстояниями, которые легче записать с помощью цифр, чем представить силой воображения?

Как это сделать?

Вооружимся карандашом и бумагой и вместе подумаем над этой проблемой.

Конечно, интереснее всего было бы слетать к ним в гости, посмотреть, как они живут, чем занимаются, поделиться опытом... Итак, садимся в ракету. Чтобы вырваться из сферы земного притяжения, надо развить скорость 11,2 *км/с*. Это — так называемая вторая космическая скорость (вопрос в скобках: почему вторая, а что же такое первая космическая скорость?) А чтобы покинуть Солнечную систему, необходимо развить скорость, которая превышает третью космическую (чему она равна?).

Пусть наша ракета мчится со скоростью порядка третьей космической скорости. Сколько времени потребуется нам, чтобы долететь до ближайшей к Солнцу звезды? (Как она называется, на каком расстоянии от нас находится?). А до центра Галактики? До Туманности Андромеды?

Если вы не ошиблись в вычислениях, результат их может вызвать уныние. Чтобы долететь даже до ближайшей звезды, не хватит никакой человеческой жизни. Что же делать? Ну, конечно, увеличить скорость. Для нас с вами это не представляет никакого труда: ведь мы проводим мысленный эксперимент, поэтому мы можем использовать любые средства, даже те, которые недоступны технике сегодняшнего дня. Запрещается нам только одно: нарушать законы физики. Итак, увеличиваем скорость.

Какова максимально возможная скорость?

Это вы, конечно, знаете; она равна скорости света в пустоте—300 000 *км/с*. При такой скорости, чтобы долететь до ближайшей звезды, потребуется немногим более четырех лет. Конечно, точно со скоростью света не может лететь ни одно материальное тело. Такая скорость доступна лишь для частиц, лишенных массы покоя. Но ракета может достичь скорости сколь угодно близкой к скорости света, так что полет до ближайшей звезды действительно займет около четырех лет.

---

*) Об этих дискуссиях вы можете прочитать в журнале «Земля и Вселенная» № 2 и № 3 за 1972 г.

А сколько времени потребуется, чтобы долететь до центра нашей Галактики? До туманности Андромеды?

Ну, это совсем просто. Расстояние до центра Галактики составляет приблизительно 34 000 световых лет, следовательно, если лететь со скоростью света, то потребуется 34 тысячи лет. Действительно просто, но неутешительно: опять-таки слишком долго. Положение кажется безвыходным — ведь мы летим с максимально возможной скоростью. Где же выход? Впрочем, стоп! В нашем рассуждении есть неточность. Мы не учли различия в темпе течения времени на Земле и в нашей ракете. Для наблюдателя, остающегося на Земле и следящего по своим часам за нашим полетом, действительно пройдет 34 000 лет. Но на движущемся корабле согласно теории относительности время течет по-другому. Чем ближе скорость корабля к скорости света, тем медленнее течет на нем время. Значит, если мы достаточно близко подойдем к скорости света, то сумеем долететь куда угодно и почти не состаримся.

Пусть корабль движется с постоянной скоростью v. Вам поставлена задача: за 10 лет долететь до туманности Андромеды. Какова должна быть скорость корабля? Чему равно ее отношение к скорости света?

Расстояние до туманности Андромеды приближенно равно двум миллионам световых лет. Чтобы пролететь это расстояние за 10 лет, релятивистское сокращение времени, то есть отношение собственного времени τ космического корабля ко времени t, измеряемому по часам земного наблюдателя, должно быть равно

$$\frac{\tau}{t}=\frac{10}{2\,000\,000}\,\frac{v}{c}.$$

Но при постоянной скорости корабля эта величина

$$\frac{\tau}{t}=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{v}{c}\approx 1-1{,}25\cdot 10^{-11}$$

$$=0{,}999\,999\,999\,987\,5.$$

Итак, если корабль будет двигаться со скоростью $0{,}999\,999\,999\,987\,5\,c$, он за 10 лет сможет долететь до туманности Андромеды.

Но, чтобы достигнуть такой скорости, корабль должен быть предварительно ускорен с помощью какого-то двигателя. Следовательно, надо еще учесть время ускорения корабля. Коэффициент полезного действия ракеты тем выше, чем ближе скорость истечения рабочего тела («топлива») к конечной скорости ракеты. Поэтому наиболее эффективным средством достижения околосветовых скоростей является использование фотонной ракеты, работающей за счет реакции аннигиляции вещества и антивещества. Конечным продуктом этой реакции является γ-излучение. Итак, скорость истечения рабочего тела равна скорости света.

Пусть фотонный корабль движется с ускорением $a=g=10$ м/с^2 (для нас это очень удобно: никаких перегрузок, никакой невесомости). Каково собственное время ускорения корабля от нулевой скорости до скорости v, которую мы только что определили? Чему равно время ускорения в системе неподвижного наблюдателя?

Из теории фотонной ракеты известно*), что если она движется с постоянным ускорением a и если массовое число, то есть отношение начальной массы ракеты к конечной (после выгорания топлива), равно μ, то время ускорения, или длительность полета на активном участке траектории, в системе отсчета, связанной с ракетой, равно

---

*) См., например, С. Хорнер, «Осуществимы ли космические полеты?» Сборник «Межзвездная связь», М., Мир, 1965, стр. 158—176.

$$\tau = \frac{c}{a} \ln \mu. \qquad (1)$$

То же время в системе неподвижного наблюдателя

$$t = \frac{c}{2a} (\mu - \mu^{-1}). \qquad (2)$$

При этом ракета в ускоренном полете проходит путь

$$x = \frac{c^2}{2a} (\mu + \mu^{-1} - 2) \qquad (3)$$

и достигает в конце этого пути скорости

$$v = c\,\frac{1 - \mu^{-2}}{1 + \mu^{-2}}. \qquad (4)$$

Определим прежде всего μ. Из последней формулы получаем

$$\mu^2 = \frac{c + v}{c - v} \approx \frac{2}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Подставляя сюда найденное выше значение скорости v, находим $\mu = 4 \cdot 10^5$. Теперь можно определить величины τ, t, x. Они равны: $\tau = 3{,}9 \cdot 10^7$ *с* ≈ 12 лет, $t = 6 \cdot 10^{12}$ *с* $\approx 2 \cdot 10^5$ лет, $x = 1{,}8 \cdot 10^{23}$ *см* $\approx 2 \cdot 10^5$ световых лет.

Итак, в нашем примере фотонный корабль, двигаясь с постоянным ускорением $a = 10$ *м/с*^{2}, за 12 лет достигнет скорости 0,999 999 999 987 5 c и при этом успеет пройти приблизительно десятую часть пути до туманности Андромеды. Двигаясь далее по инерции с постоянной скоростью v, он приблизительно через 1,6 миллиона лет по земным часам будет находиться на расстоянии 200 000 световых лет от цели. Так как релятивистское сокращение времени при данной скорости составляет $5 \cdot 10^{-6}$, то собственное время корабля, прошедшее с момента выключения двигателя, составит $5 \cdot 10^{-6} \times 1{,}6 \cdot 10^6 = 8$ лет. Пусть в этот момент космонавты вновь включают двигатель, чтобы погасить приобретенную скорость. И пусть ускорение (замедление) по-прежнему равно g. Очевидно, для того чтобы погасить скорость до нуля, потребуются те же 12 лет, и при этом путь будет пройден тот же, что и при ускорении: $2 \cdot 10^5$ световых лет. Полное время полета в один конец по часам космонавтов составит: $12 + 8 + 12 = 32$ года (рис. 1).

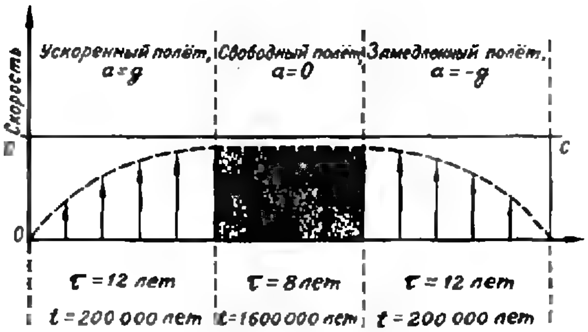


Рис. 1. Схема полета к туманности Андромеды.

Если ускорение увеличить в 10 раз, то длительность ускоренного полета сократится в 10 раз. Тогда для того, чтобы достигнуть туманности Андромеды, космонавтам потребуется: $1{,}2 + 5 \cdot 10^{-6}\ (2 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4) + 1{,}2 = 1{,}2 + 9{,}8 + 1{,}2 = 12{,}2$ года. Величина $4 \cdot 10^4$ лет равна времени полета с ускорением по земным часам.

В разобранном только что примере корабль ускорился до некоторой скорости v, близкой к скорости света, а затем бо́льшую часть пути продолжал полет по инерции. Это не наилучший способ путешествия. Ведь чем дольше работает двигатель фотонного корабля, тем выше скорость, развиваемая им в конце активного участка траектории. Поэтому минимальное время полета достигается тогда, когда корабль движется с постоянным ускорением до половины пути, а затем начинает тормозиться с тем же ускорением (замедлением), так что в конце пути скорость корабля равна нулю. В справедливости этого положения вы можете убедиться, используя приведенные выше формулы.

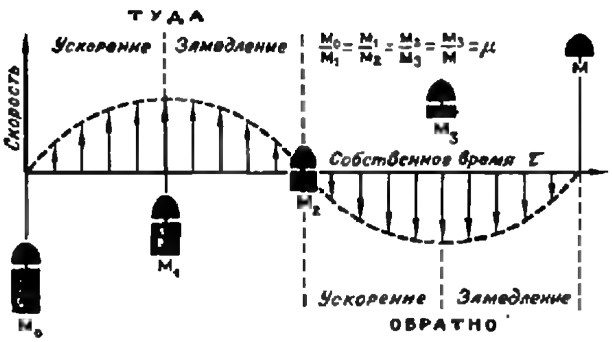


Рис. 2. Схема полета с возвратом космонавтов на Землю.

До сих пор мы интересовались только временем полета. Подумаем теперь о необходимой мощности. Пусть корабль движется описанным выше оптимальным образом с постоянным ускорением до половины пути и последующим замедлением на оставшемся участке. На обратном пути все повторяется в том же порядке (рис. 2). Пусть ускорение корабля g, конечная масса 10 тонн, дальность полета 1 000 световых лет (совсем рядом по сравнению с туманностью Андромеды!). Какова начальная масса корабля? Чему равен энергетический эквивалент этой массы? Какова мощность двигателя?

Поскольку дальность полета равна 1 000 световых лет, длина участка ускорения составляет 500 световых лет. Полагая $x=500$, из формулы (3) находим $\mu=10^3$. Следовательно, если M_0 — начальная масса ракеты, то в конце участка ускорения ее масса $M_1=10^{-3}\ M_0$. Поскольку длина участка торможения также составляет 500 световых лет, а ускорение (замедление) по-прежнему равно g, то масса ракеты в конце этого участка равна $M_2=10^{-3}\ M_1=10^{-6}\ M_0$. На обратном пути, после торможения, масса ракеты будет равна $M=10^{-6}\ M_2=10^{-12}\ M_0$. Это и есть полезная масса корабля, равная по условию 10 тоннам. Отсюда получаем $M_0=10^{13}$ тонн, что равно массе марсианского спутника Фобоса. Энергетический эквивалент этой массы $E=M_0\,c^2\approx10^{40}$ *эрг*. Это в 10^{13} раз превышает современное потребление энергии в год по всему земному шару.

Определим теперь мощность двигателя, которая из теории фотонной ракеты равна

$$P=M_0\,ca. \qquad (5)$$

Подставляя сюда значение M_0, найдем $P=3\cdot10^{25}$ *вт*. Это всего в 10 раз меньше мощности излучения Солнца. Но масса Солнца равна $2\cdot10^{33}$ *г*, а масса нашей ракеты всего 10^{19} *г*. Следовательно, удельная мощность Солнца (в расчете на 1 *г* массы) составляет около 10^{-7} *вт/г*, а удельная мощность двигателя фотонной ракеты в нашем примере должна быть равна $3\cdot10^6$ *вт/г*, то есть на 13,5 порядков выше. Это, конечно, фантастически большая величина. Если бы масса Братской ГЭС была 1 *кг*, она имела бы подобную удельную мощность. Для сравнения отметим, что современные судовые реакторы имеют удельную мощность порядка 10^{-2} *вт/г*.

Трудности, с которыми мы встретились, вполне понятны. Стремясь достигнуть наших «братьев по разуму», мы пытались разогнать тяжелое тело (корабль с космонавтами) до околосветовой скорости. Но в природе есть частицы, лишенные массы покоя (фотоны, нейтрино), которые не нужно разгонять, ибо они могут существовать, только двигаясь со скоростью света. Не воспользоваться ли нам их услугами? В повседневной жизни мы постоянно делаем это, когда слушаем радио, смотрим телевизор или говорим по телефону. Электромагнитные волны добросовестно переносят информацию нашим абонентам. Так давайте попробуем воспользоваться ими для связи с другими цивилизациями.

Предположим, что мы располагаем энергией порядка 10^{40} *эрг* и можем построить либо фотонную ракету с мощностью двигателей $3\cdot10^{25}$ *вт* либо передатчик такой же мощности. Какой путь нам избрать? При заданной мощности двигаталей фотонная ракета, как мы видели, позволит улететь на расстояние 1000 световых лет и вернуться обратно. В

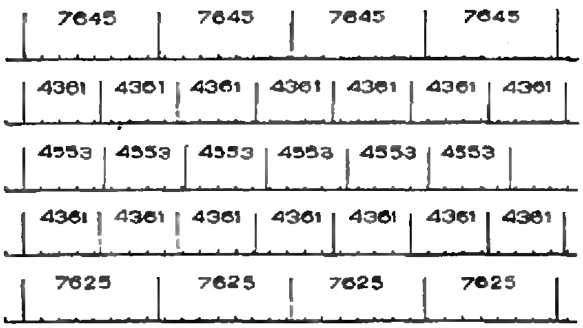


Рис. 3.

сфере такого радиуса содержится около 10 миллионов звезд. Но ракета может полететь только на одну из них. Как ее выбрать? Не слишком ли велик риск ошибиться?

Попробуем встать на другой путь. Будем излучать электромагнитные волны по всем направлениям в пространстве, передавая с их помощью определенную информацию. С энергетической точки зрения это самый невыгодный тип связи (когда энергия рассеивается во всех направлениях). Зато любой абонент, в каком бы направлении он ни находился, сможет принять наши сигналы, так что мы наверняка не промахнемся.

Вычислим дальность, на которой возможен прием сигналов от нашего передатчика. Поток энергии, проходящий через единицу поверхности на расстоянии R от передатчика, равен

$$\frac{P}{4\pi R^2}\ вт/м^2,$$

где P — мощность передатчика. Если A — эффективная площадь приемной антенны, то мощность принятого сигнала будет равна

$$P_с=\frac{PA}{4\pi R^2}\ вт.$$

Положим $R=10^5$ световых лет, что равно диаметру нашей Галактики, и пусть $A=10^4$ $м^2$ (подобные радиотелескопы уже есть на Земле). Тогда мощность сигнала будет равна $2{,}4\cdot 10^{-14}$ *вт*. Такой сигнал вполне можно зарегистрировать с помощью высокочувствительной приемной аппаратуры. Значит, где бы в пределах Галактики ни находился наш абонент, он сможет зарегистрировать посланные нами сигналы. При этом передатчик может непрерывно работать целый год, прежде чем мы исчерпаем имеющийся запас энергии (10^{40} *эрг*). За это время он сможет передать 10^{14}—10^{15} бит информации. Для сравнения укажем, что одна страница печатного текста содержит приблизительно 10^4 бит информации. Следовательно, мы могли бы передать текст объемом в 10^{10}—10^{11} страниц. Это целая библиотека — десятки миллионов томов по 1 000 страниц в каждом томе.

Вот и решайте теперь, что лучше: лететь туда, не знаю куда, или послать свой радиопривет всем, кто может его услышать.

В связи с этим последняя задача на дешифровку. Вы получили сигнал из космоса, изображенный на рисунке 3. Он состоит из пяти последовательных серий импульсов. Числа в каждой серии представляют собой расстояния между импульсами (измеренные в долях длительности одного импульса, то есть $t/\Delta t$). Попробуйте расшифровать это сообщение.

НЕИЗВЕСТНЫЙ СВЕРХТЯЖЕЛЫЙ ЭЛЕМЕНТ?

До недавнего времени считалось, что обнаруженный в метеоритах ксенон образуется только в результате деления плутония-244. В 1969 г. было высказано предположение, что ксенон может возникать и при делении еще неизвестного летучего сверхтяжелого элемента, который к моменту падения метеорита уже распался.

Что сейчас знают ученые об этом пока неуловимом гипотетическом элементе? Его теплота испарения, по мнению профессора Э. Андерса и Дж. Ларимера (США), составляет (54±3) *ккал/моль*, а температура кипения (2500±400)° К. Наиболее подходящими «кандидатами» на место этого элемента могут быть элементы с номерами 111 (эка-золото) и 115 (эка-висмут) в таблице Менделеева. За ними, по степени вероятности, следуют элементы 113 (эка-таллий), 114 (эка-свинец), 112 (эка-ртуть) и 116 (эка-полоний). Элементы от 105 (эка-тантал) до 110 (эка-платина) недостаточно летучи, и их, очевидно, нужно исключить из этого списка.

РАКЕТОЙ К СОЛНЦУ

В. И. Левантовский

На первый взгляд кажется, что попасть ракетой в Солнце так же просто, как яблоку упасть на Землю.

Во многих фантастических рассказах, посвященных космическим полетам, как самая ужасная катастрофа, которая может постичь исследователей Солнечной системы, рисуется падение космического корабля на Солнце. Иногда падение происходит вследствие технической неисправности, иногда — из-за ошибки пилота при управлении кораблем...

Между тем, падение на Солнце по случайной причине так же невозможно, как, скажем, нечаянное падение на Луну самолета, который выполняет фигуры высшего пилотажа. Дело в том, что перевести космический корабль на траекторию падения к Солнцу можно, лишь затратив большое количество энергии, для чего требуется слишком много топлива.

Вычислим скорость, которую ракета-носитель должна сообщить космическому аппарату, чтобы он мог достичь Солнца. Если бы старт происходил с непритягивающей Земли, то ракете достаточно было бы развить скорость, противоположную орбитальной скорости Земли и равную ей по величине, то есть равную 29,77 *км/с*. Тем самым гелиоцентрическая скорость космического аппарата (скорость относительно Солнца) оказалась бы равной нулю, и он начал бы падение на Солнце по прямолинейной траектории.

Учтем теперь эффект земного притяжения. Пусть геоцентрическая скорость космического аппарата (скорость относительно Земли), постепенно падая, становится вдали от Земли («на бесконечности»), где уже не ощущается притяжение Земли, равной $v_\infty=29{,}77$ *км/с*. Напишем для этого случая закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{\text{н}}^2}{2}-\frac{\gamma Mm}{r_{\text{н}}}=\frac{mv_\infty^2}{2} \qquad (1)$$

(m и M — соответственно массы космического аппарата и Земли, $v_{\text{н}}$ и $r_{\text{н}}$ — скорость и расстояние от центра Земли в начале пассивного полета (в конце разгона), γ — гравитационная постоянная). В правой части здесь отсутствует потенциальная энергия ракеты в поле земного притяжения, равная нулю на бесконечности. Отсюда получаем

$$v_{\text{н}}^2=v_\infty^2+\frac{2\gamma M}{r_{\text{н}}}. \qquad (2)$$

Но второй член в правой части формулы равен квадрату скорости освобождения $v_{\text{осв}}$ (второй космической скорости). В этом можно убедиться, положив в последнем уравнении $v_{\text{н}}=v_{\text{осв}}$, $v_\infty=0$ (в соответствии с определением скорости освобождения).

Итак,

$$v_{\text{н}}=\sqrt{v_\infty^2+v_{\text{осв}}^2}. \qquad (3)$$

Приняв $v_{\text{осв}}=11{,}19$ *км/с* (условное значение у поверхности Земли) и $v_\infty=29{,}77$ *км/с*, найдем: $v_{\text{н}}=31{,}8$ *км/с*. Такую скорость надо сообщить ракете, чтобы она могла достичь Солнца. Эту скорость иногда называют *четвертой космической скоростью*. Она почти вдвое больше третьей космической скорости (16,67 *км/с*), обеспечивающей уход из Солнечной системы.

Посмотрим теперь, какие трудности должна преодолеть техника, чтобы космический аппарат мог развить четвертую космическую скорость и достичь Солнца.

Допустим, что солнечный зонд стартует с круговой орбиты искусственного спутника, которая расположена на высоте 200 *км* над земной поверхностью. Учитывая, что скорость спутника равна 7,8 *км/с*, найдем начальную скорость старта с орбиты: $31{,}8-7{,}8=24$ *км/с*.

Воспользуемся известной формулой, дающей отношение начальной массы M ракетной системы к конечной массе (полезной нагрузке) $m_{\text{п}}$:

$$\frac{M}{m_{\text{п}}}=e^{v/c}\left(\frac{s-1}{s-e^{v/nc}}\right)^{n}, \qquad (4)$$

где e — основание натуральных логарифмов, v — скорость, которую нужно сообщить полезной нагрузке, c — скорость истечения газов из сопла ракеты, n — число ступеней, s — конструктивный параметр, указывающий отношение массы ступени, заполненной топливом, к массе пустой ступени. Величины s и c предполагаются одинаковыми для всех ступеней.

Предположим, что конструктивный параметр имеет чрезвычайно хорошее значение $s=20$, и пусть двигатели, разгоняющие космический зонд до скорости 24 *км/с*, используют в качестве горючего жидкий водород и в качестве окислителя жидкий кислород. Такое топливо обеспечивает скорость истечения c порядка 4 *км/с*.

При $n=1$ и $n=2$ в нашем случае оказывается, что $s<e^{v/nc}$. Это означает, что одноступенчатая и даже двухступенчатая ракеты не могут при $c=4$ *км/с* обеспечить достижение нужной скорости. При $n=3$ получим $M/m_{\text{п}}=1380$, а при $n=5$ отношение $M/m_{\text{п}}=906{,}6$.

Следовательно, при существующем сейчас химическом топливе (т. е. при $c=4$ *км/с*; значение c для химических топлив и в будущем не сможет превысить 5 *км/с*) на каждый килограмм полезной нагрузки, доставляемой к Солнцу, должно приходиться 1380 *кг* массы, стартующей с орбиты при трехступенчатом варианте и 906,6 *кг* — в случае пяти ступеней. Увеличение числа ступеней даже до 10 снижает отношение масс $M/m_{\text{п}}$ лишь до 627,9.

Если предположить, что масса космического зонда равна 500 *кг*, то при $n=5$ получаем $M=453{,}3$ *т*. Чтобы смонтировать на околоземной орбите пятиступенчатую ракетную систему такой массы, понадобится запуск с Земли пяти ракет такого класса, как американская лунная система «Сатурн-5». С энергетической точки зрения послать небольшой зонд на Солнце не легче, чем осуществить несколько лунных экспедиций!

Дело обстояло бы совершенно иначе, если бы на околоземной орбите включались не химические, а ядерные двигатели. Если даже предположить весьма умеренное для таких двигателей значение $c=8$ *км/с*, то при $n=2$ будем иметь отношение $M/m_{\text{п}}=30{,}11$. Значит, двухступенчатый ядерно-реактивный аппарат, стартующий с круговой орбиты, мог бы иметь массу в 15 *т* при прежней полезной нагрузке $m_{\text{п}}=0{,}5$ *т*. При этом не нужен монтаж на орбите: запуск спутника такой массы давно уже стал возможным.

Однако попасть на Солнце можно и с помощью обычных химических двигателей, если воспользоваться гравитационными полями Юпитера или Венеры. Юпитер может отбросить к Солнцу космический зонд, подобно тому как Луна отбрасывает к Земле облетающую ее станцию, а Венера может приблизить к Солнцу пролегающую вблизи нее траекторию космического зонда.

Гений XVIII века

А. Я. Яковлев

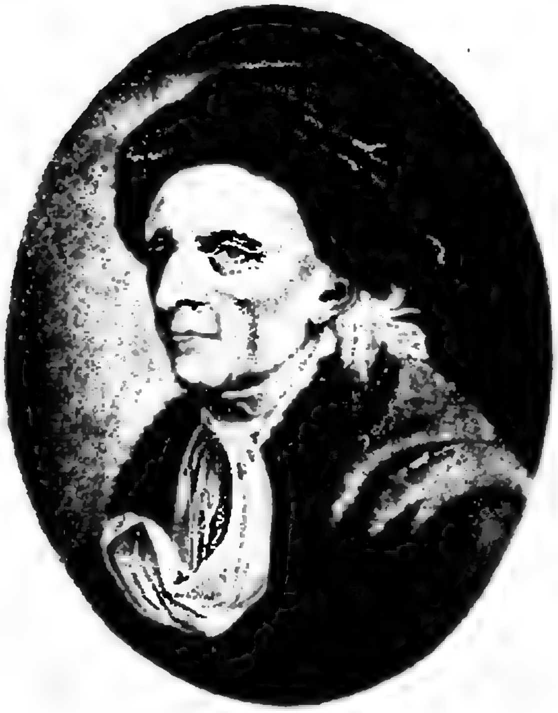
В мае 1727 года, в теплый весенний день по «Невской першпективе» шел двадцатилетний юноша. Он только что приехал из Базеля (Швейцария), где получил свою первую ученую степень.

Еще в 1721 году знаменитый Иоганн Бернулли, профессор Базельского университета, заметил необычайные способности четырнадцатилетнего студента. В течение ряда лет молодой Леонард Эйлер каждую субботу проводил в доме Бернулли. Тогда же он подружился с сыновьями своего учителя — Николаем и Даниилом, впоследствии профессорами Петербургской Академии.

По рекомендации братьев Бернулли получил приглашение в Петербург и молодой магистр искусств Леонард Эйлер.

Уже через несколько месяцев приезжий довольно бегло говорил на «непостижимом» русском языке. Вскоре в академических изданиях появились его первые работы: труды по математике, механике, физике. Со следующего года ни один том трудов Академии не выходил без нескольких работ молодого ученого. А в возрасте 26 лет Леонард Эйлер, будущий «общий учитель всех математиков второй половины XVIII века», стал академиком.

В течение 14 лет Эйлер написал более 75 крупных работ. Он читал лекции студентам Академического университета, принимал экзамены, составил прекрасное «Руководство к арифметике», занимался вопросами устройства механических пил и пожарных насосов, работал в Комиссии мер и весов, в Географическом департаменте, где руководил созданием генеральной карты России.



Л. Эйлер (1707—1783)

Эйлер был блестящим вычислителем. Он быстро и точно выполнял громоздкие расчеты. Не ограничиваясь чисто математической стороной дела, он глубоко занялся картографией и сам вычертил немало карт. «География Российская через мои и господина Гейнзиуса труды гораздо в исправнейшее состояние приведена, — писал впоследствии Эйлер. — Кроме разве Франции почти ни одной земли нет, которая бы лучше карты имела».

В начале сороковых годов обстановка в Петербургской Академии резко обострилась. Руководство Академией захватили Бирон, Шумахер и другие невежественные вельможи. В 1741 году Эйлер принял настойчивое приглашение прусского короля Фридриха II и переехал в Берлин. Вначале он был членом Правления Академии и директором класса (отделения) математики, а с 1759 года фактически возглавил Берлинскую Академию наук.

В Берлине Эйлер продолжал свои труды в области математики и механики. Однако большинство своих теоретических работ Эйлер по-прежнему печатал в изданиях Петербургской Академии.

Все это время Эйлер продолжал оставаться почетным членом Российской Академии наук и получал большую по тем временам пенсию (200 рублей в год). Леонард Эйлер редактировал математические отделы русских журналов, приобретал для Петербурга книги и инструменты; на квартире у него годами жили ученики — адъюнкты из Петербурга. Ему посылались на отзыв письменные работы. В 1747 году Шумахер послал Эйлеру два сочинения М. В. Ломоносова, надеясь получить отрицательный ответ и отстранить Ломоносова от научной деятельности. Но ответ Эйлера разбил планы Шумахера.

«Все сии сочинения, — писал Эйлер, — не токмо хороши, но и превосходны, ибо он изъясняет физические и химические материи... с таким основательством, что я совершенно уверен в справедливости его изъяснений».

С июня 1766 года Эйлер снова в Петербурге. К этому времени зрение его резко ухудшилось. Еще в тридцатых годах, занимаясь кропотливыми вычислениями и вычерчивая карты, Эйлер потерял зрение на левый глаз; теперь и правый глаз почти ничего не видел. Крупнейшие ученые всего мира с тревогой узнавали об ухудшении его зрения. Однако сам Эйлер относился к потере зрения с величайшим спокойствием. Обладая феноменальной памятью, он научился писать вслепую мелом на доске и давал в то же время устные пояснения. Несмотря на полную слепоту, Эйлер проявлял удивительную трудоспособность, диктуя статьи и целые книги академику Н. И. Фуссу, М. Е. Головину (племяннику М. В. Ломоносова), своему сыну Иоганну Альбрехту и многочисленным ученикам. В то же время он не прекращал административную и организационную работу в Академии.

18 сентября 1783 года Эйлер внезапно почувствовал себя плохо. Он успел лишь произнести «Я умираю» и потерял сознание. Через несколько часов он скончался от кровоизлияния в мозг.

По образному выражению французского ученого Кондорсе, «Эйлер перестал жить и вычислять». Его похоронили на Смоленском кладбище в Петербурге. Надпись на памятнике гласила: «Леонарду Эйлеру — Петербургская Академия». В 1956 году прах Эйлера перенесли в Ленинградский некрополь.

Эйлер прожил долгую плодотворную жизнь. Россия стала его второй Родиной. Здесь выросли пятеро его детей, 38 внуков. Потомки великого ученого и сейчас живут в нашей стране.

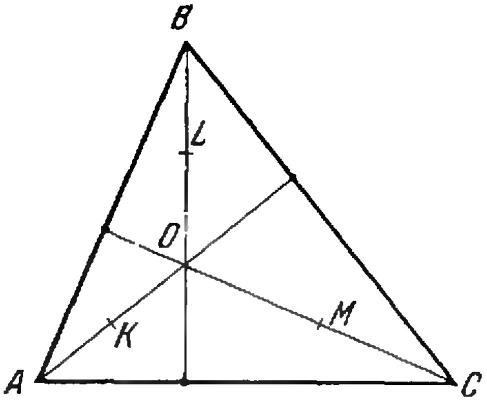
Леонард Эйлер был избран академиком восьми стран мира. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики и ряду прикладных наук; многие из них по сей день входят в курсы высших учебных заведений. Двухтомная «Морская наука» сыграла колоссальную роль в развитии кораблестроения и кораблевождения в XVIII веке. «Теория движения Луны» и основанные на ней таблицы более сотни лет использовались мореплавателями всех стран мира. Трехтомная «Диоптрика» и другие сочинения по физике помогли создать высококачественные телескопы и микроскопы. Трудно даже перечислить отрасли науки и техники, в которых трудился великий ученый. Но в первую очередь он был математиком. Его работы по механике, физике, астрономии, как правило, представляют собой математическую постановку и математическое разрешение рассматриваемых задач.

В начале нашего века Швейцарское общество естествоиспытателей решило издать полное собрание сочинений Эйлера. Свыше 850 крупных научных работ составили 72 больших тома.

Чтобы только разобраться в научном наследии Эйлера, нужна целая человеческая жизнь...

На «карте» современной математики имя Эйлера встречается на каждом шагу. В математическом анализе при интегрировании иррациональных функций применяют *подстановки Эйлера*, сводящие задачу к более простой: к интегрированию рациональных функций. Один из простейших приближенных методов решения дифференциальных уравнений — *метод ломаных Эйлера*. В высших разделах анализа важную роль играют так называемые *эйлеровы интегралы* (В-функция и Г-функция). В теории чисел известна *теорема Эйлера* о сравнениях и *функция Эйлера* — число натуральных чисел, меньших данного числа и взаимно простых с ним. В механике при описании движения тел пользуются *углами Эйлера*, определяющими взаимное положение различных систем координат. В гидродинамике рассматривается *число Эйлера* — отношение разности давлений в двух характерных точках потока жидкости. Можно было бы назвать еще десятки функций, формул, теорем, связанных с именем Эйлера.

Для произвольного «простого» многогранника (то есть многогранника, не имеющего «дыр») справедлива *теорема Эйлера*: если обозначить число вершин через V, число граней через F, а число ребер через E, то $V+F-E=2$. (Например, у куба или параллелепипеда $V=8$, $F=6$, $E=12$; у шестигранной призмы («карандаша») $V=12$, $F=8$, $E=18$; у пирамиды с четырехугольным основанием $V=5$, $F=5$, $E=8$). Этой замечательной теоремой (и знаменитой задачей о «кенигсбергских мостах», также решенной Эйлером) было, по существу, положено начало новой математической дисциплине — топологии *).



Тригонометрические функции связаны с показательной функцией от мнимого аргумента *формулами Эйлера*:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x;\ \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2};$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы также играют основополагающую роль для области математики — теории функции комплексного переменного.

Предлагаем в заключение решить следующую задачу, предложенную Л. Эйлером. *Назовем середины отрезков высот треугольника от ортоцентра до каждой из вершин (точки K, M, L на рисунке) точками Эйлера. Доказать, что середины сторон любого треугольника, основания его высот и точки Эйлера лежат на одной окружности.* Эту окружность называют окружностью девяти точек, или *окружностью Эйлера*. Радиус ее равен половине радиуса окружности, описанной около этого же треугольника. Прямую, соединяющую ортоцентр треугольника с центром описанного круга, называют *прямой Эйлера*. Центр окружности Эйлера лежит на этой прямой как раз посредине между ортоцентром и центром описанного круга.

Литература

1. А. П. Юшкевич. Эйлер. Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд., т. 48.

2. История естествознания в России. Т. 1, ч. 1, М., «Наука», 1957.

---

*) См. подробнее Р. Курант и Г. Роббинс «Что такое математика?», М., «Просвещение», 1967, гл. V (особенно § 1).

ЛУЧИ СВЕТА

Х. Рачлис

Недавно издательство «Мир» выпустило в свет небольшую научно-популярную книгу Х. Рачлиса «Физика в ванне». Мы помещаем здесь одну из глав этой книги. Перевод ее осуществлен Р. И. Нудельманом.

В конце этого номера журнала в разделе «Рецензии, библиография» вы можете прочитать короткий рассказ об этой книге.

Нальем в ванну немного воды так, чтобы глубина ее достигала примерно 10 сантиметров. Закроем кран и выждем, пока все волны улягутся, а потом взглянем вниз. Там мы увидим изображение своего лица, почти такое же, как в настоящем зеркале, только чуть туманнее. Сделаем его поярче, осветив лицо карманным фонариком.

А теперь попробуем осторожно пошевелить воду пальцем. Видите, изображение исказилось — вначале задрожало, заколыхалось, а затем постепенно успокоилось и вновь стало неподвижным. Вот оно уже приняло свой первоначальный вид. Взболтаем воду посильнее. На сей раз изображение исчезло совсем.

Почему водная поверхность образует зеркальное изображение? И почему оно не такое отчетливое, как в обычном зеркале? Почему изображение становится более ярким, если подсвечивать лицо фонариком? Почему оно исчезает, когда поверхность воды становится неровной?

Выяснение всех этих вопросов хорошо начать вот с чего — осветить фонариком поверхность воды, погасив предварительно свет в ванной. Спереди на фонарик лучше всего одеть картонную трубку примерно 30 сантиметров длиной. Если кто-то из вас не сумеет достать готовую трубку, можно сделать ее самому, скатав несколько листов бумаги и закрепив конец клейкой лентой.

В такой трубке фонарик даст почти нерасходящийся пучок света, как показано на рисунке 1. Направим этот пучок вниз, на поверхность воды, и понаблюдаем, что с ним произойдет.

Для начала будем держать фонарик наклонно. Отражается ли свет от поверхности воды? Существует несколько способов проверить это. Один из них — попытаться найти световой зайчик на стене возле ванны. Иногда отраженный пучок можно даже увидеть, особенно если в воздухе есть пылинки. Можно попробовать самому вызвать облачко «чистой пыли» — для этого нужно разбросать в воздухе, чуть повыше отраженного пучка, мельчайший порошок тальк. А можно воспользо-

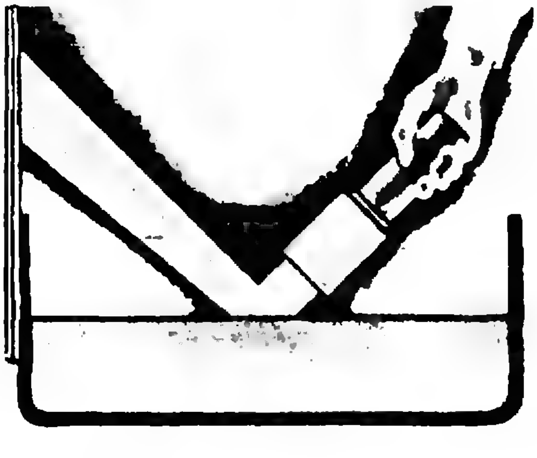


Рис. 1

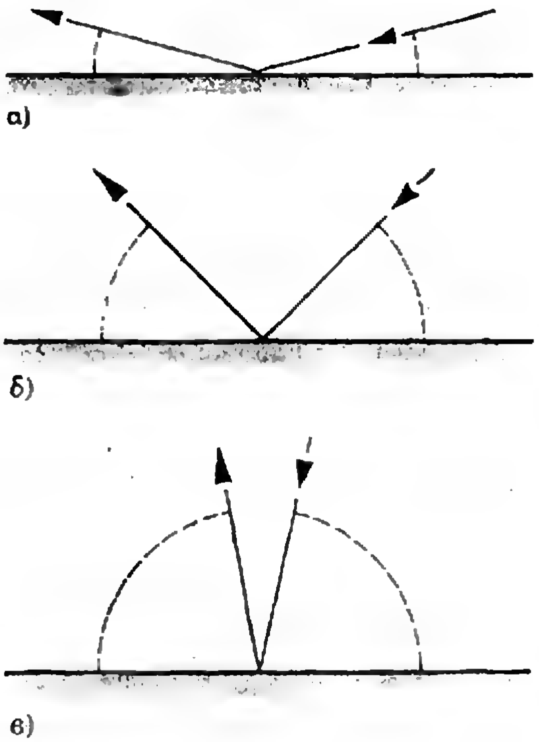


Рис. 2.

ваться еще одним способом: если в семье кто-нибудь курит, попросите его пустить дым на отраженный пучок. Частицы пыли или дыма в воздухе отражают свет в сторону глаза, и пучок становится видимым.

Если же возле того места, где пучок света попадает на воду, выставить ладонь, на ней покажется яркое пятно — это значит, там проходит отраженный пучок света. Медленно поднимая руку, чтобы проследить за пучком, мы в конце концов коснемся яркого пятна на стене.

Присмотримся, под каким углом пучок ударяется о поверхность воды, а затем попытаемся установить, под каким углом он отражается. Для этой цели лучше всего воспользоваться методом обнаружения пучка с помощью талька или дыма. Что можно сказать относительно угла, под которым пучок падает в воду, и угла, под которым он отражается? Они явно одинаковы.

Попробуем изменять наклон пучка. На рисунке 2 показаны некоторые типичные случаи отражения. Если световой пучок входит в воду под небольшим углом, как на рисунке 2 *а*, отражение от поверхности происходит под таким же небольшим углом. Если же угол между световым пучком и поверхностью воды больше, как на рисунке 2,*б*, отраженный луч отходит от воды также под бо́льшим углом. Если же пучок идет почти вертикально вниз, как на рисунке 2,*в*, он отражается почти вертикально вверх.

А теперь направим пучок света наклонно к воде так, чтобы на стене образовалось световое пятно. При этом поверхность воды должна быть слегка неровной (дотронемся до нее несколько раз пальцем). Что произойдет с четким отраженным пятном на стене? Смотрите, оно расширяется, становится размытым, искажается, оно дрожит и колышется.

Множество лучей (очень узких пучков) света, посылаемых фонариком, падает на воду почти под одинаковым углом. Если поверхность воды спокойная и ровная, то она отразит все лучи света под одинаковыми углами, то есть все лучи отразятся согласованно и пучок света останется, как и был, собранным. Вот почему, когда поверхность гладкая, на стене образуется небольшое яркое пятно.

Когда же мы «потревожили» воду, на ее поверхности образовалась рябь. И хотя отраженные лучи по-прежнему отходят от поверхности под тем же углом, под каким падающие лучи приходили к каждому участку воды, теперь каждый участок поверхности все время меняет свое положение (рис. 3). Из-за этого наклоны каждого отдельного луча света к воде постоянно меняются, и луч всякий раз отражается в другом месте на стене. Пучок света прыгает, расширяется — он становится то меньше, то больше, в зависимости от того, насколько взбудоражена поверхность воды.

Итак, только гладкие поверхности могут давать сконцентрированное отражение. На неровной поверхности отражения расходятся во все стороны.

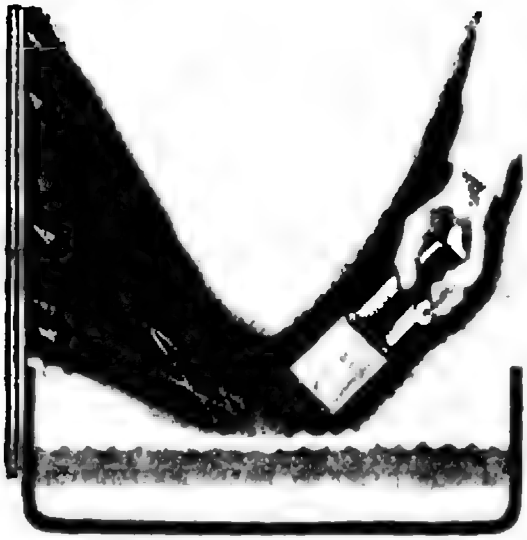


Рис. 3.

Почему на поверхности образуется зеркальное изображение? Допустим, кто-либо смотрит в воду, стремясь увидеть в ней отражение маленького предмета А (рис. 4). На рисунке глаз Б смотрящего человека показан сильно увеличенным — это позволяет лучше разобраться, что же происходит со светом. Предположим, что лучи солнечного света падают на предмет А и отражаются им.

Как правило, предметы не бывают такими гладкими, как поверхность спокойной воды или зеркала. Строго говоря, если на поверхности предмета есть неровности, составляющие всего 1/25 000 сантиметра, этого уже достаточно, чтобы отражать свет во всех направлениях. Представим себе, что предмет А имеет такие неровности. Рассмотрим, например, солнечные лучи В и Г, отраженные от предмета. Они пойдут от поверхности воды, как показано буквами Д и Е, и в конечном счете попадут в глаз Б.

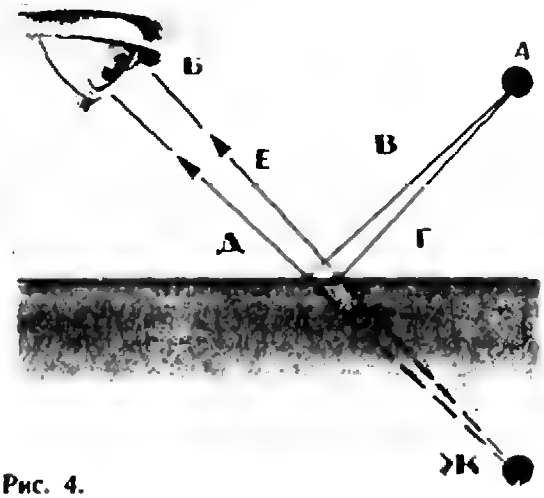


Рис. 4.

Обратите внимание, насколько расходятся лучи В и Г по мере того, как идут наклонно по направлению к воде. После отражения от поверхности, каждый под своим углом, они продолжают расходиться, пока не попадут в глаз. Глаз не может знать, откуда к нему приходят лучи на самом деле. Ему кажется, что они выходят из точки Ж, расположенной ниже поверхности воды. Другими словами, глаз видит подобие, или изображение, предмета *под поверхностью* воды.

В большинстве случаев предметы бывают больше, чем предмет А, показанный на рисунке 4. Но справедливость рассуждения от этого не меняется. Каждая точка большого предмета дает свое собственное изображение. В глазу же изображение всех этих точек складывается в одно изображение, которое выглядит точно так же, как сам предмет.

Разумеется, чтобы создать подобное изображение, нужна очень гладкая отражающая поверхность, которая позволяет лучам отразиться таким образом, что после отражения они располагаются друг относительно друга так же, как и до отражения. На гладкой поверхности так оно и получается, а неровная поверхность искажает изображение, ибо отражает лучи как попало.

Любая гладкая поверхность отражает свет точно так же, как гладкая поверхность воды. Большинство зеркал изготовляется из очень гладкого стекла, покрытого с обратной стороны тонким слоем хорошо отражающего серебра (или другого металла). Хорошо отполированный стол или же натертый пол также дают зеркальное отражение, равно как и оконное стекло. Зеркалом могут служить и блестящие бока автомобиля. Но их изогнутая поверхность отражает свет не под таким углом, как плоская поверхность, поэтому изображение выглядит искаженным.

Теперь попробуем ответить на вопрос: почему изображение в воде не такое ясное, как в зеркале? Это объясняется несколькими причинами. Снова возьмем фонарик и осветим наполненную водой ванну. Весь ли свет отражается? Нет, часть его, причем бóльшая, проходит сквозь воду и освещает дно ванны.

Доля световой энергии, отражающейся от воды, невелика — каких-нибудь 10 процентов. Что же касается зеркала, то там наблюдается обратная картина. Слой металла, расположенный на тыльной стороне зеркала, отражает бóльшую часть падающего на него света — около 95 процентов. Именно поэтому изображения, которые мы видим в обычном зеркале, намного ярче изображений на поверхности воды.

Вторая причина, по которой изображение в воде кажется нам более темным, заключается в том, что, глядясь в ванну, мы своей головой загораживаем свет. Свет от висящей под потолком лампы или солнечный свет, льющийся в окно, может падать на лицо только обходным путем — ему приходится сначала отразиться от стен, от пола или от стенок ванны. Надо ли добавлять, что раз лицо плохо освещено, то и изображение получается тусклым. Когда же мы подсвечиваем лицо фонариком, часть света отражается непосредственно от лица, затем идет в воду, и в результате изображение становится ярче.

Изогнутая прямая палка

Что происходит со светом, который не отражается от поверхности воды в ванне? Чтобы ответить на этот вопрос, проделаем следующий опыт. Нальем ванну, как обычно для купания, и опустим в воду прямую палку, слегка ее наклонив. Теперь, если мы посмотрим на палку, она больше не покажется нам прямой: та ее часть, которая находится в воде, как бы изогнута кверху (рис. 5).

Ну, а если чуть вынуть палку из воды? Тогда наружная ее часть вновь будет совершенно прямой, а погруженная в воду по-прежнему кажется изогнутой кверху.

Теперь совсем вынем палку из воды — она совершенно прямая, как и была. Место изгиба полностью распрямилось.

Вам, видимо, ясно, что палка вовсе не изгибается в момент погружения в воду и не распрямляется, когда мы вынимаем ее из воды. Если кто-либо в этом сомневается, пусть пощупает «изогнутую» часть палки, находящуюся в воде. На ощупь она совершенно прямая. Тут явно имеет место какой-то оптический обман, в силу которого мы видим то, чего в действительности нет. Зеркальное изображение — это ведь тоже обман такого рода. Предметы, которые кажутся нам находящимися за зеркалом, на самом деле находятся в другом месте.

Исследуем это явление глубже. Для этого воспользуемся фонариком с трубкой, который мы изготовили ранее, когда речь шла о зеркалах.

Затемним, насколько возможно, ванную комнату, после чего направим фонарик вниз и пустим пучок света в воду. Наклоняя фонарик то так,

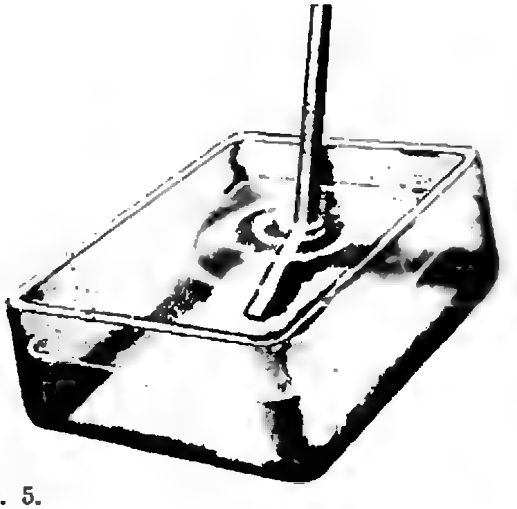


Рис. 5.

то эдак, заставим пучок идти то вертикально вниз, то скользить почти у самой воды. Видно, что в том месте, где он входит в воду, световой пучок резко преломляется. В воздухе он идет совершенно прямо, в воде тоже, но там, где вода встречается с воздухом, световой пучок резко изгибается вниз (рис. 6).

Кое-кого из вас может, пожалуй, смутить то обстоятельство, что палка в воде кажется изогнутой кверху, а световой пучок — изогнутым книзу. Если вы этого не заметили, еще раз обратите внимание на различие рисунков 5 и 6.

Это противоречие кажущееся, и его легко объяснить, если более подробно разобраться, что происходит с идущим из воды светом. На рисунке 7 показана прямая палка АБ, какая она есть на самом деле. В глаз наблюдателя, расположенный над водой, попадает свет, отраженный от конца палки Б. Но, переходя из воды в воздух, луч света, идущий от Б, идет не по прямой, а изгибается в точке Г. и, очевидно, следует по пути БГВ, раз он попадает в глаз наблюдателя.

Наблюдатель не может знать, откуда в действительности приходит световой луч. Луч входит в глаз по направлению ГВ, значит, наблюдателю кажется, будто свет приходит по прямой, которая проходит чуть в стороне от Г, то есть откуда-то из точки Д. Там, по его мнению, и находится конец палки.

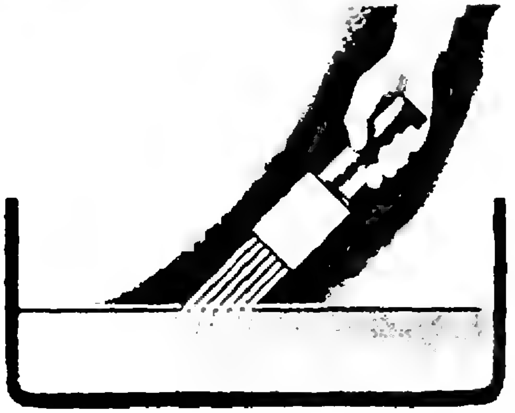


Рис. 6.

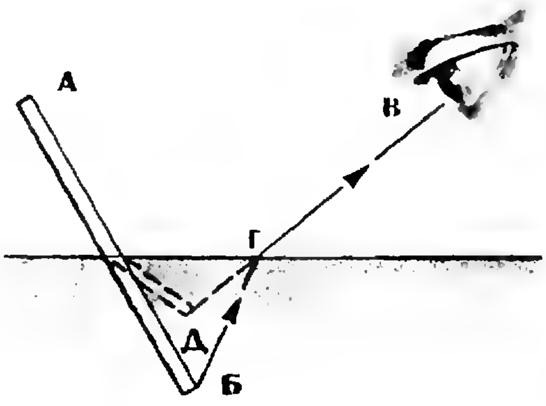


Рис. 7.

Обратим внимание, что точка Д расположена выше точки Б, именно поэтому палка кажется загнутой кверху. Кроме того, палка выглядит короче, чем в действительности. Эти два правила применимы ко всем предметам, погруженным в воду. Если предмет погружен в воду лишь частично, его подводная часть всегда кажется короче. Более того, все предметы в воде кажутся ближе к поверхности, чем это есть на самом деле.

Кому-нибудь из вас приходилось стрелять в рыбу из подводного ружья? Кому приходилось, тот, вероятно, знает, как это трудно. Дело в том, что рыба находится вовсе не там, где мы ее видим. Если целиться прямо в рыбу, стрела непременно пройдет выше. Поэтому нужно целиться чуть пониже, внося поправку на искривление световых лучей.

Только в одном случае очень узкий параллельный пучок света не будет изгибаться — если он идет вертикально, то есть прямо вниз. В этом случае свет входит в воду под прямым углом и идет вниз без излома.

Искривление светового пучка при переходе из одного прозрачного вещества (например, воды или стекла) в другое прозрачное вещество (например, воздух) называется *преломлением*. Преломление имеет очень важное значение: на нем основано действие всех оптических приборов, в которых есть линзы. Зрение людей и животных также основано на преломлении света линзой (хрусталиком), которая находится в глазу.

Можно было бы еще очень много рассказать об интересных явлениях, происходящих со светом в ванне. Но пусть это станет предметом ваших самостоятельных исследований.

Самостоятельные исследования

1. Скрепите вместе два тоненьких зеркальца, прижав их краями друг к другу, и поставьте зеркала на какую-нибудь цветную картинку. В зеркалах получаются замечательные калейдоскопические узоры.

Раздвиньте зеркала и проследите за тем, как изменяются изображения. Объясните, что происходит.

2. Изображение в зеркале перевернуто по отношению к предмету, который вы рассматриваете. Если, глядя в зеркало, вы закроете левый глаз, вам покажется, будто изображение закрыло правый глаз. Но если посмотреть в зеркало, приставленное под прямым углом к другому зеркалу, то перевернутое изображение вновь переворачивается и все предметы видны такими, какие они есть на самом деле.

Поставьте два зеркала под прямым углом друг к другу и посмотрите на себя. Странно, не правда ли? Интересно, сумеет кто-нибудь из вас причесаться, глядя на свое «исправленное» изображение?

3. Попробуйте написать на листке свое имя, глядя при этом в зеркало и следя за изображением руки. Между глазом и рукой поставьте книгу, чтобы исключить прямое наблюдение за рукой. Вам удалось написать? Нет? Чем это объяснить?

4. Возьмите наполненный водой стакан и посмотрите сквозь него на карандаш, который установлен за стаканом вертикально. Переставьте карандаш влево, теперь вправо. Что при этом видно? Попробуйте сначала держать карандаш близко к стакану, потом отодвиньте его на расстояние вытянутой руки. Как найти объяснение тому, что происходит?

Несостоявшийся обед

(Окончание. Начало см. стр. 21)

Дорофей Мартьяныч долго шевелил губами и морщил лоб, обдумывая, кого же приглашать на обед, наконец, плюнул на свою затею.

Какое максимальное количество гостей (и кого именно) мог пригласить Дорофей Мартьяныч на обед, чтобы приглашенные не имели к нему претензий по составу гостей?

А. С. Сорокин

Задача Ньютона

На одном лугу площадью $3^{1}/_{3}$ акра паслось 12 быков; за 4 недели они съели всю траву, которая первоначально была на лугу, а также и ту, которая выросла в течение этих 4 недель. На другом лугу площадью 10 акров пасся 21 бык; эти быки за 9 недель съели траву, имевшуюся первоначально, а также ту, которая вырастала за эти дни.

Сколько быков нужно пустить на луг площадью 24 акра, чтобы они при тех же условиях могли прокормиться 18 недель?

(Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона по английскому изданию 1728 года.)

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения задач этого номера можно посылать не позднее *31 декабря* по адресу: 117071, Москва, В-71, *Ленинский проспект*, 15, издательство «Наука», *редакция журнала* «Квант». После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете; например: «*Задачник* «Кванта», М146, М148». В начале письма *укажите своюˀ* фамилию, имя, отчество, домашний адрес, *а также* класс и школу, в которой вы учитесь. Решение каждой *задачи* (если вы посылаете сразу несколько) *должно быть* написано на отдельном листке (листках), *страницы* пронумерованы. Решения задач по каждому из *предметов* — математике и физике, а также новые задачи, — *просьба* присылать в отдельных конвертах.

Задачи

М171. На плоскости *нарисован* правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи только *линейки построить* отрезок *длины* $\sqrt{7}$.

А. В. Аляев

М172. Докажите, что при любом простом p число

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}-123456789$$

делится на p.

М. Л. Гервер

М173*. В квадратной таблице 4×4 расставлены *числа* 1, 2, 3, ..., 16 так, что сумма четырех чисел в каждой строке, в каждом *столбце и на каждой* из двух диагоналей равна одному и тому же числу, причем 1 и 16 стоят в *противоположных* углах таблицы. Докажите, что в этом «магическом квадрате» сумма любых двух чисел, *расположенных* симметрично относительно центра квадрата, одна и та же.

Л. Г. Лиманов

М174. На *сторонах* треугольника ABC, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники AB_1C, BA_1C и AC_1B (рис. 1). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из

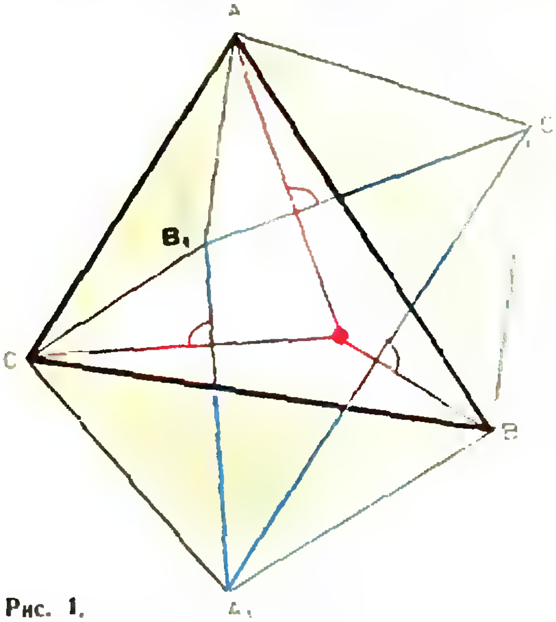


Рис. 1.

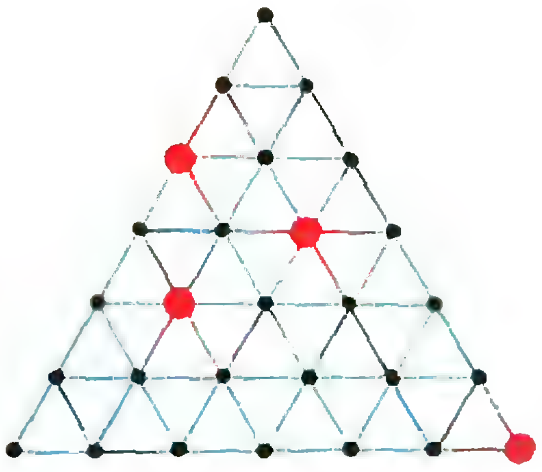


Рис. 2.

точек A, B и C соответственно на прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, пересекаются в одной точке.

А. Г. Гейн

М175* а) Каждая сторона правильного треугольника разбита на m равных частей, и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, разрезающие треугольник на m^2 маленьких треугольников. Среди вершин полученных треугольников нужно отметить N вершин так, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин A и B отрезок AB не был параллелен ни одной из сторон (на рисунке 2 $m=6$). Каково наибольшее возможное значение N (при заданном m)?

б) разделим каждое ребро тетраэдра на m равных частей, и через точки деления проведем плоскости, параллельные граням. Среди вершин полученных многогранников отметим N вершин так, чтобы никакие две отмеченные вершины не лежали на прямой, параллельной одной из граней. Каково наибольшее возможное N?

в) среди целочисленных решений уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=m,$$

удовлетворяющих условиям $0\leqslant x_i\leqslant m$ (для всех $i=1, 2, \ldots, k$), нужно выбрать N решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное x_i не принимало одного и того же значения. Чему равно наибольшее возможное значение N? (Задачи а) и б) являются частным случаем задачи в) соответственно при $k=2$ и $k=3$.)

М. Л. Гервер

Ф183*. Динамометр, который скользит по гладкому горизонтальному столу, тянут с постоянной силой $F=4$ *н*. Что показывает динамометр, если масса его пружины равна массе корпуса и отградуирован динамометр был в горизонтальном положении?

Г. Л. Коткин

Ф184. При передаче телевизионного изображения на Земле за 1 секунду передается 25 кадров. Это означает, что 1 кадр передается за $\frac{1}{25}$ секунды. В то же время, как известно, передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией «Луна» длилась 25 минут. Почему так велика разница во временах передачи 1 кадра изображения в обоих случаях?

Ф185. Волейбольный мяч массой 200 *г* и объемом 8 *л* накачан до избыточного давления 0,2 *атм*. Мяч был подброшен на высоту 20 *м* и после падения на твердый грунт подскочил почти на ту же высоту. Оцените максимальную температуру воздуха в мяче в момент удара о грунт. Температура наружного воздуха 300° К, теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_v=0{,}16$ *кал/г·град*.

Ф186. При повороте автобуса или автомобиля пассажиров отбрасывает в сторону, противоположную направлению поворота. В то же время, поворот самолета совсем не ощущается его пассажирами. Объясните эту разницу.

И. Ш. Слободецкий

Ф187. Тонкая металлическая пластина площади s залита слоем жидкого диэлектрика с плотностью ρ и диэлектрической проницаемостью ε так, что толщина этого слоя много меньше линейных размеров пластины. Что произойдет с жидкостью, если пластине сообщить электрический заряд $+Q$?

В. Л. Кривченков

---

*) В «Кванте» №№ 9, 10 следует читать номера задач: **Ф173—Ф177** и **Ф178—Ф182**.

ЗАДАЧНИК кванта
12
5
7

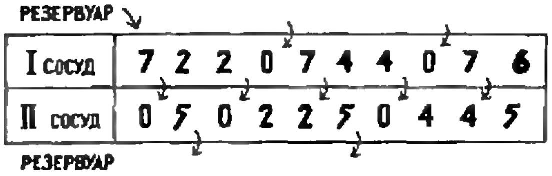
Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М129—М134

М129

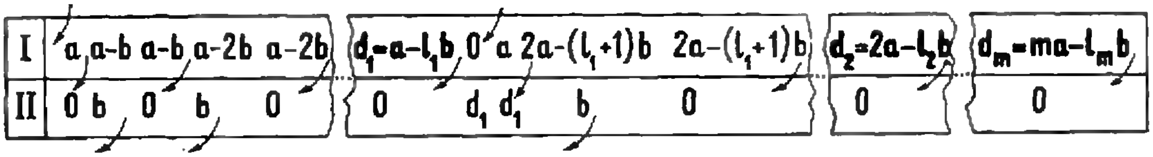
а) В ведро налили 12 *л* молока. Как, пользуясь лишь сосудами в 5 и 7 *л*, разделить молоко на две равные части?

б)* Решите общую задачу: при каких a и b можно разделить пополам $(a+b)$ *л* молока, пользуясь лишь сосудами в a *л*, b *л* и $(a+b)$ *л*?


РЕЗЕРВУАР
РЕЗЕРВУАР

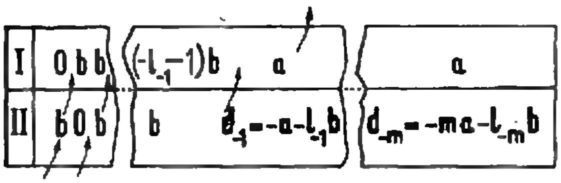
I сосуд	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6
II сосуд	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5

Табл. 1.



I	a	$a-b$	$a-b$	$a-2b$	$a-2b$	$d_1=a-l_1b$	0	a	$2a-(l_1+1)b$	$2a-(l_1+1)b$	$d_2=2a-l_2b$	$d_m=ma-l_mb$
II	0	b	0	b	0	0	d_1	d_1	b	0	0	0

Табл. 2.



I	0	b	b	$(-l_{-1}-1)b$	a	a
II	b	0	b	b	$d_{-1}=-a-l_{-1}b$	$d_{-m}=-ma-l_{-m}b$

Табл. 3.

Для решения задачи а) достаточно привести табличку (см. таблицу 1). Для того чтобы решить задачу б), поступим следующим образом. Пусть $a \geqslant b$. Назовем сосуд емкостью в $a+b$ литров резервуаром, сосуд емкостью в a литров — первым сосудом, а сосуд емкостью в b литров — вторым сосудом. Докажем, что c литров можно получить тогда и только тогда, когда $c=ma+lb$, где m и l — целые числа, $0 \leqslant c \leqslant a$. Если a и b — целые числа, то это можно сформулировать так: c литров можно получить тогда и только тогда, когда $0 \leqslant c \leqslant a$ и c делится на наибольший общий делитель a и b (см. статью В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики», «Квант» № 6, 1972). Мы решаем задачу, не предполагая, что a и b — целые числа; если это заранее известно, то решение можно упростить; например, не нужно отдельно рассматривать случаи $m>0$ и $m<0$.

Обозначим через d_k остаток от деления ka на b ($k=1, 2, 3, \ldots$): $d_k = ka - l_k b$, $0 \leqslant d_k < b$.

Нам достаточно доказать, что можно получить d_m литров. Действительно, поскольку $d_m = ma - l_m b$ — наименьшее неотрицательное число вида $ma + lb$, где l — целое, то, добавляя к d_m еще $l + l_m$ порций по b литров, мы сможем получить нужное количество

	$v_1+v_2>a$		$a\geq v_1+v_2>b$		$b\geq v_1+v_2$	
I сосуд	a	v_1+v_2-b	a	v_1+v_2-b	v_1+v_2	0
II сосуд	v_1+v_2-a	b	0	b	0	v_1+v_2

Табл. 4.

$c=ma+lb$ литров. Как получить c_m литров, ясно из таблицы 2 (для $m>0$) и таблицы 3 (для $m<0$).

Докажем теперь, что v литров можно получить только тогда, когда $v=ma+lb$. Действительно, пусть после нескольких переливаний в первом сосуде оказалось $v_1=m_1a+l_1b$ литров, а во втором — $v_2=m_2a+l_2b$ литров. (На самом деле один из сосудов либо пуст, либо полон, но мы этим не воспользуемся.) Тогда, как бы мы ни организовывали следующее переливание, число литров в каждом из сосудов будет равно $m_i'a+l_i'b$. В случае, когда используется резервуар, это очевидно, остальные случаи собраны в таблице 4.

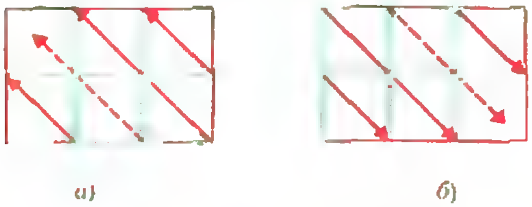


Рис. 1. Ситуации, когда в первом сосуде x литров, а во втором — y литров, сопоставляется точка с координатами (x, y), а последовательность переливаний изображена красными и голубыми стрелочками — красные означают переливания из одного сосуда в другой, а голубые — переливания с использованием резервуара. Рисунок *а* соответствует таблицам 1 и 2, рисунок *б* — таблице 3.

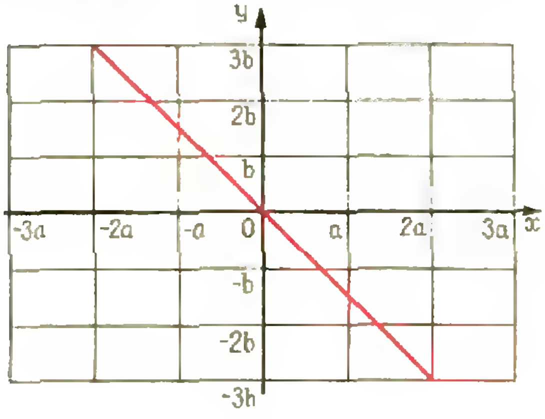


Рис. 2. Заметьте, что если разрезать изображенную здесь плоскость на прямоугольники $a\cdot b$ (по черным линиям) и сложить стопкой все прямоугольники, содержащие отрезки красного луча, идущего вправо вниз (или влево вверх), то получится рисунок 1б (соответственно 1а) (голубые отрезки возникают в местах разрезов).

Теперь уже можно решить задачу. Из доказанного следует, что с помощью переливаний можно получить $\frac{a+b}{2}$ литров тогда и только тогда, когда $\frac{a+b}{2}=ma+lb$, откуда $(2m-1)a+(2l-1)b=0$ или $\frac{a}{b}=\frac{2l-1}{1-2m}$. То есть можно отыскать такое число c, что a/c и b/c — нечетные целые числа.

Оказывается, наши таблицы, указывающие порядок переливаний, удобно интерпретировать геометрически (рис. 1, 2).

Л. Г. Лиманов

М130

Какое наибольшее число точек можно разместить

а) на плоскости;

б) в пространстве

так, чтобы ни один из треугольников с вершинами в этих точках не был тупоугольным?

Ответ: а) 4 точки; б) 8 точек. Примеры расположения такого количества точек: а) в вершинах квадрата; б) в вершинах куба.

(Разумеется, в условии подразумевается, что никакие три точки не должны лежать на одной прямой — без этого ограничения можно разместить сколько угодно точек.)

Докажем, что большее количество точек разместить нельзя.

Заметим прежде всего (это относится и к плоской, и к пространственной задаче), что если A_i и A_j — какие-то две из n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удовлетворяющих условию задачи, то все эти точки должны принадлежать множеству таких точек M, для которых одновременно $\angle MA_iA_j\leq 90°$ и $\angle MA_jA_i\leq 90°$. Это множество — полоса между прямыми (в пространстве — плоскостями), проходящими через точки A_i и A_j и перпендикулярными к отрезку A_iA_j (рис. 3); мы будем ниже обозначать эту полосу через $П_{ij}$.

Из этого замечания следует, что если рассмотреть выпуклую оболочку V данных n точек — наименьший выпуклый многоугольник (многогранник), содержащий все эти точки, — то все точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$

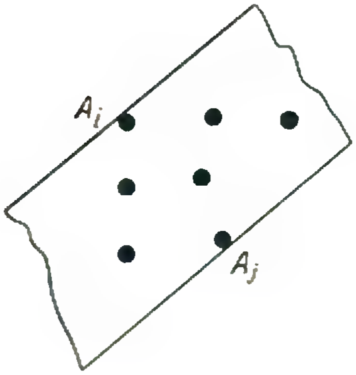


Рис. 3.

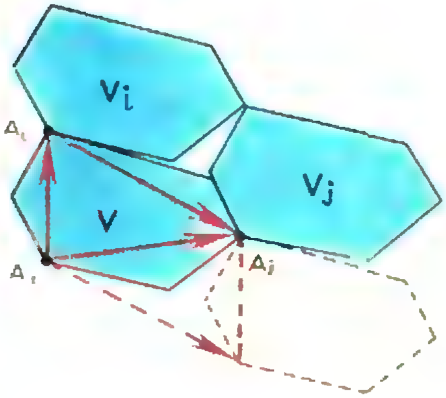


Рис. 4.

должны лежать на границе множества V: *ни одна из них не может оказаться* внутри V: ведь V содержится в каждой из полос $П_{ij}$.

Решение задачи а) получается теперь в два слова. В этом случае V — выпуклый n-угольник с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Сумма его углов равна $180^\circ(n-2)$, и если каждый из углов не больше 90°, то

$$180^\circ(n-2) \leqslant 90^\circ n,$$

откуда $n \leqslant 4$.

Решение задачи на плоскости прислали многие читатели. Пространственная задача намного труднее, и полного доказательства мы не получили ни от кого из читателей. Приведем решение, которое впервые нашли известные геометры Л. Данцер и Б. Грюнбаум (1962 г.).

Рассмотрим, кроме многогранника V (здесь под V можно понимать или выпуклую оболочку заданных n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ или пересечение — общую часть — всех $n(n-1)/2$ полос $П_{ij}$) еще следующие многогранники:
V_i, получающиеся из V сдвигом на вектор $\overrightarrow{A_1A_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; V_1, разумеется, совпадает с V), и V', получающийся из V растяжением (гомотетией) с коэффициентом 2 и центром в точке A_1.

Докажем следующие три утверждения.

1°. Многогранник, получающийся из V сдвигом на вектор $\overrightarrow{A_iA_j}$, не имеет общих внутренних точек с V (то есть может пересекаться с V только на границе).

2°. Никакие два из многогранников $V_1, V_2, \ldots, V_n$ не имеют общих внутренних точек.

3°. Все V_i содержатся в V'.

Докажем 1°. При сдвиге на $\overrightarrow{A_iA_j}$ полоса $П_{ij}$ переходит в новую полосу, которая не имеет с ней общих внутренних точек — эти две полосы имеют только общую граничную плоскость. Но V содержится в $П_{ij}$, поэтому тем более верно 1°.

2° сразу следует из 1°: достаточно заметить, что V_j получается из V_i сдвигом на вектор $\overrightarrow{A_iA_j}$ (рис. 4).

3° следует из более общего факта: если *A, B, C — три точки выпуклого многогранника,* W и W'' — многогранник, полученный из W растяжением в 2 раза с центром в точке A, то четвертая вершина D параллелограмма $ABDC$ (то есть точка, получающаяся из C сдвигом на вектор $\overrightarrow{AB}$) принадлежит W''. Этот факт доказывается легко: точка K, из которой при растяжении получается D — середина отрезка AD — является одновременно и серединой отрезка BC, поэтому она принадлежит W (ведь многогранник W выпуклый), поэтому D принадлежит W'' (рис. 5).

Итак, утверждения 2° и 3° доказаны. Пусть v — объем многогранника V. Тогда объем каждого из V_i тоже равен v, а объем V' равен $8v$. Из 2° и 3°, очевидно, следует, что $nv \leqslant 8v$, откуда $n \leqslant 8$.

Заметим, что попутно мы решили задачу, предлагавшуюся на XIII Международной олимпиаде (см. «Квант» № 12 за 1971 год, стр. 54, задача 2): видимо, задачу **М130** б) в полном объеме международное жюри сочло слишком трудной для олимпиады и включило только вторую ее половину.

В связи с доказанным утверждением возникает целый ряд вопросов, которые уже не удается решить тем красивым, но довольно искусственным способом, о котором мы рассказали. Например, какое наибольшее число точек в пространстве можно раз-

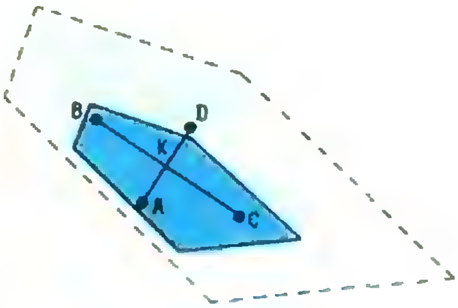


Рис. 5.

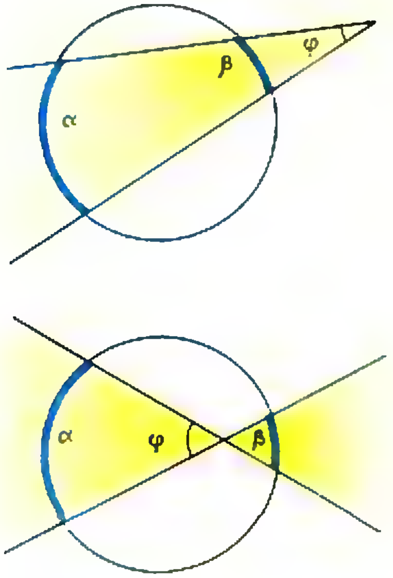


Рис. 6.

местить так, чтобы все углы треугольников с вершинами в этих точках были острыми? Из нашего решения видно, что 8 точек расположить нельзя (убедитесь в этом). Нетрудно построить пример, когда точек 5. Может ли их быть 6? 7? Более общий и, вероятно, очень трудный вопрос – какое наибольшее число точек можно расположить так, чтобы все углы не превосходили данного α?

Если кому-либо из читателей удастся продвинуться в решении этих вопросов, мы вернемся к ним еще раз.

М131

Докажите, что четыре точки, в которых биссектрисы углов между продолжениями противоположных сторон вписанного четырехугольника пересекают его стороны, являются вершинами ромба.

Мы решим задачу, используя известные теоремы об угле между двумя секущими (рис. 6). Обозначения ясны из рисунка 7. Поскольку PN и QK – биссектрисы, то

$$\alpha_6 = \alpha_1, \quad \alpha_5 = \alpha_2,$$
$$\alpha_7 = \alpha_4, \quad \alpha_8 = \alpha_3.$$

Сложив эти два равенства, получим $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_8$, следовательно, сумма дуг в каждой части последнего равенства равна половине окружности. Поэтому прямые PN и QK перпендикулярны друг другу. Отсюда следует, что и треугольнике KPM биссектриса угла P является одновременно высотой; тогда она одновременно является и медианой; треугольник KPM равнобедренный. То же самое можно сказать о треугольнике LQN. Таким образом, в четырехугольнике $KLMN$ диагонали делят друг друга пополам и взаимно перпендикулярны, поэтому он — ромб.

Н. Б. Васильев

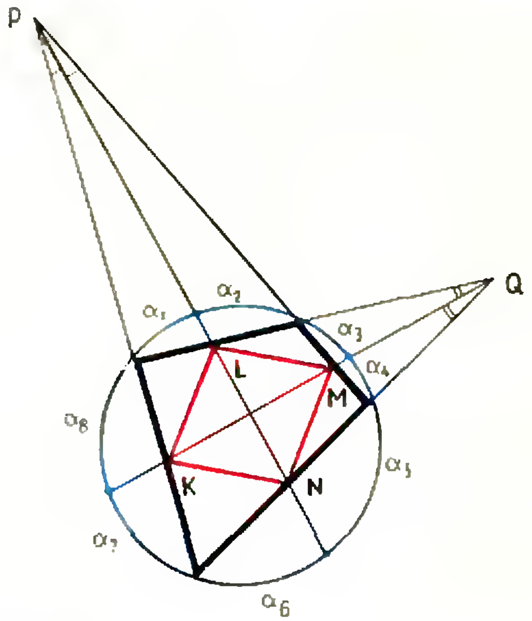


Рис. 7.

М132

Пусть по окружности выписано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждое из которых равно (+1) или (−1), причем сумма n попарных произведений соседних чисел равна 0 (как в задаче М93, стр. 42) и вообще для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ сумма n попарных произведений чисел, отстоящих друг от друга на k мест, равна 0 (то есть $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = 0$, $x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2 = 0$, $x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_nx_3 = 0$ и т. д.; пример для $n = 4$ дан на рисунке 8).

а) Докажите, что n – квадрат целого числа.

б) Существует ли такой набор n чисел при $n = 16$?

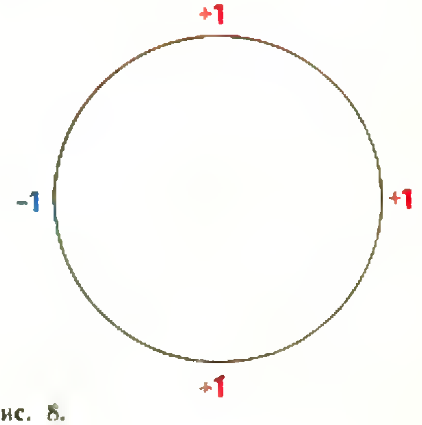


Рис. 8.

Докажем, что n — квадрат целого числа. Положим $m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Тогда m — целое число,

$$m^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1} \times x_1 + x_nx_2) + \ldots + (x_1x_n + x_2x_1 + x_3x_2 + \ldots + x_nx_{n-1}).$$

Как следует из условия задачи, в правой части этого равенства сумма чисел в первой скобке равна n, а сумма чисел в любой другой скобке равна 0. Значит, $n = m^2$. Задача а) решена.

Посмотрим, при каких n можно подобрать числа $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие условию задачи. Как следует из задачи **М93**, n должно делиться на 4; значит, n — квадрат четного числа. Если $n = 4$, то такие числа подобрать можно: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$. Следующее возможное значение для n — это 16.

Докажем, что для $n = 16$ такие числа $x_1, \ldots, x_{16}$ подобрать нельзя.

Предположим, что заданы числа $x_1, \ldots, x_{16}$, удовлетворяющие условию задачи, и попытаемся прийти к противоречию.

Пусть $m = x_1 + \ldots + x_{16}$. Можно считать, что $m \geqslant 0$ (иначе мы могли бы заменить все числа x_i на $-x_i$ без нарушения условий задачи), как было показано, $m^2 = n = 16$, то есть $m = 4$.

Если p из чисел x_i равны $+1$ и q равны -1, то

$$p + q = n = 16 \text{ и } p - q = m = 4.$$

Значит, $p = 10$, $q = 6$.

Будем считать, что числа x_i выписаны в вершинах правильного 16-угольника. Отметим звездочками те вершины, где стоит число -1 (всего 6 звездочек). Пусть мы повернули всю картину на $\frac{k}{16}$ частей полного оборота ($k = 1, 2, \ldots, 15$).

Докажем, что при этом ровно 2 звездочки перейдут в вершины, где раньше были звездочки. Действительно, пусть r чисел, равных -1, перешли на места, где стояли -1. Тогда в сумме $x_1x_{k+1} + x_2x_{k+2} + \ldots + x_{16-k+1}x_1$ будет $(6 - r)$ слагаемых, в которых первый сомножитель равен -1, а второй $+1$, и $(6 - r)$ слагаемых, в которых второй сомножитель равен -1, а первый $+1$; значит, $2(6 - r)$ слагаемых, равных -1.

Так как сумма равна 0, то $2(6 - r) = 8$, то есть $r = 2$.

Теперь можно переформулировать нашу задачу следующим образом: можно ли в вершинах правильного 16-угольника расставить 6 звездочек так, чтобы две из них стояли в противоположных вершинах, и для любого числа k от 1 до 7 существовало бы ровно две пары звездочек таких, что расстояние между звездочками в одной паре равно k (под расстоянием между двумя точками понимается длина меньшей из дуг, их соединяющих, причем длина всей окружности принята за 16 частей; расстояние между точками X и Y мы будем обозначать (XY).

Обозначим через A и B диаметрально противоположные точки, отмеченные звездочкой, и через C, D, E, F — другие отмеченные точки. Подсчитаем сумму всех расстояний между точками A, B, C, D, E, F. Расстояние 8 встречается один раз, а расстояния от 1 до 7 по два раза — итого общая сумма

$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 8 = 64.$$

Посмотрим, какие расстояния реализуются между точками C, D, E, F. Так как $(AX) + (BX) = 8$ для любой точки X, то сумма Σ всех расстояний между точками C, D, E, F равна $64 - (AB) - 4 \cdot 8 = 24$. Кроме того, если какое-то расстояние k реализуется между точками C, D, E, F, то это значит, что среди чисел (AC), (AD), (AE), (AF) и (BC), (BD), (BE), (BF) k встречается меньше двух раз; но тогда и $(8 - k)$ встречается меньше двух раз, то есть $(8 - k)$ тоже реализуется как расстояние между точками C, D, E, F. Посмотрим, как же могут располагаться точки C, D, E, F. Легко проверить, что возможны два случая.

1) Какие-то три точки (например, C, D, E) образуют треугольник, содержащий центр окружности. Пусть F лежит между C и D. Тогда

$$(CD) + (DE) + (CE) = 16,$$
$$(CF) + (DF) = (CD),$$

и, кроме того, (EF) больше (CE) или (DE). Так как и $(CD) + (DE) > 8$ и $(CD) + (CE) > 8$, то

$$\Sigma = (CD) + (DE) + (CE) + (CF) + (DF) + (EF) = 16 + (CD) + (EF) > 24,$$

хотя, как мы показали раньше, эта сумма должна равняться 24. Значит, первый случай невозможен.

2) Точки C, D, E, F лежат с одной стороны от некоторого диаметра. Пусть они расположены по окружности в следующем порядке C, D, E, F. Тогда $(CD) + (DF) = (CF)$ и $(CE) + (EF) = (CF)$, поэтому сумма Σ равна $3(CF) + (DE)$. Значит, $3(CF) + (DE) = 24$. Так как $CF > DE$, то $(CF) = 7$, $(DE) = 3$. Если $(CD) = 1$, то $(DF) = 6$; но при этом расстояние $2 = 8 - 6$ не реализуется между точками C, D, E, F, что противоречит ранее доказанному. Если $(CD) = 2$, то хотя $(CF) = 7$, расстояние 1 не реализуется. Если $(CD) = 3$, то $(EF) = 1$, и этот случай не отличается от случая $(CD) = 1$.

Итак, мы получили, что расставить звездочки требуемым способом (а значит, и подобрать числа x_i) нельзя. Задача б) решена.

Ответ на вопрос в) нам не известен, но, по-видимому, удовлетворяющие условию задачи числа можно подобрать только при $n = 4$.

Д. Н. Бернштейн

М133

Один из простейших многоклеточных организмов — водоросль «вольвокс» — пред-

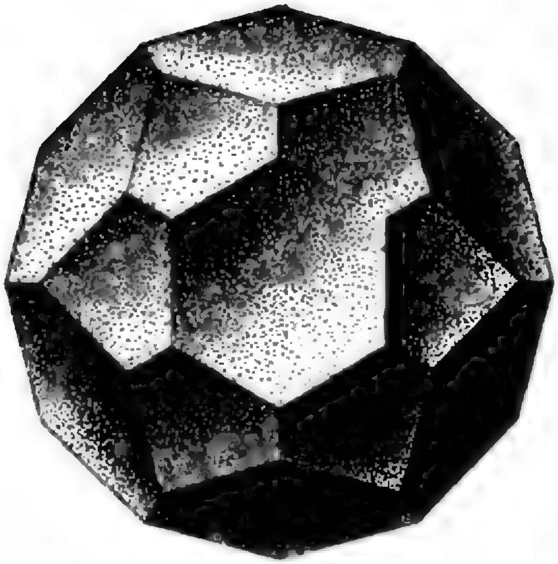


Рис. 9.

ставляет собой сферическую оболочку, сложенную в основном семиугольными, шестиугольными и пятиугольными клетками (то есть клетками, имеющими семь, шесть или пять соседних; в каждой «вершине» сходятся три клетки (рис. 9). Бывают экземпляры, у которых есть и четырехугольные, и восьмиугольные клетки, но биологи заметили, что если таких «нестандартных» клеток (менее, чем с пятью и более, чем с семью сторонами) нет, то пятиугольных клеток всегда ровно на 12 больше, чем семиугольных (всего клеток может быть несколько сотен и даже тысячи). Не можете ли объяснить этот факт?

Утверждение задачи следует из формулы Эйлера. (О формуле Эйлера смотрите «Квант» № 4, 1972, стр. 31 или Курант и Роббинс «Что такое математика?» М., «Просвещение», 1967). Действительно, обозначим число вершин вольвокса через B, число ребер — через P, а число граней с i вершинами — через Γ_i. Тогда по формуле Эйлера

$$2 = B - P + \Sigma\, \Gamma_i.$$

Но $3B = \Sigma_i \Gamma_i$, поскольку, по условию, в каждой вершине сходятся три грани, а $2P = \Sigma_i \Gamma_i$ — к каждому ребру примыкают две грани. Следовательно,

$$12 = 6B - 6P + 6\Sigma\Gamma_i = \Sigma_{2i}\,\Gamma_i - \\ - \Sigma_{3i}\Gamma_i + \Sigma_6\Gamma_i = \Sigma\,(6-i)\,\Gamma_i.$$

По условию, нестандартных граней нет, то есть $\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_8 = \Gamma_9 = \ldots = 0$. Поэтому $\Gamma_5 - \Gamma_7 = 12$ — в замечательном соответствии с наблюдениями биологов.

М134

Какое множество точек заполняют центры тяжести треугольников, три вершины которых лежат соответственно на трех сторонах AB, BC и AC данного треугольника ABC?

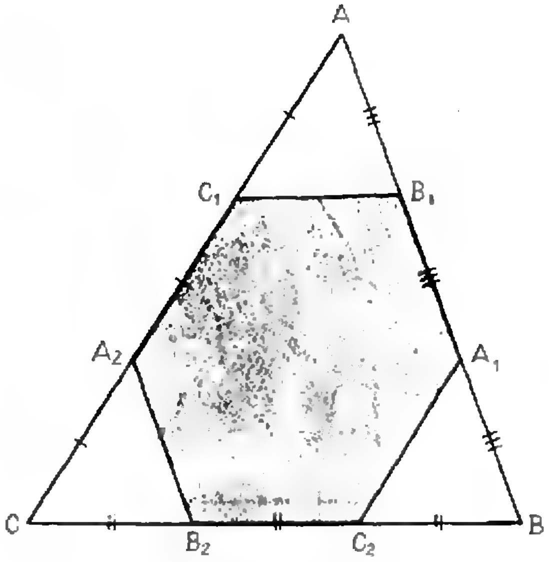


Рис. 10.

Нам будет удобно рассматривать не только полноценные треугольники, но и вырожденные треугольники тоже. Докажем сначала, что любая точка синего шестиугольника является центром тяжести вписанного треугольника (рис. 10). Для этого нам понадобится такая

Лемма. *Если точка O_1 является центром тяжести вписанного треугольника $K_1L_1M_1$, и точка O_2 — центром тяжести вписанного треугольника $K_2L_2M_2$, то для любой точки отрезка $[O_1, O_2]$ можно указать вписанный треугольник, для которого она является центром тяжести.*

Доказательство. Нам будет удобно пользоваться механической интерпретацией понятия центра тяжести. Пусть точка O_3 принадлежит отрезку $[O_1, O_2]$. Тогда можно положить такие грузики p_1 и p_2 в точки O_1 и O_2, что она является их центром тяжести. Поместим теперь грузики $\frac{p_1}{3}$ в вершины треугольника $K_1L_1M_1$, а грузики $\frac{p_2}{3}$ — в вершины треугольника $K_2L_2M_2$ (рис. 11). Центр тяжести этих шести грузиков совпадает с точкой O_3. С другой стороны, он является центром тяжести трех грузиков $\frac{p_1+p_2}{3}$, помещенных в вершины треугольника $K_3L_3M_3$, полученного следующим образом. Точки K_3, L_3 и M_3 — это центры тяжестей пар грузиков $\frac{p_1}{3}$, $\frac{p_2}{3}$, помещенных в точки K_1, K_2; L_1, L_2 и M_1, M_2 соответственно. Таким образом, исходя из треугольников $K_1L_1M_1$ и $K_2L_2M_2$ и произвольной точки O_3 отрезка $[O_1, O_2]$, мы построили треугольник $K_3L_3M_3$, центром тяжести которого она является. Лемма доказана.

Теперь легко доказать, что любая точка синего шестиугольника является центром

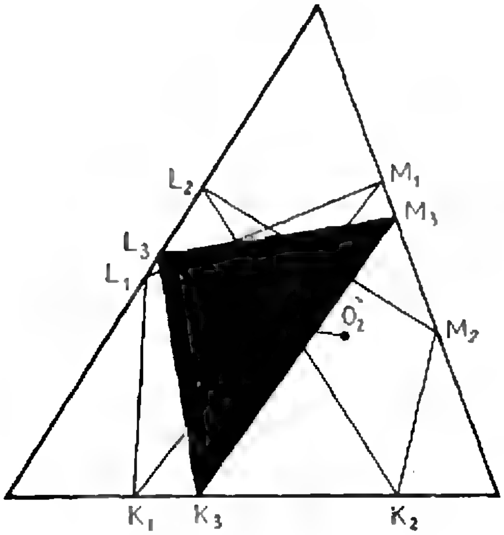


Рис. 11.

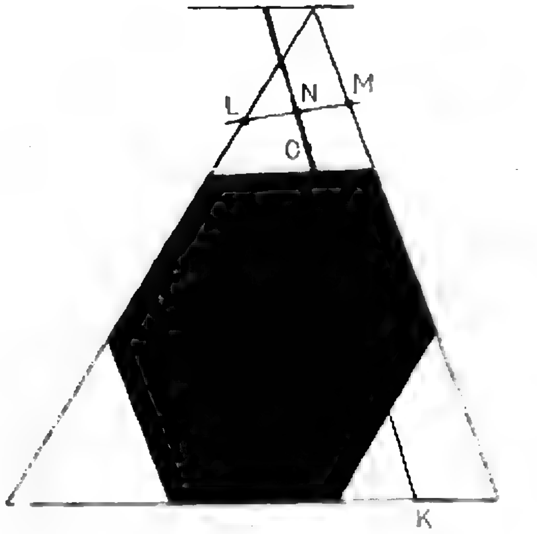


Рис. 12.

тяжести некоторого вписанного треугольника. Действительно, достаточно доказать это для его вершин, а затем воспользоваться леммой — с ее помощью мы от вершин сможем перейти к границе, а потом и к любой внутренней точке. Но для вершин такие треугольники строятся без труда: это треугольники, у которых вершины лежат в вершинах основного треугольника и две вершины слились в одну.

Остается доказать, что точки, лежащие внутри треугольников AB_1C_1, A_1BC_2, A_2B_2C, не могут быть центрами тяжести вписанных треугольников. Действительно, пусть для некоторой точки O треугольника AB_1C_1 нашелся треугольник KLM, для которого она является центром тяжести (рис. 12). Но тогда она делит отрезок KN в отношении 1:2, что невозможно.

Л. Г. Лиманов

В этом номере мы публикуем решения задач Ф148—Ф152

Ф148

Ядро массы M, летящее со скоростью v, распадается на два одинаковых осколка. Внутренняя энергия ядра E_1, внутренняя энергия каждого из осколков E_2 $(E_1 > 2E_2)$. Определить максимальный возможный угол между вектором скорости одного из осколков и вектором v.

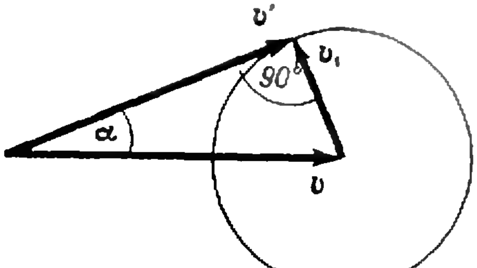


Рис. 13.

В системе координат, связанной с центром масс ядра и движущейся относительно Земли со скоростью v, осколки разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми скоростями. Кинетическая энергия этих осколков равна разности внутренней энергии ядра и внутренних энергий осколков. Если скорость каждого из осколков равна v_1, то

$$2\frac{mv_1^2}{2} = E_1 - 2E_2.$$

Отсюда найдем скорость каждого из осколков:

$$v_1 = \sqrt{\frac{E_1 - 2E_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(E_1 - 2E_2)}{M}}.$$

Скорость осколка в системе координат, связанной с Землей, равна векторной сумме скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$. Скорость $\mathbf{v}_1$ осколка в системе координат, связанной с центром масс ядра, может иметь произвольное направление. Но вектор $\mathbf{v}'$ скорости осколка в системе координат, связанной с Землей, составляет наибольший угол с вектором $\mathbf{v}$ в том случае, когда вектор $\mathbf{v}_1$ перпендикулярен вектору $\mathbf{v}'$ (рис. 12). В этом случае вектор скорости осколка $\mathbf{v}'$ составляет с вектором $\mathbf{v}$ угол α такой, что

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{2(E_1 - 2E_2)}{Mv^2}}.$$

Ф149

Во сколько раз уменьшится сила притяжения двух маленьких шариков, один из которых заряжен, а другой нейтрален, если расстояние между шариками увеличить вдвое?

Заряженный шарик является источником электрического поля, поляризующего нейтральный шарик. В результате поляризации нейтральный шарик становится диполем — в целом нейтральным шариком с зарядами $+q'$ и $-q'$, расстояние между которыми равно диаметру шарика $2r$ (рис. 14). Величина заряда q', или, как говорят, степень поляризации шарика, пропорциональна напряженности поля в центре этого шарика, то есть величине $\frac{q}{R^2}$, где q — заряд другого шарика:

$$q' = \frac{\alpha q}{R^2}$$

(α — коэффициент пропорциональности).

Теперь найдем силу взаимодействия зарядов шариков. Эта сила равна сумме силы притяжения между зарядом q и зарядом $-q'$ и силы отталкивания между зарядом q и зарядом $+q'$:

$$F = \frac{qq'}{(R-r)^2} - \frac{qq'}{(R+r)^2} = \frac{\alpha q^2}{R^2}\left(\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{(R+r)^2}\right) = \frac{\alpha q^2}{R^2}\,\frac{4Rr}{(R^2-r^2)^2}.$$

Так как $R \gg r$, то в знаменателе формулы можно пренебречь r^2 по сравнению с R^2. В результате получим:

$$F = \frac{\alpha q^2}{R^2}\,\frac{4Rr}{R^4} = \frac{4\alpha q^2 r}{R^5}.$$

Таким образом, сила взаимодействия шариков пропорциональна $\frac{1}{R^5}$, где R — расстояние между центрами шариков. При увеличении расстояния между шариками в 2 раза сила их взаимодействия уменьшится в 32 раза:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{4\alpha q^2 r}{R^5}}{\frac{4\alpha q^2 r}{(2R)^5}} = 2^5 = 32.$$

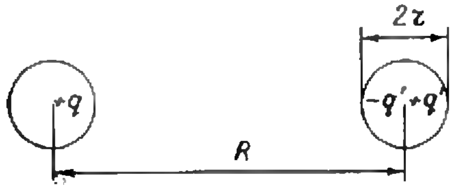


Рис. 14.

Ф150

В некоторой галактике обнаружена звезда $З$ с планетой $П$, делающей за время T_1 один оборот вокруг звезды и за время T_2 один оборот вокруг собственной оси. Спутник планеты C делает один оборот вокруг планеты за время T_3. Через какое время повторяется в данном месте планеты затмение спутника C?

Все тела вращаются в одной плоскости.

Пусть в системе координат, связанной с неподвижными звездами, планета и спутник вращаются так, как показано на рисунке 15, *а*. $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ — угловая скорость вращения планеты по орбите, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ — угловая скорость вращения планеты вокруг собственной оси и $\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3}$ — угловая скорость вращения спутника вокруг планеты.

В системе координат, связанной с планетой, но не вращающейся относительно неподвижных далеких звезд, звезда вращается вокруг планеты с угловой скоростью ω_1, как показано на рисунке 15, *б*, а спутник вращается вокруг планеты с угловой скоростью ω_3.

Теперь перейдем в систему координат, связанную с планетой и вращающуюся вместе с ней. В этой системе координат звезда вращается вокруг планеты с угловой скоростью $\omega' = \omega_1 - \omega_2$, а спутник — с угловой скоростью $\omega'' = \omega_3 - \omega_2$.

Если в некоторый момент на планете наблюдается затмение спутника, то следующее затмение спутника будет наблюдаться на планете через время t, за которое звезда повернется на угол φ, а спутник — на угол $2\pi + \varphi$. Мы предполагаем, что $\omega_3 > \omega_1$.

$$\varphi = \omega' t$$

и

$$2\pi + \varphi = \omega'' t.$$

Отсюда

$$2\pi = (\omega'' - \omega')\,t,$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega'' - \omega'} = \frac{2\pi}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{T_1 T_3}{T_1 - T_3}.$$

Ясно, что следующее затмение произойдет, когда звезда повернется на угол 2φ, затем, когда она повернется на угол 3φ, и т. д. Если при некотором целом N число $N\varphi$ будет равно целому кратному 2π, то N-е затмение придется в начальную точку. Итак, если $N\varphi = 2\pi m$, то есть, если число $\frac{\varphi}{2\pi}$ можно представить в виде несократимой дроби

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega'}{\omega'' - \omega'} = \frac{T_3(T_2 - T_1)}{T_2(T_1 - T_3)} = \frac{m}{N},$$

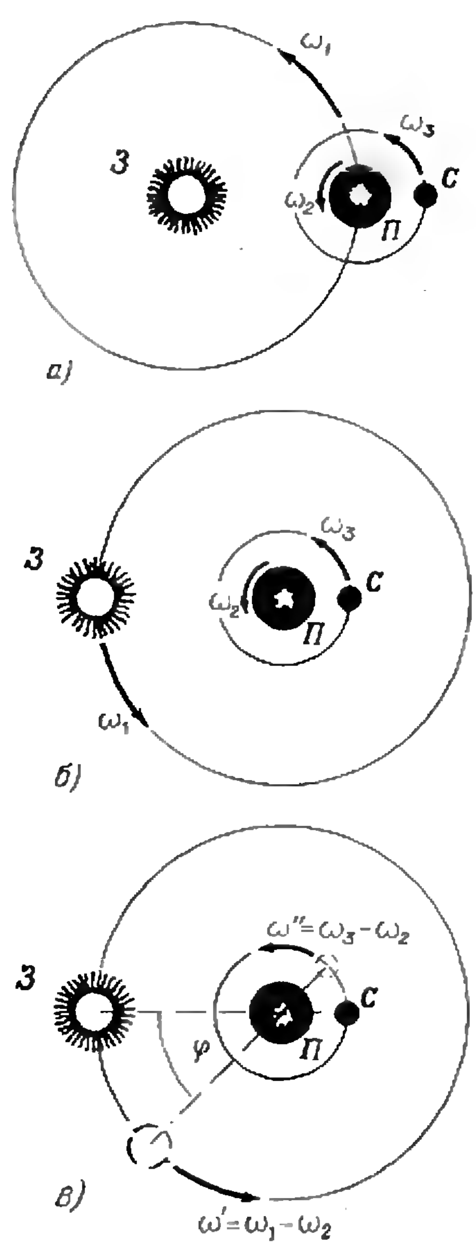


Рис. 15.

то через промежуток времени

$$mt = \frac{2\pi m}{\omega'' - \omega'} = \frac{2\pi m T_3 T_1}{T_1 - T_3}$$

затмение будет приходиться в ту же самую точку. Если же число $\frac{\varphi}{2\pi}$ иррационально, то $N\varphi$ ($N = 1, 2, 3, \ldots$) никогда не будет целым кратным 2π и поэтому затмение никогда не придется в ту же точку.

На практике, конечно, отношение $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega'}{\omega'' - \omega'} = \frac{T_3(T_2 - T_1)}{T_2(T_1 - T_3)}$ можно указать только приближенно, и не имеет смысла говорить о том, рациональное это число или иррациональное. Но наше рассуждение показывает, что если число $\frac{T_3(T_2 - T_1)}{T_2(T_1 - T_3)}$ хорошо приближается дробью $\frac{m}{N}$ с небольшими числителем и знаменателем, то затмение будет происходить почти точно в одном из N мест планеты (последовательно проходя через все эти N мест), а если не приближается, то затмение происходит каждый раз в новом месте.

Ф151

Два плоских зеркала образуют двугранный угол с раствором 90°. В угол вставлена линза с фокусным расстоянием F так, что главная оптическая ось линзы составляет угол 45° с каждым зеркалом. Радиус линзы равен ее фокусному расстоянию. Найти положение изображения источника, расположенного на главной оптической оси линзы на расстоянии $1{,}5F$ от нее.

Ход нескольких лучей в системе показан на рисунке 16. Если бы не было зеркал, то изображение источника S находилось бы в точке S_1. Найдем расстояние f_1 от линзы до изображения S_1. Источник находится на расстоянии $1{,}5F$ от линзы. Записав формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{1{,}5F} + \frac{1}{f_1},$$

найдем

$$f_1 = 3F.$$

Это означает, что точка S_1 находится на расстоянии $2F$ от линии пересечения зеркал. Но лучи, идущие к зеркалу I, отражаются от него, и если бы не было зеркала II, пересекались бы в точке S_2. Точка S_2 находится на прямой, перпендикулярной к оптической оси линзы, на расстоянии $2F$ от линии пересечения зеркал. Докажем это.

Угол *1* равен углу *2* (как накрест лежащие) и равен углу *3* (это следует из закона отражения). Следовательно, угол *2* равен углу *3*. Можно показать и то, что угол *4* равен углу *5*. Но отсюда следует, что треугольник ABS_2 равен треугольнику ABS_1 — у них одна общая сторона AB и равны между собой углы, прилежащие к этой стороне. Очевидно, треугольник ABS_2 является отражением треугольника ABS_1 относительно зеркала I. Ясно, что треугольник S_2OC является отражением треугольника S_1OC относительно прямой I—I. Отсюда и следует, что $OS_2 = OS_2 = OS_1 = 2F$ и так как $\angle S_1OC = \angle S_2OC = 45°$, то $\angle S_2OS_1 = 90°$.

Нетрудно показать, что лучи, идущие к зеркалу II в «мнимый источник», точку S_2, отражаясь, пересеклись бы, если бы не было линзы, в точке S_3, находящейся на главной оптической оси линзы на расстоянии $2F$ от линии пересечения зеркал, то есть на расстоянии F от линзы.

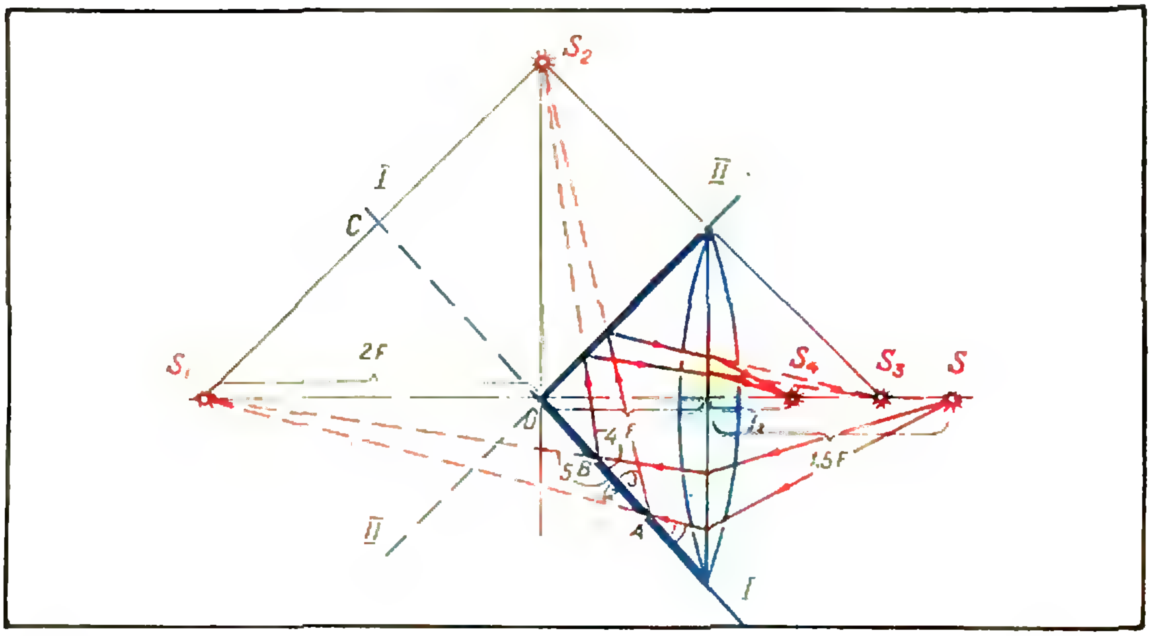


Рис. 16.

Точка S_3 — это мнимый источник для линзы. Найдем его изображение S_4. Запишем для этого еще раз формулу линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_2},$$

где $d = -F$ (так как источник S_3 — мнимый), а f_2 — расстояние от линзы до изображения S_4.

Из последнего уравнения найдем

$$f_2 = 0{,}5\ F.$$

Таким образом, изображение S_4 источника S, даваемое системой, будет находиться на расстоянии 0,5 F от линзы.

Ф152

Объем газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва, колеблется с периодом, пропорциональным $p^a \rho^b E^c$, где p — давление, ρ — плотность воды и E — полная энергия взрыва. Найти a, b и c.

Известно, что

$$T \sim p^a \rho^b E^c.$$

Величина, стоящая слева в этой формуле, имеет размерность времени $[c]$. Точно такую же размерность должна иметь величина, стоящая справа. Запишем размерности всех величин:

$$p \rightarrow \left[\frac{н}{м^2}\right] \rightarrow \left[\frac{кг}{м \cdot c^2}\right]; \quad \rho \rightarrow \left[\frac{кг}{м^3}\right];$$

$$E \rightarrow [дж] \rightarrow \left[\frac{кг \cdot м^2}{c^2}\right].$$

Произведение $p^a \rho^b E^c$ имеет размерность

$$\left[\frac{кг}{м \cdot c^2}\right]^a \left[\frac{кг}{м^3}\right]^b \left[\frac{кг \cdot м^2}{c^2}\right]^c \rightarrow$$

$$\rightarrow [кг]^{a+b+c} [м]^{-a-3b+2c} [c]^{-2a-2c}.$$

Для того чтобы размерность этого произведения была $[c]$, необходимо, чтобы

$$-2a - 2c = 1,$$
$$a + b + c = 0,$$
$$-a - 3b + 2c = 0.$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$a = -\frac{5}{6}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad c = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$T \sim p^{-\frac{5}{6}} \rho^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{3}}.$$

И. Ш. Слободецкий.

Расстояния между скрещивающимися прямыми

М. Л. Крайзман

При решении задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми полезно различать два случая:

1) скрещивающиеся прямые перпендикулярны;

2) скрещивающиеся прямые не перпендикулярны.

Если скрещивающиеся прямые a и b перпендикулярны (1-й случай), то проще всего через одну из скрещивающихся прямых провести плоскость α, перпендикулярную к другой прямой (рис. 1; из произвольной точки M на прямой a опущен перпендикуляр OM на прямую b, плоскость α определяется двумя пересекающимися прямыми a и MO, потому что $b \perp a$ по условию и $b \perp OM$ по построению, следовательно, $b \perp \alpha$ по обобщенному признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Затем из точки O пересечения плоскости α и прямой b надо опустить перпендикуляр ON на прямую a, ON — искомое расстояние.

Пример 1. *Определить расстояние между диагональю куба с ребром a и скрещивающейся с ней диагональю грани.*

Решение. Будем определять расстояние между B_1D и D_1C (рис. 2). Так как $D_1C \perp DC_1$, а DC_1 — проекция B_1D на плоскость DD_1C_1C, то $D_1C \perp B_1D$ (по обобщенной теореме о трех перпендикулярах). Из соотношений $D_1C \perp DC_1$ и $D_1C \perp B_1D$ следует (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), что $D_1C \perp$ плоскости DB_1C_1. Пусть O — точка пересечения D_1C и DC_1. Опустим из точки O перпендикуляр OK на B_1D, OK — искомое расстояние между скрещивающимися прямыми B_1D и D_1C. Найдем его. Для этого заметим, что прямоугольные треугольники OKD и B_1DC_1 подобны и $OK : B_1C_1 = OD : B_1D$. Отсюда

$$OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

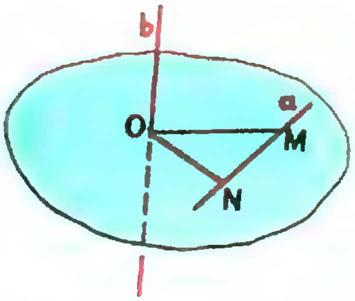


Рис. 1.

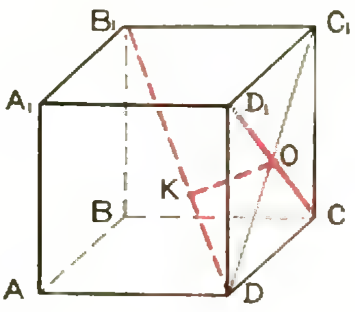


Рис. 2.

Прежде чем перейти к следующим примерам, докажем теорему, выражающую зависимость между углами трехгранного угла, в котором две грани взаимно перпендикулярны.

Теорема 1. *Если две грани трехгранного угла взаимно перпендикулярны, то косинус плоского угла грани, лежащей против прямого двугранного угла, равен произведению косинусов плоских углов граней, ограничивающих этот прямой двугранный угол.*

Доказательство. На рисунке 3 пл. $ASB \perp$ пл. BSC, $\angle ASC = \alpha$, $\angle ASB = \beta$, $\angle BSC = \gamma$. Мы хотим доказать, что $\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma$. Для этого из точки M на ребре SA опустим перпендикуляры MO на BS и MN на SC. Соединим точки N и O. Согласно теореме о трех перпендикулярах $SC \perp NO$. Из $\triangle SMO$ и $\triangle SON$ находим

$$\cos\beta = \frac{SO}{SM}, \quad \cos\gamma = \frac{SN}{SO}.$$

Перемножим эти равенства: $\cos\beta\cdot\cos\gamma = \dfrac{SN}{SM}$, и найдем $\cos\alpha$ из $\triangle SNM$: $\cos\alpha = \dfrac{SN}{SM}$. Отсюда $\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma$. Теорема доказана.

Пример 2. *Каждое ребро треугольной призмы равно а. Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы, каждый из которых равен α. Определить расстояние между этим ребром и скрещивающейся с ним стороной основания.*

Решение. Требуется определить расстояние между AA_1 и BC (рис. 4). Известно, что если наклонная, исходящая из вершины угла, образует со сторонами этого угла равные углы, то проекция наклонной на плоскость угла будет его биссектрисой. Поэтому AO — биссектриса угла BAC. Но $\triangle ABC$ — правильный, продолжение AD биссектрисы будет высотой этого треугольника и поэтому $AD \perp BC$. По обобщенной теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AA_1$, а на основании обобщенного признака перпендикулярности прямой и плоскости $BC \perp$ пл. DAA_1. Опустим из точки D перпендикуляр DK на AA_1; DK — искомое расстояние между BC и AA_1. Пусть $\angle A_1AO = x$; применив теорему 1 к трехгранному углу AA_1DC, получим: $\cos\angle A_1AC = \cos\angle A_1AD\cdot\cos\angle DAC$; $\cos\alpha = \cos x\cdot\cos 30^\circ$. Отсюда

$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{3}.$$

Осталось найти KD из $\triangle AKD$:

$$KD = AD\cdot\sin x = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{3-4\cos^2\alpha} =$$

(или, при $\cos\alpha \neq 0$)

$$= \frac{a}{2}\sqrt{-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}},$$

причем $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{5\pi}{6}$.

Теперь рассмотрим случай, когда скрещивающиеся прямые не перпендикулярны между собой. Так как в задачах на вычисление нет необходимости строить перпендикуляр к

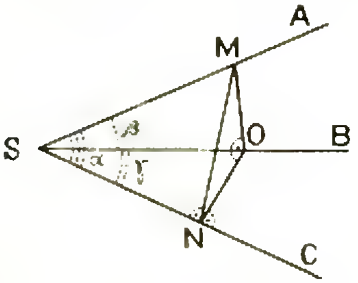


Рис. 3.

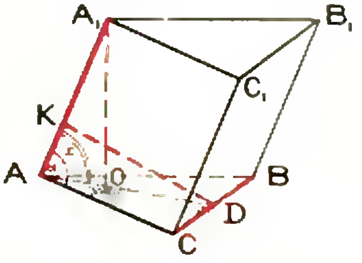


Рис. 4.

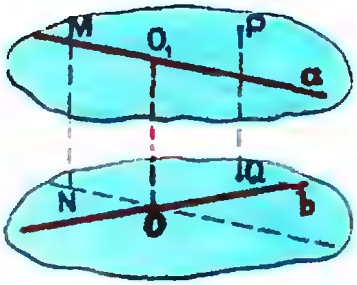


Рис. 5.

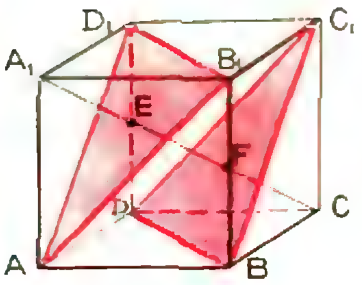


Рис. 6а.

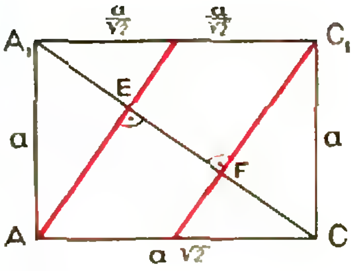


Рис. 6б.

данным двум скрещивающимся прямым, а надо лишь определить расстояние между ними, то для этого достаточно через одну из скрещивающихся прямых b (рис. 5) провести плоскость α, параллельную второй прямой a, и найти расстояние MN от произвольной точки M прямой a до плоскости α; оно равно длине отрезка перпендикуляра OO_1 к данным двум скрещивающимся прямым. Если мы еще проведем через прямую a плоскость β, параллельную α, то OO_1 *будет равно расстоянию от любой точки* P на одной плоскости до ее проекции Q на вторую плоскость ($PQ \perp \alpha$, β).

Пример 3. *Определить расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно a.*

Решение. На рисунке 6а прямые AB_1 и BC_1 скрещиваются (для прямых BA_1 и CB_1 рассуждения аналогичны). Плоскости AD_1B_1 и BDC_1 параллельны (так как $AB_1 \parallel DC_1$, $AD_1 \parallel BC_1$) и содержат прямые AB_1 и BC_1. Прямая A_1C является общим перпендикуляром к этим плоскостям, потому что она перпендикулярна к прямым AE, D_1E и C_1F, BF — достаточно рассмотреть сечения ACC_1A_1 (рис. 6б) и аналогично A_1BCD_1. Из рисунка 6б легко находим: $A_1E = EF = FC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Но EF — это искомое расстояние.

Пример 4. *Определить расстояние между скрещивающимися высотами граней правильного тетраэдра с ребром a.*

Решение. *Определим расстояние между BD и SM (рис. 7).* Для этого через точку M проведем $ME \parallel BD$. Плоскость SME и BD параллельны. Найдем расстояние от точки O, принадлежащей BD, до плоскости SME. Для этого проведем $OK \perp ME$ и соединим точки S и K; $ME \perp SK$, откуда $ME \perp$ пл. SOK, а из этого следует, что пл. $SOK \perp$ пл. SME. Перпендикуляр OP, опущенный из точки O на плоскость SME, лежит в плоскости SOK, а основание его — точка P — лежит на прямой SK, являющейся линией пересечения этих двух взаимно перпендикулярных плоскостей.

Из подобия $\triangle SOK$ и $\triangle OPK$ находим $OP = \frac{SO \cdot OK}{SK}$. Далее, подставляя $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $OK = DE = \frac{a}{4}$; $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \frac{a\sqrt{105}}{12}$, находим $OP = \frac{a\sqrt{70}}{35}$.

Аналогично находится расстояние между BD и CN (рис. 8). Плоскость NCH параллельна BD. Строим плоскость NO_1L, перпендикулярную к NCH. Тогда искомым расстоянием будет длина отрезка перпендикуляра O_1F, опущенного из точки O_1 на плоскость NCH. Из подобия $\triangle NO_1L$ и $\triangle NO_1F$ находим: $O_1F = \frac{NO_1 \cdot O_1L}{NL}$, и, подставляя все величины, находим, что $O_1F = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Рассмотрим другие методы решения задач на определение расстояния

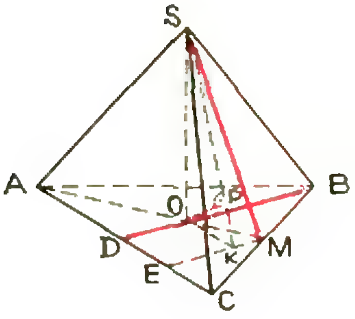


Рис. 7.

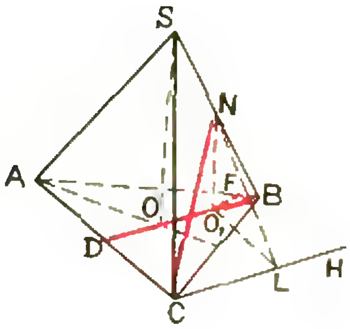


Рис. 8.

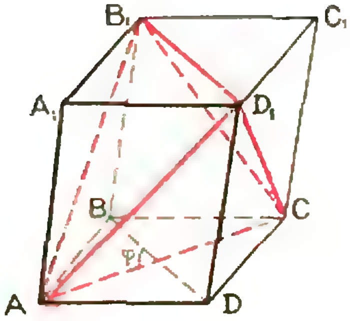


Рис. 9.

между скрещивающимися прямыми. Один из этих методов базируется на теореме об объеме треугольной пирамиды.

Теорема 2. *Объем треугольной пирамиды равен одной шестой произведения длин двух любых ее скрещивающихся ребер на расстояние между ними и на синус угла между ними.*

Доказательство. Из произвольной вершины (B_1) параллелепипеда AC_1 проведем диагонали B_1A, B_1D_1, B_1C граней, сходящихся в этой вершине (рис. 9). Концы этих диагоналей соединим между собой. Получим пирамиду B_1AD_1C, которая называется вписанной в параллелепипед, а параллелепипед, наоборот, описанным вокруг этой пирамиды (его легко построить, проводя пары параллельных плоскостей через противоположные ребра пирамиды).

Объем параллелепипеда равен:

$$V_{AC_1} = V_{B_1AD_1C} + V_{D_1ADC} + V_{B_1ABC} + V_{AA_1B_1D_1} + V_{CB_1C_1D_1}.$$

Так как

$$V_{D_1ADC} = V_{B_1ABC}, \quad V_{AA_1B_1D_1} = V_{CB_1C_1D_1}$$

(основания этих пирамид равновелики и равны половине площади основания параллелепипеда, а высоты их равны высоте h параллелепипеда), то

$$V_{B_1AD_1C} = V_{AC_1} - 4V_{D_1ADC} = V_{AC_1} - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}Sh = V_{AC_1} - \frac{2}{3}Sh = \frac{1}{3}V_{AC_1}.$$

Итак, объем вписанной треугольной пирамиды составляет одну треть объема описанного параллелепипеда, или после преобразования,

$$V_{B_1AD_1C} = \frac{1}{3}V_{AC_1} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi\right)\cdot h = \frac{1}{6}AC\cdot B_1D_1\cdot h\cdot\sin\varphi.$$

При решении задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми можно использовать особенности описанного параллелепипеда в зависимости от свойств вписанной треугольной пирамиды. Например, попробуйте самостоятельно доказать, что *если в пирамиде два скрещивающихся ребра:*

а) равны, то у описанного параллелепипеда грани, в которых лежат эти ребра, будут прямоугольниками;

б) перпендикулярны, то соответствующие грани будут ромбами;

в) равны и перпендикулярны, то соответствующие грани будут квадратами.

Пример 5. *В треугольной пирамиде противоположные (скрещивающиеся) ребра попарно равны между собой и соответственно равны a, b и c. Найти расстояние между ними.*

Решение. Противоположными гранями описанного параллелепипеда являются прямоугольники, и потому сам параллелепипед будет прямоугольным (рис. 10). Искомые расстояния между скрещивающимися ребрами будут равны расстояниям между противоположными гранями, то есть ребрам прямоугольного параллелепипеда.

Составим систему уравнений:

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$x^2+z^2=b^2,$$
$$y^2+z^2=c^2.$$

Сложив их почленно, и разделив на 2, получим

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

а вычитая из последнего уравнения каждое из уравнений системы и извлекая квадратный корень, найдем

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)},$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2-b^2)},$$

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)}.$$

Пример 6. *Два противоположных ребра треугольной пирамиды соответственно равны 6 см и 8 см, а каждое из остальных четырех ребер — по 13 см. Определить расстояние между скрещивающимися ребрами этой пирамиды.*

Решение. Так как $AB_1=B_1C=AD_1=D_1C$ (рис. 11), то все боковые грани параллелепипеда AC_1 — равные прямоугольники. Следовательно, в основании лежит ромб $ABCD$, а сам параллелепипед является прямым. Отсюда $d(AC;\ B_1D_1)=BB_1$, $d(AD_1;\ B_1C)=d(AB_1;\ D_1C)=h$, где h — высота ромба $ABCD$. Далее легко найти, что $h=4{,}8$ *см*, $BB_1=12$ *см* (сделайте это самостоятельно).

На следующей теореме основан алгебраический метод решения задач на определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Теорема 3. *Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b. На прямой a взяты точки A_1, A_2, A_3 и из этих точек опущены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, на прямую b. Тогда $A_1A_2:A_2A_3=B_1B_2:B_2B_3$.*

Доказательство. Проведем через прямую b произвольную плоскость α (рис. 12) и рассмотрим ортогональную проекцию прямой a на эту плоскость; проекции точек A_1, A_2, A_3 обозначим через A'_1, A'_2, A'_3 соответственно. Из свойств параллельной проекции имеем

$$A_1A_2:A_2A_3=A'_1A'_2:A'_2A'_3.$$

Соединим точки A'_1, A'_2, A'_3 соответственно с точками B_1, B_2, B_3. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что $A'_1B_1\perp b$, $A'_2B_2\perp b$, $A'_3B_3\perp b$, поэтому $A'_1B_1\parallel A'_2B_2\parallel A'_3B_3$. По теореме о пересечении двух прямых рядом параллельных прямых можем написать:

$$A'_1A'_2:A'_2A'_3=B_1B_2:B_2B_3. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) непосредственно следует:

$$A_1A_2:A_2A_3=B_1B_2:B_2B_3.$$

Пример 7. *В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB=c$ и острым углом BAC, равным 30°. Боковая грань, проходящая через*

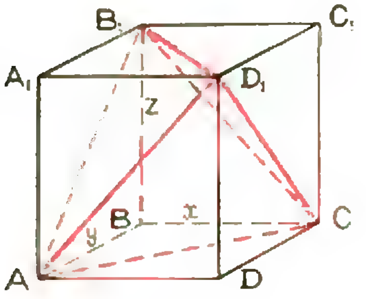


Рис. 10.

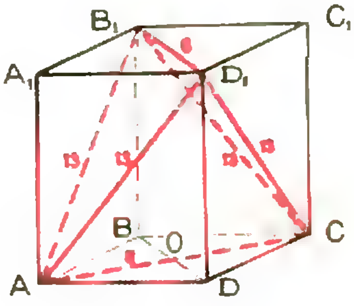


Рис. 11.

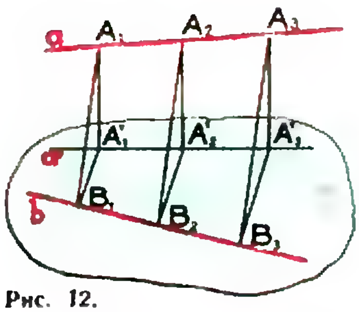


Рис. 12.

катет AC, перпендикулярна к плоскости основания, а две остальные образуют с ней угол, также равный 30°. Определить расстояние между SB и AC.

Решение. Найдем проекцию отрезка SB на отрезок AC. Для этого из точек S и B опустим перпендикуляры SO и BC на AC (рис. 13), и SK на AB; тогда $\text{Пр}_{AC}SB = OC$. Найдем отношение $\frac{OC}{SB}$. Из равенств $\angle SKO = \angle SCO = 30°$ следует, что $OK = OC$ и OB — биссектриса угла ABC. Далее находим:

$$BC = AB \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}c,$$

$$OC = BC \cdot \text{tg}\, 30° = \frac{c\sqrt{3}}{6},$$

$$SC = OC : \cos 30° = \frac{1}{3}c,$$

$$SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = \frac{c\sqrt{13}}{6}.$$

Следовательно,

$$\frac{OC}{SB} = \frac{c\sqrt{3}}{6} : \frac{c\sqrt{13}}{6} = \sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Из произвольной точки P, взятой на SB, опустим перпендикуляр PQ на AC; тогда проекцией PB на AC будет QC. Согласно теореме 3 $OC:SB = QC:PB$, откуда $\frac{QC}{PB} = \sqrt{\frac{3}{13}}$; пусть $QC = x\sqrt{3}$, $PB = x\sqrt{13}$. Применим к треугольнику CPB теорему косинусов:

$$PC^2 = \frac{c^2}{4} + 13x^2 - 2\frac{c}{2} \cdot x\sqrt{13}\cos\angle CBP. \quad (3)$$

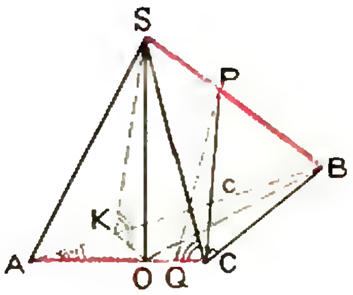


Рис. 13.

Из $\triangle SCB$ найдем

$$\cos\angle CBS = \frac{CB}{SB} = \frac{c}{2} : \frac{c\sqrt{13}}{6} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

и подставим в (3):

$$PC^2 = \frac{c^2}{4} + 13x^2 - cx\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 13x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4}.$$

Далее, из $\triangle QPC$ имеем

$$QP^2 = CP^2 - QC^2 = 13x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4} - 3x^2 = 10x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4}.$$

Наименьшее значение QP^2 будет равно квадрату расстояния между скрещивающимися прямыми; найдем его. Если $QP^2 = ax^2 + bx + c$, то

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{3c}{20}; \quad (QP^2)_{\min} = 10 \cdot \frac{9c^2}{400} - 3c \cdot \frac{3c}{20} + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{40};$$

$$(QP)_{\min} = \frac{c\sqrt{10}}{20}.$$

Упражнения

1. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) с катетом $BC = a$ и прилежащим острым углом α. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Определить расстояние между гипотенузой AB и скрещивающимся с ней боковым ребром SC.

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Определить расстояние между апофемой пирамиды и скрещивающейся с ней стороной основания, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°.

3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна a, а плоский угол при вершине равен α. Определить расстояние между скрещивающимися ребрами этой пирамиды.

XIV МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 5 по 18 июля в Польше проходила XIV Международная математическая олимпиада школьников. Работа жюри началась в Варшаве, а сами соревнования проходили в старинном городе западной Польши — Торуне. В олимпиаде приняли участие команды 14 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, Советского Союза, Чехословакии, Швеции, Югославии. Руководители команд этих стран и составили международное жюри, председателем которого был профессор Торуньского университета Станислав Балчежик. Все перечисленные страны участвовали и в прошлой олимпиаде.

Каждая команда состояла из 8 человек (от Кубы было только три участника). В каждой стране команда формировалась по результатам различных национальных соревнований. По признанию многих руководителей команд, международная олимпиада является серьезным стимулом для повышения уровня и популярности национальных олимпиад. В некоторых странах среди победителей национальной олимпиады проводятся дополнительные отборочные соревнования для окончательного определения состава команды. Читателям «Кванта» будет интересно узнать, что в Англии на этом заключительном отборе предлагалась задача из «Кванта» (см. № 4 за 1971 г., задача М 76). Задачник «Кванта» используется также в Нидерландах и во многих других странах.

Советская команда была сформирована по итогам VI Всесоюзной математической олимпиады. В нее вошли Белкин Сергей — ученик школы № 7 г. Москвы (ранее обучался в школе № 556 г. Москвы), Бурков Владимир — ученик школы-интерната при МГУ им. Ломоносова (ранее обучался в 25-й школе г. Владимира), Гольберг Андрей — ученик 2-й московской школы, Колмаков Юрий — ученик школы-интерната при МГУ им. Ломоносова (ранее обучался в 1-й школе г. Рассказово Тамбовской области), Конягин Сергей — ученик 9 класса школы № 9 гор. Саратова, Меркурьев Александр — ученик школы-интерната при Ленинградском университете, Шаповалов Александр — ученик школы-интерната при Московском университете (ранее обучался в школе села Чемолган Алма-Атинской области), Шварц Владимир — ученик школы-интерната при Ленинградском университете. Запасными членами команды были: Ландо Сергей — ученик 19-й школы г. Перми и Лещинер Дмитрий — ученик 9 класса 2-й московской школы.

Советская команда в составе 8 человек прибыла в Варшаву 7 июля. Соревнования проходили в Торуне 10 и 11 июля.

Максимальное число очков, которое мог набрать участник, равно сорока. 40 очков набрали 8 участников и им были присуждены дипломы первой степени. Их получили Грегош Андрейчик — Польша, Владимир Бурков — СССР, Вильмош Коморник — Венгрия, Сергей Конягин — СССР, Павел Крёгер — ГДР, Мартин Мирка — Румыния, Шолт Туза — Венгрия, Золтан Фюреди — Венгрия.

Дипломом второй степени награждались участники, набравшие от 30 до 39 очков. Из нашей команды дипломы второй степени получили Сергей Белкин (39 очков), Александр Меркурьев (38 очков), Андрей Гольберг (33 очка), Владимир Шварц (30 очков).

Дипломы третьей степени, которые присуждались участникам, набравшим от 19 до 29 очков, в советской команде получили Юрий Колмаков (28 очков) и Александр Шаповалов (22 очка).

Таким образом, все 8 участников советской команды стали призерами олимпиады.

В целом советская команда набрала наибольшее число очков (270 из 320 возможных). Далее следуют команды Венгрии (263 очка), ГДР (239 очков), Румынии (206 очков), Великобритании (179 очков).

На торжественном закрытии олимпиады, которое состоялось в Варшаве 17 июля, министр просвещения и воспитания Польской Народной Республики Ежи Куберски вручил победителям дипломы и призы.

Задачи XIV Международной математической олимпиады

Первый день соревнований

1. Доказать, что из любых десяти различных двузначных натуральных чисел можно выбрать две различные непересекающиеся группы чисел так, что сумма чисел в обеих группах будет одинаковой. (*СССР, 5 очков*).

2. Доказать, что следующее утверждение справедливо для любого числа $n \geqslant 4$: произвольный вписанный четырехугольник можно разбить на n четырехугольников, вокруг каждого из которых можно описать окружность. (*Нидерланды, 6 очков*).

3. Доказать, что для любых неотрицательных целых чисел m и n число $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ является целым (полагаем $0! = 1$). (*Великобритания, 7 очков*).

Второй день соревнований

4. Найти все решения $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ системы неравенств:

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqslant 0,$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqslant 0,$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqslant 0,$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqslant 0,$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqslant 0.$$

(*Нидерланды, 7 очков.*)

5. Пусть f и g — действительные функции, определенные на всей прямой и удовлетворяющие уравнению

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,g(y)$$

для всех x, y. Доказать, что если $f(x)$ не есть тождественный нуль и если $|f(x)| \leqslant 1$ для всех x, то $|g(y)| \leqslant 1$ для всех y. (*Болгария, 7 очков.*)

6. Даны четыре различные параллельные плоскости. Доказать, что существует правильный тетраэдр с вершинами на каждой из этих плоскостей. (*Великобритания, 8 очков.*)

В. А. Скворцов, И. С. Петраков

* * *

После Всесоюзной математической олимпиады десять ее победителей — 8 десятиклассников и 2 девятиклассника — были приглашены на тренировочный сбор, который проходил в Горках Ленинских с 23 июня по 6 июля в школе памяти В. И. Ленина. В утренние часы участники сбора занимались решением задач, а после обеда загорали, купались, играли в баскетбол, футбол, шахматы.

Многие задачи, предложенные на сборе, были очень интересны. Например:

1. *Двое играют в такую игру: на бесконечной клетчатой бумаге каждый имеет право за один свой ход закрасить некоторое ребро, соединяющее два соседних узла сетки, своим цветом. Каждое ребро красится не более чем в один цвет. Доказать, что второй может помешать начинающему соединить два наперед выбранных узла сетки ломаной линией одного цвета, если расстояние между фиксированными узлами больше единицы.*

2. *Доказать, что нельзя замостить плоскость выпуклыми равными семиугольниками без наложений.*

3. *Существует ли на клетчатой бумаге окружность, проходящая ровно через 17 целочисленных точек?*

По нашему мнению, эти сборы были очень полезны. Проведенная тренировка помогла нашей команде хорошо выступить на международной олимпиаде. За время сборов создался единый коллектив, что очень важно в любых командных соревнованиях.

6 июля наша команда выехала в Варшаву. В Варшаве участники олимпиады остановились в отеле Ривьера, откуда 8 июля на автобусах отправились на родину Николая Коперника — в город Торунь, где и должны были произойти сами соревнования.

9 июля мы осмотрели город Торунь. Сейчас город готовится к 500-летнему юбилею Коперника. Повсюду производится реконструкция многочисленных исторических памятников. Всем зданиям и архитектурным сооружениям старой части города придается тот вид, который они имели во времена Коперника.

10-го и 11-го июля проходили соревнования. Работу писали в 8 аудиториях, в каждой аудитории по одному человеку из каждой команды. Во время соревнований гостеприимные хозяева угощали участников вторым завтраком и весьма приятным соком оранжадом. Нам было предложено для решения 6 задач (за два дня). Среди всех предложенных задач наиболее интересной, по нашему мнению, была третья задача первого дня, несмотря на то, что она допускает три решения: комбинаторное, по индукции и решение, в котором рассматриваются степени простого делителя p, входящего в числитель и знаменатель дроби $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ *).

Задачи первого дня оценивались меньшим числом очков, чем задачи второго дня, но для многих участников олимпиады они оказались сложными.

После соревнований началась увлекательная автобусная экскурсия по Польше. Мы ехали по маршруту: Торунь — Грюнвальд — Оструда — Ольштын — Эльблонг. 13 июля мы на корабле отплыли из Эльблонга во Фромброк и в тот же день возвратились в Эльблонг. Затем 14 июля мы, посетив замок в Мальборне, возвратились в Торунь через Квидзынь и Грудзёндз. 15 июля участники олимпиады выехали на общую экскурсию вместе с руководителями команд. В этот день мы узнали результаты олимпиады. Через Кружвиду, Гнезно, Рогалин, Курник мы приехали в Познань. Осмотрев этот город — город старинной культуры, — мы вернулись в Варшаву.

---

*) Подробное решение всех задач олимпиады будет приведено в журнале «Математика в школе», № 6, 1972. См. также стр. 63.

За время олимпиады ребят из разных стран связала тесная дружба. Несмотря на то, что мы говорили на разных языках, у нас был общий язык — язык математики. В процессе знакомства с учениками из других команд мы обменивались задачами, рассказывали друг другу, как проходят национальные олимпиады. Нам хочется привести наиболее интересные из задач.

1. Положим, что a_n — сумма цифр числа 1972^n в десятичной записи. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0.$$

Эту задачу нам рассказали члены польской команды. На Общепольской олимпиаде ее решили всего несколько человек.

2. Доказать, что существует такая последовательность целых чисел $\{a_n\}$: $a_0=0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; $a_n<a_{n+1}$, для которой выполнены следующие условия:

1°. Для всякого натурального k существуют a_i и a_j из последовательности $\{a_n\}$ такие, что $k=a_i+a_j$ (i может равняться j). 2°. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=0$.

Эту задачу предложили английские школьники.

3. $p+q=1$, $q\geqslant 0$; $p\geqslant 0$. Доказать, что для любых натурвльных m и n выполняется неравенство $(1-p^n)^m+(1-q^m)^n\geqslant 1$.

(Венгрия)

4. Дано n действительных чисел a_1; a_2;...; a_n. Доказать, что

$$\min_{i\neq j}\left[(a_i-a_j)^2\right]\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)12}{n(n-1)(n+1)}.$$

(Венгрия)

5. Доказать, что

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^3}\right)>\frac{1}{2}.$$

(Чехословакия).

6. Дана трапеция $ABCD$, $BC\parallel AD$. На CD взята точка K, на AB точка L так, что $AK\parallel CL$. Доказать, что $DL\parallel BK$.

(Голландия)

7. Число x является комплексным или отрицательным тогда и только тогда, когда существуют положительные действительные числа a_0, a_1,.., a_n такие, что

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0.$$

(Чехословакия)

8. Доказать, что

$$\sqrt[3]{\frac{a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_1+a_4a_1a_2}{4}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_4}{6}};$$

(все $a_i>0$).

Эта задача предложена участником команды ГДР П. Крёгером.

9. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(2k+1)}{2n}}=n^2.$$

(Болгария)

Мы надеемся, что математические контакты, установленные с нашими сверстниками из разных стран, принесут всем взаимную пользу.

С. Белкин, В. Шварц

Команда СССР на XIV Международной математической олимпиаде. Слева направо сидят: Сергей Белкин (диплом второй степени), Владимир Бурков (диплом первой степени), Андрей Гольберг (диплом второй степени), Юрий Колмаков (диплом третьей степени); стоят: Сергей Конягин (диплом первой степени), Александр Меркурьев (диплом второй степени), переводчица команды, Александр Шаповалов (диплом третьей степени), Владимир Шварц (диплом второй степени).

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ В ВАННОЙ КОМНАТЕ

Х.Рачлис
физика в ванне

Физика вездесуща. В любом явлении природы всегда можно найти что-то такое, что уже исследовалось или исследуется физиками. Что бы человек ни сделал — сел, лег, встал, пошел — во всем этом есть повод для физического анализа. Мы непрерывно сталкиваемся с разнообразными физическими явлениями в нашей повседневной жизни и потому почти никогда не задумываемся над этими явлениями. Слишком уж они привычны и обыкновенны. Но будь мы повнимательнее и понаблюдательнее, жизнь окружила бы нас множеством любопытнейших проблем.

Многие законы физики можно изучать в школьном физическом кабинете. Там на помощь вам придут специальные приборы. Ну, а дома? Много ли физических явлений можно исследовать в домашней обстановке?

Ответ на этот вопрос дает книга Хью Рачлиса «Физика в ванне» *). Автор ее убедительно показывает, что в обычной ванной комнате можно изучать самые разнообразные физические явления — звуковые, световые, тепловые, механические, магнитные.

В этом номере нашего журнала, в разделе «Лаборатория «Кванта», мы публикуем одну из глав книги Рачлиса. Прочитав ее, вы убедитесь, что описанные в ней опыты доступны каждому.

Эксперименты, описанные Рачлисом, очень просты. Они относятся к самым основам школьного курса физики. Однако, как говорит известная пословица, лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. И конечно же, лучше хоть один раз сделать самому, чем увидеть, как это делают другие. Автор справедливо пишет:

«Увидеть самому всегда очень важно и притом по нескольким причинам.

Во-первых, именно так поступают ученые. Когда один ученый сообщает о каких-то своих наблюдениях, другие стараются повторить то, что он сделал, и проверить его наблюдения самостоятельно. Если это удается только самому автору, значит, тут что-то неладно. Явление лишь тогда принимается за достоверное, когда его наблюдают многие ученые.

Во-вторых, проверяя какую-либо идею самостоятельно, вы по ходу дела можете подметить и такие явления, о которых в книге не упоминается. Эти неожиданные наблюдения могут привести к новым открытиям, дать новые сведения. Повторяя вслед за книгой те или иные описанные в ней опыты, нужно быть очень внимательным. И тогда не исключено, что вам самим удастся сделать новые открытия».

Книга Рачлиса — первая ступенька к самостоятельным исследованиям. Она показывает, как много интереснейших проблем кроется в самых повседневных событиях. Об этом превосходно сказал сам автор в небольшом введении к своей книге.

«Нас окружает множество предметов, на которые мы не обращаем ни малейшего внимания до той поры, пока с ними не произойдет чего-либо необычайного. Если, к примеру, пепельница, мирно стоявшая на столе, вдруг сама по себе взлетит в воздух — о, тут уже, конечно, будет серьезный повод для размышлений. Как это могло случиться? Почему? Нельзя ли заставить пепельницу подниматься и опускаться по нашему желанию?

Но для того чтобы начать исследование, вовсе не обязательно ждать таких удивительных происшествий. Допустим, в один прекрасный день та же пепельница на нашем столе тихонько задребезжит. А по улице (мы слышим) в это время проезжает грузовик. С этого тоже может начаться очень интересное исследование — тех колебаний, которые вызывает грузовик, и тех условий, в которых пепельница отзывается на эти колебания.

Вот и с ванной дело обстоит точно так же. Мы наполняем ее водой. Мы входим в нее. Садимся. Вода поднимается. Она колышется и плещется. По ее поверхности пробегают волны. Вода становится грязной. В ней плавают или тонут разные предметы. Образуются мыльные пузыри. Свет поблескивает на стенках ванны и на поверхности воды. Потом мы открываем слив, и ванна опорожняется. При этом может образоваться водоворот. Все эти события, которые каждый может легко

---

*) Х. Рачлис, Физика в ванне, М., «Мир», 1972, 96 стр., цена 23 коп.

наблюдать, влекут за собой вопросы, а каждый вопрос может вырасти в целое исследование».

В самом деле — разговор начинается с явлений, которые каждый постоянно видит в ванной,— а затем с логической неизбежностью выходит за ее пределы. Автор ведет нас в цирк и рассказывает о секрете «математических способностей» дрессированных собак. Он объясняет причины, по которым корпус скрипки отличен от корпуса виолончели, коротко рассказывает об остаточном магнетизме скальных пород. Магнитные свойства ванны оказываются прекрасным поводом для беседы о земном магнетизме.

В конце каждой главы приводится несколько любопытных задач, а также указываются самостоятельные исследования, которые можно провести по данной теме.

Эта книга ценна тем, что читателю не требуется знать ничего для того, чтобы понять в ней все. Ее с увлечением прочтет и школьник, только что приступивший к изучению физики, и взрослый человек, который либо не изучал этого предмета прежде, либо забыл его.

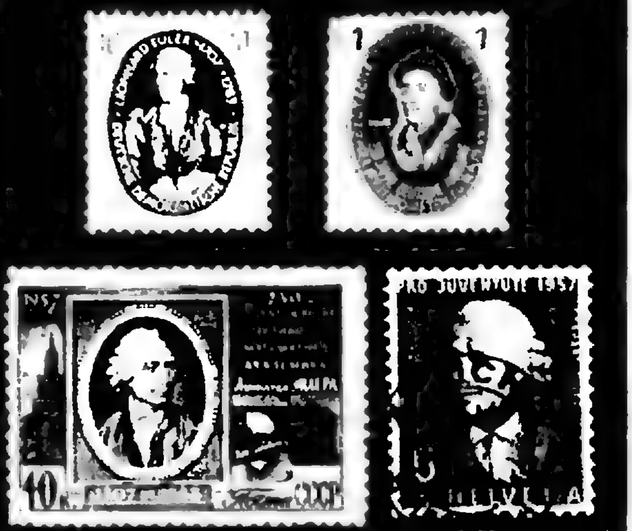
Возможно, что кое-кому из наших читателей опыты, приведенные в книге Рачлиса, покажутся слишком простыми. Ведь их основа хорошо известна из школьного курса физики, где имеются опыты и посложнее. Но они всего лишь описаны, часть из них продемонстрировал вам учитель, и весьма немногое вы выполняли сами на уроках и в школьном кабинете физики. Здесь же вам предоставляется возможность неторопливо понаблюдать и подумать самим.

Прочитав эту книгу, вы не пожалеете о потраченном на нее времени. А закрыв последнюю страницу, вы увидите, что такой же занимательной физической лабораторией может стать кухня, двор, река, лес, проселочная дорога.

В. А. Лешковцев

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ЛЕОНАРДУ ЭЙЛЕРУ



Леонард Эйлер (1707—1783) — крупнейший и самый продуктивный математик и механик XVIII века. Его исследования охватили все области математики и ее приложений. Наряду с математикой главной сферой его творчества была механика. Множество теорем, формул и методов увековечили имя Эйлера. За свою жизнь он написал около 800 основополагающих работ. Среди его трудов немало работ, посвященных астрономии, оптике, расчетам наиболее правильных конструкций телескопов, микроскопов и даже обычных очков (см. статью на стр. 31—33).

Первая марка с портретом Леонарда Эйлера вышла в Германской Демократической Республике в 1950 г. в серии, посвященной 250-летию Берлинской Академии наук. Затем три марки с портретом Эйлера вышли в 1957 г. к 250-летию его рождения. На одной из них, выпущенной на родине Эйлера в Швейцарии, изображен его портрет, а с левой стороны приведена одна из выведенных им формул. На другой, выпущенной в Советском Союзе, портрет Эйлера изображен на фоне Петербургской и Берлинской Академий наук, членом которых он являлся. Третья марка выпущена Германской Демократической Республикой в серии «Выдающиеся ученые». Все эти марки вы видите на фото.

А. И. Алинкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Клетчатые доски и полимино»

1. Если m и n нечетны, то доска $m \times n$ не имеет ни одной хорошей пары клеток.

Пусть mn четно. Устроим на доске шахматную раскраску. Пары разноцветных клеток — и только они! — являются хорошими парами клеток.

2. Если m и n нечетны, то заведомо выиграл первый играющий.

Пусть хотя бы одно из чисел m, n четно. Уложим доску домино. Теперь нетрудно заметить, что второй играющий может выиграть вне зависимости от игры первого; для этого ему достаточно после каждого хода первого играющего зачеркивать вторую клетку того домино укладки, клетку которого зачеркнет первый играющий.

3. а) Легко заметить, что n должно быть четным. Используя шахматную раскраску, можно показать, что необходимым условием возможности укладки является

$$n \equiv 0 \pmod 4).$$

Используя рисунок 1, легко показать, что это условие и достаточно.

б) Ответ не изменится: n любое число, кратное четырем.

4. а) Легко заметить, что n должно быть четным. Используя столбцевую циклическую раскраску в два цвета, можно показать, что необходимым условием возможности укладки является

$$n \equiv 0 \pmod 4)$$

С помощью рисунка 2 легко показать, что это условие и достаточно.

б) Ответ не изменится. n — любое число, кратное четырем.

5. а) Ответ: хотя бы одно из чисел m, n кратно k. (Указание: для решения задачи можно использовать любой из методов, использованных в статье при решении задачи 1).

б) Нет: либо оба цилиндра можно уложить k-мино, либо оба нельзя.

6. а) Будем считать, для определенности, что для изготовления листа Мебиуса из доски $m \times n$ мы склеили противоположные стороны длины m; тогда лист Мебиуса можно уложить линейным k-мино, если из чисел m, $2n$ хотя бы одно кратно k и только в этом случае. (Указание: для решения задачи можно использовать любой из методов, использованных в статье при решении задачи 1.)

б) Может при любом четном k, за исключением $k = 2$. Для того чтобы ровно один из двух листов Мебиуса можно было уложить линейным k-мино, необходимо и достаточно, чтобы ровно одно из чисел $2m$, $2n$ было кратно k.

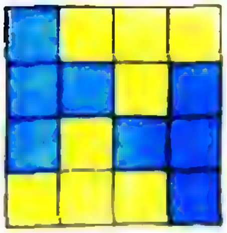


Рис. 1.

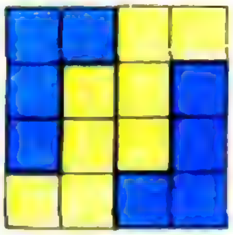


Рис. 2.

К статье «CETI в вопросах и задачах»

Если числа, выражающие расстояния между импульсами, записать в двоичном виде, одно под другим, получим

$$\begin{aligned}7645 &= 1110111011101\\ 4361 &= 1000100001001\\ 4553 &= 1000111001001\\ 4361 &= 1000100001001\\ 7625 &= 1110111001001\end{aligned}$$

Если теперь стереть нули, то получим.

```
111 111 111 1
1   1    1  1
1   111  1  1
1   1    1  1
111 111  1  1.
```

то есть название конференции, о которой говорилось в начале статьи.

К статье «Расстояния между скрещивающимися прямыми»

1. $\dfrac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha \cos^2\beta}}$.

2. $\dfrac{3a}{7}$.

3. $\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

К статье «Международная математическая олимпиада школьников»

Первая задача легко решается, если применить принцип Дирихле. После олимпиады многие участники советской команды исследовали возможность решения задачи для меньшего количества чисел. Для 8 чисел С. Конягиным был построен пример, для которого утверждение задачи не выполняется. Для 9 чисел задача не была решена.

Вторую задачу большинство учащихся решало следующим путем: разбивали данный четырехугольник на трапецию и четырехугольник с углами, равными данным. Затем от трапеции отсекали равнобочную тра-

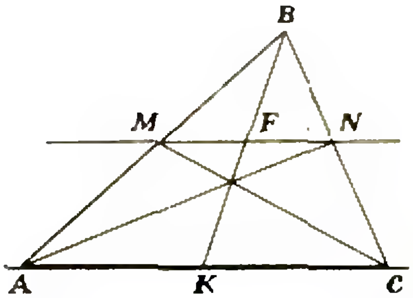


Рис. 1.

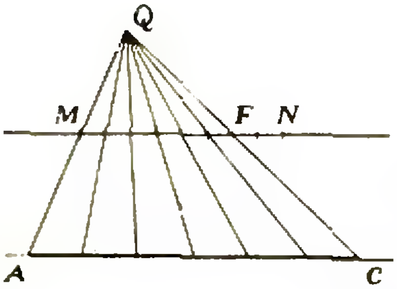


Рис. 2.

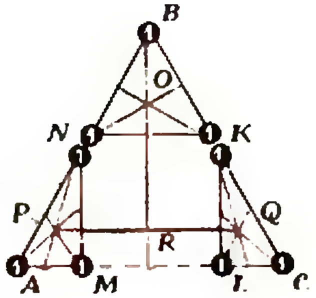


Рис. 3.

пецию и трапецию, которую легко разбить на 2 четырехугольника, около каждого из которых можно описать *окружность*.

Четвертая задача имеет много различных решений, причем задача упрощается, если заметить, что система неравенств не изменяется при циклической перестановке неизвестных, и что каждому решению системы соответствует второе решение, *получаемое* перестановкой $y_i = \frac{1}{x_i}$, такое, что если $x_i = x_j$, то $y_i < y_j$ и если $x_i \quad x_j$, то $y_i \quad y_j$.

Пятую задачу можно решить построением неограниченно возрастающей последовательноти $f\,|(x_n)|$. Она имеет *более* простое решение, если пользоваться понятием верхней грани.

Шестая задача — вычислительного *характера. Ее можно* решать вычислив расстояния от одной из данных плоскостей до одной из вершин тетраэдра, в зависимости от угла наклона грани тетраэдра, в которой находятся остальные его вершины, к данным четырем параллельным плоскостям.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(См. «Квант» № 10, 3-я стр. обл.)

1. Проводник — абориген.

2. Нет. Указание. После каждого хода цвет поля, на котором оказывается конь, меняется.

3. 64 года. Указание. $1936 = 44^2$.

4. Указание. Когда человек делает рукопожатие, то его партнер также делает *рукопожатие*. Поэтому общее число всех совершенных рукопожатий $2+2+\ldots+2$ — число четное. Рассмотреть это число как сумму двух чисел: рукопожатий, совершенных людьми, сделавшими четное число рукопожатий (оно четно) и людьми, сделавшими *нечетное число* рукопожатий (получается, что и оно четно).

5. $9801 : 1089 = 9$.

К «Задачам», помещенным в «Кванте» № 10 *(стр. 30)*

1. $n = 36$.

2. Лемма. Пусть даны 2 параллельные прямые, тогда любой отрезок на одной из этих прямых можно разделить на n частей (n — натуральное).

Доказательство. Схема деления отрезка на 2 части показана на рисунке 1 *(проверьте)*. Теперь мы можем делить отрезок на 2^m частей (для этого каждую половинку делим пополам и т. д.). Чтобы разделить AC (рис. 2) на n частей, разделим MN на 2^m частей, где $2^m \geqslant n$. Отсчитаем от точки M n отрезков (отрезок MF) и *продолжим* AM и FC *до пересечения в точке* Q. Остальное очевидно.

Решение задачи. Распределим веса так, как показано на рисунке 3, то есть будем считать, что в точках N и K 2 независимых веса в 1 *кг*. Легко найти центры тяжести *треугольников* AMN, KLC и BNK (точки пересечения медиан). Теперь в точке $R (PR = RQ)$ расположен вес 6 *кг*, в точке O — вес 3 *кг*. Осталось разделить OR на 3 части.

3. Применить инверсию.

Окончание списка читателей, *правильно* решивших задачи Ф138, Ф140—Ф142, Ф145—Ф147 (см. «Квант» № 10, 1972 г.).

А. Соколовский (Кривой Рог) **Ф142**, **Ф147**; *М. Султангалиев* (с. Ваныш Башкирской АССР) **Ф140**; *О. Саакян* (Ереван) **Ф140**, **Ф142**; *Ф. Симакин* (Новокузнецк) **Ф142**; *Е. Соколов* (Тула) **Ф145**; *Л. Степанов* (Тбилиси) **Ф147**; *Казимир Сальва* (Варшава, Польша) **Ф147**; *В. Сафонов* (Алма-Ата) **Ф141**; *В. Терентьев* (Павлово *Горьковской обл.*) **Ф147**; *О. Торонов* (Оренбург) **Ф145**; *О. Трунов* (Джалал-Абад) **Ф145**; *Д. Фишман* (Черновцы) **Ф147**; *А. Фролов* (Москва) **Ф142**; *Г. Фрадин* (Днепропетровск) **Ф142**; *Г. Фурман* (Черновцы) **Ф138**, **Ф145**; *М. Хусанков* (Чистополь Татарской АССР) ***Ф147***; *И. Хвостанцев (Москва)* **Ф145**; *С. Холодков* (Калуга) **Ф147**; *М. Хорошин* (Чернигов) **Ф147**; *В. Чубов* (Армавир) **Ф142**; *А. Шарников* (Москва) **Ф146**; *В. Шапкин* (Октябрьский Башкирской АССР) **Ф142**; *Р. Шигапов* (Люберцы Московской обл.) **Ф141**, **Ф142**; *И. Юрченко (Киев)* ***Ф138***.

К задаче «Несостоявшийся обед»

(См. стр. 21, 39)

Дорофей Мартьяныч мог пригласить пятерых гостей: Никодима Гавриловича, Клеопатру Ивановну, Порфирия Аполлинариевича, Розалию Леопольдовну и Акакия Акакиевича.

КВАНТ

для младших школьников

1. 9 одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких книг — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна книга?

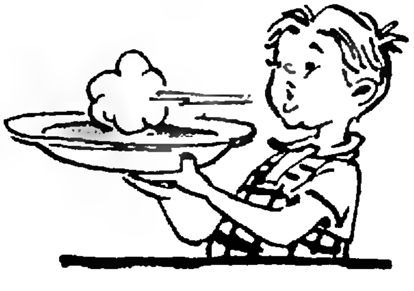
2. У вас есть пружинные весы (динамометр), рассчитанные максимум на 200 н, а вам надо взвесить чемодан, который примерно в 1,5 раза тяжелее. Можете ли вы это сделать? Как?

3. Я отпил треть стакана черного кофе и долил его молоком, потом я выпил четверть стакана и снова долил молоком, затем отпивал $^1/_5$, $^1/_6$ и $^1/_7$ стакана и каждый раз доливал его молоком. В другой раз я отпил $^1/_7$ стакана кофе и долил его молоком, затем отпил $^1/_6$ стакана и снова долил молоком, и так далее до $^1/_3$ стакана. В какой раз я выпил больше кофе?

4. Почему чай или кофе остывают быстрее, если на них подуть?

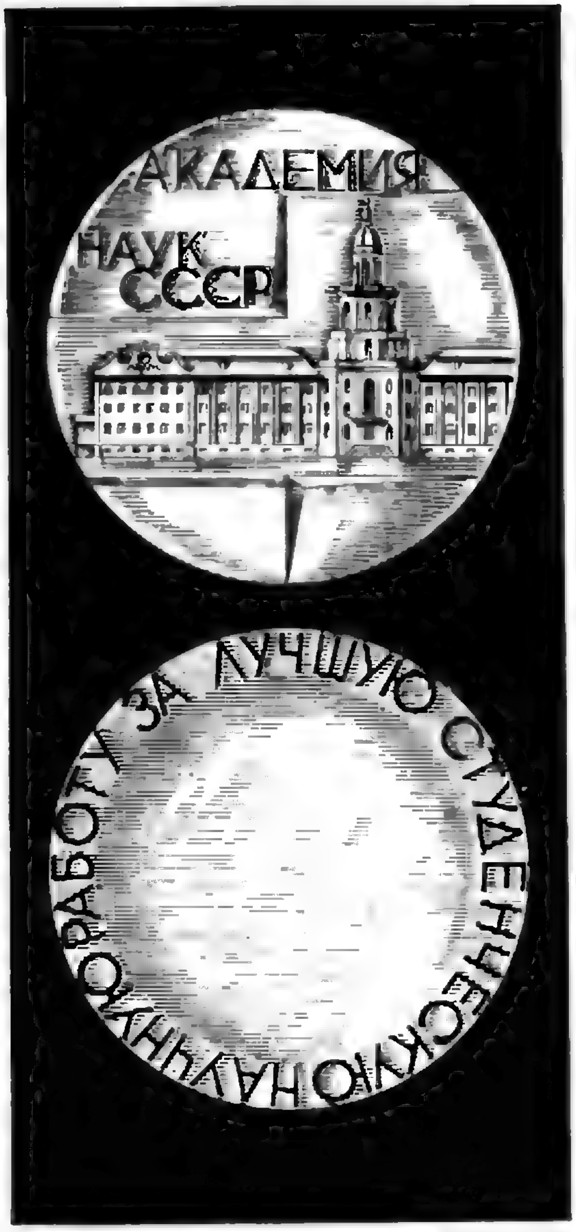
5. Любую ли сумму из целого числа рублей, большего семи, можно уплатить без сдачи денежными билетами в 3 и 5 рублей?

6. В Средней Азии, где летом очень жарко, многие носят именно летом теплые ватные халаты. Как вы думаете, жарче ли в таком халате, чем в легком платье?



Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 11



МЕДАЛИ АКАДЕМИИ НАУК СТУДЕНТАМ

Для дальнейшего повышения активности студентов высших учебных заведений в проведении самостоятельных научных исследований Президиум Академии наук СССР принял решение об учреждении медалей Академии наук с премиями за лучшие студенческие научные работы в области естествознания, технических и гуманитарных наук. Ежегодно будут присуждаться 5 медалей с премиями размером 200 рублей каждая. К рассмотрению принимаются не более 15 работ из числа участвовавших во Всесоюзном конкурсе на лучшую научную работу студентов вузов. Этот конкурс ежегодно проводится Министерством высшего и среднего специального образования СССР и Центральным комитетом ВЛКСМ. Решения Президиума Академии наук СССР о присуждении медалей с премиями публикуются в «Вестнике Академии наук СССР», «Вестнике высшей школы» и «Комсомольской правде». Медали и дипломы о присуждении медалей вместе с премиями вручаются на годичном Общем собрании Академии наук СССР.

Мы приводим здесь фотографии макета новых медалей Академии наук СССР.

НОМЕР
12

КВАНТ

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

12
ДЕКАБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

4 Триумф великой идеи

6 Творец новой геометрии — *Б. А. Розенфельд, А. Я. Халамайзер*

16 С законом Гука на острова Новые Гебриды — *А. А. Дозоров*

19 Экспонента — *С. Д. Осятинский, Л. З. Румшиский*

26 С метром по глобусу — *А. Б. Шварцбург*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

34 Задачи **М176—М180; Ф188—Ф192**

36 Решения задач **М135—М140; Ф153—Ф158**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

49 Иррациональные неравенства — *Е. М. Гершунов*

51 О некоторых иррациональных уравнениях — *В. М. Розентуллер*

53 Гидростатика — *Л. Г. Асламазов*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

61 50 занимательных задач — *А. Н. Виленкин, Л. Г. Лиманов*

62 Рассказ о великих экспериментах — *И. М. Зорич*

ИНФОРМАЦИЯ

65 III Математическая олимпиада МЭСИ — *И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин*

66 Олимпиада МФТИ-72 — *А. П. Савин*

68 Нам пишут — *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

70 Марки, посвященные 50-летию образования СССР — *А. В. Алтыкис*

71 Создатели неевклидовой геометрии — *А. В. Алтыкис*

72 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

76 Напечатано в 1972 году

79 Анкета

ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ДЕКЛАРАЦИИ И ДОГОВОРА ОБ ОБРАЗОВАНИИ СССР

(Постановление)

Съезд Советов Союза Советских Социалистических Республик, рассмотрев проект Декларации об образовании Союза ССР и заключенный полномочными делегациями, избранными съездами Советов РСФСР, УССР, ЗСФСР и БССР, Союзный договор, постановляет:

1. Декларацию и Союзный договор в основном утвердить.

2. Ввиду чрезвычайной важности принятой Декларации и заключенного договора и желательности выслушать окончательные мнения всех входящих в Союз республик о тексте настоящего договора, передать Декларацию и договор на дополнительное рассмотрение ЦИК союзных республик с тем, чтобы отзывы союзных республик были представлены ЦИК Союза ССР к ближайшей очередной его сессии.

3. Поручить ближайшей очередной сессии ЦИК Союза ССР рассмотреть полученные отзывы, утвердить текст Декларации и Союзного договора и немедленно ввести его в действие.

4. Поручить ЦИК Союза ССР подготовить ко II Съезду Советов Союза окончательный текст Декларации и Союзного договора и представить его на окончательное утверждение II Съезда.

[30 декабря 1922 г.].

ТРИУМФ ВЕЛИКОЙ ИДЕИ

Большинство граждан нашей великой Родины, в особенности молодежь, с детства привыкли к тому, что они родились и живут в Советском Союзе.

Изредка мы произносим полное название нашей страны, родившееся 50 лет тому назад: **Союз Советских Социалистических Республик.** Не всегда мы задумываемся над глубоким смыслом этого названия и над величием самой идеи об образовании этого Союза. Между тем идея образования Советского Союза — это великая идея.

Автор этой идеи — **Владимир Ильич Ленин.**

Читатели «Кванта» знают, что в области физико-математических наук великими называются идеи, преобразующие основы науки (например, квантовая теория, теория относительности). Что же сказать о научной идее, которой было суждено преобразовать мир?

Ее осуществление привело к кардинальному решению одной из самых жгучих мировых проблем, которая называется национальным вопросом.

В течение многих веков мир раздирался, а капиталистический мир и поныне раздирается националистическими противоречиями. Научный анализ этой проблемы, произведенный В. И. Лениным на основании мирового опыта общественного развития и опыта Великой Октябрьской Социалистической революции, показал, что для вражды между отдельными национальностями нет никаких глубоких принципиальных причин.

Национальная рознь — это порождение реакционного общественного строя, будь то рабовладельческий, феодальный или капиталистический строй.

Капиталистический строй служит питательной средой для развития ультрареакционных «теорий» национальной или расовой исключительности. Именно эти «теории» были приняты на вооружение германским фашизмом.

Ленинская теория национального вопроса, в противовес буржуазно-националистической идеологии, исходит из того, что нет никакой национальной или расовой исключительности. Великий физик XX столетия, создатель теории строения атома Нильс Бор глубоко интересовался национальным вопросом. Он иллюстрировал отсутствие национальной исключительности следующим простым примером. Если, утверждал Н. Бор, русского ребенка в грудном возрасте переселить на постоянное жительство во Францию, то, выросший там, он по своему духовному облику, по привычкам и поведению не будет отличаться от коренного француза.

Точно так же и французский ребенок, выросший в России, не будет отличаться от коренного русского.

Национальность здесь ни при чем — все определяется общественной средой, в которой человек воспитывается.

Ленин решительно отстаивал идею **равноправия** всех наций и народностей, показав одновременно, что осуществление такого рода равноправия возможно только в социалистическом обществе.

Образование Союза Советских Социалистических Республик было практическим воплощением этой идеи.

Полувековой опыт существования и развития Советского Союза — это триумф учения Ленина о национальном вопросе.

Одной из наиболее ярких иллюстраций успешного решения национального вопроса может служить развитие науки в республиках Советского Союза.

На месте отсталых феодальных и полуфеодальных окраин царской России, где подавляющая часть населения была неграмотной, выросли многочисленные города, ставшие крупными научными центрами. Научные центры имеются теперь во всех союзных республиках. Многие научные институты в республиках пользуются мировой известностью. Они оснащены самым современным оборудованием. Во многих республиках СССР имеются атомные реакторы. Один из лучших в мире атомных реакторов, предназначенных для физических исследований, построен в Грузинской ССР. Один из лучших в мире ускорителей электронов находится в Армении.

В физических институтах Казахстана, Узбекистана проводятся важные для науки и народного хозяйства исследования.

Во всех союзных республиках имеются республиканские академии наук, объединяющие крупных ученых.

Ряд союзных республик стали местом, где собираются международные научные съезды и симпозиумы.

Ученые союзных республик снискали себе мировую славу. Многие международные союзы ученых возглавляются советскими учеными. Понятно, что все это привело к тому, что советская наука вообще оказывает огромное влияние на развитие науки во всем мире.

Свидетельством этому служит, например, тот факт, что большое число советских научных журналов переводится на иностранные языки.

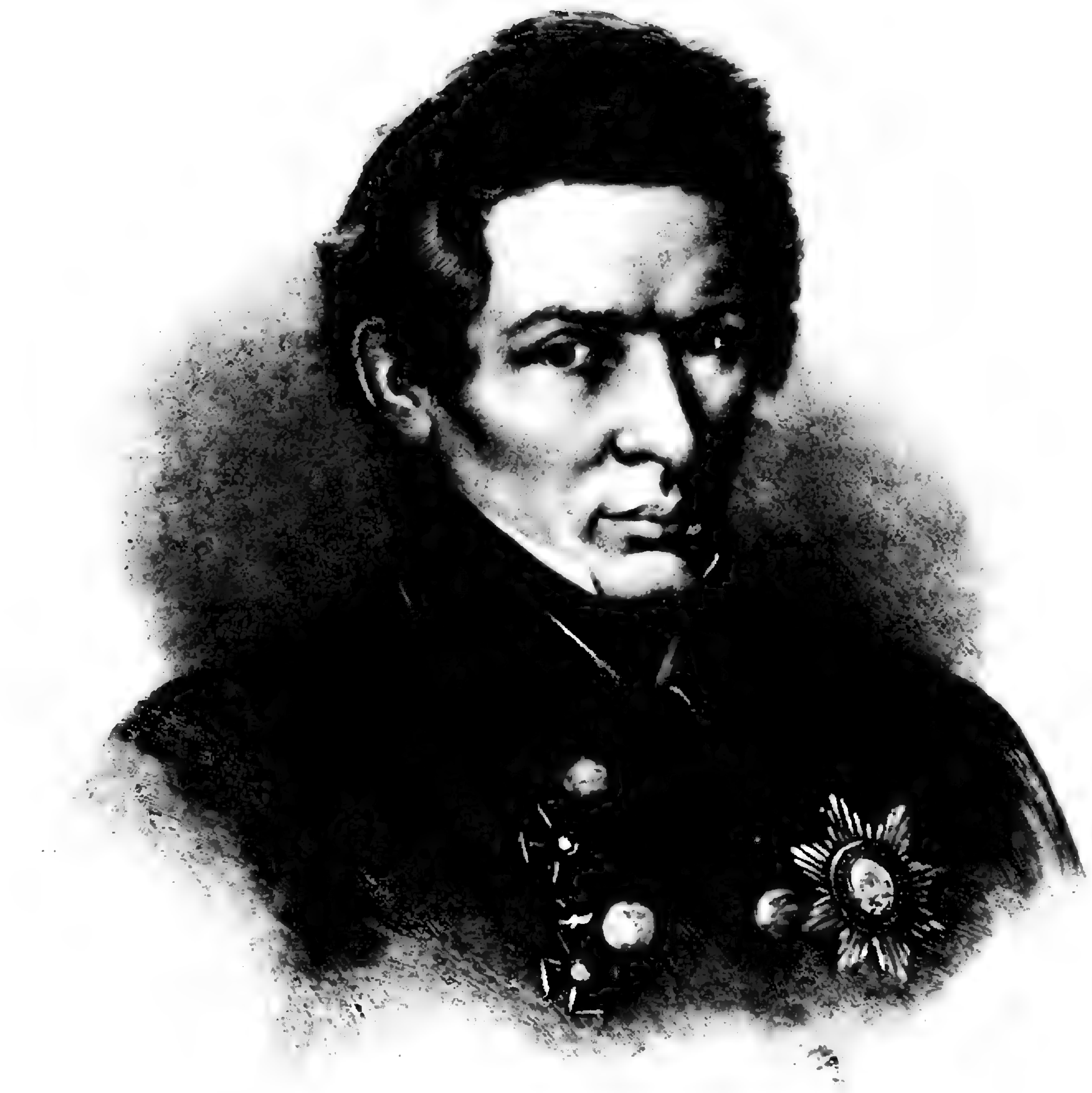
Читателям «Кванта» известно, что всесоюзные олимпиады школьников проходят в городах ряда союзных республик. Участники этих олимпиад на собственном опыте ощутили дружественные отношения к себе со стороны своих товарищей самых разных национальностей.

Мы привыкли к такому положению вещей, и мы воспринимаем все это как должное.

Но нужно помнить, что путь к этому «должному» не был легким и простым. Советскому народу, Коммунистической партии на этом пути пришлось преодолеть немалые трудности, связанные с экономической и культурной отсталостью, бороться против попытки контрреволюции использовать в своих целях наследие прежней национальной вражды. И в этой борьбе советский народ вышел победителем.

Теперь советский опыт создания многонационального социалистического государства получил мировое признание и служит примером для борцов за социализм и национальное освобождение во всем мире.

Вот почему 50-летний юбилей Советского Союза празднуют не только народы нашей страны, но и все прогрессивное человечество мира.



Н. И. Лобачевский

(1792 — 1856)

ТВОРЕЦ НОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Б. А. Розенфельд,
А. Я. Халамайзер

К 180-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского

— Каждый из них произвел революцию в научных идеях, — сказал английский ученый Вильям Клиффорд о Копернике и Лобачевском, — и обе эти революции имеют одно и то же значение. Это революции в нашем понимании космоса.

Неевклидова геометрия, открытая Николаем Ивановичем Лобачевским, нанесла первый удар вековечным идеям незыблемости геометрических законов, сформулированных Евклидом. Затем последовал новый удар: известный опыт Майкельсона по определению скорости света. И наконец, теория относительности Эйнштейна окончательно разрушила представления ученых об абсолютности пространства. Нет абсолютного пространства, одинакового для всех, сказал Эйнштейн, так же как нет и абсолютного времени, одинакового для всех.

И как Солнечная система Коперника объяснила загадку мироздания, мучавшую астрономов, так и геометрия Лобачевского решила проблему, над которой веками бились геометры.

— Задача, которую решил Лобачевский, была задачей, которую ставили на очередь математика и философия того времени, — говорил профессор А. В. Васильев, председатель Казанского физико-математического общества. — Чтобы усмотреть эту задачу, нужна была гениальность Гаусса и Лобачевского, нужны были настойчивость и трудолюбие нашего знаменитого соотечественника. Для нас всегда останется предметом высокой патриотической гордости, что эту задачу решил ученый, живший в Казани, вдалеке от центров умственной жизни.

1 декабря 1792 года у мелкого нижегородского чиновника Ивана Максимовича Лобачевского родился сын, «коего при святом крещении нарекли Николаем». Десять лет спустя Николая вместе с братьями Александром и Алексеем зачислили на казенное разночинское содержание в Казанскую гимназию.

Уже в гимназии проявились незаурядные способности Николая к наукам вообще, к математике и физике в частности. Немалую роль в развитии таланта Лобачевского сыграл молодой преподаватель Г. И. Карташевский.

С 1807 года Николай — студент Казанского университета. Профессора удивляются легкости, с которой он воспринимает науки, их поражают способности пятнадцатилетнего юноши, оригинальность его мышления. Николай становится «гордостью университета». Но мальчишка остается мальчишкой: то он запускает ракеты, то едет по городскому саду верхом на корове, то на спор перепрыгивает через полного и страдающего одышкой профессора Никольского. Он «являет признаки безбожия». Это серьезное преступление обсуждается на совете университета, вольнодумца собираются отдать в солдаты. Лишь заступничество профессоров Литтрова и Бартельса спасает талантливого юношу от солдатской шинели.

В 1811 году после блестящего окончания университета Лобачевский — магистр *), с 1814 года он — адъюнкт *), а с 1816 — профессор.

---

*) Магистр, адъюнкт — младшие ученые степени в Российских университетах (до 1863 года).

В ноябре 1820 года его избирают деканом физико-математического факультета, в 1827 году — ректором университета. На этом посту Лобачевский оставался почти 20 лет.

В течение многих лет Лобачевский заведовал библиотекой университета, подбирал и закупал учебную и научную литературу. С 1822 года он был членом, а с 1825 года — председателем строительного комитета. Не довольствуясь приглашением лучших архитекторов того времени, Лобачевский сам серьезно изучал архитектуру. Под его руководством были построены и реконструированы многие учебные здания, библиотека, астрономическая обсерватория, клиника, типография.

В тяжелое время пришел Лобачевский к руководству университетом. Многие профессора прочно стояли на позициях божественного сотворения мира.

— ... Из святого писания открывается, что свет солнечный есть отблеск лика божьего. А как он распространяется, через волнение или другим образом, о том святое писание ясно не говорит. Согласнее со святым писанием думать, что свет есть орган, через который господь, живущий в мире неприступном, посылает в мир подлунный духа своего...— записано в тетради одного из профессоров.

По этой тетради читались лекции студентам!

— Гипотенуза, милостью божией, — начинал лекции по геометрии профессор Никольский. Так его и прозвали студенты: «Гипотенуза милостью божией».

Недавний попечитель учебного округа мракобес М. Л. Магницкий, пытавшийся (но, к счастью, не сумевший) добиться закрытия университета, составил особую инструкцию, обязывающую должностных лиц доносить о всякой «крамоле»; 9 передовых профессоров были изгнаны.

Лобачевский считал, что школа и университет должны давать молодым людям знания, определенные моральные устои, делать их полезными и жизнерадостными членами общества. Уже через год после вступления в должность, 17 июля 1828 года ректор Лобачевский произносит свою знаменитую речь «О важнейших предметах воспитания».

— В это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов, без всякой мысли. Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено праздным умом... Спрашивайте природу! Она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать непременно и удовлетворительно.

Новому ректору удалось избавить университет от бездарных преподавателей, считавших солнечный свет отблеском лика божьего. Вскоре был учрежден печатный орган — «Ученые записки Казанского университета», издающийся и по сей день. Казанский университет становится первоклассным учебным заведением.

В архивах университета сохранилось прошение Л. Н. Толстого о разрешении допустить его к приемным экзаменам. Здесь учились знаменитые химики Зинин и Бутлеров. Позднее университет закончил Илья Николаевич Ульянов. А в конце XIX века студентом Казанского университета становится Владимир Ильич Ульянов—Ленин.

Жарким летом 1830 года к Казани приближалась холера. Еще только прослышав о ней, многие жители уезжали из города; оставшиеся запасались продуктами и старались не выходить за ворота. Но опасность была уже близка.

Первые же случаи заболевания насторожили Лобачевского. Он распорядился:

— те и другие ворота — на запор;

— вдоль заборов — охрану;

— впускать — только с его разрешения и после окуривания хлором;

— химикам — заготовить хлор и хлорную известь.

Затем Лобачевский отправился на соседнюю улицу к губернатору, барону Пирху.

— Что, холера? — удивился барон. — Из Симбирска? Но мы ждали ее, господин Лобачевский, сверху, из Нижнего Новгорода.

— Я считаю необходимым, ваше превосходительство, немедленно оцепить пристани, поставить кордоны, изолировать город... — И Лобачевский развернул перед губернатором подробный план борьбы с надвигающейся опасностью.

— Да вы что? — не дослушал Пирх. — Хотите, чтоб был холерный бунт? Город изолировать? А подати кто собирать будет? А в солдаты набирать, воевать кто будет?

Лобачевскому оставалось только распрощаться.

Срочно собравшийся совет университета передал ректору всю полноту власти. Лобачевский объявил карантин. Все студенты, преподаватели, служащие переселились на территорию университета. И все же в первые четыре дня умерло 12 человек. По приказанию ректора трупы умерших обливали хлорной известью, одежду, постель и другие личные вещи немедленно сжигали. На пятый день заболевания прекратились. За доставкой и хлорированием воды Лобачевский наблюдал лично. И хотя в городе холера выкосила чуть ли не половину населения, из 560 человек, живших на территории университета, никто больше не пострадал.

Не меньшую энергию проявил ректор и в августе 1842 года, когда в Казани свирепствовал пожар. В городе выгорели целые кварталы, от множества зданий остались груды головешек. Загорелась университетская библиотека, недавно построенная обсерватория. Лобачевский не отлучался с пожара, сам руководил спасательными работами. Обсерватория сгорела, но ценное оборудование удалось спасти; библиотеку отстояли от огня. Однако дом, принадлежавший Лобачевскому, сгорел дотла; сгорела и университетская квартира, где жил Николай Иванович; в огне погибло имущество Лобачевских и бесценные рукописи.

Заслуги Лобачевского перед Казанским университетом трудно переоценить. Рассуждение его «о важнейших предметах воспитания» оказалось весьма ценным вкладом в педагогическую науку. Но смелость суждений и прямой, независимый характер нравятся не всем. Против Лобачевского начались происки.

В 1846 году Николай Иванович был назначен помощником попечителя Казанского учебного округа, а попечителем вскоре стал малообразованный казачий генерал Молоствов, который, нимало не смущаясь, заявил министру народного просвещения Носову:

— Моему помощнику совершенно нечего делать...

Отстранение от активной административной и педагогической деятельности вызвало у Лобачевского резкий упадок сил. В 55 лет он почувствовал себя немощным и больным. Вскоре он лишился даже номинальной должности помощника Молоствова, а с нею — и жалованья. Появились материальные затруднения.

Лобачевский стал слепнуть: сказались непомерные ночные бдения в молодости. Последние годы жизни Николай Иванович не мог самостоятельно передвигаться. Но он верил в великое будущее своего открытия, жажда деятельности не покидала его: будучи слабым и больным, почти ничего не видя, он диктовал свое научное завещание — «Пангеометрию», которая вышла из печати незадолго до его смерти.

Еще в молодости Лобачевский заинтересовался основаниями геометрии и подверг критике «Начала» Евклида. Особое внимание привлек так называемый V постулат:

— Всякие две прямые, которые при пересечении с третьей образуют внутренние односторонние углы, дающие в сумме меньше двух

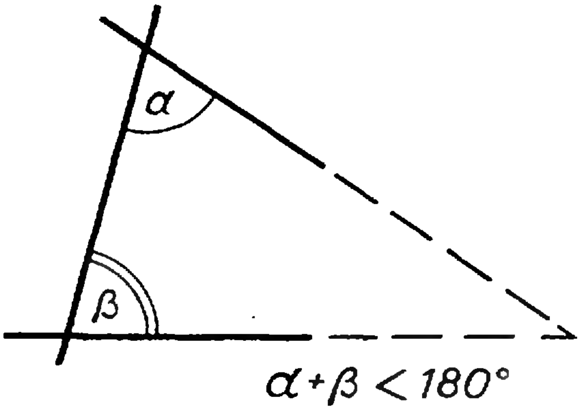


Рис. 1.

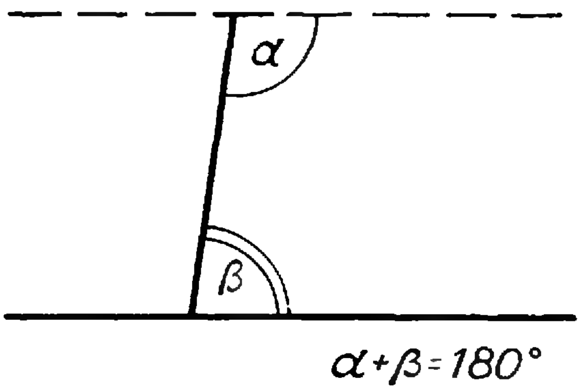


Рис. 2.

прямых, при продолжении обязательно пересекаются.

На протяжении многих веков геометры пытались доказать пятый постулат, как теорему. Но каждый из них неявно вводил какое-то «очевидное» свойство:

... Геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от прямой и лежащих по одну сторону от нее, есть прямая, — считал Посидоний (Рим, I век до н. э.).

... Две приближающиеся прямые обязательно пересекутся, — утверждал Омар Хайям (Средняя Азия, XI век).

... Для всякой фигуры можно построить ей подобную, — был убежден Джон Валлис (Англия, XVII век).

Алексис-Клод Клеро (Франция, XVIII век) строил теорию параллельных линий, основываясь на существовании прямоугольника; Фаркаш Бойяи (Венгрия, конец XVIII — начало XIX века) доказывал пятый постулат, исходя из того, что через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

Но все эти предложения оказались равносильными пятому постулату Евклида или даже более сильному постулату: через точку вне некоторой прямой можно провести в их плоскости одну и только одну прямую, не пересекающую данной. А последнее утверждение равносильно тому, что сумма углов любого треугольника составляет 180°.

Еще в 1823 году Лобачевский подготовил к печати первый составленный им курс геометрии. Пытаясь оторваться от Евклида, он построил в первой половине книги «абсолютную геометрию» — не зависящую от постулата о параллельных. Он был убежден, что геометрия, в которой верны все аксиомы Евклида, кроме аксиомы о параллельных, — непротиворечива. Важнейшую роль в этом выводе сыграло критическое отношение Лобачевского к убеждению о врожденности наших геометрических знаний: ведь из этого убеждения вытекала бы единственность геометрической системы.

Ученик великого Эйлера, академик Николай Иванович Фусс, не разобравшись в революционной сущности идей Лобачевского, дал о работе резко отрицательный отзыв. Особенно возмутило академика ... введение метра как единицы измерения длины и деление круга на 400 градусов, а не на 360.

— Сие разделение выдумано во время французской революции, — пишет Фусс в рецензии, — но сия новизна нигде принята не была по причине очевидных неудобств.

Рецензия эта ошибочна вдвойне: гениальность идей Лобачевского оказалась недоступной не только Фуссу, но и многим талантливым умам того времени, а метр прочно завоевал права гражданства.

Но разгромная рецензия Николая Ивановича Фусса не испугала Николая Ивановича Лобачевского. Он продолжает развивать свои идеи и в последующие годы делает гениальный по простоте шаг: отказывается от пятого постулата, господствовавшего в умах чуть не две тысячи лет и не вызывавшего никаких сомнений ни у предшественников, ни у современников.

Лобачевский предположил, что через данную вне прямой точку можно провести в их плоскости не менее двух прямых, которые не пересекутся с данной прямой AB.

Из этого совершенно нелепого на первый взгляд допущения Лобачевский стал делать дальнейшие выводы. И не пришел ни к какому противоречию! Более того, получил стройную, логичную геометрическую систему, законченное целое, которое он назвал «воображаемой геометрией» — по аналогии с мнимыми числами, которые он тоже называл воображаемыми; если мнимые числа — наиболее общие, для которых справедливы законы обычной арифметики, то «воображаемая геометрия» — наиболее общая геометрическая система, в которой выполняются все аксиомы Евклида, кроме аксиомы о параллельных. И как действительные числа являются частным случаем множества комплексных чисел, так и привычная геометрия Евклида является частным случаем общей геометрической системы.

«Воображаемая геометрия» существенно отличается от привычной геометрии Евклида.

Начнем с того, что сумма углов треугольника в ней всегда меньше 180°; что множество всех точек плоскости, лежащих в одной полуплоскости и равноудаленных от заданной в ней прямой — «базы», — вовсе не прямая, а особая линия, называемая эквидистантой; что через три точки, не лежащие на прямой, можно провести или окружность, или эквидистанту, или промежуточную между ними линию — «орицикл».

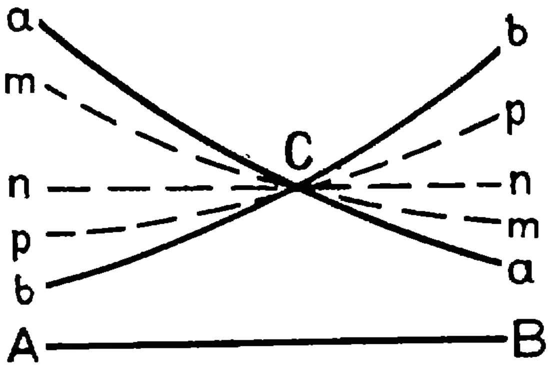


Рис. 3. Через точку C, лежащую вне прямой AB, можно, предположил Лобачевский, провести хотя бы две прямые a и b, которые не пересекутся с прямой AB (для наглядности «прямые» a и b изображены здесь в искривленном виде). Точно так же не пересекают прямую AB и прямые m, n, p, проходящие через точку C.

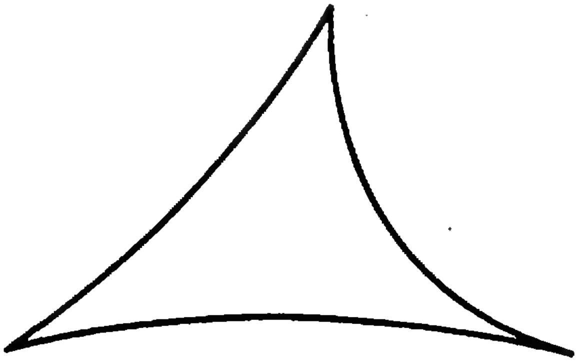


Рис. 4. Сумма углов треугольника меньше двух прямых.

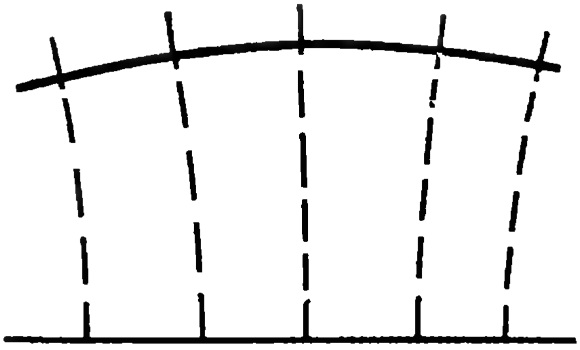


Рис. 5. Эквидистанта ортогональна всем прямым, перпендикулярным к ее базе.

Через точку, взятую внутри угла, не всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны этого угла. Наконец, в этой геометрии не существует подобных многоугольников.

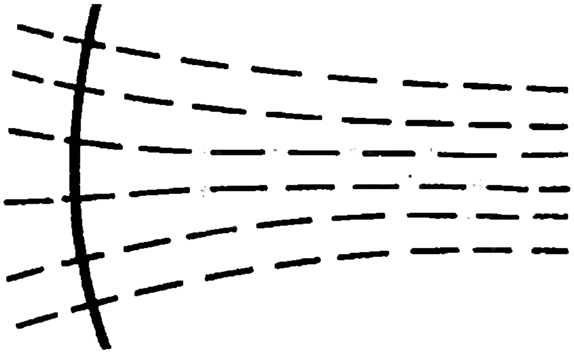


Рис. 6. Орицикл ортогонален пучку параллельных прямых.

Лобачевский рассматривал и геометрию пространства. Вращая окружность, орицикл и эквидистанту вокруг одной из ортогональных им прямых, можно получить в первом случае сферу, во втором — орисферу, в третьем — эквидистантную поверхность, то есть геометрическое место точек пространства, равноотстоящих от плоскости. Оказалось, что геометрия на сфере совпадает с геометрией евклидовой сферы, геометрия на орисфере совпадает с геометрией евклидовой плоскости, и геометрия на каждой из двух полостей эквидистантной поверхности — того же типа, что и геометрия плоскости Лобачевского.

Лобачевский нашел тригонометрические соотношения в плоских треугольниках в открытой им геометрии. Далее, он показал, что эти соотношения могут быть получены из формул сферической тригонометрии.

Геометрия Лобачевского обладает и другими свойствами, аналогичными сферической геометрии; в частности, площадь треугольника на плоскости Лобачевского выражается через его углы (в радианной мере) по формуле; совпадающей с формулой

$$S = r^2 (A + B + C - \pi)$$

для сферических треугольников, если считать радиус сферы r чисто мнимым.

Евклидову геометрию можно рассматривать как предельный случай либо сферической геометрии, либо геометрии Лобачевского при стремлении r к бесконечности. Более общий характер открытой им геометрии Лобачевский подчеркивал и названием «Пангеометрия» — «всеобщая геометрия», которое он дал ей в своей последней работе.

Установив основы новой геометрии и тригонометрические соотношения в треугольниках этой геометрии, Лобачевский ввел в этой геометрии координаты и решил большое число задач аналитической геометрии и задач на вычисление площадей и объемов, с помощью которых он впервые вычислил целый ряд определенных интегралов.

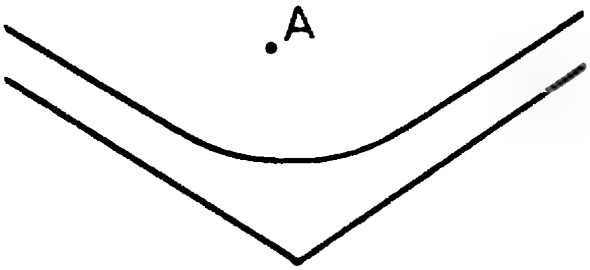


Рис. 7. Если точка A лежит по другую сторону «прямой», параллельной обеим сторонам угла, то через нее нельзя провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

Лобачевский пытался установить экспериментально, какая геометрия имеет место в реальном мире — евклидова или «воображаемая». Для этого он вычислил сумму углов треугольника, вершинами которого были две диаметрально противоположные точки земной орбиты и одна из неподвижных звезд. Найдя, что отклонение этих сумм от π не выходит за пределы ошибки наблюдения, Лобачевский пришел к выводу, что геометрию реального мира можно считать евклидовой, однако он надеялся, что отклонение суммы углов треугольников от π можно будет обнаружить при рассмотрении космических треугольников больших размеров.

Одновременно с Лобачевским неевклидову геометрию открыли еще несколько математиков. Еще в последних годах XVIII века к идее о неевклидовой геометрии пришел великий Гаусс, продолжавший заниматься этими вопросами в течение нескольких десятилетий, но не опубликовавший своих результатов. Несколько позже к геометрии Лобачевского пришел Янош Бойяи. Он изложил свое открытие в приложении к математическому сочинению отца — Фаркаша Бойяи, — опубликованному в 1832 году. Так как Гаусс не опубликовал своего открытия, а Бойяи опубликовал его позже Лобачевского, приоритет признается за Лобачевским.

23 февраля 1826 года на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета тридцатитрехлетний Лобачевский сделал доклад о своем открытии и просил рекомендовать изложенное на французском языке сочинение к опубликованию.

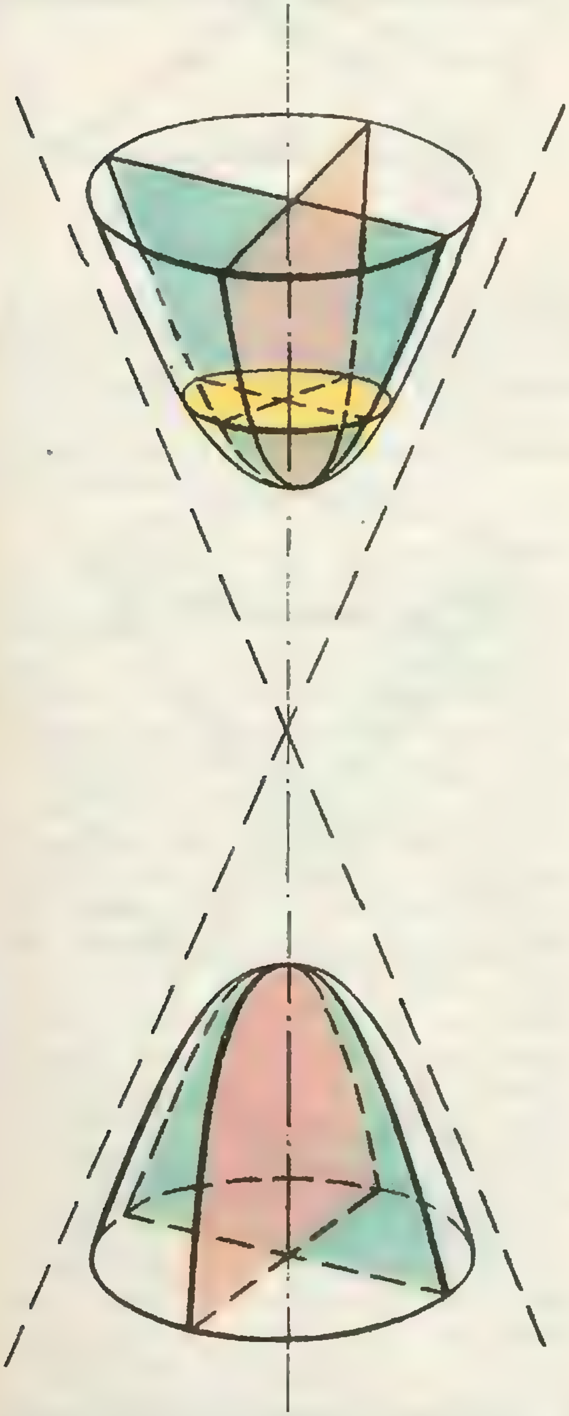


Рис. 8. На каждой из поверхностей такого гиперболоида осуществляется геометрия Лобачевского, если расстояние d между точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется формулой $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$. Пространство с определенным таким образом расстоянием между точками называется псевдоевклидовым.

Присутствовавшие на заседании не смогли разобраться в работе; была назначена комиссия из трех специалистов для детального ознакомления с представленным сочинением. Однако ни адъюнкт Николай Дмитриевич Брашман, впоследствии крупный ученый, один из создателей Московского математического общества, ни профессор Александр Яковлевич Купфер, ни старый друг и однокашник Николая Ивановича, видный ученый того времени Иван Михайлович Симонов не смогли понять глубочайшего философского значения новой геометрии. Проходил месяц за месяцем, год за годом, отзыва от ученой комиссии не поступало, и бесценная работа была сдана в архив.

Лишь в 1829 году в университетском журнале «Казанский вестник» появилось первое изложение открытия Лобачевского — статья «О началах геометрии». Еще несколько статей и мемуаров с изложением основных результатов Лобачевского было опубликовано в 30-х годах. В 1840 году Лобачевский издал в Берлине на немецком языке систематическое изложение своего открытия — книгу «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Эта книга была замечена Карлом Фридрихом Гауссом, «королем математиков» того времени. Он был единственным авторитетным человеком в мире, кто мог оценить гениальность открытий Лобачевского — и оценил их — по достоинству.

— Как мне сказали, — пишет Гаусс в 1841 году одному из своих учеников, — труды Казанского университета, написанные на русском языке, содержат массу его сочинений... Мною овладело желание прочесть побольше сочинений этого остроумного математика.

В возрасте 63 лет «король математиков» начинает изучать русский язык.

— Я начинаю читать по-русски с некоторой беглостью и извлекаю из этого большое удовольствие, — пишет позднее Гаусс.

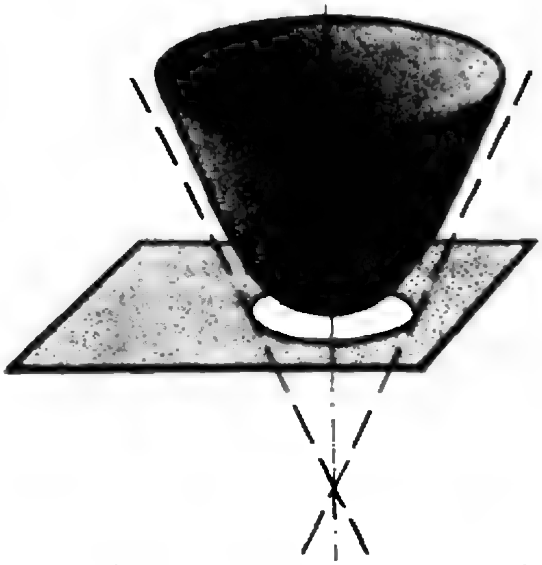


Рис. 9. Интерпретацию Бельтрами—Клейна можно получить, проектируя сферу мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве из ее центра на касательную к ней плоскость.

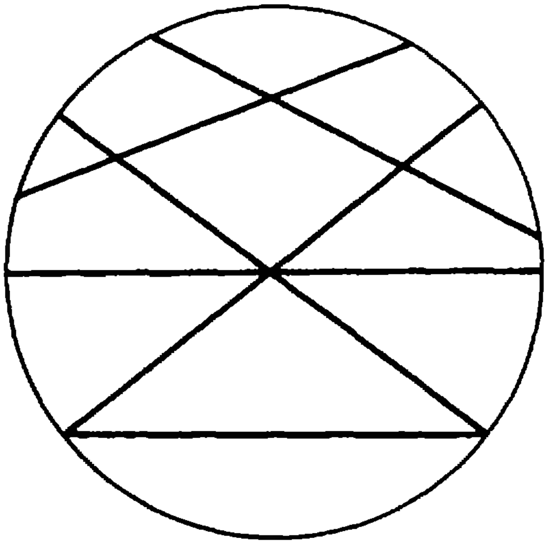


Рис. 10. В интерпретации Бельтрами — Клейна вся плоскость Лобачевского изображается внутренней областью круга; прямые изображаются хордами этого круга.

По инициативе Гаусса Лобачевский избран членом-корреспондентом Геттингенского Королевского общества. В Дипломе, присланном в Казань, его называют «одним из превосходнейших математиков русского государства». Однако и «король математиков» не выступил в печати с публичным признанием заслуг Лобачевского, ибо он боялся быть непонятым современниками. При жизни Лобачевского лишь один из его коллег — профессор Казанского университета П. И. Котельников — публично объявил о большом научном и познавательном значении его открытия.

Признание пришло лишь через несколько лет после смерти Николая Ивановича, благодаря работам Эудженио Бельтрами (Италия) и, позднее, Феликса Клейна (Германия) и Анри Пуанкаре (Франция).

В нашем «привычном» евклидовом пространстве Бельтрами нашел так называемые псевдосферические поверхности. На обложке нашего журнала изображена часть такой поверхности. На них осуществляется геометрия Лобачевского и имеют место установленные им зависимости между сторонами и углами геодезического *) треугольника, между радиусом круга и его площадью и т. п.

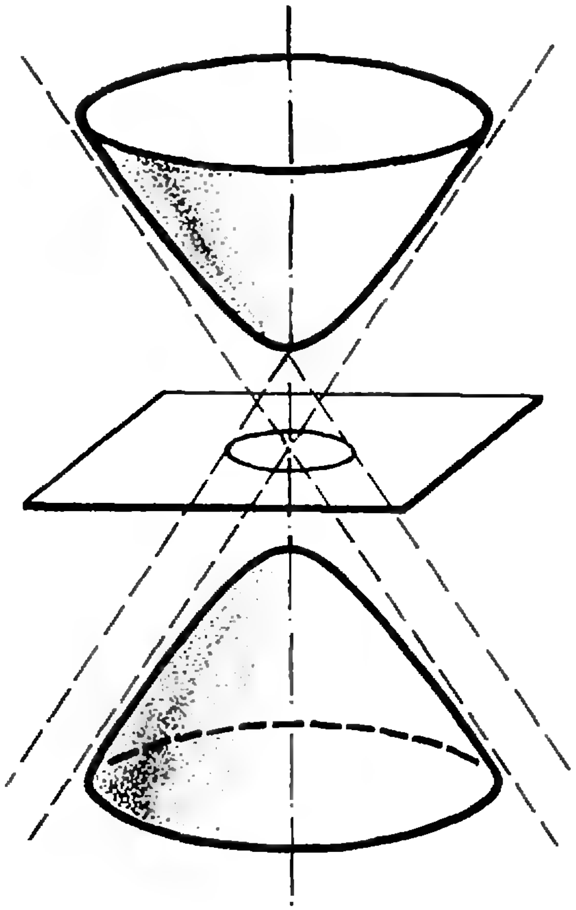


Рис. 11. Интерпретацию Пуанкаре можно получить, проектируя сферу мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве из одного ее полюса на экваториальную плоскость.

---

*) Линия, соединяющая две точки некоторой поверхности, называется на ней геодезической, если она представляет собой кратчайшее расстояние (по поверхности) между любыми двумя достаточно близкими ее точками.

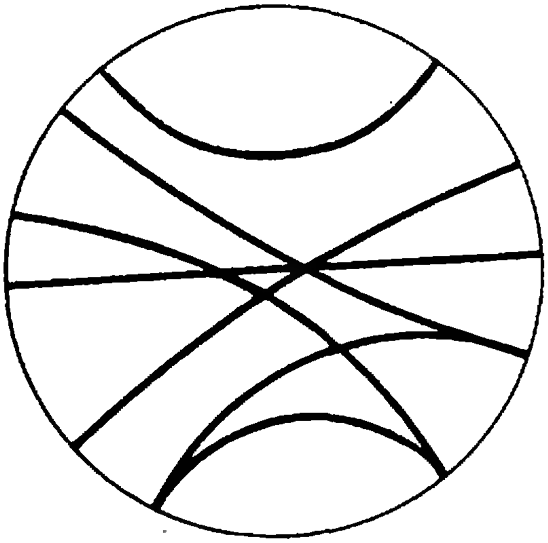


Рис. 12. В интерпретации Пуанкаре вся плоскость Лобачевского изображается внутренней областью круга; прямые изображаются дугами окружностей, ортогональными к окружности круга. Все углы сохраняют натуральную величину.

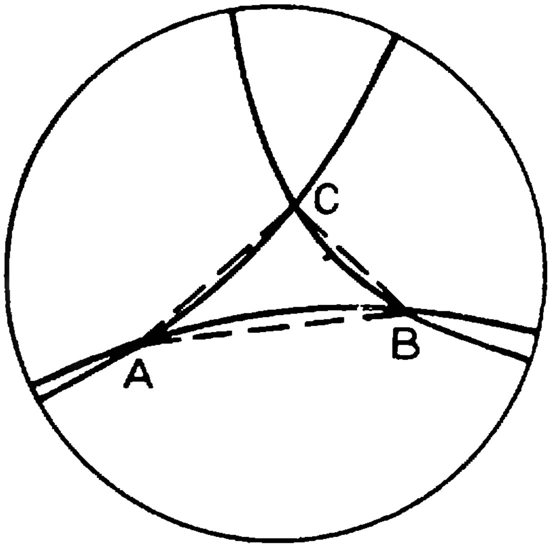


Рис. 13. Треугольник в интерпретации Пуанкаре. Ясно видно, что сумма его углов меньше 180°.

Лобачевский был автором ряда работ в других областях математики. Одни работы были связаны с его геометрией, — например, работа о вычислении определенных интегралов, работа о вероятной ошибке наблюдений при измерении суммы углов треугольника с очень большими сторонами. Другие работы относятся к алгебре и анализу: «Алгебра или исчисление конечных» (1834 г.), «Об исчезании тригонометрических строк» (1834 г.), «О сходимости бесконечных рядов» (1841 г.) и др. Лобачевский одним из первых дал общее определение функции, сформулировал понятия непрерывности и дифференцируемости функции и установил различие между этими понятиями, которые до него часто смешивали.

Но основной заслугой Лобачевского, ценнейшим вкладом в сокровищницу мировой науки является преодоление привычных и интуитивно неопровержимых представлений — отказ от пятого постулата и создание обобщенной геометрии, в которой геометрия Евклида является лишь предельным частным случаем. Тот путь, на который впервые стал Лобачевский, в значительной степени определил лицо современной математики.

— Идеи нашего гениального соотечественника, которые сто лет назад казались недопустимым парадоксом, — говорит видный советский геометр проф. П. К. Рашевский, — теперь, широко развитые и обобщенные, являются одним из краеугольных камней современной науки.

Литература

1. Александров П. С. Что такое неэвклидова геометрия. М., 1950.
2. Каган В. Ф. Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке. М. — Л., 1948.
3. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., 1953.
4. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М., 1955.
5. Яглом И. М. Геометрические преобразования, т. II, М., 1956.
6. Заботин И. П. Лобачевский. М., 1956.
7. Ливанова А. Три судьбы. Постижение мира. М., 1969.
8. Колесников М. С. Лобачевский. Серия ЖЗЛ. М., 1965.
9. Тарджеманов Д. А. Юность Лобачевского. Казань, 1968.
10. Каган В. Ф., Рыбкин Г. Ф., Лобачевский. Статья в БСЭ, т. 25.
11. Александров А. Д. Геометрия Лобачевского. Статья в БСЭ, т. 25.

С законом Гука на острова Новые Гебриды

А. А. Дозоров

Жители одного из островов архипелага Новые Гебриды довольно эффектно отмечают разные торжества *). Юноша взбирается на специально для этой цели построенную вышку, привязывает к ногам лианы, концы лиан закрепляет на вышке, а затем под ритуальный танец островитян бросается вниз. Лианы амортизируют удар, и юноша благополучно приземляется.

Высота, с которой совершаются прыжки, колеблется от 15 до 30 метров. Казалось бы, нагрузка на ноги прыгуна тем больше, чем выше вышка, чем длиннее лиана, поэтому должна существовать предельная высота, с которой можно прыгать. Однако это на первый взгляд весьма очевидное рассуждение оказывается совершенно неправильным. Правильный ответ нам поможет найти закон Гука.

Пусть длина нити в свободном состоянии равна l. Под действием некоторой силы нить растянется до длины $l+x$. Величина x называется абсолютной деформацией нити, а величину $\frac{x}{l}=\varepsilon$ называют относительной деформацией. Деформация называется упругой, если после снятия силы длина нити становится прежней. При малых упругих деформациях ($x \ll l$) величина абсолютной деформации, как правило, пропорциональна силе. Направление упругой силы, стремящейся вернуть нить в исходное состояние, и направление деформации противоположны. Все это описывается законом Гука:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}. \qquad (1)$$

Коэффициент пропорциональности k называют коэффициентом жесткости растягиваемого тела (нити, пружины).

Чем больше поперечное сечение нити, тем бо́льшую силу необходимо приложить, чтобы вызвать одно и то же удлинение нити. Другими словами, коэффициент жесткости является функцией поперечного сечения. Часто пользуются понятием напряжения материала $\sigma = F/S$. (Если стержень сжимается под действием силы F, то σ — среднее давление на торец стержня.)

Абсолютная величина относительного удлинения ε при малых дефор-

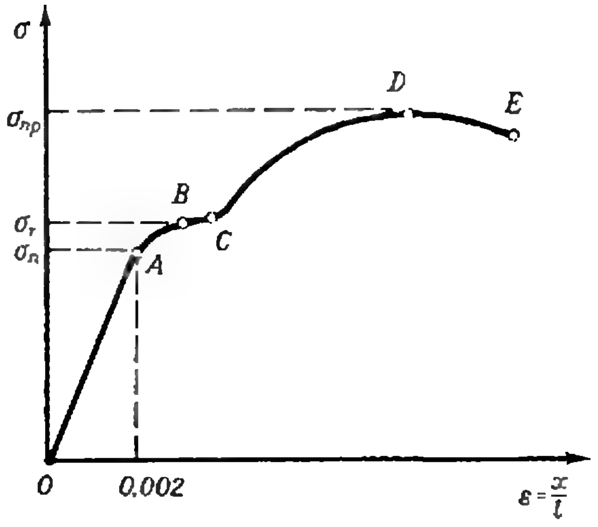


Рис. 1.

---

*) См. журнал «Вокруг света» № 12, 1971.

мациях упругих тел прямо пропорциональна абсолютной величине напряжения σ:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma. \qquad (2)$$

Это соотношение является другой формулировкой закона Гука. Коэффициент E называется модулем Юнга. Воспользовавшись соотношением (2) и учитывая, что $\varepsilon = \frac{x}{l}$, можно по-другому записать выражение для силы:

$$F = \frac{SE}{l}x. \qquad (3)$$

Сравнивая (1) и (3), получим связь между модулем Юнга и коэффициентом жесткости: $k = \frac{SE}{l}$. Модуль Юнга зависит только от материала, из которого изготовлена нить, а коэффициент k — еще и от геометрического строения растягиваемого образца. Модуль Юнга по определению численно равен силе, растягивающей нить единичного сечения в 2 раза (размерность модуля Юнга в системе СИ $\frac{н}{м^2}$).

Линейная зависимость между величиной деформации и упругой силой соблюдается для большинства материалов в очень узкой области изменения ε. На рисунке 1 показана зависимость относительной деформации стального стержня от напряжения. Характерные точки этого графика имеют следующие названия. Предел пропорциональности $\sigma_п$ (точка A) — наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука. $\sigma_п$ мало отличается от предела упругости — наибольшего напряжения, до которого имеются лишь упругие деформации. Как правило, для металлических тел деформация является упругой, если $\varepsilon \leq 0{,}002$. Предел текучести $\sigma_т$ — напряжение, при котором образец удлиняется без роста нагрузки. Для некоторых тел точки B и C почти совпадают. Предел прочности $\sigma_{пр}$ — напряжение, при котором на нити образуется шейка. Участок DE соответствует состоянию материала перед разрывом; здесь образец удлиняется за счет уменьшения поперечного сечения шейки без увеличения напряжения. Разрыв происходит в точке E.

Вернемся теперь к островитянам и попробуем рассчитать максимальное натяжение лианы. Для этого нужно решить следующую задачу.

Задача. *Груз, масса которого $m=72$ кг, подвешен на упругой невесомой нити. Найти максимальную силу натяжения нити и максимальное ускорение груза во время торможения, если груз начал падать от точки подвеса. Модуль Юнга нити $E=10^7\ \frac{н}{м^2}$, поперечное сечение $S=9$ см^2.*

Работа, которую необходимо совершить, чтобы растянуть нить на величину Δx, равна

$$\Delta A = F \cdot \Delta x.$$

Сила F изменяется пропорционально x (рис. 2). Работа, совершенная на участке Δx, численно равна площади трапеции $ABCD$.

Если нить растянута от длины l до длины $l+x$, то совершенная работа, а следовательно, и потенциальная энергия нити получаются суммированием всех элементарных работ, то

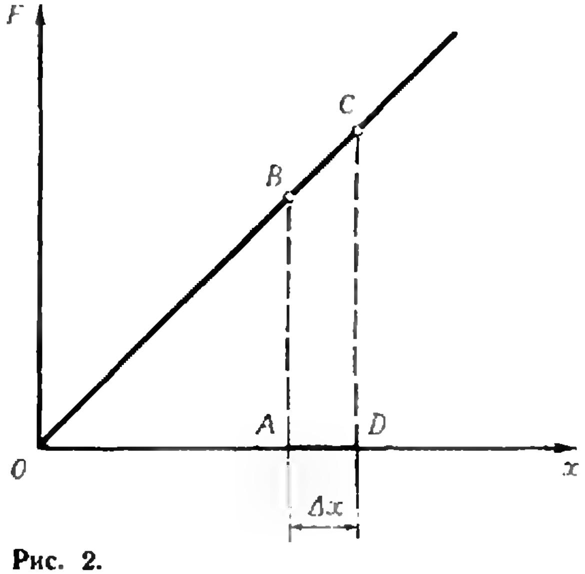


Рис. 2.

есть потенциальная энергия нити W определяется площадью треугольника OCD:

$$W = \frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (4)$$

Потенциальная энергия груза переходит в кинетическую энергию его движения, а затем в энергию деформации нити. Так как полная высота, с которой падает груз, равна $(l+x)$, то

$$mg(l+x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Отсюда удлинение нити равно

$$x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgl}}{k},$$

а максимальная сила натяжения нити $\left(\text{так как } k = \frac{SE}{l}\right)$

$$F = mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mgES}.$$

Следовательно, максимальное ускорение

$$a = g\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2ES}{mg}}\right)$$

(очевидно, оно достигается в нижней точке).

Таким образом, ни максимальная сила, ни максимальное ускорение не зависят от длины нити.

Возвращаясь к прыжкам с вышки, мы видим, что не существует критической высоты, начиная с которой перегрузки становятся недопустимыми для человеческого организма. Если нить (лиана) по упругим свойствам близка к резине (каучуку), то есть $E \approx 10^7 \frac{н}{м^2}$, поперечное сечение нити $S = 9$ $см^2$ и масса прыгуна 72 $кг$, то $a = 5g$. Такие перегрузки для человека вполне допустимы.

Роберт Гук о своем законе

Закон пропорциональности удлинения пружины приложенной силе был открыт английским физиком Робертом Гуком (1635—1703).

Гук был очень разносторонним ученым. Но он не доводил своей работы до конца, а потому до сих пор спорят — опередил ли Гук своих современников Ньютона и Гюйгенса. Но закон, который позволил определить численную величину силы, вошел в историю под названием закона Гука. Гук, в духе своего времени, называл его не законом, а теорией. Вот как Гук писал о созданной им *теории пружины*:

«...Теория пружины не была до сих пор никем опубликована, хотя разные знаменитые математики трудились над ней. Сейчас прошло уже около восемнадцати лет с тех пор, как я впервые нашел ее. Однако, намереваясь ее применить к чему-нибудь полезному, я удержался от публикации.

Спустя три года Его Величество благосклонно наблюдал опыты, испытывающие эту теорию, в Уайт-холле, а также мои пружинные часы.

Еще через два года я напечатал теорию как анаграмму в конце моей книги описания гелиоскопов: ceiiino ssttuv, то есть Ut tensio sic vis. Это значит: натяжение пружины изменится в той же пропорции, что и сила *). Итак, если одна сила вытягивает или изгибает на единицу, то две изогнут на две, три — на три и так далее. Так как теория очень короткая, то и пути ее испытания очень мелки...»

---

*) Действительно, во времена Гука теории были короткие (буквальный перевод фразы, которая заменяет всю теорию: «Каково растяжение, такова и сила»).

ЭКСПОНЕНТА

С.Д.Осятинский
Л.З.Румшиский

В этом номере мы публикуем давно обещанную статью об экспоненте (см. «Квант» № 1, 1971, 1972). В первой части статьи рассказывается о математическом определении экспоненты. По новой программе экспонента будет изучаться в 10 классе *). Поэтому целью статьи не является строгое определение всех вводимых понятий. Цель статьи значительно скромнее: объяснить, что такое экспонента и проиллюстрировать ее применение в физике. Физическим примерам и посвящена вторая часть статьи.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Показательные функции и, в частности, экспоненты встречаются во многих задачах, где скорость изменения некоторой величины пропорциональна уже достигнутому значению самой этой величины. Примером может служить прирост населения какой-либо страны: когда мы говорим, что прирост населения составляет, скажем, 2% в год, то тем самым мы утверждаем, что скорость этого прироста пропорциональна численности населения. В этом примере скорость изменения положительна. Можно привести пример и с отрицательной скоростью. Рассмотрим некоторое количество радиоактивного вещества. Распад атомов в нем совершается случайным образом, но экспериментально установлено, что среднее количество атомов, распадающихся за малый промежуток времени, пропорционально количеству имеющихся атомов. Поэтому количество рассматриваемого радиоактивного вещества убывает, и скорость убывания пропорциональна имеющемуся количеству вещества.

С математической точки зрения все процессы, подобные указанным выше, описываются одинаковым образом; к этому описанию мы и приступаем.

Обозначим через $y(t)$ *значение* рассматриваемой величины в момент времени t. Через Δy *) мы обозначим *изменение* величины y *за малый промежуток времени* Δt от t до $t+\Delta t$, то есть

$$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t).$$

Скорость изменения величины y можно приближенно представить отношением $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ **). Если для величины y скорость ее изменения в момент времени t пропорциональна достигнутому значению $y(t)$ этой величины, то мы приходим к соотношению $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky$

---

*) См. Б. Е. Вейц, И. Т. Демидов, «Алгебра и начала анализа» (пробный учебник под редакцией академика А. Н. Колмогорова), М., «Просвещение», 1971.

*) Читается «дельта игрек», Δ — греческая буква «дельта».

**) Точное определение понятия скорости требует применения предельного перехода $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$, то есть введения понятия производной.

или

$$\Delta y \approx ky \cdot \Delta t, \qquad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Этот коэффициент может быть как положительным числом (например, в процессе роста численности населения), так и отрицательным (например, в процессе радиоактивного распада). *Приближенное* соотношение (1) надо понимать в том смысле, что относительная ошибка этого соотношения убывает с уменьшением промежутка времени Δt, то есть что при стремлении Δt к нулю соотношение $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky$ становится все более точным.

Теперь поставим вопрос: какой же функциональной зависимостью можно описать процесс, обладающий свойством (1)?

Среди элементарных функций, изучаемых в школе, мы находим одну функцию, обладающую нужным свойством — это показательная функция $y = a^t$. В самом деле, изменение (или приращение) этой функции $\Delta y = a^{t+\Delta t} - a^t$ в силу основного свойства показательной функции $a^{t+\Delta t} = a^t \cdot a^{\Delta t}$ можно представить в виде произведения двух сомножителей $\Delta y = a^t\,(a^{\Delta t} - 1)$. Первый множитель a^t совпадает со значением функции $y = a^t$, а второй множитель $a^{\Delta t} - 1$ зависит только от приращения аргумента Δt. Можно показать, что при малых значениях Δt разность $a^{\Delta t} - 1$ приближенно пропорциональна Δt. Этот факт эквивалентен тому, что график показательной функции $y = a^t$ имеет касательную в точке пересечения этого графика с осью ординат (рис. 1).

Отрезок $a^{\Delta t} - 1$ приближенно равен отрезку $\Delta t \cdot \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона касательной к оси абсцисс:

$$a^{\Delta t} - 1 \approx \Delta t \cdot \operatorname{tg} \varphi, \qquad (2)$$

причем относительная ошибка приближенного равенства (2) уменьшается с уменьшением Δt и стремится к нулю при $\Delta t \to 0$ (вспомним, что касательная определяется как предельное положение секущей). Приближенное равенство (2) остается справедливым и для отрицательных значений Δt, малых по абсолютной величине.

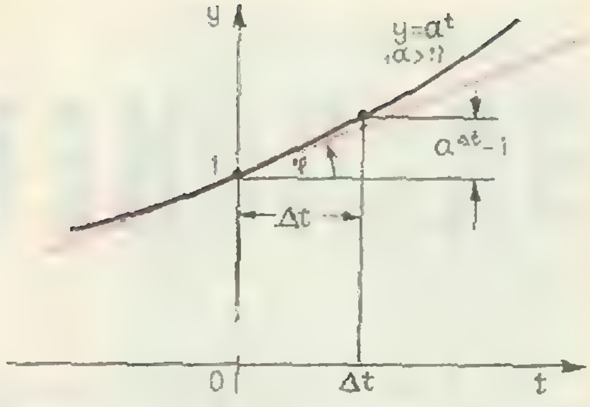


Рис. 1.

Но отсюда следует, что приращение показательной функции $y = a^t$ при малых Δt приближенно равно

$$\Delta y \approx y \cdot \Delta t \cdot \operatorname{tg} \varphi. \qquad (3)$$

Соотношение (3) аналогично соотношению (1) и полностью совпадает с ним, если выбрать такое основание a, чтобы для него значение $\operatorname{tg} \varphi$ совпало с коэффициентом пропорциональности k.

Однако при описании процессов значительно удобнее пользоваться одним и тем же основанием, а коэффициент пропорциональности k учитывать явным образом в показателе степени. Для этого выбираем такое

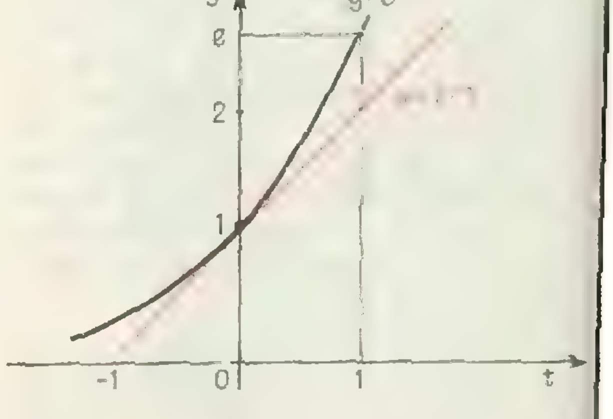


Рис. 2.

основание, при котором $\operatorname{tg}\varphi=1$; тогда график показательной функции пересечет ось ординат под углом 45°. Такое основание обозначается буквой e. Число e иррационально, его приближенное значение равно 2,718.

Показательная функция с основанием e и называется экспонентой. Она имеет специальное обозначение: Exp t. График экспоненты $y=e^t$ изображен на рисунке 2. Касательная к нему в точке $t=0$ наклонена к оси Ot под углом 45°, поэтому она задается уравнением $y=1+t$.

Можно показать, что все точки экспоненты лежат выше касательной, так что при всех значениях t выполняется неравенство $e^t>1+t$. Из этого неравенства можно получить оценки числа e. Для этого заметим что при $t=\frac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}}>1+\frac{1}{n}$; отсюда, возводя в степень n, получим

$$e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

При $t=-\frac{1}{n+1}$: $e^{-\frac{1}{n+1}}>1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, откуда $e^{\frac{1}{n+1}}<\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$, и, возводя в степень $n+1$, получим

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Неравенствами

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

число e определяется однозначно (см. статью Л. Г. Лиманова «О числе e и $n!$», «Квант» № 5, 1972).

Так как при основании $a=e$ по определению $\operatorname{tg}\varphi=1$, то из формулы (3) вытекает приближенное равенство (при $t=0$ и малых Δt)

$$\Delta e^t=e^{\Delta t}-e^0=e^{\Delta t}-1\approx\Delta t. \qquad (4)$$

Теперь введем коэффициент пропорциональности. Для этого подставим в формулу (4) $k\cdot\Delta t$ вместо Δt: $e^{k\cdot\Delta t}-1\approx k\cdot\Delta t$ (при малых Δt). Значит, для функции e^{kt} приращение Δy (при любом t) имеет вид

$$\Delta y=e^{k(t+\Delta t)}-e^{kt}=e^{kt}\left(e^{k\cdot\Delta t}-1\right)\approx$$
$$\approx ky\cdot\Delta t.$$

Таким образом, функция $y=e^{kt}$ удовлетворяет условию (1). Очевидно, что и функция $y=Ce^{kt}$ при любом постоянном множителе C удовлетворяет этому же условию, так как ее приращение равно

$$\Delta y=Ce^{k(t+\Delta t)}-Ce^{kt}=$$
$$=Ce^{kt}\left(e^{k\cdot\Delta t}-1\right)\approx ky\cdot\Delta t.$$

В конкретных примерах множитель C позволяет учесть так называемое начальное условие — значение величины y в начальный момент времени $t=0$. При $t=0$ получаем $y(0)=Ce^0=C$. Окончательно описываемый процесс можно записать так:

$$y(t)=y(0)e^{kt}. \qquad (5)$$

Мы начали с показательных функций, но любую показательную функцию можно выразить через экспоненту, используя равенство

$$a^t=e^{kt},$$

где $k=\log_e a$. Логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается символом $\ln a$, то есть $\ln a=\log_e a$. Выбор экспоненты вместо другой показательной функции объясняется лишь простотой учета коэффициента пропорциональности k.

Натуральные логарифмы связаны с десятичными соотношением

$$\ln a=\frac{1}{\lg e}\cdot\lg a,$$

которое получается при логарифмировании по основанию 10 тождества $e^{\ln a}=a$ и переносом $\lg e$ в правую часть.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

Здесь мы, исходя из физических соображений, покажем, что рассматриваемый процесс удовлетворяет соотношению (1), а отсюда немедленно будет следовать, что этот процесс описывается экспонентой (5).

1. Радиоактивный распад

Пусть в некоторый начальный момент ($t=0$) мы имели N_0 атомов радиоактивного вещества. Распад атомов в нем совершается случайным образом, но экспериментально установлено, что среднее число атомов, распадающихся за малый промежуток времени, пропорционально количеству имеющихся атомов. Следовательно, через промежуток времени t у нас будет уже не N_0 радиоактивных атомов, а N_t. Так как этот процесс удовлетворяет уравнению (1), то мы можем написать $N_t = N_0 e^{kt}$.

Найдем значение коэффициента k. Для этого используем понятие периода полураспада T.

Период полураспада — это время, за которое число атомов вещества уменьшается вдвое. Начальное количество вещества нам известно, период полураспада T также известен. Тогда коэффициент k можно найти из условия, что к моменту времени $t=T$ останется половина начального количества: $N_T = \frac{1}{2} N_0$. Ранее мы показали, что $N_T = N_0 e^{kT}$.

Сравнивая два полученных выражения, найдем $\frac{1}{2} = e^{kT}$, откуда после логарифмирования (по основанию e) найдем значение коэффициента k:

$$kT = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,\quad k = -\frac{\ln 2}{T},$$

и окончательно

$$N_t = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

2. Процесс разряда конденсатора

Пусть C — емкость конденсатора, R — сопротивление, через которое он разряжается (рис. 3), q — заряд конденсатора в момент времени t (в момент $t=0$ мы замыкаем ключ K), $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов, соответствующая заряду q, I — ток в момент времени t, Δq — изменение заряда на обкладках за время Δt. Поскольку

$$\Delta q \approx -I\cdot\Delta t,\quad I = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{R} = \frac{q}{CR},$$

то

$$\Delta q \approx -\frac{q}{CR}\Delta t$$

(соотношение (1)!), отсюда получаем (соотношение (5)!):

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

3. Зависимость давления от высоты (формула Больцмана)

Рассмотрим воздушный столб единичного сечения (рис. 4). Пусть давление на высоте h равно P, тогда давление на высоте $h+\Delta h$ изменится на величину ΔP, где ΔP — вес воздушного столба высотой Δh. Но $\Delta P \approx -\rho g\cdot\Delta h$, где ρ — плотность воздуха на высоте h, g — ускорение свободного падения. Если положить, что температура воздушного столба всюду одинакова, то в силу газовых законов плотность газа прямо пропорциональна давлению и обратно пропорциональна абсолютной температуре, то есть $\rho = k\frac{P}{T}$, где k — коэффициент пропорциональности, T — абсолютная температура (коэффи-

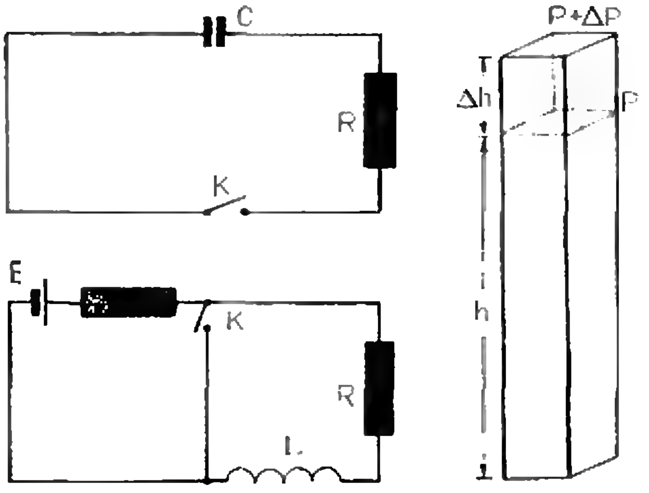


Рис. 3, 4, 5.

циент k может быть найден из уравнения Менделеева — Клапейрона). Подставляя значение ρ в формулу для ΔP, получим

$$\Delta P \approx -k\frac{g}{T}P\cdot\Delta h,$$

откуда

$$P = P_0 e^{-\frac{kgh}{T}} h.$$

4. Явление самоиндукции

Рассмотрим цепь (рис. 5), состоящую из источника э. д. с. (E) и последовательно включенных катушки индуктивности (L) и омических сопротивлений (R). Пусть до момента времени $t=0$ цепь замкнута и по ней течет ток I_0. При $t=0$ закоротим цепь ключом K и рассмотрим изменение со временем тока $I(t)$ в цепи L, R. Согласно закону Ома для рассматриваемой цепи, состоящей из индуктивности и омического сопротивления, имеем $IR \approx -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ (здесь $-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ представляет собой э. д. с. самоиндукции). Следовательно,

$$\Delta I \approx -\frac{R}{L}I\cdot\Delta t,$$

откуда

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (6)$$

Для цепи, состоящей из катушки L, сопротивления R, и источника э. д. с. E (рис. 6), закон Ома примет форму $IR \approx E - L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Пусть в момент $t=0$ ключ K замкнули (до этого предполагается цепь разомкнутой). После того как процесс станет установившимся, в цепи будет течь ток $I_0 = \frac{E}{R}$, но до наступления этого результирующий ток в цепи получается как алгебраическая сумма тока I_0 и противоположного ему, определяемого формулой (6). Таким образом, при неустановившемся режиме результирующий ток определится как

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Его график изображен на рисунке 7.

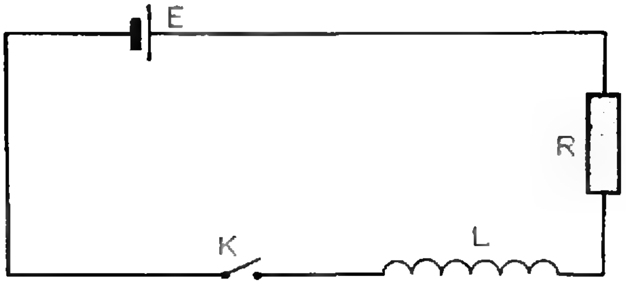


Рис. 6.

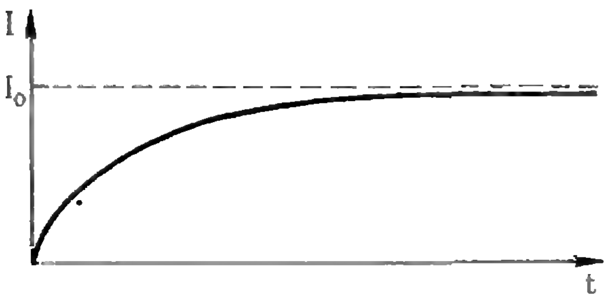


Рис. 7.

5. Остывание тел

Согласно закону Ньютона при небольшой разности температур между телом и окружающей средой изменение энергии тела за время Δt определяется формулой

$$\Delta Q \approx -k(T - T_c)\cdot\Delta t,$$

где ΔQ — количество излучаемой энергии (тепла) за время Δt, T — температура тела, T_c — температура окружающей среды, коэффициент k зависит от поверхности и природы тела. Для простоты положим $T_c=0$, тогда $\Delta Q \approx -kT\cdot\Delta t$. С другой стороны, изменение количества тепла равно $\Delta Q = C\cdot\Delta T$ (здесь C — теплоемкость тела, ΔT — изменение его температуры). Сравнивая выражения для ΔQ, получим

$$\Delta T \approx -\frac{k}{C}T\cdot\Delta t,$$

то есть *скорость изменения температуры пропорциональна температуре тела*, следовательно,

$$T = T_0 e^{-\frac{k}{C}t}.$$

Читатею предлагается в случае $T_c \neq 0$ доказать справедливость следующей формулы:

$$T = (T_0 - T_c) e^{-\frac{k}{C}t} + T_c.$$

6. Движение тела в вязкой жидкости

Рассмотрим движение лодки в воде с учетом силы вязкого трения. Пусть лодка с работающим двигателем движется в воде равномерно (это означает, что сила тяги двигателя уравновешивается силой вязкого трения). В момент времени $t = 0$ двигатель выключается; требуется найти закон изменения скорости лодки.

Очевидно, что после выключения двигателя на лодку действует лишь тормозящая сила вязкого трения, которая пропорциональна скорости лодки и направлена в сторону, противоположную движению: $F_{\text{тр}} = -kv$. Подставляя выражение для силы во второй закон Ньютона $F = ma$, получим $ma = -kv$ или

$$\Delta v \approx -\frac{k}{m} v \cdot \Delta t.$$

Следовательно, скорость лодки изменяется по закону

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

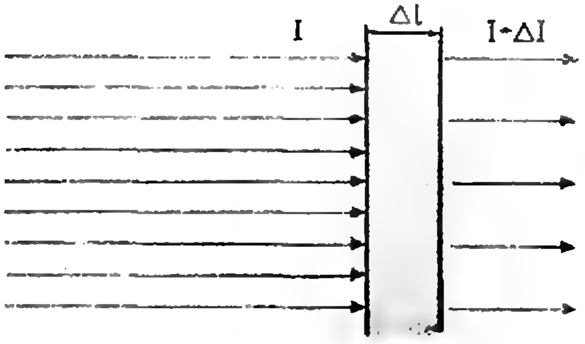


Рис. 8.

7. Ослабление интенсивности излучения при прохождении через поглощающую среду

Параллельный пучок лучей (или частиц), проходя через слой вещества, уменьшает свою интенсивность (рис. 8). Если толщина слоя достаточно мала, то изменение интенсивности пучка пропорционально толщине слоя: $\Delta I \approx k_1 \cdot \Delta l$. С другой стороны, количество поглощенных квантов (или рассеянных частиц) пропорционально интенсивности пучка: $\Delta I = -k_2 I$.

Коэффициенты k_1 и k_2 зависят от свойств поглощающей среды. Объединяя обе формулы, получим

$$\Delta I \approx -kI \cdot \Delta l.$$

Отсюда интенсивность параллельного пучка при прохождении через поглощающую среду убывает по закону

$$I = I_0 e^{-kl}$$

(закон Ламберта — Бугера — Бера).

8. Работа идеального газа при изотермическом процессе

При изобарическом процессе работа, совершаемая идеальным газом, может быть вычислена как произведение давления на изменение объема: $A = P(V_2 - V_1)$. В случае изотермического процесса этой формулой пользоваться нельзя, ибо давление не остается постоянным. Но при малом изменении объема можно пренебречь изменением давления и вычислять работу как

$$\Delta A \approx P(V_2 - V_1) = P \cdot \Delta V.$$

Выразив давление по формуле Менделеева — Клапейрона, получим

$$\Delta A \approx \frac{m}{\mu} RT \frac{\Delta V}{V}.$$

Это позволяет найти зависимость V от A:

$$\Delta V \approx \frac{\mu}{mRT} V \cdot \Delta A,$$

откуда следует, что

$$V = V_0 e^{\frac{\mu}{mRT}A}.$$

Прологарифмировав это равенство по основанию e, получим

$$A=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V}{V_0}.$$

Здесь V_0 — начальное значение объема, V — конечное.

9. Задача Циолковского

Рассмотрим движение космического корабля, находящегося на большом удалении от масс тяготения. Очевидно, что если двигатель не работает, то корабль или покоится или движется равномерно и прямолинейно; будем считать, что он покоится, $v_0=0$. В силу законов сохранения после включения двигателя количество движения системы «корабль—выхлопные газы» остается неизменным, поскольку на эту систему не действуют внешние силы.

Обозначим через m, v массу корабля с топливом и скорость его в момент времени t, u — скорость выбрасываемого выхлопного газа относительно корабля (величина постоянная). Тогда $mv=(m-\Delta m)\times$ $\times(v+\Delta v)-\Delta m\quad(u-v)$, откуда $\Delta m=-\frac{\Delta v}{u-\Delta v}m.$ Найдем зависимость m от v. При малых Δv, учитывая, что u — постоянная, $u\neq 0$, имеем $u-\Delta v\approx u$, поэтому

$$\Delta m\approx-\frac{1}{u}m\cdot\Delta v,$$

и, стало быть,

$$m=m_0e^{-\frac{v}{u}}.$$

Прологарифмировав по основанию e и упрощая, получим

$$v=u\ln\frac{m_0}{m}.$$

Отсюда следует, что скорость корабля целиком определяется его начальной скоростью, относительной скоростью частиц выхлопного газа и количеством израсходованного топлива и не зависит от закона расходования топлива.

На стр. 61 помещена рецензия на книгу Ф. Мостеллера «Пятьдесят занимательных вероятностных задач». Мы приводим некоторые задачи из книги Ф. Мостеллера.

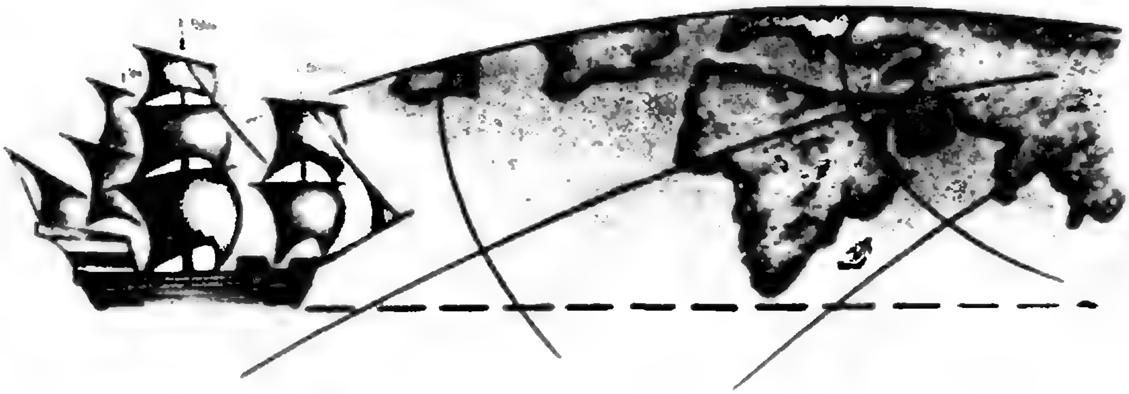
Странное метро

Мэрвин кончает работу в случайное время между 15 и 17 часами. Его мать и его невеста живут в противоположных частях города. Молодой человек садится в первый подошедший к платформе поезд, идущий в любом направлении, и обедает с той из дам, к которой приедет. Мать Мэрвина жалуется на то, что он редко у нее бывает, но юноша утверждает, что его шансы обедать с ней и с невестой равны. Мэрвин обедал с матерью дважды в течение 20 рабочих дней. Объясните это явление.

Нетерпеливые дуэлянты

Дуэли в городе Осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи в случайный момент времени, между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти пять минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?

(Окончание см. на стр. 48)



С МЕТРОМ ПО ГЛОБУСУ

А. Б. Шварцбург

Попробуем нарисовать на поверхности глобуса путь корабля, который вышел из порта A и должен прийти в порт B. Этот путь можно проделать разными способами, и у каждого есть свои достоинства и недостатки. Если корабль спешит, то важно знать кратчайший путь между портами. Как известно, на плоскости кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая. Однако на сфере картина усложняется. Натягивая на глобусе гибкую нерастяжимую нить между точками A и B (начало и конец пути), можно найти такое положение нити, при котором длина AB будет наименьшей. Однако ориентация нити относительно сетки меридианов и параллелей, нанесенной на глобус, будет различной в каждой точке вдоль всей длины AB. Это значит, что проложить такой путь в открытом море нелегко.

Можно выбрать другой способ — например, двигаться все время в одном направлении, пересекая все меридианы под одним и тем же углом. Тогда ориентироваться в море будет легче. Однако с помощью той же нити на глобусе легко убедиться, что такой путь будет длиннее, чем первый. Чтобы лучше представить себе каждый путь, рассмотрим одну вспомогательную задачу.

Движение вблизи полюса

На школьной карте меридианы и параллели обычно изображаются в виде прямоугольной сетки. Однако для изображения районов, примыкающих к полюсам, используют и другую координатную сетку, в которой меридианы представляются лучами, выходящими из полюса O, а параллели — окружностями с центром в полюсе. Допустим, что на такой карте нанесены точки A и B. Попробуем проложить траекторию AB, не заботясь о протяженности пути, но требуя, чтобы направление движения было постоянным. Иными словами, требуется начертить плоскую кривую, которая проходила бы через точки A и B, пересекая все лучи, выходящие из полюса, под некоторым постоянным углом α (рис. 1, *а*).

Координаты точек A и B считаем известными (то есть известны их расстояния до полюса ρ_A и ρ_B и разность их долгот). Легко указать частный случай такой траектории, соответствующий $\rho_A=\rho_B$. Линия, перпендикулярная ко всем лучам, выходящим из одной точки, является окружностью. Чтобы найти траекторию при произвольном угле α, рассмотрим два луча, образующие малый угол θ. Пусть один из них $OA=\rho_0$ соответствует значению $\theta=0$. Откладывая на втором луче $ON=\rho_0=OA$ (рис. 1, *б*), заметим, что $\measuredangle ANO \approx \frac{\pi}{2}$ (так как угол θ мал).

Пусть траектория пересекает луч ON в точке K. Тогда из треугольника ANK, в котором $AN=\rho_0\theta$*): найдем $NK=AN\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=\rho_0\theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Отсюда видно, что длина радиуса-вектора траектории OK составляет

$$\rho_1=\rho_0-\rho_0\theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha=\rho_0\,(1-\theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha). \qquad (1)$$

Откладывая по часовой стрелке от ON угол θ еще раз, получим для радиуса-вектора

$$\rho_2=\rho_1\,(1-\theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha)=\rho_0\,(1-\theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha)^2. \qquad (2)$$

Повторяя эти выкладки n раз, найдем

$$\rho_n=\rho_0\,(1-\theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha)^n. \qquad (3)$$

Предположим, что радиус-вектор ρ_0 за n поворотов повернулся на угол λ, тогда $\theta=\frac{\lambda}{n}$ и

$$\rho_n=\rho_0\left(1-\frac{\lambda}{n}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)^n. \qquad (4)$$

Предположим, что мы, считая угол λ постоянным, увеличиваем число «шагов» так, что величина одного «шага» $\theta=\frac{\lambda}{n}$ уменьшается. Если n увеличивать неограниченно, то это будет соответствовать непрерывному перемещению точки по траектории. Переходя в формуле (4) к пределу при $n\to\infty$, найдем (см. Л. Г. Лиманов «О числе e и $n!$» «Квант» № 5, 1972):

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\rho_n=\rho_0 e^{-\lambda\,\mathrm{ctg}\,\alpha}, \qquad (5)$$

где $e=2{,}73$ — известная в математике постоянная, знаменитое «число e», являющееся основанием натуральных логарифмов.

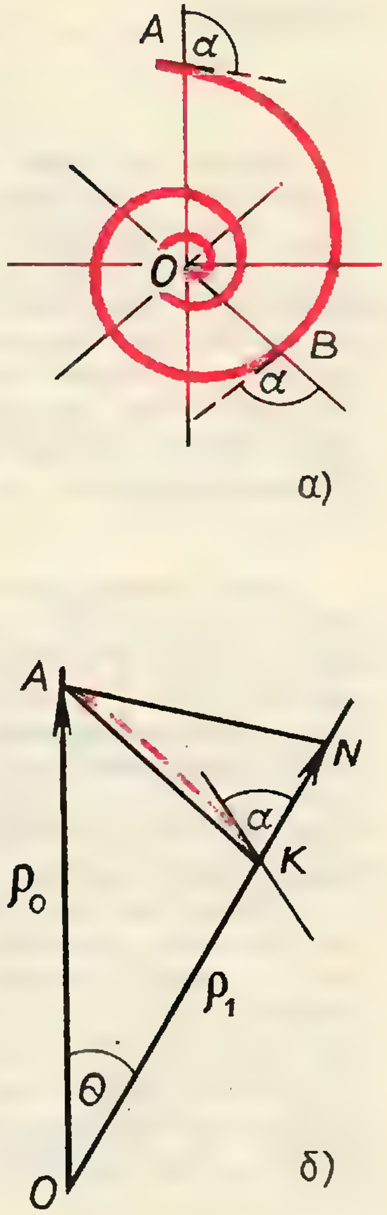


Рис. 1.

Мы получили уравнение кривой, которая пересекает все лучи, выходящие из центра, под углом α. Величину этого угла можно найти, зная координаты точек A и B и разность их долгот λ. Из (5) найдем

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\rho}{\rho_0}. \qquad (6)$$

Пересекая каждый меридиан под углом α, корабль придет из порта A в порт B.

Из формулы (6) видно и другое важное свойство полученной кривой: угол между радиусами-векторами пропорционален логарифму их отношения

---

*) Такая замена эквивалентна приближенному равенству, выполненному при малых значениях угла x $\left(x\ll\frac{\pi}{2}\right)$: $\sin x\approx x$. Это равенство и следующее из него равенство $\mathrm{tg}\,x\approx x$ не раз используются в этой статье.

$$\lambda = -\frac{\ln\frac{\rho}{\rho_0}}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Кривая (5) носит специальное название «логарифмическая спираль», а математик Яков Бернулли даже называл ее «spira mirabilis», что по-латыни значит «чудесная спираль».

В этой вспомогательной задаче часть земной поверхности, на которой происходит движение, считалась плоскостью. Попробуем обобщить полученное решение (6) на случай сферической поверхности. Иными словами, попробуем провести на глобусе кривую, соединяющую точки A и B и пересекающую все меридианы под постоянным углом α. При этом нам пригодится тот же математический прием, который использовался во вспомогательной задаче.

Кривая Снеллиуса

Будем считать, что хотя бы одна из точек A и B не совпадает с полюсом сферы. (Если A и B — полюсы, то любой меридиан является искомой кривой). Будем характеризовать положение каждой точки ее широтой φ, отсчитываемой от экватора, и долготой λ. Требуется провести кривую на сфере, выходящую из точки A с координатами φ_A, λ_A и приходящую в точку B с координатами φ_B, λ_B (см. рис. 2), так, чтобы все меридианы пересекались под одним и тем же углом α. Во вспомогательной задаче мы показали, что плоской кривой, обладающей таким свойством, является логарифмическая спираль.

Рассмотрим две близкие точки на сфере (A и N) (рис. 3), разность широт которых (дуга AO) составляет $\Delta\varphi$, а разность долгот (дуга ON) — θ, где θ — малый угол, ($\theta \ll \lambda$). Если обе эти точки лежат на интересующей нас кривой, то эта кривая образует равные углы α с меридианами, проходящими через эти точки. Рассмотрим криволинейный треугольник AON, где дуга AO совпадает с частью меридиана, дуга ON — с частью круга широты φ_1, а $\measuredangle OAN = \alpha$. Обозначим значение координаты φ в точке A через $\varphi_A = \varphi_0$. Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$.

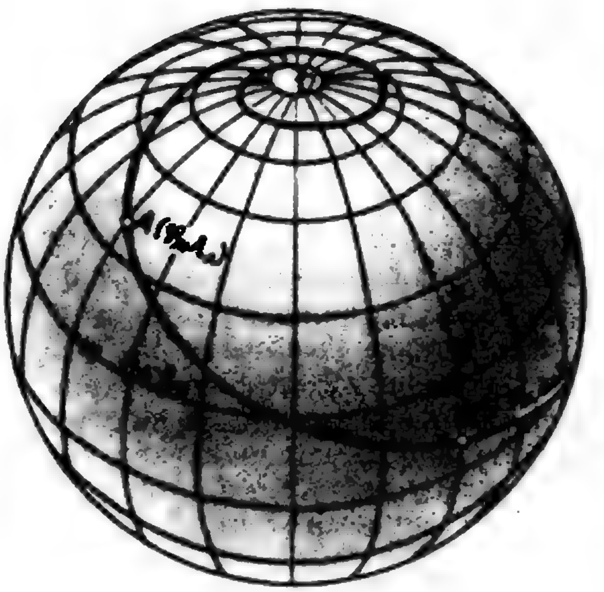


Рис. 2.

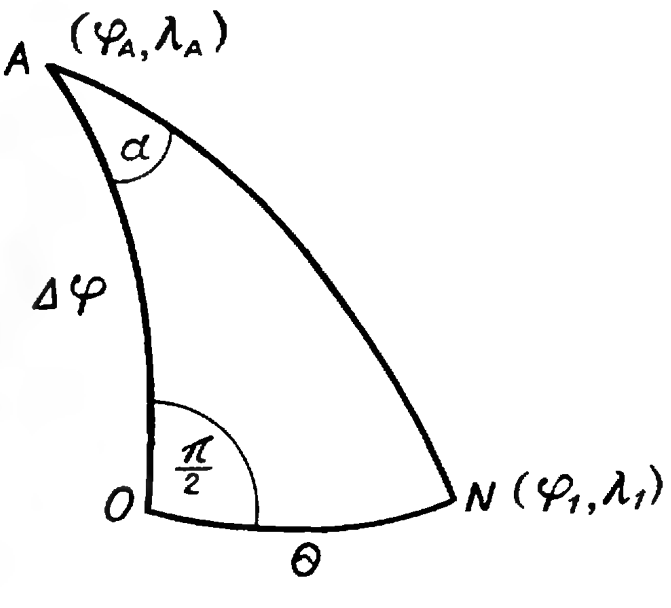


Рис. 3.

Можно строго доказать, что значения координат φ_0 и φ_1 связаны следующим образом:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)[1+\theta\operatorname{ctg}\alpha]. \tag{7}$$

(Строгий вывод этого равенства дан в Приложении I.)

Далее можно рассуждать так же, как и при решении вспомогательной задачи. Значение функции $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$ в точке с координатами φ_2, 2θ составит

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_2}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}\right)[1+\theta\operatorname{ctg}\alpha]=$$
$$=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)[1+\theta\operatorname{ctg}\alpha]^2. \tag{8}$$

После n «шагов» получим для φ_n

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_n}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)\left[1+\frac{\lambda}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right]^n. \tag{9}$$

Допустим теперь, что мы увеличиваем число «шагов» n до бесконечности, приближаясь к точке B. При этом $\varphi_n \to \varphi_B$. Тогда величина каждого шага $\theta=\frac{\lambda}{n}$ стремится к 0, а число сомножителей в правой части (9) неограниченно растет. Перейдя в формуле (9) к пределу при $n\to\infty$, получим (по аналогии с формулой (5)):

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_B}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_A}{2}\right)\left[1+\frac{\lambda}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right]^n\right\}=$$
$$=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_A}{2}\right)e^{\lambda\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{10}$$

Полученная кривая пересекает все меридианы на сфере под постоянным углом α. Величину этого угла легко найти из (10), зная широту каждого порта (φ_A и φ_B) и разность долгот $(\lambda_B-\lambda_A)=\lambda$ между ними:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_A}{2}\right)}. \tag{11}$$

Кривая, выраженная формулой (10), носит специальное название «локсодрома», что можно перевести с латыни как «кособежная». Эту кривую исследовал в XVIII веке математик Снеллиус, известный еще и тем, что он сформулировал закон преломления световых лучей на границе двух сред, известный каждому школьнику.

Локсодрома пересекает «наискось» меридианы шара и приближается к полюсу, «накручиваясь» на него, как спираль. Нетрудно показать, что вблизи полюса локсодрома близка к логарифмической спирали, о которой мы говорили во вспомогательной задаче. Действительно, вблизи полюса $\varphi=90^\circ-\delta$, где $\delta\ll 90^\circ$. Тогда

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)}\approx\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right)}\approx\frac{\frac{\delta_0}{2}}{\frac{\delta}{2}}. \tag{10a}$$

Сравнивая формулы (10а) и (10), получим

$$\delta=\delta_0 e^{-\lambda\,\mathrm{ctg}\,\alpha}. \tag{10б}$$

С другой стороны, расстояния от полюса до точек A и B, широты которых δ_A и δ_B, равны соответственно $\rho_A=R\delta_A$, $\rho_B=R\delta_B$ (R — радиус земного шара). (При написании этих равенств мы заменяем часть дуги меридиана хордой, соединяющей концы дуги.) Тогда из (10б) получаем:

$$\rho_B=\rho_A e^{-\lambda\,\mathrm{ctg}\,\alpha}. \tag{10в}$$

Это равенство мы уже получили во вспомогательной задаче.

Локсодрома (10) описывает такой курс корабля в открытом море, при котором направление движения остается постоянным, поэтому ориентироваться в пути легко. Однако путь по локсодроме, как мы говорили выше, не является кратчайшим путем на сфере между двумя точками.

Геодезическая линия

Попробуем теперь найти кривую, которая является кратчайшим путем между двумя точками на шаре. Такую кривую называют геодезической линией, но она представляет интерес не только для геодезистов. Эта кривая важна и для мореплавателей, летчиков, путешественников. Если упростить задачу и выбрать точки A и B, расположенные на одном круге широты φ, то может показаться, что кратчайшим путем между этими точками является дуга широтного круга. Однако такой ответ неверен. Чтобы убедиться в этом, сравним расстояния S_1 и S_2 между точками A и B, измеренные вдоль широтного круга (S_1) и вдоль дуги большого круга (S_2) (рис. 4). Если разность долгот точек A и B составляет λ, то

$$S_1=R\,\lambda\cos\varphi, \tag{12}$$

$$S_2=RC, \tag{13}$$

где C — радианная мера дуги S_2.

Можно доказать, что величина дуги C (в радианах) равна

$$C=\arccos\,[\cos^2\varphi'+\sin^2\varphi'\cos\lambda],$$

где $\varphi'=\frac{\pi}{2}-\varphi$. (Это доказано в приложении II.)

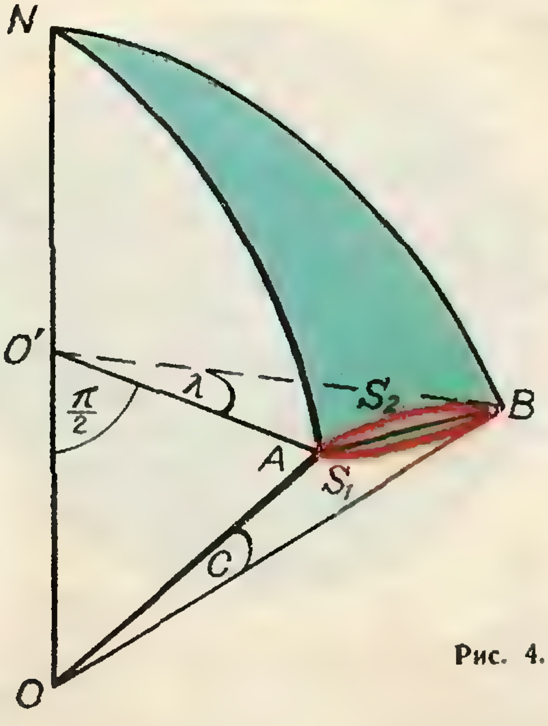


Рис. 4.

Докажем, что длина дуги большого круга S_2 не больше длины дуги широтного круга S_1 ($S_2\leqslant S_1$), то есть докажем неравенство:

$$R\arccos\,[\cos^2\varphi'+\sin^2\varphi'\cos\lambda]\leqslant \leqslant R\,\lambda\sin\varphi'. \tag{14}$$

Равенство (14) возникает лишь при $\varphi'=90^\circ$ или $\varphi=0$, то есть когда широтный круг совпадает с большим кругом.

Обе части неравенства (14) положительны. Будем считать, что разность долгот между точками A и B заключена в интервале $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$. Для $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$ $\cos\lambda$ — убывающая функция.

Поэтому из неравенства (14) следует неравенство:

$$\cos^2\varphi'+\sin^2\varphi'\cos\lambda \geqslant \cos(\lambda\sin\varphi'). \qquad (15)$$

Используя тождество $\cos\lambda = 1-2\sin^2\frac{\lambda}{2}$, приведем неравенство (15) к виду

$$\sin^2\varphi'\sin^2\frac{\lambda}{2} \leqslant \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\sin\varphi'\right). \qquad (16)$$

Умножив и разделив это неравенство на положительную величину $\left(\frac{\lambda}{2}\sin\varphi'\right)^2$, получим:

$$\left(\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\sin\varphi'\right)}{\frac{\lambda}{2}\sin\varphi'}\right)^2. \qquad (17)$$

Если теперь построить с помощью тригонометрических таблиц график функции $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$, то будет видно, что эта функция монотонно возрастает от $y=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2<1$ до 1 при убывании x от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Так как $\frac{\lambda}{2}\sin\varphi' \leqslant \frac{\lambda}{2}$, то неравенство (17) всегда выполнено, а значит, выполнено и исходное неравенство (14). Следовательно, дуга большого круга короче дуги широтного круга, соединяющей те же две точки.

Можно доказать, что и при произвольном расположении двух точек на шаре кратчайшее расстояние между ними определяется по дуге большого круга, проходящей через эти точки. Иными словами, геодезической линией на шаре является дуга большого круга.

Однако ориентироваться при движении по дуге большого круга трудно — угол α между направлением движения и меридианом все время меняется.

Таким образом, пути по локсодроме и по дуге большого круга имеют свои достоинства и недостатки. Выбирая между этими путями, часто поступают так же, как и при движении по плоскости, когда вместо движения по сложной плоской кривой намечают путь по ломаной, все вершины которой лежат на нужной кривой.

Аналогично, при движении по сфере намечают на дуге большого круга, соединяющей пункт отправления и пункт назначения, несколько точек, и от точки к точке движутся по локсодромам.

Приложение I

Точку на сфере удобно характеризовать не широтой φ, а дополнительным углом φ'

$$\varphi' = 90^\circ - \varphi. \qquad (\mathrm{I}-1)$$

Удобство такого описания связано с тем, что функция $\operatorname{ctg}\left(\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right)$ обладает важным свойством. Вычислим, используя формулу для тангенса суммы двух углов, приращение этой функции при изменении φ:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ+\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right); \qquad (\mathrm{I}-2)$$

$$\Delta \operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi+\Delta\varphi}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}}-\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\left[1-\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\right]}. \qquad (\text{I}-3)$$

Используя тождество $\frac{1}{\cos\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}=2\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\cos^{-1}\varphi$, получим из формулы

$$\Delta \operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}{\left[1-\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\right]\cos\varphi}. \qquad (\text{I}-4)$$

Рассмотрим случай, когда приращения $\Delta\varphi$ малы, так что $\left|\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\right|\cdot\left|\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\right|\ll 1$. Тогда знаменатель в формуле (I — 4) можно считать приближенно равным 1, а $\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}$ можно заменить на $\frac{\Delta\varphi}{2}$. Тогда из (I — 3) и (I — 4) находим:

$$\Delta \operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (\text{I}-5)$$

Формула (I — 5) показывает, что функция $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$ действительно обладает важным свойством: малые приращения этой функции пропорциональны значению самой функции.

Найдем коэффициент пропорциональности в формуле (I — 5). Так как радиус круга широты равен

$$r=R\cos\varphi,$$

то длина дуги ON составляет (см. рис. 3)

$$ON=R\theta\cos\varphi.$$

Здесь R — радиус сферы. Аналогично, длина дуги OA равна

$$OA=R\Delta\varphi.$$

Так как в треугольнике угол $\sphericalangle AON=\frac{\pi}{2}$, то для тангенса угла α можно записать

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{R\theta\cos\varphi}{R\Delta\varphi}.$$

Из этого соотношения находим интересующее нас выражение для коэффициента $\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$ в формуле (I — 5):

$$\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}=\theta\operatorname{ctg}\alpha.$$

Подставляя это в (I — 5), можно вычислить приращение функции $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$ при переходе из точки A в точку N:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2}\right) + \Delta\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

в результате чего получаем формулу (7).

Приложение II

Одна теорема из сферической тригонометрии

Так называется специальный раздел тригонометрии, в котором изучаются свойства треугольников, образованных дугами на поверхности сферы. В частности, для нашей задачи удобно рассмотреть треугольник NAB, образованный дугами меридианов NA и NB, проходящих через полюс сферы N, и дугой широтного круга AB (см. рис. 4). В треугольнике NAB углы NAB и NBA — прямые, так как линии меридианов перпендикулярны широтным кругам. Точки A и B характеризуются одинаковой широтой φ. Если отсчитывать φ, как принято в географии, от экватора, то дуги NA и NB содержат по $90 - \varphi$ градусов. Пусть дуга AB (разность долгот точек A и B) содержит λ градусов. Если провести через точки A и B большой круг, то дуга AB большого круга содержит C градусов. Если точки A и B лежат на экваторе, то большой круг совпадает с кругом широты и $\lambda = C$. В остальных случаях дуги λ и C не равны. Ограничимся случаем $\lambda \leqslant \pi$, так как при $\lambda > \pi$ можно, сменив направление движения на обратное, искать кратчайший путь между точками с разностью долгот $\lambda < \pi$. Нам нужно получить формулы, позволяющие по широте φ и разности долгот λ находить длину дуги C. Для этого проведем хорду AB и найдем ее длину двумя способами: из треугольника OAB, где O — центр сферы, и из треугольника $O'AB$, где O' — точка пересечения оси ON с плоскостью широтного круга, проходящего через A и B. Если радиус сферы равен R, то из треугольника $OO'A$ найдем

$$O'A = O'B = R \sin \varphi'.$$

Тогда по теореме косинусов получим из треугольника $AO'B$:

$$AB^2 = O'A^2 + O'B^2 - 2O'A \cdot O'B \cos \lambda = 2R^2 \sin^2 \varphi' - 2R^2 \sin^2 \varphi' \cos \lambda. \qquad (II-1)$$

Из треугольника OAB по той же теореме найдем

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \lambda = 2R^2 - 2R^2 \cos C; \qquad (II-2)$$

приравнивая выражения (II — 1) и (II — 2), получим нужную нам формулу:

$$\cos C = \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi' \cos \lambda. \qquad (II-3)$$

Так как широта φ нам известна, то формула (II — 3) устанавливает связь между величиной дуги большого круга C и разностью долгот λ (здесь, конечно, C и λ выражены в градусах); как и следовало ожидать, на экваторе, то есть при $\varphi = 0$, $\varphi' = 90^\circ$, формула (II — 3) дает $\cos C = \cos \lambda$, то есть $C = \lambda$ (так как $C \leqslant \pi$; $\lambda \leqslant \pi$).

КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ МИСТЕРА КЛОКА

В «Кванте» № 9, 1972 г. было рассказано об опытах с часами, совершившими кругосветное путешествие. Результаты, приведенные в статье, грубо подтверждали формулы теории относительности. В июле этого года Хафель и Китинг опубликовали результаты аккуратного анализа опытов. В расчетах были приняты во внимание точные курсы самолетов, все изменения их высоты и скорости. Оказалось, что разность во времени между показаниями часов, совершивших кругосветное путешествие, и показаниями часов, оставшихся на Земле, составляет (—59±10) наносекунд (*нс*)*) — в случае облета Земли с запада на восток и (+273±7) *нс* — при путешествии с востока на запад. Теоретические значения этих величин (—40±±10) *нс* и (275±21) *нс*, соответственно. Как видите, согласие теории и опыта улучшилось.

Д. Бородин

---

*) 1 *нс* = 10^{-9} *с*.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения задач этого номера можно посылать не позднее 1 февраля 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач Вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М176» или «...Ф198».

Решения задач по каждому из предметов — математике и физике,— а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах.

Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с Вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

Значком * отмечены более трудные задачи.

Задачи

М176. К какой стороне треугольника ABC ближе всего расположена точка пересечения его высот, если $\measuredangle A < \measuredangle B < \measuredangle C$? А к какой вершине?

Л. Шнайдер, ученица 9 класса

М177. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$

где a — заданное вещественное число, n — натуральное число, большее единицы.

Т. Темиров

М178. Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1. Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.

М179. Для каждого не прямоугольного треугольника T обозначим через $T_1 = H(T)$ треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_1; через $T_2 = H(T_1)$ — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_1; пусть далее $T_3 = H(T_2)$; $T_4 = H(T_3)$, ...

Какими должны быть углы треугольника T, чтобы

а) треугольник $H(T)$ был остроугольным?

б) в последовательности T_1, T_2, T_3, ... встретился прямоугольный треугольник T_n (в этом случае $H(T_n) = T_{n+1}$ не определено)?

в) треугольник $T_3 = H(H(H(T)))$ был подобен треугольнику T?

г)* Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ укажите, сколько существует не подобных друг другу треугольников T, для которых T_n подобен T.

Н. Б. Васильев

М180*. Двое играют в такую игру. Один задумывает натуральное число n, а другой задает вопросы типа «верно ли, что $n \geqslant x$» (x он может выбирать по своему усмотрению) и получает ответы «да» или «нет». Каждой возможной стратегии T второго игрока сопоставим функцию $f_T(n)$, равную числу вопросов (до отгадывания), если было задумано число n.

Пусть, например, стратегия T состоит в том, что сначала задаются вопросы: «верно ли, что $n \geqslant 10$?», «верно ли, что $n \geqslant 20$?», ... до тех пор, пока на какой-то вопрос «верно ли, что $n \geqslant 10(k+1)$?» не будет дан ответ «нет», а затем задаются вопросы «верно ли, что $n \geqslant 10k+1$?», «что $n \geqslant 10k+2$?» и т. д. Тогда $f_T(n) = \frac{n-a}{10} + a + 2$, где a — последняя цифра числа n, то есть $f_T(n)$ растет примерно как $\frac{n}{10}$.

а) Предложите стратегию, для которой функция $f_T(n)$ растет возможно медленнее.

б) Сравнивая две стратегии, удобно ввести вместо функции $f_T(n)$ функцию $f'_T(n) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f_T(k)$ — она показывает, за какое число вопросов можно угадать любое число, не превосходящее n. Оцените снизу $f'_T(n)$ для произвольной стратегии T.

Я. М. Барздинь

Ф188. Холодильник мощностью W за время τ превратил в лед n литров воды, которая первоначально имела температуру $t°$ С. Какое количество тепла выделилось в комнате за это время?

Ф189. Заряд $q = 10^{-8}$ *к* равномерно распределен по дуге окружности радиуса $R = 1$ *см* с углом раствора а) π радиан, б) $^2/_3\pi$ радиан. Определите напряженность электрического поля в центре окружности.

В. Г. Светозаров

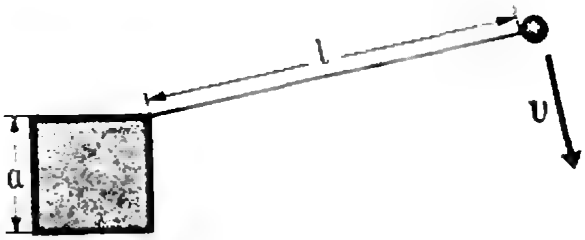


Рис. 1.

Ф190. Груз привязан на веревке к брусу квадратного сечения с ребром a (рис. 1). Длина веревки $l = na$ (n — целое число). Грузу сообщена скорость V в направлении, перпендикулярном нити. За какое время вся веревка намотается на брус?

Ф191. С какой минимальной постоянной скоростью может двигаться автомобиль по мосту с радиусом кривизны R, если длина моста l, коэффициент трения шин о дорогу k?

Л. Г. Асламазов

Ф192*. По водопроводной трубе течет вода со скоростью $v = 10$ *м/с*. Каким будет давление на кран, если его быстро закрыть?

Поправка

В 10-м номере журнала «Квант» в информации о VI Всесоюзной физической олимпиаде не указано, что Диплом II степени присужден Владимиру Черняку (9 класс школы № 2 г. Москвы).

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М135—М140

М135

Докажите, что для каждого натурального $n>1$ верно тождество

$$\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots$$
$$\cdots\times\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=c_n\sin nx,$$

где c_n — некоторое число (зависящее от n), и найдите c_n.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. $\sin nx=\sin x\cdot A_n(\cos x)$, *где $A_n(x)$ — некоторый многочлен степени $(n-1)$ с первым коэффициентом 2^{n-1};* $\cos nx=B(\cos x)$, *где $B_n(x)$ — некоторый многочлен степени n с первым коэффициентом 2^{n-1}.*

Ясно, что при $n=1$ утверждение леммы верно. Пусть оно верно для $n=k$. Тогда

$$\sin(k+1)x=$$
$$=\sin x\cdot\cos kx+\cos x\cdot\sin kx=$$
$$=\sin x\,(B_k(\cos x)+\cos x\cdot A_k(\cos x));$$
$$\cos(k+1)x=\cos x\cdot\cos kx-\sin x\sin kx=$$
$$=\cos x\cdot B_k(\cos x)+$$
$$+(\cos^2x-1)\,A_k(\cos x).$$

Поэтому ясно, что $A_{k+1}(x)=B_k(x)+xA_k(x)$ и $B_{k+1}(x)=xB_k(x)+(x^2-1)A_k(x)$ — многочлены с первым коэффициентом, равным сумме первых коэффициентов многочленов $A_k(n)$ и $B_k(n)$, — то есть с первым коэффициентом, равным $2^{k-1}+2^{k-1}=2^k$. Лемма доказана.

Положим $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\times\ldots\times\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{n}\right)$. Сгруппируем попарно члены вида $\sin\left(x+\frac{\pi i}{n}\right)$ и

$$\sin\left(x+\frac{\pi(n-i)}{n}\right),\ \text{где}\ 0<i<\frac{n}{2}.$$

Если n четно, то в произведении останется еще член

$$\sin\left(x+\frac{\pi\frac{n}{2}}{n}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

Преобразуем попарные произведения:

$$\sin\left(x+\frac{\pi i}{n}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi(n-i)}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\cos(2x+\pi)+\cos\left(\frac{2\pi i}{n}-\pi\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi i}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\cos^2x-1-\cos\frac{2\pi i}{n}\right)=\cos^2x-d_i,$$

где d_i — некоторые константы.

Итак, $f(x)=D_n(\cos x)$, где $D_n(x)$ — некоторый многочлен степени $(n-1)$ с первым коэффициентом 1.

Нам осталось доказать, что $A_n(x)=2^{n-1}D_n(x)$ (в частности, отсюда будет следовать, что константа c_n в условии задачи равна $\frac{1}{2^{n-1}}$).

Воспользуемся для этого теоремой о том, что многочлен степени k имеет не более k различных корней. (Ниже мы напомним, как она доказывается.)

Рассмотрим многочлен $F(x)=A_n(x)-2^{n-1}D_n(x)$. Его степень меньше, чем $(n-1)$, так как коэффициенты при x^{n-1} у многочленов $A_n(x)$ и $2^{n-1}D_n(x)$ равны. Значит, либо $F(x)$ тождественно равен 0, либо $F(x)$ имеет меньше, чем $(n-1)$ корень.

Рассмотрим точки $x_1=-\frac{\pi}{n}$, $x_2=-\frac{2\pi}{n}, \ldots, x_{n-1}=-\frac{\pi(n-1)}{n}$ и пусть $t_i=\cos x_i$. Ясно, что $f(x_i)=0$, и потому $D_n(t_i)=0$; кроме того, $\sin(n\cdot x_i)=0$, а $\sin x_i\neq 0$, — значит, $A_n(\cos x_i)=A_n(t_i)=0$. Заметим, что все точки t_i различны так как $\cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi, 0]$.

Итак, многочлен $F(x)$ обращается в нуль в $(n-1)$ точке $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ и, значит, $F(x)$ — тождественный нуль. Таким образом, $A_n=2^{n-1}D_n$, то есть

$$\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\times\cdots\times\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin nx.$$

Напомним теперь, как доказывать, что у многочлена степени k не более k корней. Для $k=1$ это очевидно. Пусть это утверждение верно при $k=l-1$ и пусть $P(t)=a_l t^l+a_{l-1}t^{l-1}+\ldots+a_1t+a_0$ — многочлен степени l $(a_l\neq 0)$. Пусть α — корень многочлена P (если у P нет корней, то все доказано): $P(\alpha)=a_l\alpha^l+\ldots+a_0=0$. Поэтому $P(t)=P(t)-P(\alpha)=a_l(t^l-\alpha^l)+a_{l-1}(t^{l-1}-\alpha^{l-1})+\ldots+a_1(t-\alpha)$. Легко проверить, что $t^i-\alpha^i=(t-\alpha)(t^{i-1}+\alpha t^{i-2}+\alpha^2t^{i-3}+\ldots+\alpha^{i-2}t+\alpha^{i-1})$. Поэтому $P(t)=(t-\alpha)[a_l(t^{l-1}+\ldots+\alpha^{l-1})+a_{l-1}(t^{l-2}+\ldots+\alpha^{l-2})+\ldots+a_1]=(t-\alpha)H(t)$, где $H(t)$ — некоторый многочлен степени $l-1$.

По предположению $H(t)$ имеет не более $(l-1)$ корня. Значит, P имеет не более l корней (α и корни многочлена $H(t)$).

Наше утверждение доказано для всех k.

И. Н. Бернштейн

M136

Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, веса которых 370 *кг*, 372 *кг*, 374 *кг*, ..., 468 *кг* (веса составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 *кг*), на семи трехтонках?

О т в е т: нельзя.

Если бы камни удалось увезти, то на какую-то трехтонку пришлось бы положить 8 камней, но даже 8 самых легких камней весят

$$370+372+374+376+384+382+380+378=4\cdot 754=3016 \text{ килограммов}$$

— больше трех тонн.

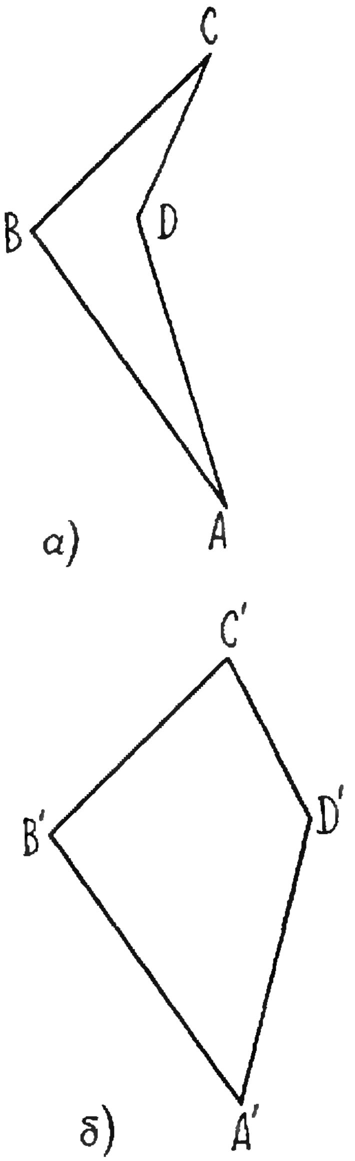


Рис. 1.

Правильное решение прислали многие читатели. Но некоторые проверили только, что общий вес всех 50 камней меньше 21 *т* и заключили отсюда, что увезти камни можно. Такая проверка, конечно, недостаточна: из нее следует только, как пишет *Лена Овчинникова* из Свердловска, что «если эти камешки разбить на более мелкие, то тогда их можно будет увезти (за один рейс)».

M137

Пусть a, b, c, d — длины четырех последовательных сторон четырехугольника, S — его площадь.

а) Докажите, что $2S\leqslant ab+cd$.

б) Докажите, что $2S\leqslant ac+bd$.

в) Докажите, что если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство, то четырехугольник можно вписать в окружность.

Поскольку для любого невыпуклого четырехугольника легко построить выпуклый четырехугольник со сторонами той же

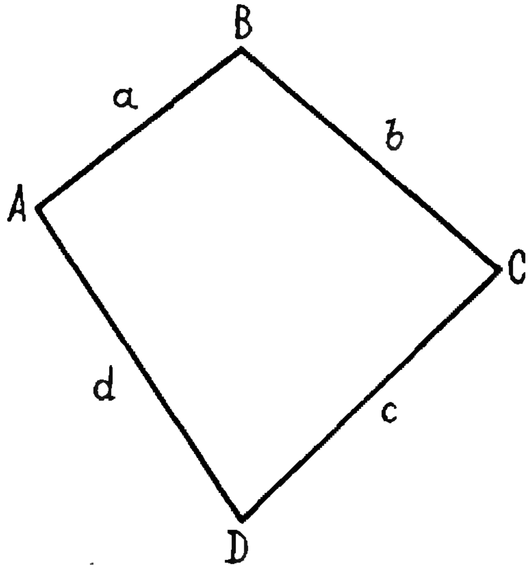


Рис. 2.

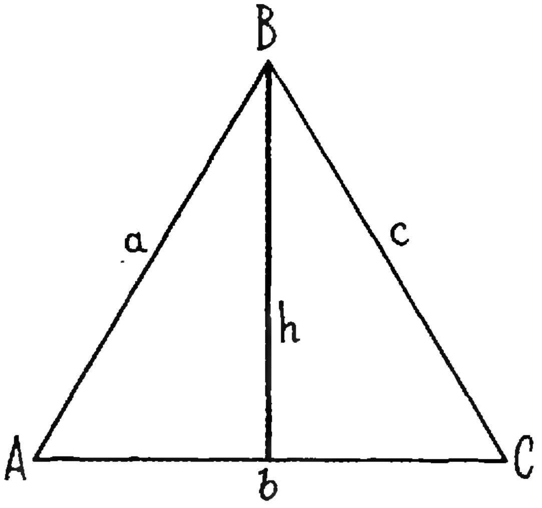


Рис. 3. $S_{\Delta ABC}=hb/2\leqslant ab/2.$

длины и имеющий большую площадь (рис. 1), то ясно, что достаточно доказать неравенства а), б) для выпуклого четырехугольника. Поэтому мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники.

Итак, пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ (рис. 2) $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, площадь $ABCD$ равна S. Площадь треугольника всегда не превышает половины произведения двух его сторон (рис. 3). Поэтому

$$2S\,(\Delta ABC)\leqslant ab \text{ и } 2S\,(\Delta CDA)\leqslant cd. \qquad (1)$$

Сложив эти неравенства, получим

$$2S\leqslant ab+cd. \qquad (2)$$

Равенство здесь достигается в том случае, когда оно достигается одновременно в обоих неравенствах (1), то есть *в том и только в том случае, когда углы B и D — оба прямые*. Разумеется, в этом случае четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность (причем диагональ AC является диаметром). Из сказанного выше следует также, что четырехугольник, для которого $2S=ab+cd$, можно составить из отрезков a, b, c, d в том и только в том случае, если их длины удовлетворяют условию

$$a^2+b^2=c^2+d^2. \qquad (3)$$

Задача б) несколько труднее. Ее можно решить «в лоб», применяя различные формулы для площадей треугольников. Но есть и совсем простое геометрическое решение.

Разрежем четырехугольник, как и раньше, диагональю BD на два треугольника и один из них — скажем, треугольник BCD — «перевернем на обратную сторону» и снова приложим стороной BD к треугольнику BAD. Другими словами, заменим $\triangle BCD$ треугольником $BC'D$, симметричным ему относительно перпендикуляра, проходящего через середину отрезка BD (рис. 4). Ясно, что площадь четырехугольника S от этого не изменится. Но теперь мы можем воспользоваться результатом задачи а):

$$2S\leqslant AB\cdot BC'+C'D\cdot DA$$

или

$$2S\leqslant ac+bd. \qquad (4)$$

Равенство в (4) достигается, если у «перестроенного» четырехугольника $ABC'D$ углы B и D — прямые, то есть если у исходного четырехугольника $ABCD$ углы, которые диагональ BD образует с каждой парой противоположных сторон, в сумме дают по 90°:

$$\angle ABD+\angle BDC=$$
$$=\angle ADB+\angle DBC=90^\circ \qquad (5)$$

Отсюда конечно, следует, что $\angle ABC+$ $+\angle ADC=180^\circ$, то есть четырехугольник $ABCD$ — вписанный (это ясно и из того, что $\angle A+\angle C=\angle A+\angle C'=180^\circ$). (Заметим, что четырехугольник, для которого

$$2S=ac+bd, \qquad (6)$$

можно составить из отрезков a; b, c, d в том и только в том случае, когда

$$a^2+c^2=b^2+d^2; \qquad (7)$$

это следует из (3) в применении к $ABC'D$.)

Еще одно замечание. Не кажется ли вам странным, что необходимое и достаточное для равенства (6) условие (5) «несимметрично»? Ведь в (6) обе пары противоположных вершин участвуют равноправно — чем же диагональ BD лучше, чем AC? Она, конечно, ничем не лучше. Мы сейчас увидим, что условие (5) можно заменить симметричным и поэтому, как часто бывает, более простым.

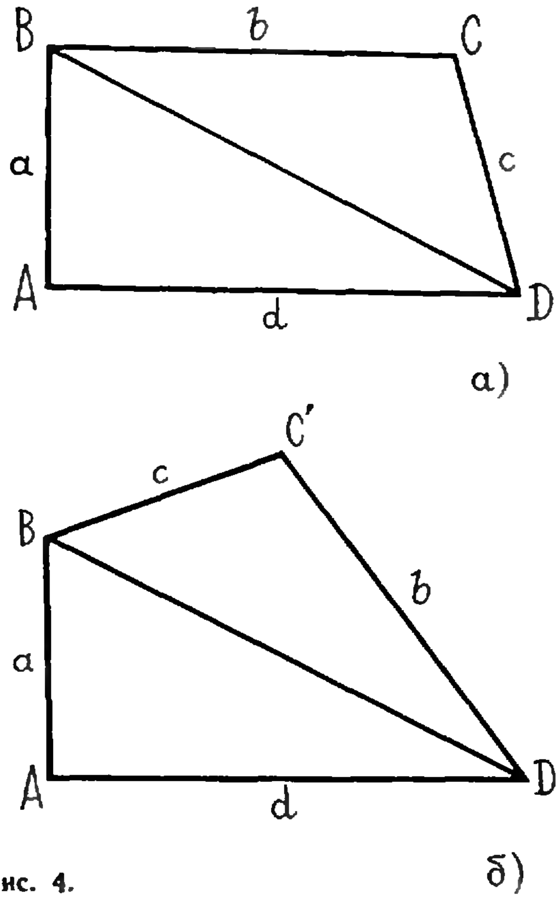


Рис. 4.

Легко проверить (рис. 5), что условие (5) эквивалентно просто такому: четырехугольник $ABCD$ — вписанный и $AC\perp BD$.

Теперь мы можем сформулировать наш результат так: *для того, чтобы выполнялось равенство* (6), *необходимо и достаточно, чтобы четырехугольник $ABCD$ был вписанным и имел взаимно перпендикулярные диагонали.*

(Попутно мы еще доказали, что для таких четырехугольников выполняется условие (7). Вспомните, как это сделать!).

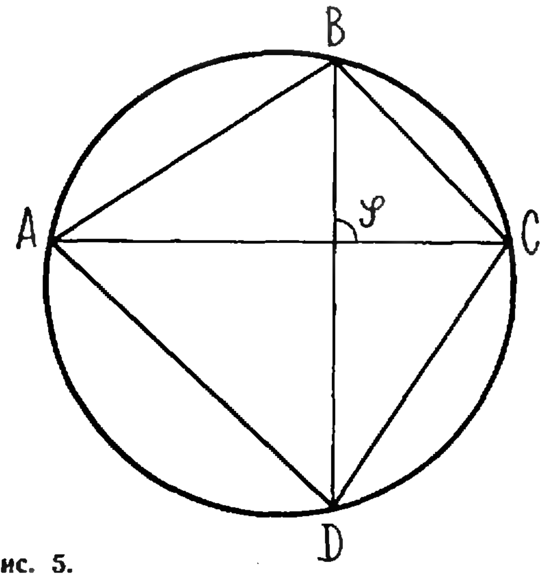


Рис. 5.

Кроме решения с «переворачиванием треугольника» еще одно простое решение задачи б) основано на *неравенстве Птолемея*, то есть на такой теореме (см. «Квант» № 4, 1972 г., стр. 45, решение **М99**):

В любом четырехугольнике $ABCD$

$$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC, \qquad (8)$$

причем равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

Из этой теоремы следует, что (φ — угол между диагоналями)

$$S=AC\cdot BD\cdot\sin\varphi\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC=ac+bd.$$

На этом пути условия равенства сразу получаются в «симметричном» виде (но зато труднее получить условие (7)).

M138

Докажите, что если m и n — целые числа и $1\leqslant m<n$, то

$$\Sigma_{k=1}^{k=n}(-1)^k k^m C_n^k=0,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, то есть коэффициенты многочлена

$$(1+x)^n=\Sigma_{k=0}^{k=n}C_n^k x^k.\ ^{*})$$

(Например, если $n=4$, то $C_4^0=1$, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$ и верны равенства:

$$-1\cdot4+2\cdot6-3\cdot4+4\cdot1=0,$$
$$-1^2\cdot4+2^2\cdot6-3^2\cdot4+4^2\cdot1=0,$$
$$-1^3\cdot4+2^3\cdot6-3^3\cdot4+4^3\cdot1=0.)$$

Десять читателей прислали элементарные решения этой задачи (с помощью метода математической индукции). Приведем одно из наиболее коротких доказательств, присланное *Б. Фришлингом* (Тбилиси).

Нетрудно проверить, что доказываемые равенства верны при $n=2$, 3, 4 (см. пример в тексте задачи). Допустим, что при $l<n-1$ равенства $\Sigma_{j=0}^{j=n-1}(-1)^j j^l C_{n-1}^j=0$ верны. Воспользовавшись равенством

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=$$
$$=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1},$$

---

*) Мы пишем здесь и ниже знак суммирования не совсем привычным образом $\left(\Sigma_{k=0}^{k=n}\right.$ вместо «старого образца» — $\left.\sum\limits_{k=0}^{n}\right)$, чтобы сэкономить место и упростить работу наборщика. Так делают сейчас во многих научных журналах.

получаем

$$\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k k^m C_n^k =$$

$$= n\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k k^{m-1} C_{n-1}^{k-1} =$$

$$= n\sum_{j=0}^{j=n-1}(-1)^{j+1}(j+1)^{m-1} C_{n-1}^{j} =$$

$$= -n\sum_{j=0}^{j=n-1}\Big[(-1)^j\times$$

$$\times\Big(\sum_{l=0}^{l=m-1} C_{m-1}^{l} j^l\Big) C_{n-1}^{j}\Big] =$$

$$= -n\sum_{l=0}^{l=m-1}\Big[C_{m-1}^{l}\times$$

$$\times\Big(\sum_{j=0}^{j=n-1}(-1)^j j^l C_{n-1}^{j}\Big)\Big].$$

Если $m < n$, то в последнем выражении каждая круглая скобка равна нулю по предположению индукции (поскольку $l \leqslant m-1 < n-1$), и поэтому вся сумма равна нулю. Доказательство закончено.

Ряд присланных решений основан на некоторых тождествах между многочленами (одно из таких решений см., например, в «Задачнике по алгебре» В. А. Кречмара, где содержится задача 55, эквивалентная **M138**). Несколько решений, не требующих, в отличие от элементарных, почти никаких выкладок, прислали шестиклассник *Ю. Соркин* (его решение использует понятие производной многочлена), *Э. Туркевич* (он пользуется понятием степенного ряда) и другие. В заметке десятиклассников *А. Бочарова* и *А. Шерстюка* (Николаев), *В. Янкелевича* (Кустанай) и в решениях, присланных некоторыми другими читателями, с решением задачи **M138** связывается общий вопрос о *разностях* (1-го, 2-го, ..., n-го порядка) для последовательности значений многочленов в точках, составляющих арифметическую прогрессию. Обо всех этих и еще о некоторых других понятиях «высшей математики», позволяющих посмотреть на равенства задачи **M138** с разных точек зрения, мы расскажем в специальной статье в следующем номере «Кванта».

Семь читателей указывают в своих письмах на очень красивое комбинаторное доказательство тех же равенств, использующее «формулу включений и исключений» (оно приводится в книге Н. Я. Виленкина «Комбинаторика», стр. 24 — 26, 61 — 62). Эта замечательная формула (с ее частным случаем мы сталкивались в решении задачи **M92** про Петины каникулы — см. «Квант» № 3 за 1972 год, стр. 41 — 42) заслуживает специального знакомства, которое мы отложим до другого раза.

Н. Б. Васильев

M139

Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известны отрезки $KH = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

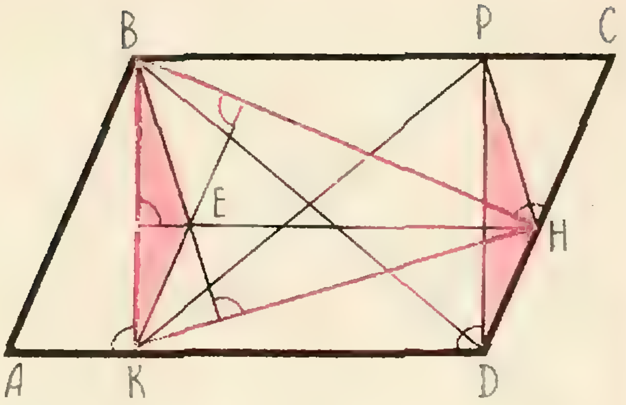


Рис. 6.

Многие читатели решили эту задачу с помощью вычислений, но она имеет и короткое геометрическое решение.

Опустим перпендикуляр DP из вершины D параллелограмма на сторону BC и проведем три высоты в треугольнике BKH, пересекающиеся в точке E (рис. 6). Заметим, что если сдвинуть (параллельно) треугольник BKE так, чтобы точка K попала в точку D, то он полностью совпадает с треугольником PDH, поскольку отрезок KE параллелен и равен DH (ведь $EHDK$ — параллелограмм), а отрезок BK параллелен и равен PD. Следовательно, $BE = PH$. Но PH легко найти из прямоугольного треугольника KHP:

$$PH^2 = KP^2 - KH^2,$$

где $KP = BD = b$, $KH = a$. Поэтому $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Заметьте, что наше решение годится и для того случая, когда угол B тупой (как на рисунке 1), и для того случая, когда угол B острый — при этом точки K и H лежат на продолжениях сторон.

Ф. А. Бартенев

M140

С натуральным числом (записываемым в десятичной системе) разрешается проделывать следующие операции:

А) приписать в конце цифру 4;

Б) приписать в конце цифру 0;

В) разделить на 2 (если число четно).

Например, если с числом 4 проделать последовательно операции В, В, А и Б, то получится число 140.

а) Как из числа 4 получить число 1972?

б) Докажите, что из числа 4 можно получить любое натуральное число.

а) Вместо того чтобы получить с помощью операций А, Б, В из числа 4 число 1972, мы попробуем получить из числа 1972 число 4 с помощью обратных операций:

А′) вычеркивание цифры 4 в конце;

Б′) вычеркивание цифры 0 в конце;

В′) умножение числа на 2.

При этом мы будем каждый раз, как только это возможно, применять операцию А′ или Б′, чтобы по возможности на каждом шаге уменьшать наше число. Получим:

$$1972\to3944\to394\to39\to78\to\to156\to312\to624\to62\to124\to\to12\to24\to2\to4.$$

Ясно, что прочитав эту последовательность от конца к началу, мы получим нужный результат. (Операция Б′ здесь не используется.)

б) Докажем, что если с каждым числом N поступать так же, как мы поступали с числом 1972 (применять операцию А′ или Б′, а если это не возможно — В′), то через несколько шагов мы придем к числу 4.

Для этого достаточно доказать, что в получающейся при этом последовательности *каждое число через несколько шагов превратится в меньшее число* (или в число 4). Отсюда будет следовать, что в конце концов мы обязательно придем к числу 4, поскольку нельзя построить бесконечной последовательности натуральных чисел, в которой за каждым числом встречается меньшее.

Итак, убедимся, что каждое число за несколько операций А′, Б′, В′ можно уменьшить (или прийти из него к 4; этот последний случай мы дальше особо не оговариваем).

Если последняя цифра числа 0 или 4, то после применения А′ или Б′ оно уменьшается по крайней мере в 10 раз.

Пусть последняя цифра числа отлична от 0 и 4. В таблице 1 показано, как меняется последняя цифра при применении В′ (операция В′, то есть увеличение числа в 2 раза, обозначена черной стрелкой, возможность применения А′ или Б′ — красной стрелкой):

Таблица 1

0→
1→2→4→
2→4→
3→6→2→4→
4→
5→0→
6→2→4→
7→4→
8→6→2→4→
$\boxed{9\to8\to6\to2\to4\to}$

Из этой таблицы видно, что если число N оканчивается на любую цифру, кроме 9, то после не более чем трехкратного применения В′, то есть после увеличения не более, чем в 8 раз, к нему можно применить А′ или Б′, то есть уменьшить его по крайней мере в 10 раз. В итоге из N получится число, не превосходящее $\frac{8}{10}N<N$.

Осталось рассмотреть лишь числа N, заканчивающиеся на 9, которые до перехода к А′ увеличиваются в 16 раз. Заметим, что какой бы ни была предыдущая перед 9 цифра числа N, предпоследняя цифра числа

$$16N=16\,(10a+9)=160a+144$$

всегда четна.

Если эта цифра не 8, то $16N$ после А′ и не более чем двух операций В′ превратится снова в число с цифрой 0 или 4 на конце, которое мы можем уменьшить по крайней мере в 10 раз. В итоге из N получится число, не превосходящее

$$\frac{16\cdot4N}{100}<N.$$

Остался случай, когда $16N$ оканчивается на 84. Заметим, что какой бы ни была предыдущая перед 8 цифра этого числа, после операций

$$16N=\ldots\quad 84\to10b+8\to\to\to80b+64\to8b+6$$

получим число, оканчивающееся на четную цифру.

Если эта цифра не 8, то не более чем за две операции В мы получаем число с цифрой 0 или 4 на конце, отбрасываем ее и в итоге получаем из N число, не превосходящее $\frac{16\cdot8\cdot4}{1000}N<N$. Если же эта цифра — 8, то за три операции В′ мы получаем число с четной предпоследней цифрой и из него (после А′, не более чем трехкратного применения В′ и откидывания последней цифры) — число, не превосходящее

$$\frac{16\cdot8\cdot8\cdot8}{10\,000}N=\frac{8192}{10\,000}N<N.$$

Наше утверждение доказано, и задача решена.

Попробуйте, разобравшись в этом решении, перевести с помощью операций А, Б, В число 4 в 1249 (это одно из самых «неприятных» чисел).

Многие читатели, которые решали задачу **М140** этим путем, не заметили или не до конца разобрали случай, когда число N оканчивается на 9.

Значительно более короткое решение придумали *А. Асташов* (Львов), *А. Арсасян* (Камо), *Г. Высоцкая* (Красноярск). Они доказывают, что из любого четного числа можно с помощью операций А′, Б′, В′ получить меньшее четное число (ясно, что этого достаточно для решения задачи). Здесь достаточно рассмотреть 5 случаев:

1) $10k\to k$,
2) $10k+2\to20k+4\to2k$,
3) $10k+4\to k\to2k$,
4) $10k+6\to20k+10+2\to\to40k+20+4\to4k+2$,
5) $10k+8\to20k+10+6\to40k+30+2\to\to80k+60+4\to8k+6$.

Ниже мы публикуем список читателей, приславших нам правильные решения некоторых из задач **M129—M140**. По поводу задач **M129, M130, M137, M140**, условие которых состояло из нескольких пунктов, мы получили очень много писем с ответами на самые простые вопросы, но в список включены только те, кто решил задачи а) и б). (Впрочем, задачу **M130б** не решил никто.)

Две или больше задач решили: *С. Айрапетян* (Ереван) **M136, M139**; *Р. Али-Заде* (пос. Джебраилский АзССР) **M136, M139, M140**; *Н. Анисимов* (Сучан Приморского края) **M137, M139**; *Д. Арзамасов* (ст. Поморы Марийской АССР) **M137, M139**; *А. Асасян* (Камо Армянской ССР) **M132, M136, M137, M139, M140**; *А. Асташов* (Львов) **M131, M133, M136, M140**; *Б. Ашавский* (Москва) **M131, M136, M139**; *Э. Ахмедов* (Баку) **M136, M137, M139, M140**; *Р. Ахметов* (пос. Исмагилово Башкирской АССР) **M131, M137**; *М. Багян* (с. Карачинар АзССР) **M129, M136, M137**; *А. Балабин* (Новгород) **M131, M134**; *Ю. Бакши* (Москва) **M136, M137, M139, M140**; *С. Бамбуркин* (Свердловск) **M136, M139**; *П. Баньковский* (Уральск) **M136—M140**; *А. Баранов* (Семнозерье Ленинградской обл.) **M131, M136**; *И. Бахмутский* (Львов) **M136, M137**; *О. Бегларян* (пос. Сисиан АрмСССР) **M136, M137, M139**; *К. Безденежных* (Н. Тагил) **M133, M136, M140**; *А. Беликов* (Москва) **M131, M136, M139**; *В. Береза* (Горький) **M132, M133**; *Бикташев* (Москва) **M129, M131—M133**; *А. Блох* (Харьков) **M131, M134, M136, M137, M139, M140**; *А. Бовшовер* (Ташкент) **M136, M140**; *А. Бортников* (Краснодар) **M131, M134**; *А. Бочаров* (Николаев) **M133—M136, M140**; *А. Буяновский* (Гомель) **M136, M140**; *А. Вайнтроб* (Москва) **M129, M131, M133**; *А. Вальков* (Ташкент) **M136—M140**; *С. Васильев* (Уфа) **M131, M133, M134**; *С. Величко* (Докучаевск Донецкой обл.) **M136, M139**; *И. Вергасов* (Москва) **M131, M132а, M133**; *И. Вергильев* (Киев) **M131, M132а, M133, M134, M137, M139**; *Н. Вертебный* (Семеновка Черниговской обл.) **M136, M139**; *А. Вайновский* (Баку) **M131, M137**; *А. Волков* (Москва) **M131, M134, M136, M137**; *А. Волков* (Челябинск) **M136, M140**; *И. Волощенко* (с. Вороньки Полтавской обл.) **M131, M136**; *С. Вразовский* (Усть-Каменогорск) **M131, M133**; *Г. Высоцкая* (Красноярск) **M131, M133, M134, M136, M137, M139, M140**; *Л. Генгринович* (Ташкент) **M136, M140**; *С. Гладков* (Пучеж Ивановской обл.) **M131, M134, M136**; *Б. Годунов* (Тавда) **M131, M132а, M133—M135**; *А. Гордиенко* (с. Полтавченское Краснодарского края) **M131, M134, M136, M139, M140**; *И. Готман* (Арзамас) **M136, M137, M139, M140**; *Б. Грибовский* (Москва) **M136; M137**; *А. Григорян* (Баку) **M129, M131, M132а, M133, M136—M140**; *В. Гринман* (Москва) **M131, M136, M137, M139**; *Е. Гурвич* (Ташкент) **M136, M137, M139**; *Р. Гурин* (Уфа) **M131, M133**; *Е. Гусев* (Павлодар) **M131, M136, M140**; *В. Данилович* (Псков) **M131, M136, M139**; *В. Даушев* (Анджан) **M136, M137, M139**; *А. Демидов* (Москва) **M131, M134, M139**; *К. Деревенко* (Краснодар) **M131, M132а**; *М. Дойчер* (Черновцы) **M131, M132а, M136, M137**; *Г. Дорман* (Магнитогорск) **M136—M140**; *С. Дужин* (Могилев) **M131, M133, M136, M137, M139**; *М. Дульгер* (Волгоград) **M136, M140**; *В. Евдокимов* (Ярославль) **M131, M136, M137, M139**; *В. Жаворонков* (п. Дубитель Мордовской АССР) **M136, M139**; *А. Жданов* (Славянск-на-Кубани) **M136, M137**; *В. Железный* (Ленинград) **M136, M137, M140**; *М. Жуков* (Баку) **M136, M137, M139, M140**; *В. Зарубин* (п. Летний Отдых Московской обл.) **M131, M136, M137, M139**; *М. Звегинцев* (Верхнеднепровск) **M131, M136, M140**; *Н. Зверева* (Калинин) **M131, M136, M139**; *М. Зельцер* (Москва) **M136, M137, M139**; *С. Зенович* (Ташкент) **M136, M139**; *Т. Златкус* (Советск Калининградской обл.) **M136, M139, M140**; *Н. Ивочкин* (с. Преображенка Оренбургской обл.) **M131, M135, M136, M137, M139**; *М. Илларионов* (Воронеж) **M131, M132а, M133, M134, M135**; *А. Имакеев* (Фрунзе) **M136, M139**; *Л. Казаковский* (д. М. Быково Минской обл.) **M136, M139**; *В. Калюжа* (Конаково Калининской обл.) **M136, M137**; *В. Карасев* (Ярославль) **M131, M137, M139**; *В. Карачик* (Ташкент) **M136, M137**; *А. Караян* (Ереван) **M136, M137, M140**; *А. Карнюхин* (Ногинск Московской обл.) **M136, M137**; *М. Кауль* (Фрунзе) **M131, M132а, M133**; *А. Квасов* (Минск) **M131, M133, M136, M137**; *В. Квасницын* (Челябинская обл.) **M131, M137**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **M131, M136—M139**; *Н. Кириллова* (Ворсма) **M131, M136, M137**; *Климовец* (Пржевальск) **M136, M137, M139**; *Ю. Князихин* (Таллин) **M131, M136**; *В. Кобяков* (с. Верхневилюйск Якутской АССР) **M131, M134, M136, M137**; *А. Колбановский* (Калинин) **M136, M137**; *А. Колдоба* (Ворошиловград) **M136, M139, M140**; *В. Колосов* (Киев) **M131, M132а, M133—M139**; *О. Комлев* (Москва) **M131, M132а, M133**; *В. Коноваленко* (Днепропетровск) **M136, M137**; *С. Конягин* (Саратов) **M131, M132а, M133, M134, M136—M140**; *А. Копелевич* (Ленинград) **M136, M137**; *В. Коробов* (Рязань) **M131, M133**; *С. Корпушев* (Вологда) **M136, M139, M140**; *А. Корсаков* (Гагарин Смоленской обл.) **M136, M139**; *В. Котенов* (Курск) **M136, M139**; *С. Котко* (Воронеж) **M133, M136, M138**; *О. Кошелева* (Новосибирск) **M131, M132а**; *Ю. Крамаренко* (ст. Кущевская Краснодарского края) **M131, M136**; *В. Крамцов* (Новокузнецк) **M136, M139, M140**; *И. Красников* (Рига) **M137, M139, M140**; *В. Кривицкий* (Новокузнецк) **M136, M137**; *Е. Курманбаев* (Семипалатинск) **M136, M137**; *Л. Куртаджиева* (х/с Бояут № 1 Узбекской ССР) **M136, M139**; *Р. Купиец* (Польша) **M131, M133, M134**; *Г. Левант* (Фрунзе) **M136, M137**; *Г. Левин* (Куйбышев) **M131, M135**; *М. Левин* (Витебск) **M136, M139**; *Ю. Лисунов* (Севастополь) **M131, M133, M136**; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) **M131, M132а, M136**; *Ю. Лифшиц* (Орск) **M131, M136, M139**; *А. Лукашев* (Москва) **M131, M132а, M134**; *С. Львовский* (Москва) **M136, M137, M139**; *С. Лягушин*

(Днепропетровск) **М136**, **М138**; *С. Мазуренко* (Минск) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *В. Макеев* (Ленинград) **М136**, **М137**, **М139**; *Д. Макаров* (Златоуст Челябинской обл.) **М136**, **М137**, **М140**; *А. Макаричев* (Львов) **М131**, **М136**, **М139**; *Г. Малинецкий* (Уфа) **М136**, **М139**; *И. Меджибовский* (Москва) **М131**, **М137**, **М139**; *В. Меерсон* (Николаев) **М131**, **М133**; *Ю. Минкин* (Москва) **М136**, **М140**; *С. Моргунов* (Калинин) **М137**, **М139**; *Е. Морозов* (Фрунзе) **М132**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Мосолов* (Москва) **М132а**, **М133**, **М134**; *С. Муклыгин* (Новосибирск) **М131**, **М133**; *А. Муратов* (Уфа) **М137**, **М139**; *Р. Муртазин* (Караганда) **М131**, **М132а**, **М136**; *Л. Нахмансон* (Орск) **М131**, **М136**, **М139**; *А. Николаев* (Москва) **М136**, **М140**; *Т. Никонова* (Москва) **М131**, **М132**, **М137**; *М. Носов* (Николаев) **М136**, **М139**; *М. Свищер* (Куйбышев) **М136**, **М137**; *Г. Оганиесян* (Ереван) **М131**, **М133**, **М136**, **М139**; *М. Омир* (Свердловск) **М131**, **М136—М140**; *Е. Онегин* (Скопин Рязанской обл.) **М131**, **М136**, **М137**; *В. Орлов* (Астрахань) **М131**, **М136**, **М137**; *Б. Палатник* (Баку) **М132а**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *В. Пекайте* (Варняй Литовской ССР) **М136**, **М139**; *А. Петрушенас* (Каунас) **М131**, **М132а**, **М134**, **М136—М139**; *И. Печковский* (Москва) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *К. Плюгаев* (Минск) **М136**, **М137**, **М140**; *В. Пониманский* (Ровно) **М131**, **М133**, **М134**; *Ю. Попов* (Сумгаит) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**; *В. Прасолов* (Москва) **М131**, **М132а**, **М133**; *В. Простокишин* (Рига) **М136**, **М137**, **М139**; *П. Пучков* и *А. Силоренко* (Москва) **М136**, **М140**; *Л. Пугач* (Днепропетровск) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**, **М136—М140**; *И. Рабковский* (Фрунзе) **М131**, **М136**; *Ю. Рацин* (Рига) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**, **М136**, **М139**, **М140**; *А. Рашковский* (Харьков) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Резник* (Донецк) **М131**, **М132а**, **М136**, **М139**; *Д. Рогозкин* (Москва) **М137**, **М139**; *С. Родионов* (Саратов) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *Г. Розин* (Новочеркасск) **М136**, **М137**; *А. Розиноер* (Баку) **М131**, **М137**, **М139**; *Е. Рудерман* (Черновцы) **М136**, **М137**; *Л. Рудицер* (Харьков) **М131**, **М133**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**; *И. Савицкий* (Москва) **М131**, **М133**; *В. Савосин* (Пущино Московской обл.) **М131**, **М133**, **М136**, **М137**, **М140**; *В. Сац* (Киев) **М131**, **М132а**, **М133**, **М140**; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) **М131**, **М132а**, **М133**; *А. Сеин* (Ханты-Мансийск) **М131**, **М134**, **М135**; *В. Сервах* (Фрунзе) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *О. Сергеев* (Воронеж) **М131**, **М132а**, **М134**, **М139**; *Я. Симкина* (Москва) **М136**, **М137**, **М139**; *П.* и *Н. Симонович* (Москва) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *Р. Сирота* (Харьков) **М131**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *С. Скоков* (д. Соковнин) **М131**, **М134**, **М136**; *С. Слепнев* (Горький) **М136**, **М137**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **М131**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Слинкин* (Москва) **М131**, **М133—М139**; *Я. Сойбельман* (Киев) **М136**, **М137**; *М. Сокольчик* (Минск) **М129—М131**, **М133**, **М134**; *Ю. Соркин* (Москва) **М136—М140**; *А. Старков* (Ленинград) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Стрекалов* (Коломна) **М131**, **М139**; *П. Сургучев* (Рига) **М136**, **М139**, **М140**; *А. Сурков* (Вятские Поляны Кировской обл.) **М131**, **М136**; *А. Тагиев* (Баку) **М131**, **М133**, **М136**, **М137**, **М139**; *А. Тарнопольский* (Коростень Житомирской обл.) **М131**, **М132а**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *Я. Тепер* (Ташкент) **М136**, **М137**, **М140**; *В. Ткаченко* (с. Преображенка Запорожской обл.) **М137**, **М139**; *О. Торонов* (Оренбург) **М136**, **М139**; *А. Тужилин* (Москва) **М131**, **М134**; *А. Тупанов* (Муром) **М137**, **М140**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **М129—М140** (!); *А. Тюлягин* (Кировоград) **М136**, **М137**, **М140**; *Н. Фаткуллин* (Казань) **М132а**, **М134**; *М. Французов* (п. Никель Мурманской обл.) **М131**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**; *Б. Фришлинг* (Тбилиси) **М129**, **М131—М134**, **М140**; *Ф. Хакимова* (д. Иткулово Башкирской АССР) **М132а**, **М136**; *Ю. Хачатурян* (Баку) **М131**, **М132а**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *В. Хлебопрос* (Киев) **М136**, **М137**; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) **М136**, **М137**; *М. Хомченко* (Витебск) **М136**, **М137**; *М. Хорьков* (Куйбышев) **М136**, **М139**; *С. Цанава* (Тбилиси) **М131**, **М133**, **М134**; *С. Церковный* (Ленинград) **М134**, **М136**, **М137**, **М139**; *С. Цецохо* (Новосибирск) **М131**, **М133**, **М137**, **М139**; *С. Черемшанцев* (Ленинград) **М131**, **М132а**, **М133**; *В. Чернов* (п. Летний Отдых Московской обл.) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **М131**, **М132а**, **М133—М137**, **М139**, **М140**; *С. Чернавский* (Новосибирск) **М136**, **М137**, **М139**; *Алла Черняк* (Запорожье) **М131**, **М133—М135**; *Арк. Черняк* (Минск) **М131—М140**; *А. Чигогидзе* (Тбилиси) **М131**, **М132а**, **М133**, **М140**; *Д. Шавдия* (Тбилиси) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**; *М. Шамардин* (Воронеж) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**; *А. Шамис* (Житомир) **М131**, **М133**; *Д. Шапиро* (Челябинск) **М131**, **М133**; *Ю. Шварц* (Черновцы) **М136**, **М137**; *В. Шелюбский* (Минск) **М136**, **М139**; *А. Шерстюк* (Николаев) **М136—М138**, **М140**; *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.) **М136**, **М137**; *Р. Шигапов* (Люберцы Московской обл.) **М136**, **М137**; *В. Шипкович* (Буда-Кошелево Гомельской обл.) **М131**, **М139**; *С. Ширкунов* (Мирный Архангельской обл.) **М136**, **М139**; *А. Шишкин* (Одесса) **М131**, **М136**; *И. Шпарлинский* (Москва) **М131**, **М132а**, **М133**; *В. Шурыгин* (ГСВГ) **М136**, **М137**; *Р. Юлмухаметов* (д. Иткулово Башкирской АССР) **М132а**, **М136**; *А. Яценко* (Первомайск Николаевской обл.) **М136**, **М137**.

Кроме того, решение одной задачи **М132а** нам прислали *А. Киселев* (Москва), *А. Костянский* (Орджоникидзе), *В. Папава* (Тбилиси), *О. Худавердян* (Ереван); **М133** — *О. Глущенко* (Глухов Сумской обл.), *Л. Книжнерман* (Москва), *В. Малыченко* (Славянск-на-Кубани), *Р. Тереладзе* (Тбилиси); **М134** — *С. Овчинников* (Ленинград) и *О. Хабарова* (Жуковский Московской обл.), **М135** — *К. Козиош* (Катовицы, Польша), *С. Кузин* (Макеевка) и *А. Семенов* (Долгопрудный Московской обл.); **М138** — *В. Янкелевич* (Кустанай); **М140** — *А. Глыбач* (Кишинев), *А. Долгоносов* (Батуми), *Ю. Любоч* (Евпатория), *Ю. Сковпень* (п. Курагино Красноярского края), *Н. Щербина* (Днепропетровск). Для экономии места мы не перечислили тех, кто решил одну более простую задачу: **М131** (89 человек), **М136** (74), **М137** (11) и **М139** (12).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф153—Ф158

Ф153

Почему реки, текущие по совершенно плоской однородной почве, изгибаются?

Для простоты рассмотрите реку, текущую вдоль экватора.

Извилистое течение рек связано с тем, что их прямолинейное течение неустойчиво. Это означает, что при случайном образовании небольшой извилины или неоднородности течения реки, например, из-за упавшего в воду дерева, образовавшийся изгиб реки будет увеличиваться. Для того чтобы разобраться, почему это происходит, рассмотрим . . . стакан с чаем, в котором плавают чаинки. Если ложкой «раскрутить» чай в стакане, заставив жидкость вращаться, и затем вынуть ложку из стакана, то через некоторое время все чаинки соберутся вдоль оси стакана. Связано это вот с чем.

При вращении жидкости в стакане на каждую из частиц жидкости действует со стороны других окружающих ее частиц сила такая, что равнодействующая этой силы и силы тяжести направлена горизонтально и сообщает частице центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость вращения жидкости и R — расстояние, на котором находится частица от оси вращения. Чем больше расстояние R, тем больше ускорение частицы, значит, тем больше должна быть горизонтальная составляющая силы, действующей на эту частицу со стороны других частиц. Поэтому поверхность вращающейся жидкости принимает форму параболоида. (Напомним, что сила, действующая на частицу жидкости, которая находится у поверхности, со стороны других частиц, перпендикулярна поверхности. Иначе составляющая этой силы, параллельная поверхности, вызвала бы движение частиц жидкости.) Благодаря такой форме поверхности жидкости давление в ней на одном и том же расстоянии от дна увеличивается по мере приближения к стенкам стакана.

После того, как вынули ложку из стакана, скорость частиц жидкости у стенок стакана и у дна начинает уменьшаться из-за трения. При этом ускорение, сообщаемое этим частицам действующими на них силами, оказывается больше центростремительного, и в стакане возникает течение жидкости такое, как показано на рисунке 7. Из-за трения скорость этого течения у поверхности меньше его скорости на некоторой глубине. Это течение и переносит чаинки к оси вращения жидкости.

Подобное же круговое поперечное течение возникает и в реке там, где река делает поворот (рис. 8). Этим течением частицы песка со дна и наружного берега реки переносятся к ее внутреннему берегу. Таким образом, круговое течение увеличивает изгиб реки, размывая ее наружный берег. Более того, эррозия — разрушение берега и дна — оказывается сильнее у наружного берега реки. Поэтому дно реки принимает профиль, показанный на рисунке 9.

Ф154

Оцените, сколько капелек воды имеется в 1 $м^3$ тумана, если видимость составляет 10 *м* и туман оседает через 2 часа. Высота слоя тумана 200 *м*.

Сила сопротивления воздуха, действующая на каплю воды радиуса R (*м*), движущуюся со скоростью v (*м/сек*), равна 4,3 Rv (*н*).

Для оценки будем считать, что капли тумана — это одинаковые непрозрачные шарики радиуса R. Каждая из таких капель имеет площадь поперечного сечения $s = \pi R^2$. Это означает, что n капель, находящихся в 1 $м^3$

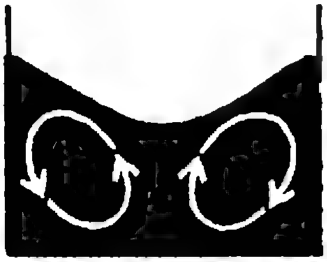


Рис. 7.

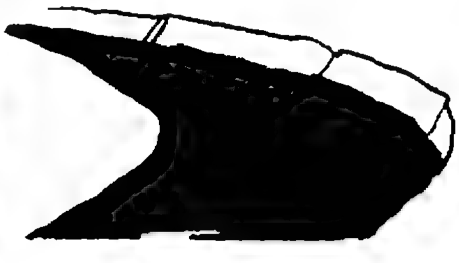


Рис. 8.

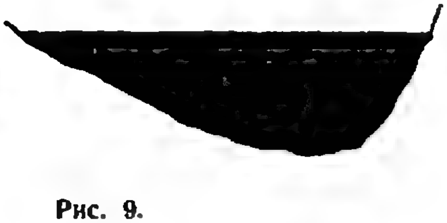


Рис. 9.

воздуха и расположенных хаотично, «перекрывают» площадь, равную примерно $S = n\pi R^2$. При такой оценке мы не учитываем, что капли частично перекрывают друг друга. Однако для оценки — получения примерного ответа — это несущественно.

Так как видимость составляет 10 *м*, то капли тумана, которые находятся в прямоугольном параллелепипеде с площадью основания 1 $м^2$ и длиной 10 *м*, должны «перекрывать» площадь в 1 $м^2$. В этом параллелепипеде находится 10 n капель, и перекрываемая ими площадь

$$10\pi n R^2 = 1\ м^2.$$

Отсюда можно найти n:

$$n = \frac{1}{10\pi R^2}. \qquad (1)$$

В эту формулу входит неизвестный радиус капли. Найдем его. На каплю тумана действуют две силы: сила тяжести, которая постоянна, и направленная вверх сила сопротивления воздуха, которая растет с увеличением скорости падения капли. При падении капли непременно наступает такой момент, когда эти силы делаются равными друг другу. После этого скорость капли перестает изменяться, и капля падает равномерно со скоростью, которую можно найти из условия равенства силы тяжести и силы сопротивления воздуха:

$$mg = 4{,}3\ Rv$$

($m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ — масса капли,

$\rho = 10^3$ $кг/м^3$ — плотность воды).

Отсюда

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = 4{,}3 Rv$$

и

$$R^2 = \frac{3}{4}\,\frac{4{,}3v}{\pi\rho g} \approx \frac{v}{\rho g}\ м^2. \qquad (2)$$

Так как туман оседает за 2 *ч*, а высота слоя тумана 200 *м*, то скорость падения капель тумана равна

$$v = \frac{200\ м}{2\cdot 3600 с} \approx 0{,}028\ м/с.$$

Подставив это значение скорости падения капли в формулу (2), найдем радиус капли:

$$R = \sqrt{\frac{0{,}028}{10^4}} \approx 1{,}7\cdot 10^{-3}\ м.$$

Теперь из формулы (1) мы можем найти n:

$$n = \frac{1}{10\cdot 3{,}14\cdot (1{,}7)^2\cdot 10^{-6}} \approx 1{,}1\cdot 10^4.$$

Ф155

Один моль газа сжимают так, что его объем во время процесса сжатия пропорционален давлению $V = \alpha P$. Давление газа увеличивается от P_1 до P_2. Найти коэффициент α, если теплоемкость этого газа при постоянном объеме равна c_V и во время процесса газу сообщается количество тепла Q.

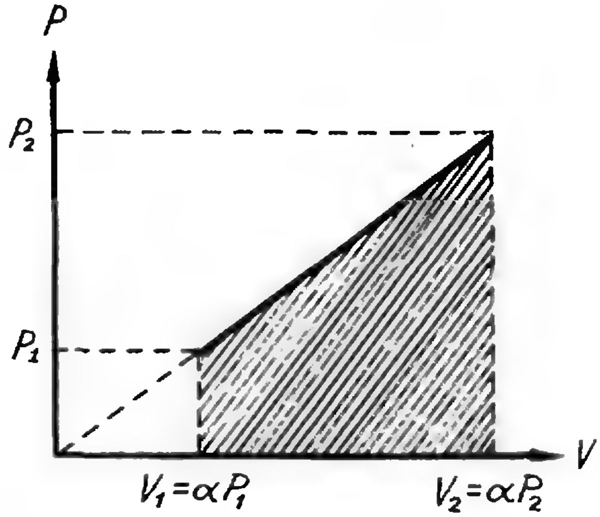


Рис. 10.

Из закона сохранения энергии следует, что количество тепла, сообщенного газу во время процесса, равно сумме изменения внутренней энергии газа $\Delta W_{вн}$ и работы A, совершенной газом во время процесса:

$$Q = \Delta W_{вн} + A.$$

Изменение внутренней энергии газа точно такое же, каким оно было бы при изохорическом процессе — это изменение определяется разностью температур газа ΔT (см., например, решение задачи Ф4 в «Кванте» № 7 за 1970 г.):

$$\Delta W_{вн} = c_V\,\Delta T.$$

Поэтому

$$Q = c_V \Delta T + A. \qquad (2)$$

Работа, совершенная газом, равна площади трапеции под графиком зависимости P от V (рис. 10):

$$A = (V_2 - V_1)\,\frac{(P_2 + P_1)}{2} =$$

$$= \frac{(\alpha P_2 - \alpha P_1)(P_2 + P_1)}{2} = \frac{\alpha (P_2^2 - P_1^2)}{2}.$$

Таким образом,

$$Q = c_V \Delta T + \frac{\alpha (P_2^2 - P_1^2)}{2}. \qquad (3)$$

Выразим ΔT через P_1 и P_2. Запишем уравнение газового состояния для начального и конечного состояний газа:

$$P_1 V_1 = RT_1,$$
$$P_2 V_2 = RT_2,$$

или

$$\alpha P_1^2 = RT_1,$$
$$\alpha P_2^2 = RT_2.$$

Вычитая из второго равенства первое, найдем

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\alpha (P_2^2 - P_1^2)}{R}.$$

Теперь, подставив это выражение для ΔT в формулу (3), получим

$$Q = \frac{c_V \alpha}{R}\left(P_2^2 - P_1^2\right) + \frac{\alpha}{2}\left(P_2^2 - P_1^2\right).$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{2QR}{(2c_V + R)(P_2^2 - P_1^2)}.$$

Ф156

Имеется бесконечная проволочная сетка с прямоугольной ячейкой. Сопротивление каждой из проволок, составляющих ячейку сетки, равно r. Найти сопротивление сетки между точками A и B (рис. 11).

Пусть к точкам A и B подключен источник с разностью потенциалов на зажимах U (внутреннее сопротивление источника несущественно и его можно считать равным нулю). Пусть ток, идущий по подводящим проводам, равен I. Тогда $U = IR$, где R — сопротивление цепочки между точками A и B. С другой стороны; если по проводнику AB идет ток I_1, то согласно закону Ома $U = I_1 r$. Это означает, что

$$I_1 r = IR \text{ и } R = \frac{I_1}{I} r.$$

Таким образом, для того чтобы найти сопротивление цепочки, необходимо найти связь между токами I и I_1.

Ток I_1 можно рассматривать как суперпозицию двух токов. Если бы ток I «втекал» в точку A и растекался бы по цепочке, «вытекая» из нее на бесконечности, то по проводнику AB, как это следует из симметрии, шел бы ток $I/4$. Точно так же, если бы из бесконечности в цепочку поступал ток I, который затем «вытекал» бы из точки B, то по проводнику AB тоже шел бы ток $I/4$. В действительности, когда ток I «входит» в точку A и «вытекает» из точки B, то по проводнику AB идет ток, равный $I_1 = I/4 + I/4 = I/2$. Поэтому

$$R = \frac{I/2}{I} r = \frac{1}{2} r.$$

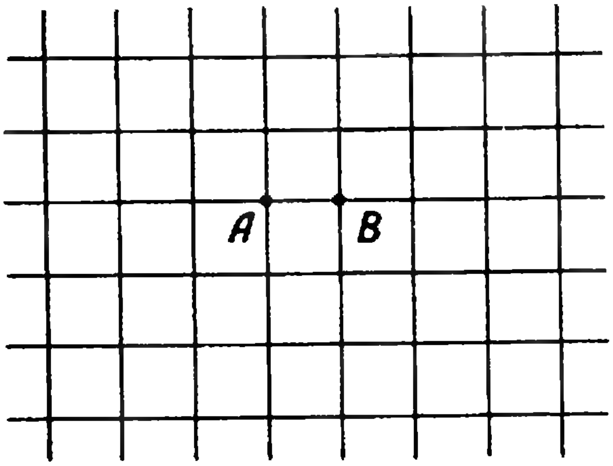


Рис. 11.

Ф157

По плоскости катится обруч. Ускорение центра обруча равно a. Найти ускорения точек A, B, C и D обруча (рис. 12) через время t после начала его движения, если начальная скорость центра обруча равна v_0 и обруч не проскальзывает.

В системе координат, связанной с центром обруча, ускорение каждой из точек обруча равно сумме центростремительного ускорения $a_ц = \frac{v^2}{R}$ (v — линейная скорость точек обруча) и тангенциального (касательного) ускорения (рис. 12, *а*). Так как обруч не проскальзывает, то линейная скорость точек обруча в любой момент времени равна скорости его центра в системе координат, связанной с Землей. Это означает, что изменение линейной скорости обруча в единицу времени, то есть касательное ускорение точек обруча, равно ускорению центра обруча, то есть a.

Для того чтобы вычислить центростремительное ускорение точек обруча через время t после начала движения, нужно знать их линейную скорость в этот момент. Она равна

$$v = v_0 + at.$$

Поэтому

$$a_ц = \frac{(v_0 + at)^2}{R}.$$

Для того чтобы найти ускорения точек обруча в системе координат, связанной с Землей, нужно к векторам ускорения точек прибавить вектор **a** ускорения центра обруча (рис. 12, *б*). Таким образом, мы найдем:

$$a_A = \sqrt{a^2 + (a_ц + a)^2} = \sqrt{a^2 + \left[\frac{(v_0 + at)^2}{R} + a\right]^2},$$

$$a_B = \sqrt{(2a)^2 + a_ц^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{(v_0 + at)^4}{R^2}},$$

$$a_C = \sqrt{a^2 + (a_ц - a)^2} = \sqrt{a^2 + \left[\frac{(v_0 + at)^2}{R} - a\right]^2},$$

$$a_D = a_ц = \frac{(v_0 + at)^2}{R}.$$

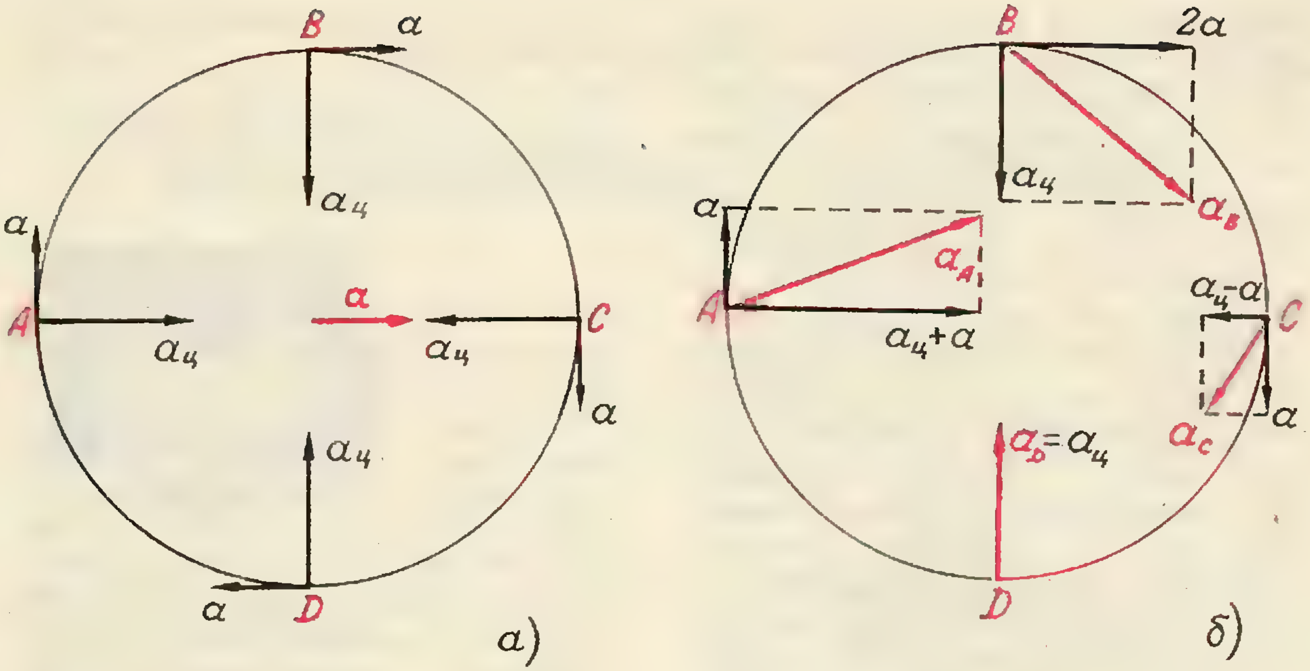


Рис. 12.

Ф158

Гантелька, расположенная горизонтально, падает с высоты h и ударяется одним из концов о стол (рис. 13). Какое расстояние пролетит гантелька после удара до того, как она опять станет горизонтальной?

Гантелька состоит из двух одинаковых тяжелых шариков, насаженных на невесомый стержень длины l. Удар гантельки о стол абсолютно упруг. Стол после удара мгновенно убирают.

Упав с высоты h, гантелька в момент удара о стол имела скорость

$$v=\sqrt{2gh}.$$

Так как удар шарика гантельки о стол можно считать мгновенным, то влияние второго шарика на столкновение со столом можно не учитывать. Это означает, что шарик сталкивается со столом так же, как если бы он был один и не был прикреплен к стержню: при ударе скорость и импульс этого шарика изменяются на противоположные, а импульс и скорость второго шарика не меняются.

Рассмотрим движение гантельки в системе координат, связанной с центром стержня — центром масс системы. Эта система координат движется вниз с ускорением g и сразу же после удара шарика о стол имеет скорость, равную 0. В этой системе скорости шариков после удара о стол равны по абсолютной величине v и направлены в разные стороны. Это означает, что в системе координат, связанной с центром масс, гантелька после столкновения со столом будет вращаться, причем линейная скорость вращения шариков равна v. Гантелька вновь станет горизонтальной, когда шарики совершат половину оборота вокруг центра стержня, то есть через время

$$t=\frac{\pi\frac{l}{2}}{v}=\frac{\pi l}{2v}=\frac{\pi l}{2\sqrt{2gh}}.$$

За это время центр стержня пролетит расстояние

$$H=\frac{gt^2}{2}=\frac{1}{16}\frac{\pi^2 l^2}{h}.$$

Редакция получила около 400 писем с решениями задач Ф148 — Ф158. Почти все читатели успешно справились с задачей Ф158. Правильные решения остальных задач прислали: *А. Айрапетян* (Ереван) Ф149; *О. Аганина* (Москва) Ф152, Ф155; *М. Аксман* (Ростов-на-Дону) Ф152; *Ш. Атакулов* (Фергана) Ф152; *А. Баевский* (Гомель) Ф148, Ф152; *Ю. Беленко* (Наманган) Ф155; *В. Белов* (Вологда) Ф148, Ф149, Ф151, Ф155, Ф156; *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.) Ф149 — Ф152; *Л. Брагинский* (Фрунзе)

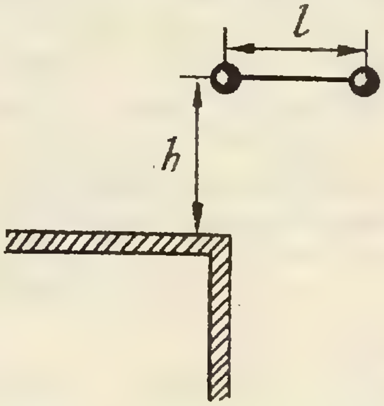


Рис. 13.

Ф148, **Ф149**, **Ф153**, **Ф156**, **Ф157**; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) **Ф149**, **Ф156**; *Б. Волин* (Москва) **Ф154**; *С. Вилкомир* (Саваслейка Горьковской обл.) **Ф152**; *В. Векштейн* (Киев) **Ф152**; *Вайнтрауб* (Кишинев) **Ф152**; *А. Глушковский* (Ленинград) **Ф148**, **Ф155**; *А. Григорян* (Баку) **Ф154**; *С. Доронин* (Волгоград) **Ф148**, **Ф149**, **Ф152**; *С. Дроздов* (Томск) **Ф148**; *В. Дорошенко* (Кобрин Брестской обл.) **Ф149**; *М. Драгинский* (Тбилиси) **Ф152**; *Ю. Ильиных* (Крощьин Краснодарского края) **Ф155**; *С. Карпенко* (Киев) **Ф154**, **Ф155**; *В. Колосов* (Киев) **Ф154**; *В. Карпинский* (Свердловск) **Ф151**; *А. Каролинский* (Пинск Брестской обл.) **Ф149**; *И. Корепанов* (Днепропетровск) **Ф148**; *С. Корнилов* (Грозный) **Ф149**, **Ф152**; **Ф153**, **Ф155**, **Ф157**; *С. Кондратьев* (Куйбышев) **Ф149**, **Ф151**; *С. Кузьмин* (Житомир) **Ф148**, **Ф149**, **Ф152**; *А. Колесников* (Ленинград) **Ф153**, **Ф155**; *Л. Коган* (Черновцы) **Ф156**; *Г. Лутингер* (Черновцы) **Ф149**, **Ф152**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф152** — **Ф155**, **Ф157**; *Лейблер* (*Leibler*) (Варшава) **Ф154** — **Ф156**, **Ф157**; *А. Милованов* (Рязань) **Ф156**; *В. Малышев* (Александров Владимирской обл.) **Ф149**, **Ф152**; *С. Мазуренко* (Киев) **Ф149**, **Ф152**; *И. Мяцас* (Макеевка Донецкой обл.) **Ф152**; *Е. Михеева* (Гатчина Ленинградской обл.) **Ф152**; *В. Муханов* (Канаш) **Ф155**; *М. Носов* (Николаев) **Ф155**; *В. Новиков* (Саратов) **Ф154**, **Ф155**, **Ф157**; *А. Осин* (Саратов) **Ф148**, **Ф152**; *А. Орлов* (Люберцы Московской обл.) **Ф155**; *С. Пушков* (Новочеркасск) **Ф148**, **Ф149**, **Ф152**; *Г. Поляков* (Бармино Горьковской обл.) **Ф149**; *А. Панин* (Гомель) **Ф155**; *С. Поташев* (Ульяновск) **Ф154**, **Ф155**; *Б. Потапкин* (Магнитогорск) **Ф154**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) **Ф155**, **Ф156**; *М. Резников* (Москва) **Ф154**; *В. Рекрут* (Киев) **Ф154**, **Ф155**, **Ф157**; *Ю. Рапопорт* (Киев) **Ф148**, **Ф152**; *С. Русецкий* (Авдеевка Донецкой обл.) **Ф149**; *Л. Рудакова* (Жирновск Донецкой обл.) **Ф155**, **Ф157**; *А. Резник* (Донецк) **Ф149**; *Ю. Сизов* (Минск) **Ф149**, **Ф157**; *С. Слепнев* (Горький) **Ф149**, **Ф152**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **Ф148**, **Ф152**; *В. Силкин* (Калинин) **Ф149**, **Ф152**, **Ф155**, **Ф157**; *М. Симкин* (Москва) **Ф153**, **Ф154**, **Ф157**; *А. Сбоев* (Кировская обл.) **Ф154**, **Ф156**; *О. Трусов* (Джалал-Абад) **Ф153**; *Б. Трейгер* (Кировоград) **Ф149**, **Ф152**; *Н. Федин* (Омск) **Ф153** — **Ф155**, **Ф157**; *Д. Фурман* (Черновцы) **Ф152**; *С. Хоменко* (Подольск Московской обл.) **Ф155**, **Ф157**; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) **Ф155**; *В. Чертков* (Крамоторск) **Ф154**, **Ф155**; *А. Шуркус* (Шауляй) **Ф149**; *В. Шифрин* (Ростов-на-Дону) **Ф149**, **Ф152**, **Ф155**; *Е. Шуншанин* (Актюбинск) **Ф155**; *Е. Шестопалов* (д. Ровковичи Гомельской обл.) **Ф155**; *И. Юрченко* (Киев) **Ф149**, **Ф155**; *Р. Ямондинов* (Глазов) **Ф155**, **Ф157**; *Ю. Яковчук* (Николаев) **Ф149**, **Ф152**.

И. Ш. Слободецкий

(Окончание. Начало см. на стр. 25.)

Парные дни рождения

При каком минимальном числе людей в компании вероятность того, что хотя бы два из них родились в один и тот же день, не меньше $^1/_2$?

(Годы рождения могут и не совпадать.)

На краю утеса

Пьяница стоит на расстоянии одного шага от края пропасти. Он шагает случайным образом либо к краю утеса либо от него. На каждом шагу вероятность отойти от края равна 2/3, а шаг к краю утеса имеет вероятность 1/3. Каковы шансы пьяницы избежать падения?

Игла Бюффона

На плоскость нанесены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии $2a$. Игла длины $2l$ (меньшей, чем $2a$) брошена наудачу на плоскость. Какова вероятность того, что она пересечет одну из прямых?

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Е. М. Гершунов

На вступительных экзаменах в вузы все чаще предлагаются примеры или задачи, основным или составным элементом которых является неравенство, содержащее неизвестную величину под знаком радикала (иррациональное неравенство). Практика показывает, что у большинства абитуриентов решение иррациональных неравенств вызывает затруднения. Причина этого, по-видимому, состоит в том, что школьные программы и учебники по математике не содержат данной темы.

Эта статья не преследует цели осветить все вопросы, относящиеся к решению иррациональных неравенств. Основное внимание здесь уделено решению иррациональных неравенств, содержащих радикалы второй степени.

Предварительно докажем следующую теорему, играющую основную роль при решении иррациональных неравенств.

Теорема. *Если* $f(x)\geqslant 0$ *и* $g(x)\geqslant 0$, *то неравенства* $f(x)\geqslant g(x)$ и $[f(x)]^2\geqslant [g(x)]^2$ *равносильны.*

Доказательство. Надо определить знак разности

$$[f(x)]^2-[g(x)]^2. \qquad (1)$$

Разложим (1) на множители:

$$[f(x)]^2-[g(x)]^2=$$
$$=[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]. \qquad (2)$$

Первый множитель в правой части по условию неотрицателен. Если он положителен, то знак разности (1) совпадает со знаком второго множителя в (2), а если $f(x)+g(x)=0$, то $f(x)=0$ и $g(x)=0$, и опять неравенства равносильны.

Легко доказать, что эта теорема остается справедливой, если все знаки нестрогого неравенства $\geqslant$ заменить на знаки строгого неравенства $>$ (проведите доказательство самостоятельно).

Пример 1. *Решить неравенство*

$$\sqrt{4+3x-x^2}<2.$$

Решение. Сначала определим ОДЗ: $-1\leqslant x\leqslant 4$. Левая часть неравенства неотрицательна, а правая положительна, поэтому возведем обе части в квадрат. Получим равносильную систему неравенств

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 4,\\ 3x-x^2<0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 4,\\ x>3,\ x<0.\end{cases}$$

Ответ: $3<x\leqslant 4$, $-1\leqslant x<0$.

Пример 2. *Решить неравенство*

$$\sqrt{4+3x-x^2}>-2.$$

Решение. ОДЗ то же самое: $-1\leqslant x\leqslant 4$. Заметим, что в ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна, поэтому применить доказанную теорему нельзя. Но в этом и нет необходимости. Действительно, радикал имеет арифметическое значение, следовательно, любое его значение в ОДЗ удовлетворяет данному неравенству. Поэтому ответом является $-1\leqslant x\leqslant 4$.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2-5x+4}<x-3.$$

Решение. ОДЗ: $x\geqslant 4$, $x\leqslant 1$. Так как правая часть содержит неизвестную величину, то последовательно рассмотрим два случая:

$$1)\ x-3>0,\quad 2)\ x-3\leqslant 0.$$

В первом случае воспользуемся

доказанной теоремой и получим равносильную систему

$$\begin{cases} x \geq 4,\ x \leq 1, \\ x-3>0, \\ x^2-5x+4<(x-3)^2, \end{cases}$$

откуда $4 \leq x < 5$.

Во втором случае исходное неравенство решений не имеет, так как арифметическое значение корня не может быть меньше неположительного числа.

Ответ: $4 \leq x < 5$.

Пример 4. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2-5x-24}>x-2.$$

Решение. ОДЗ: $x \geq 8$, $x \leq -3$. Рассмотрим два случая: 1) $x-2 \geq 0$, 2) $x-2<0$.

В первом случае правая часть неотрицательна, и, воспользовавшись теоремой, мы получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 8, \quad x \leq -3, \\ x-2 \geq 0, \\ x^2-5x-24>(x-2)^2, \end{cases}$$

которая решений не имеет.

Во втором случае по определению радикала четной степени исходное неравенство удовлетворяется во всей области допустимых значений. Решая систему

$$\begin{cases} x-2<0, \\ x \geq 8,\ x \leq -3, \end{cases}$$

находим ответ: $x \leq -3$.

Пример 5. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+3}.$$

Решение. ОДЗ: $x \geq 2$. Так как обе части неравенства положительны, то воспользовавшись основной теоремой, получим равносильную систему равенств

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 2\sqrt{(x-1)(x-2)}>6-x. \end{cases}$$

Эту систему решаем, рассматривая два случая:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 6-x \geq 0, \\ 4(x^2-3x+2)>(6-x)^2, \end{cases}$$

откуда $\sqrt{\frac{28}{3}}<x \leq 6$, и

$$\left\{\begin{matrix} 6-x<0 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\}$$

откуда $x>6$.

Ответ: $x>\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Пример 6. *Решить неравенство*

$$\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x+3}>0.$$

Решение. ОДЗ определяется условием существования радикала: $x \geq 2$, $x \leq -1$. При $x>2$, $x<-1$ числитель дроби принимает положительные значения, поэтому переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x>2,\ x<-1, \\ x^2+2x+3>0. \end{cases}$$

Второе неравенство системы удовлетворяется при любых действительных значениях x, откуда получаем ответ: $x>2$, $x<-1$.

Упражнения

Решить неравенства:

1. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0.$
2. $x<\sqrt{2-x}.$
3. $x+1>\sqrt{x+2}.$
4. $\sqrt{4+3x-x^2}<x-1.$
5. $\sqrt{2x^2-8x+7}<x-2.$
6. $\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{4}}>\dfrac{2}{x}-1.$
7. $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}>5.$
8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}<3.$
9. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1.$
10. $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x.$
11. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1.$
12. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{2x+1}-1.$
13. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9.$
14. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x|-|x-2|}<0.$

О некоторых иррациональных уравнениях

В. М. Розентуллер

Приемы решения иррациональных уравнений подробно разбирались в статье А. М. Григорьева «Иррациональные уравнения» («Квант» № 1, 1972). Но общий прием не всегда является наилучшим. В этой статье на трех примерах демонстрируется один метод, позволяющий быстро и «красиво» решать некоторые (на самом деле не только иррациональные) уравнения.

Пример 1. *Решить уравнение*:

$$\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}=8.$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x-30\geqslant 0, \\ 2x+4\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$x\geqslant 30.$$

Далее можно действовать так. Возведем обе части в квадрат, получим:

$$x-30+2x+4+$$
$$+2\sqrt{2x^2-56x-120}=64,$$
$$2\sqrt{2x^2-56x-120}=90-3x.$$

Нам снова предстоит возвести обе части этого уравнения в квадрат*):

$$8x^2-224x-480=8100-540x+9x^2,$$
$$x^2-316x+8580=0,\ x_{1,2}=158\pm$$
$$\pm\sqrt{158^2-8580}=158\pm\sqrt{16884}=$$
$$=158\pm 128;$$
$$x_1=286,\ x_2=30.$$

Проверка показывает, что $x_1=286$ — посторонний корень, а x_2 удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: $x=30$.

Уравнение мы решили, это потребовало двукратного возведения в квадрат и проверки корней. Нет ли более простого решения?

Мы уже определили ОДЗ: $x\geqslant 30$. Нельзя ли при решении данного уравнения сразу этим воспользоваться? Попробуем.

ОДЗ допускает: $x=30$ и $x>30$. Проверим $x=30$. Подставим значение $x=30$ в данное уравнение:

$$\sqrt{30-30}+\sqrt{60+4}=8,$$
$$0+8=8,$$
$$8=8.$$

Получили тождество. Следовательно, $x=30$ является корнем данного уравнения. Теперь остается проверить $x>30$.

При $x>30$ имеем $\sqrt{x-30}>0$, $\sqrt{2x+4}>8$, откуда

$$\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}>8.$$

Следовательно, любое $x>30$ не удовлетворяет уравнению. Остается единственный ответ: $x=30$.

Пример 2. *Решить уравнение*:

$$5\sqrt{2x-24}+3\sqrt{5x-59}+\sqrt{x-8}+$$
$$+\sqrt{3x-20}+\sqrt{x+13}+$$
$$+2\sqrt{x+24}=26.$$

Решение. ОДЗ определяется

---

*) В данном случае уже из последнего уравнения видно, что $x\leqslant 30$, и надо проверить лишь $x=30$, но это случайность.

системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 12, \\ x \geqslant 11{,}8, \\ x \geqslant 8, \\ x \geqslant 6\frac{2}{3}, \\ x \geqslant -13, \\ x \geqslant -24, \end{cases}$$

откуда $x \geqslant 12$.

Таким образом, ОДЗ допускает: $x=12$ и $x>12$.

Проверим $x=12$: $5\sqrt{24-24}+3\sqrt{60-59}+\sqrt{12-8}+\sqrt{36-20}+\sqrt{12+13}+2\sqrt{12+24}=$ $=0+3+2+4+5+12=26$.

Получили тождество. Следовательно, $x=12$ является корнем уравнения.

Теперь проверим $x>12$:

$$5\sqrt{2x-24}>0,$$

$$3\sqrt{5x-59}>3,$$

$$\sqrt{x-8}>2,$$

$$\sqrt{3x-20}>4,$$

$$\sqrt{x+13}>5,$$

$$2\sqrt{x+24}>12.$$

Отсюда $5\sqrt{2x-24}+3\sqrt{5x-59}+\sqrt{x-8}+\sqrt{3x-20}+\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+24}>26$,

что противоречит условию задачи. Остается единственный ответ: $x=12$.

Пример 3. *Решить уравнение*:

$$\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x+3}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Решение. Сгруппируем члены уравнения так: $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$. Возведем обе части в квадрат:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+$$

$$+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=x+3,$$

$$2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=$$

$$=x+3-x^2-x-1-\frac{1}{x^2},$$

$$2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$$

Известно, что $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$, но $\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}\geqslant 0$, поэтому $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ и

$$\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=0.$$

Первое равенство возможно, когда $x^2=1$, откуда $x_1=1$; $x_2=-1$, а второе $\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=0$ тогда, когда $x=-1$. Проверка показывает, что $x=-1$ является корнем уравнения.

Ответ на кроссворд
(см. 4-ю стр. обложки)

По горизонтали:
8. Фарада. 9. Апогей. 10. Сдвиг. 11. Частота. 12. Гаусс. 15. Инерция. 16. Диаметр. 18. Эбонит, 19. Бор. 20. Будкер. 23. Отрезок. 25. Кельвин. 28. Квант. 29. Калория. 30. Фотон. 33. Работа. 34. Нуклон.

По вертикали:
1. Дирак. 2. Кулон. 3. Спектр. 4. Катион. 5. Ванадий. 6. Маятник. 7. Декарт. 13. Архимед. 14. Импульс. 17. Бор. 21. Токамак. 22. Медиана. 24. Тантал. 26. Изотоп. 27. Лоренц. 31. Фотон. 32. Якоби.

ГИДРОСТАТИКА

Л. Г. Асламазов

Жидкость оказывает давление на стенки сосуда, в котором она находится, или на любую другую поверхность, соприкасающуюся с ней. Давление — величина скалярная. Оно измеряется абсолютной величиной силы, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности:

$$p = F/S$$

(рис. 1). Давление в различных точках поверхности может быть разным. Поэтому площадь S мы должны брать достаточно маленькой.

По закону Паскаля давление жидкости не зависит от ориентации поверхности. Как бы ни была расположена поверхность в данном месте жидкости, давление на нее будет одним и тем же.

Сила давления всегда перпендикулярна поверхности. В обычных условиях она направлена так, как если бы жидкость стремилась расшириться.

Задача 1. *В сосуд, имеющий форму куба с ребром a, налита доверху жидкость плотности ρ. Определить силы давления жидкости на дно и на стенки сосуда.*

Давление жидкости на дно сосуда равно весу столба жидкости высотой a с площадью основания, равной единице (рис. 2): $p_1 = \rho g a$, где g — ускорение свободного падения (для простоты здесь и в других задачах, где это специально не оговорено, предполагается, что атмосферное давление отсутствует). Сила давления на дно сосуда

$$F_1 = p_1 S = \rho g a^3.$$

Давление на боковую грань куба будет зависеть от расстояния до поверхности жидкости. На глубине h давление $p = \rho g h$. Так как давление изменяется с глубиной по линейному закону, то для определения силы давления мы должны среднее давление

$$p_{\text{ср}} = \frac{\rho g a + 0}{2} = \frac{\rho g a}{2}$$

умножить на площадь боковой грани:

$$F_2 = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

Задача 2. *В цилиндрический сосуд с диаметром $D = 0{,}2$ м вставлен поршень с длинной вертикальной трубкой диаметра $d = 0{,}05$ м (рис. 3). Максимальная сила трения между поршнем и стенками сосуда $F_{\text{тр}} = 100$ н. Через трубку в сосуд наливают воду. Определить, при каком уровне воды в трубке H поршень начнет двигаться. Чему будет равна при*

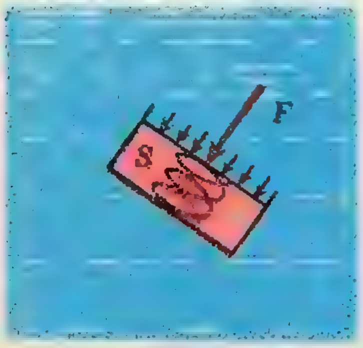


Рис. 1.

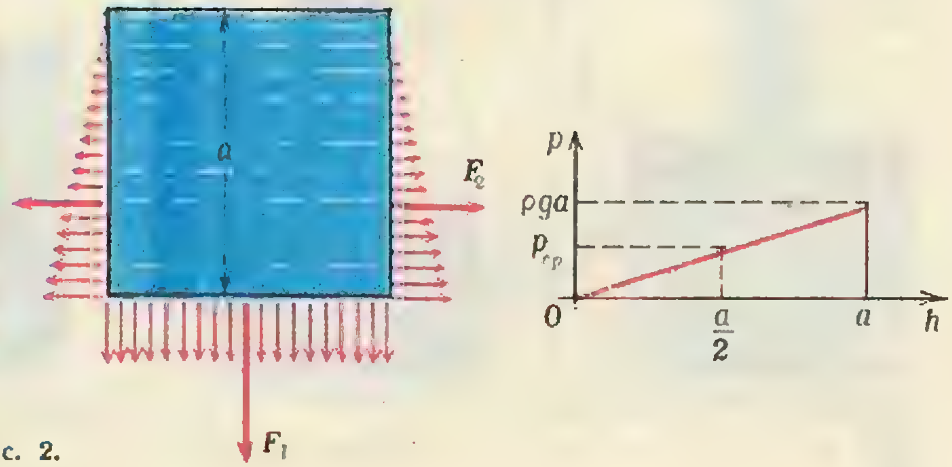


Рис. 2.

этом сила давления воды на дно сосуда? Поршень расположен на высоте $h=0{,}2$ *м от дна сосуда. Плотность воды* $\rho=10^3\,\frac{кг}{м^3}$. *Массой поршня с трубкой пренебречь.*

Давление в жидкости на уровне нижней поверхности поршня определяется расстоянием от этого уровня до свободной поверхности жидкости: $p_1=\rho g(H-h)$. Поршень начнет двигаться, когда сила давления на него со стороны жидкости станет равной максимальной силе трения: $p_1(S-s)=F_{тр}$, где $S=\pi D^2/4$ и $s=\pi d^2/4$ — площади поперечных сечений сосуда и трубки соответственно. Подставляя сюда выражение для p_1, находим:

$$H=h+\frac{4F_{тр}}{\pi\rho g\,(D^2-d^2)}=0{,}5\ м.$$

Давление на дно сосуда $p_2=\rho gH$. Сила давления

$$F=p_2S=\rho gH\,\frac{\pi D^2}{4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\rho ghD^2+\frac{F_{тр}D^2}{D^2-d^2}\approx 160\ н.$$

З а д а ч а 3. *Длинная вертикальная труба с поршнем опущена одним концом в сосуд с водой (рис. 4). Вначале поршень находится у поверхности воды, затем его медленно поднимают. Как зависит сила, прикладываемая к поршню, от высоты* h *его поднятия? Площадь поперечного сечения трубы* S, *атмосферное давление* p_0. *Изменением уровня воды в сосуде, массой поршня и его трением о стенки трубы пренебречь.*

При поднятии поршня вода под действием атмосферного давления будет вначале заполнять трубу (рис. 4,*а*). Давление в трубе на уровне жидкости в сосуде равно атмосферному давлению p_0. Давление воды на поршень меньше атмосферного на величину веса столба жидкости высотой h и площадью основания, равной единице: $p=p_0-\rho gh$. Сверху на поршень по-прежнему действует атмосферное давление. Поэтому для удержания поршня на высоте h к нему надо приложить силу $F=(p_0-p)S=\rho ghS$, направленную вверх.

С увеличением h давление воды на поршень p будет уменьшаться. На высоте $h_0=p_0/\rho g\approx 10$ м $\left(p_0=1\,\frac{кГ}{см^2}=9{,}8\cdot 10^4\,\frac{н}{м^2}\right)$ давление обратится в нуль. При дальнейшем поднятии поршня (рис. 4, *б*) уровень воды

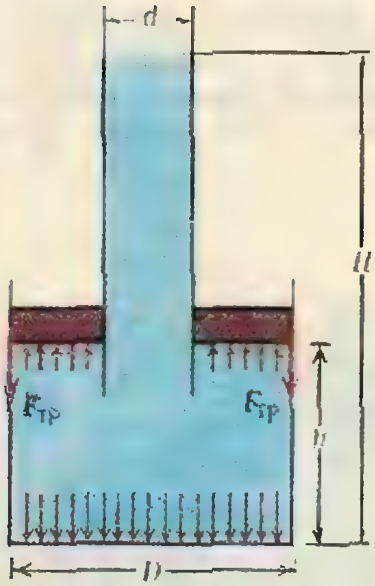


Рис. 3.

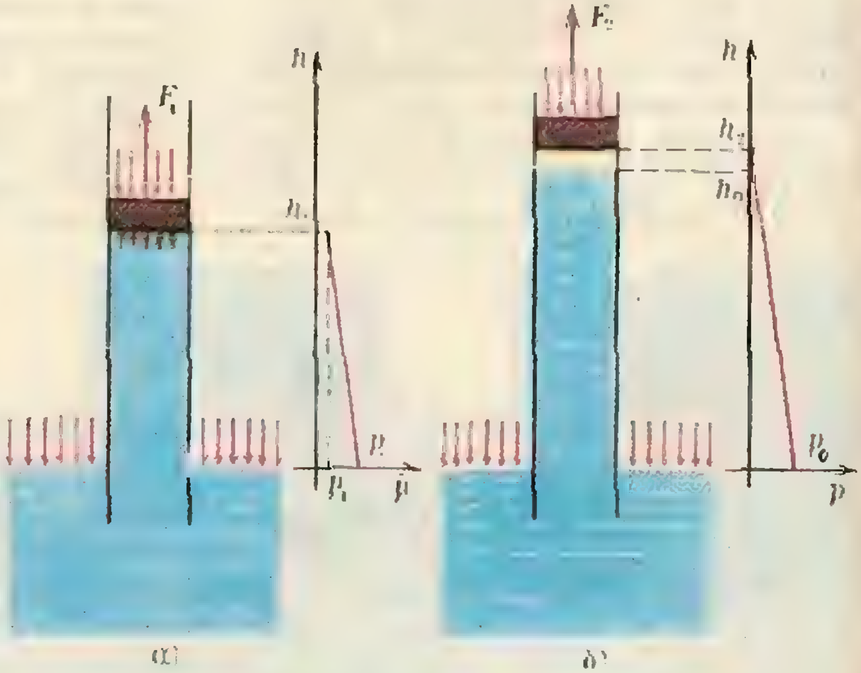


Рис. 4.

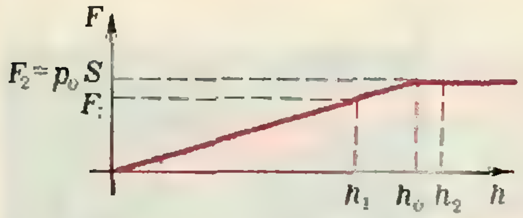


Рис. 5.

в трубе изменяться не будет, так как атмосферное давление, действующее на столб жидкости в трубе снизу, уравновесится силой тяжести. Для удержания поршня на высоте $h > h_0$ к нему надо приложить силу $F = p_0 S$. Зависимость прикладываемой к поршню силы F от высоты его поднятия h изображена графически на рисунке 5.

Высота столба воды в трубе $h_0 = p_0/\rho g$, очевидно, может служить для измерения атмосферного давления p_0. Однако обычно в барометрах используют ртуть, и нормальному атмосферному давлению $p_0 = 1$ *кГ/см²* тогда соответствует значительно меньшая высота столба ртути $h_{рт} = p_0/\rho_{рт} g = 0,76$ *м* (плотность ртути $\rho_{рт} = 1,36 \cdot 10^4$ *кг/м³*).

Примером другого гидростатического устройства, широко используемого в практике, являются сообщающиеся сосуды. Известен закон сообщающихся сосудов: если давление над жидкостью в сосудах одинаково, то уровни жидкости в них равны. Нетрудно доказать этот закон для случая цилиндрических сосудов (рис. 6). Так как жидкость в соединительной трубке находится в равновесии, то давления на нее с обеих сторон должны быть одинаковы. Поэтому равны и уровни жидкости в сосудах.

В общем случае для доказательства закона сообщающихся сосудов можно воспользоваться принципом отвердевания, который часто используют в гидростатике. Суть этого принципа заключается в следующем: всегда можно представить себе, что часть жидкости отвердела — равновесие оставшейся части жидкости от этого не нарушится. Так, в цилиндрических сообщающихся сосудах мы можем мысленно выделить часть жидкости, которая заполняла бы сообщающиеся сосуды любой извилистой формы (рис. 6), и представить себе, что остальная часть жидкости отвердевает. Тогда равновесие выделенной нами части жидкости не нарушится и, следовательно, уровни жидкости в извилистых сообщающихся сосудах будут такими же, какими были в цилиндрических сосудах, то есть одинаковыми.

Закон сообщающихся сосудов справедлив только для однородной жидкости. Если в сосуды налиты жидкости разной плотности, то уровни в сосудах могут быть разными.

Задача 4. *В U-образную трубку налита ртуть. Поверх ртути в одно из колен трубки налили воду (рис. 7). Высота столбика воды $l = 0,1$ м. Определить разность уров-*

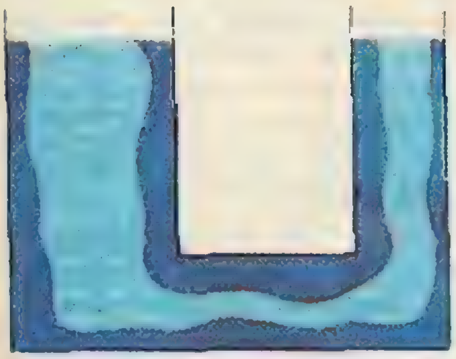


Рис. 6.

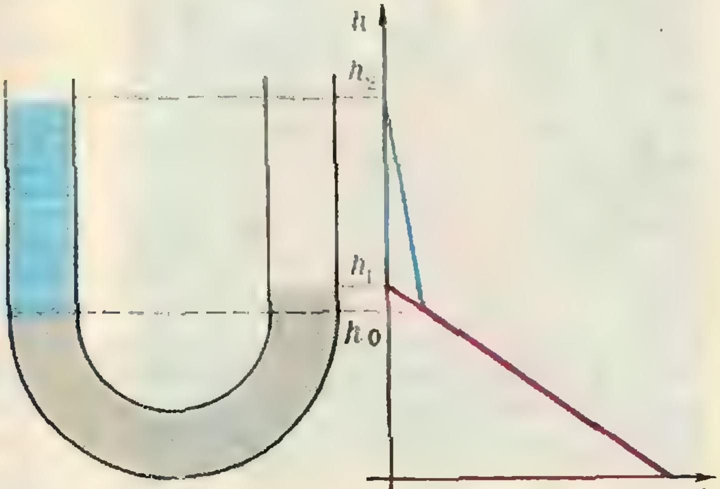


Рис. 7.

ней жидкостей в коленах трубки. Нарисовать зависимость давления в обоих коленах трубки от высоты. Плотность ртути $\rho_{\text{рт}}=1{,}36\cdot 10^4$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}}=10^3$ кг/м³. Атмосферное давление не учитывать.

Давление на ртуть на уровне h_0 соприкосновения воды и ртути (рис. 7) в обоих коленах должны быть одинаковыми (закон сообщающихся сосудов для однородной жидкости). Поэтому: $\rho_{\text{в}}gl=\rho_{\text{рт}}g(l-\Delta h)$, где разность уровней h_2-h_1 обозначена через Δh. Отсюда $\Delta h=(\rho_{\text{рт}}-\rho_{\text{в}})\;l/\rho_{\text{рт}}\approx 0{,}09$ м.

Давление в колене, содержащем только ртуть, меняется с высотой h по закону $p_1=\rho_{\text{рт}}g(h_1-h)$. Эта формула справедлива и в изогнутой части трубки. (Представьте себе, что изогнутое колено сообщается с прямым цилиндрическим сосудом, в котором тоже находится ртуть; тогда давления на одинаковой высоте в обоих сосудах должны быть равны.)

В другом колене в области $h_0<h<h_2$, где находится только вода, давление $p_2=\rho_{\text{в}}g(h_2-h)$. Ниже уровня h_0 зависимость давления от высоты дается той же формулой, что и в первом колене: $p_1=\rho_{\text{в}}gl+\rho_{\text{рт}}g(h_0-h)=\rho_{\text{рт}}g(h_1-h)$.

Зависимость давления в коленах трубки от высоты изображена графически на рисунке 7. Как видно, выше уровня h_0 давления на одинаковой высоте разные.

На тело, погруженное в жидкость, как известно, действует выталкивающая сила. Эта сила является равнодействующей сил давления жидкости на тело. Найдем, например, выталкивающую силу, действующую на кубик с ребром a, целиком погруженный в жидкость плотности ρ. Сила давления со стороны жидкости на верхнюю грань кубика равна $F_1=\rho gha^2$, где h — расстояние от этой грани до поверхности жидкости (для простоты мы считаем, что плоскость верхней грани кубика параллельна поверхности жидкости). На нижнюю грань кубика действует сила $F_2=\rho g(h+a)a^2$. Силы давления на боковые грани кубика уравновешивают друг друга. Равнодействующая сил давления, то есть выталкивающая сила, равна $F=F_2-F_1=\rho ga^3$ и направлена вертикально вверх. Мы получили закон Архимеда: выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость.

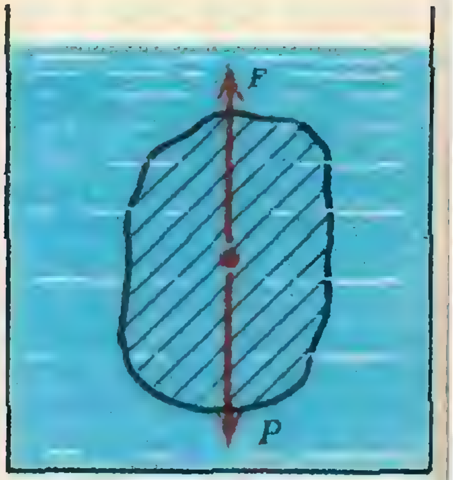
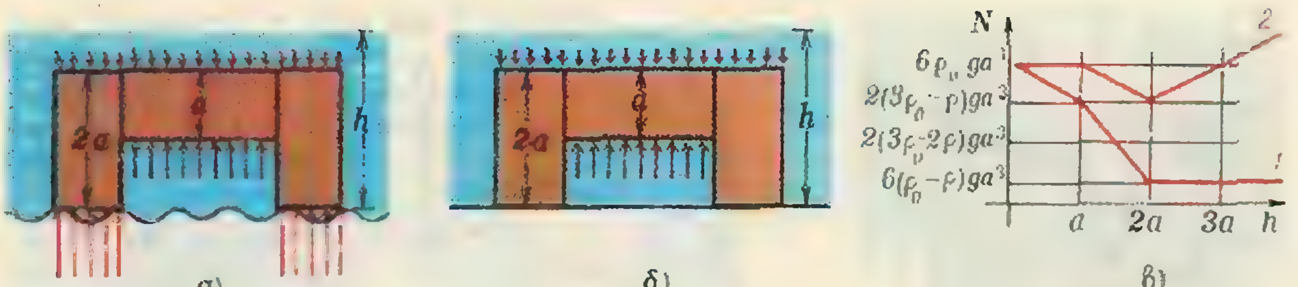


Рис. 8.

В общем случае закон Архимеда можно доказать с помощью принципа отвердевания. Мысленно заменим погруженное тело жидкостью (рис. 8). Очевидно, что эта жидкость будет находиться в равновесии. Следовательно, сила тяжести P, действующая на нее, уравновешена силами давления со стороны окружающей жидкости. Если теперь представить себе, что выделенная нами часть отвердела, то равновесие оставшейся части не нарушится, и поэтому не изменятся силы давления на отвердевшую жидкость. Равнодействующая этих сил F будет по-прежнему равна силе тяжести P.

При доказательстве мы считали, что тело целиком погружено в жидкость. Однако аналогичные рассуждения легко провести и в случае, когда только часть тела находится в жидкости (проделайте это сами). И мы опять получим, что выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость: $F=\rho gV$, где ρ — плотность жидкости, V — объем погруженной в жидкость части тела, g — ускорение свободного падения.



а) б) в)

Рис. 9.

Задача 5. *На дне водоема установлена П-образная конструкция из трех одинаковых балок, соединенных между собой (рис. 9). Как зависит сила давления этой конструкции на дно от уровня воды в водоеме? Рассмотрите два случая: 1) вода подтекает под опоры; 2) опоры плотно соприкасаются с дном. Балки имеют квадратное сечение со стороной квадрата a; длина балки $l=2a$. Плотность материала балок ρ_0, плотность воды ρ.*

Сила давления на дно N определяется разностью силы тяжести конструкции $P=6\rho_0 ga^3$ и выталкивающей силы F. В первом случае, когда вода подтекает под опоры (например, если дно водоема покрыто галькой — рисунок 9, *а*), справедлив закон Архимеда. Зависимость выталкивающей силы от высоты уровня воды h дается формулами: $F=2\rho gha^2$ при $h\leqslant a$, $F=2\rho ga^3+4\rho ga^2(h-a)$ при $a\leqslant h\leqslant 2a$, $F=6\rho ga^3$ при $h\geqslant 2a$. Соответствующий график для силы N изображен на рисунке 9, *в* (он обозначен цифрой *1*).

Во втором случае отсутствует давление воды на опоры снизу (рис. 9, *б*), и пользоваться законом Архимеда уже нельзя. Для определения силы F необходимо найти равнодействующую сил давления: $F=0$ при $h\leqslant a$, $F=2\rho ga^2(h-a)$ при $a\leqslant h\leqslant 2a$, $F=2\rho ga^2(h-a)-4\rho ga^2(h-2a)$ при $h\geqslant 2a$. Последнее выражение обращается в нуль при $h=3a$ и при бóльших h становится отрицательным. Это означает, что при $h>3a$ силы давления не выталкивают конструкцию из воды, а, наоборот, прижимают ее ко дну. Зависимость силы давления N на дно от высоты уровня воды h показана на втором графике рисунка 9, *в*.

Задача 6. *Пробковый кубик с ребром $a=0{,}1$ м погрузили в воду на глубину $h=0{,}2$ м с помощью тонкостенной трубки диаметром $d=0{,}05$ м (рис. 10). Определите, какой груз надо положить в трубку, чтобы кубик от нее оторвался. Плотность пробки $\rho_0=200$ кг/м³, плотность воды $\rho=10^3$ кг/м³.*

Вес груза равен разности выталкивающей силы F, действующей на кубик, и силы тяжести кубика $P_0=\rho_0 ga^3$. Если бы кубик был окружен со всех сторон водой, то на него по закону Архимеда действовала бы выталкивающая сила $F_0=\rho ga^3$. В нашем случае выталкивающая сила будет большей, так как на

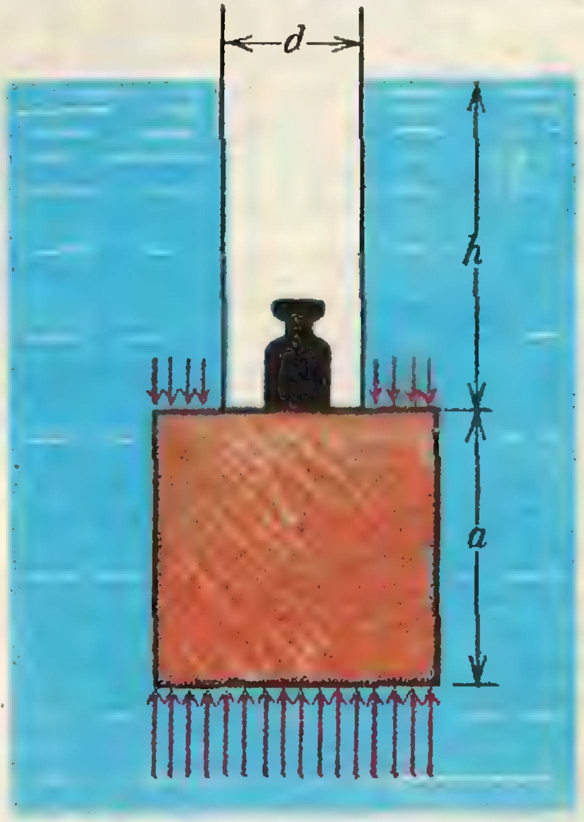


Рис. 10.

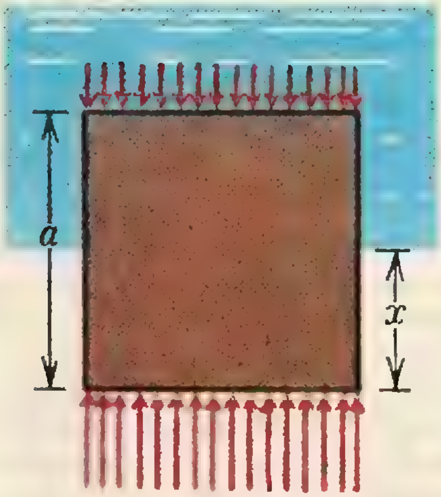


Рис. 11.

часть поверхности верхней грани кубика, «заключенную» в трубку, не действует давление воды: $F=\rho ga^3+\rho ghS$, где $S=\pi d^2/4$ — площадь сечения трубки. Таким образом, сила тяжести грузика $P=F-P_0=(\rho-\rho_0)ga^3+\pi\rho ghd^2/4\approx 12$ *н*. Масса грузика $m=P/g\approx 1{,}2$ *кг*.

Выталкивающую силу, действующую на кубик, можно найти и другим способом. Рассмотрим кубик с трубкой как единое тело, вытесняющее объем воды $V=a^3+Sh$. Тогда по закону Архимеда на кубик с трубкой действует выталкивающая сила $F=\rho gV=\rho ga^3+\rho ghS$, которая равна выталкивающей силе, действующей на кубик, так как равнодействующая сил давления воды на трубку равна нулю.

Задача 7. *Стальной кубик плотностью* $\rho_0=7{,}8\cdot 10^3$ *кг/м*^{3} *плавает на границе ртути с водой (рис. 11). Определите, какая часть его объема находится в ртути. Плотность ртути* $\rho_1=1{,}36\cdot 10^4$ *кг/м*^{3}, *плотность воды* $\rho_2=10^3$ *кг/м*^{3}.

Давление на нижнюю грань кубика p_2 больше давления на его верхнюю грань p_1 на величину силы тяжести, действующей на столб ртути высотой x и столб воды высотой $a-x$, имеющих единичное сечение: $p_2=p_1+\rho_1 gx+\rho_2 g(a-x)$, где x — глубина погружения кубика в ртуть. Поэтому выталкивающая сила $F=(p_2-p_1)S=[\rho_1 gx+\rho_2 g\,(a-x)]\,a^2$. Из этой формулы видно, что выталкивающая сила, как и следовало ожидать, равна сумме сил тяжести вытесненных жидкостей. Для тела произвольной формы это утверждение можно доказать, воспользовавшись принципом отвердевания.

Кубик будет плавать, если выталкивающая сила равна действующей на него силе тяжести $P=\rho_0 ga^3$. Из условия равенства сил F и P находим: $\frac{x}{a}=\frac{\rho_0-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\approx 0{,}54$. Таким образом, в ртути находится 0,54 часть объема кубика.

Изучим теперь равновесие жидкости в сосуде, движущемся с ускорением. По II закону Ньютона в этом случае векторная сумма всех сил, действующих на любой выделенный элемент жидкости, должна равняться $m\mathbf{a}$, где m — масса выделенной жидкости, $\mathbf{a}$ — ускорение сосуда. Но на выделенный элемент жидкости действуют сила тяжести и силы давления со стороны окружающей жидкости. Их равнодействующая и должна быть равна $m\mathbf{a}$.

Задача 8. *Сосуд с жидкостью плотности* ρ *падает с ускорением* a. *Определите давление жидкости на глубине* h *и силу давления на дно сосуда. Высота уровня воды в сосуде* H, *площадь дна сосуда* S.

Выделим столбик жидкости высоты h с площадью основания s (рис. 12). На него действуют сила тяжести $P=\rho ghs$ и сила давления ps, направленная вверх. Равнодействующая этих сил создает ускорение столбика. По II закону Ньютона: $ma=\rho ghs-ps$, где $m=\rho hs$ — масса столбика. Для давления p на глубине h отсюда находим: $p=\rho(g-a)h$. Сила давления на дно сосуда $F=\rho(g-a)HS$ будет тем меньшей, чем больше ускорение сосуда a. При $a=g$ (свободное падение) сила давления жидкости обращается в нуль — наступает состояние невесомости. При $a>g$ жидкость будет свободно падать с ускорением g, а сосуд — с бóльшим ускорением, и вода вытечет из сосуда.

Задача 9. *На дне сосуда с жидкостью лежит тело. Может ли*

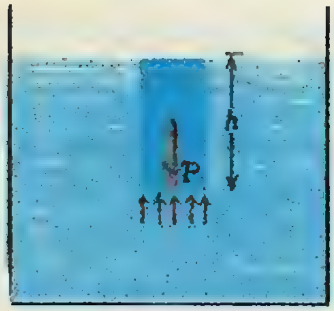


Рис. 12.

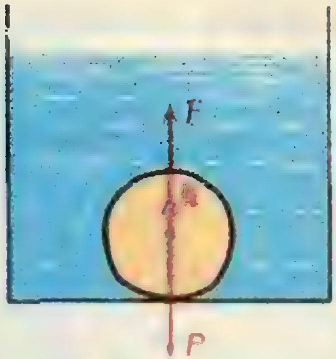


Рис. 13.

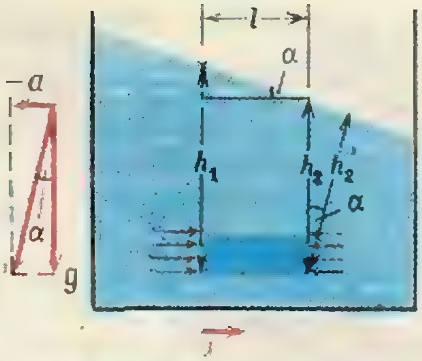


Рис. 14.

тело всплыть, если сосуд начнет двигаться вверх с ускорением? Определите силу давления тела на дно сосуда, если ускорение сосуда равно a, плотность жидкости ρ_0, плотность тела ρ, его объем V.

На тело, лежащее на дне сосуда, действуют сила тяжести P, сила реакции дна N и выталкивающая сила F (рис. 13). Если сосуд покоится, то сумма этих сил равняется нулю. При движении сосуда с ускорением a вверх по II закону Ньютона имеем: $ma = N + F - mg$, где m — масса тела.

Определим выталкивающую силу F. Аналогично решению предыдущей задачи легко получить, что при ускоренном движении сосуда вверх давление на глубине h дается формулой: $p = \rho(g+a)h$, то есть давление в $(g+a)/g$ раз больше, чем в неподвижном сосуде. Соответственно будет большей и выталкивающая сила:

$$F = m_0 g \frac{g+a}{g} = m_0 (g+a),$$

где $m_0 = \rho_0 V$ — масса вытесненной телом воды. Подставляя это выражение в формулу II закона Ньютона, для силы реакции дна N получаем: $N = (m - m_0)(g+a)$.

Легко видеть, что в сосуде, движущемся с ускорением вверх, сила реакции дна всегда больше, чем в неподвижном. Поэтому тело не только не всплывает, а наоборот, сильнее прижимается ко дну.

Задача 10. *Сосуд с жидкостью движется горизонтально с ускорением a. Определить форму поверхности жидкости в сосуде.*

Выделим горизонтальный столбик жидкости длиной l и площадью поперечного сечения s (рис. 14). По II закону Ньютона $ma = (p_1 - p_2)s$, где $m = \rho l s$ — масса столбика, p_1 и p_2 — давления на него слева и справа. Давление на глубине h определяется по обычной формуле: $p = \rho g h$ (по вертикали ускорения нет). Подставляя выражения для m и p в уравнение II закона Ньютона, получаем $al = (h_1 - h_2)g$, или $\frac{h_1 - h_2}{l} = \frac{a}{g}$. Но $\Delta h = h_1 - h_2$ — это разность высот точек поверхности жидкости. Мы получаем, что поверхность жидкости — плоскость, наклоненная к горизонту под углом α, причем $\operatorname{tg}\alpha = a/g$.

Заметим, что давление жидкости на данной высоте здесь не одно и то же. Линии равного давления параллельны поверхности жидкости. Если ввести расстояние h' от точки до поверхности жидкости, то давление в этой точке $p = \rho g h = \rho g h'/\cos\alpha = \rho h' \sqrt{g^2 + a^2}$. Поэтому можно сказать, что ускоренное движение сосуда эквивалентно замене ускорения свободного падения $\mathbf{g}$ на величину $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}$ (рис. 14). Это утверждение в равной степени относится и к предыдущим двум задачам.

Упражнения

1. Три сосуда, имеющие формы цилиндра, усеченного конуса и перевернутого усеченного конуса с одинаковыми площадями оснований и с равными объемами, доверху наполнены водой. Как соотносятся между собой силы давления воды на дно сосудов? Почему, если любые два сосуда поставить на чашки весов, то они уравновесят друг друга?

Массой сосудов по сравнению с массой воды пренебречь.

2. Г-образная трубка погружена изогнутым концом в сосуд с водой. Погруженный конец затянут резиновой пленкой. В какую сторону выгнута пленка? Как изменится изгиб пленки, если в трубку налить ртуть так, чтобы ее уровень в трубке совпадал с уровнем воды в сосуде?

3. Трубка ртутного барометра подвешена на нити. Определить натяжение нити, если высота уровня ртути в трубке $H = 0{,}76$ *м*, внешний диаметр трубки $D = 0{,}02$ *м*, внутренний $d = 0{,}017$ *м*, нижний конец трубки погружен в ртуть на глубину $h = 0{,}1$ *м*, масса трубки $m = 0{,}3$ *кг*, плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ *кг/м*^{3}. Считать, что торцы трубки плоские.

4. Длинная вертикальная трубка погружена одним концом в сосуд с ртутью. В трубку наливают $m = 0{,}71$ *кг* воды, которая не вытекает из трубки. Определить изменение уровня ртути в сосуде. Диаметр сосуда $D = 0{,}06$ *м*, плотность ртути $\rho_0 = 1{,}36 \times 10^4$ *кг/м*^{3}. Толщиной стенок трубки пренебречь.

5. Трубка сечения $S = 0{,}03$ *м*^{2} изогнута в виде L-образного колена. В нижней горизонтальной части колена находится поршень на расстоянии $l = 1{,}5$ *м* от изгиба. Высота вертикальной части колена $H = 3$ *м*. В трубку налита вода до уровня $h_0 = 2$ *м*. Какую работу надо совершить для того, чтобы продвинуть поршень к изгибу? Плотность воды $\rho = 10^3$ *кг/м*^{3}. Трением между поршнем и стенками трубки пренебречь.

6. В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды в сосуде, если лед растает. Что будет, если в лед вморожен а) кусочек свинца; б) кусочек пробки?

7. На весах уравновешены сосуд с водой и штатив с грузом. Груз подвешен так, что он находится над сосудом. Нарушится ли равновесие, если груз опустить в сосуд с водой? На какую чашку весов надо положить довесок, чтобы равновесие восстановилось?

8. В цилиндрические сообщающиеся сосуды диаметрами $D = 0{,}06$ *м* и $d = 0{,}02$ *м* налита вода. Как изменятся уровни воды в сосудах, если в один из сосудов поместить тело массы $m = 0{,}02$ *кг*, которое будет плавать в воде? Плотность воды $\rho = 10^3$ *кг/м*^{3}.

9. Сосуд с водой скользит без трения по наклонной плоскости с углом наклона α. Определить, как расположится поверхность воды в сосуде.

Магнитный момент антипротона

Несколько месяцев тому назад в лаборатории в американском городе Брукхэвене была измерена величина магнитного момента антипротона.

Эта величина оказалась равной

$$\mu_{\bar{p}} = (-2{,}80 \pm 0{,}10)\mu_я, \text{*)}$$

где $\mu_я$ — так называемый ядерный магнетон, единица, принятая для измерения магнитных моментов тяжелых частиц.

$$\mu_я = \frac{e\hbar}{2Mc} = 5{,}04 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/гаусс}.$$

M — масса протона, *e* — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, *c* — скорость света.

Магнитный момент протона равен

$$\mu_p = +2{,}79 \ \mu_я$$

Мы видим, что магнитные моменты протона и антипротона совпадают по величине, но имеют обратные знаки. Это находится в полном соответствии с общими принципами теории, которые требуют именно такой симметрии в свойствах частиц и античастиц.

Измерить $\mu_{\bar{p}}$ очень трудно, так как антипротон быстро погибает (аннигилирует), сталкиваясь с нуклоном или ядром. К счастью экспериментатора, перед тем, как погибнуть, антипротон попадает на орбиту, подобную электронной, и некоторое время движется вокруг ядра. За это время он успевает испустить несколько рентгеновских квантов, энергию которых можно измерить. Отсюда уже можно вычислить магнитный момент антипротона.

---

*) Число ± 0,10 указывает на границы возможной ошибки в измеренном значении.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

50 ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Занимательность задачи — великое дело

Под новый, 1972-й год издательство «Наука» преподнесло всем любителям математики прекрасный подарок — перевод книги известного американского математика Ф. Мостеллера *«Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями»* (тираж 200 000 экз., цена 26 коп.). На самом деле в книге содержится 57 задач, 50 из которых решаются, а 7 — обсуждаются.

Что такое теория вероятностей, по-видимому, интересует многих наших читателей. Конечно, можно взять какой-нибудь учебник *) и прочитать его. Однако нельзя изучать теорию, не решая задач. С другой стороны, решая задачи, изучить теорию можно; нередко в учебниках целые разделы теории излагаются в виде задач. В предисловии Ф. Мостеллер пишет:

«...Большей частью своего математического образования я обязан решению различных задач. С годами мне все труднее становится отделить серьезные занятия от решения, казалось бы, «игрушечных» задач. Очень часто элементарные задачи оказывались чрезвычайно полезными при решении серьезных проблем».

Задачи в книге Ф. Мостеллера в большинстве напоминают «Задачник «Кванта». И, как и в «Кванте», решение каждой задачи — это небольшая заметка. Задачи самые разные, их решения охватывают многие разделы теории, а иногда и выходят за ее пределы. Вот, например, задача 56

Две урны

Две урны содержат одно и то же количество шаров, несколько черных и несколько белых каждая. Из них извлекаются n ($n \geqslant 3$) шаров с возвращением. Найти число n и содержимое обеих урн, если вероятность того, что все белые шары извлечены из первой урны, равна вероятности того, что из второй извлечены либо все белые, либо все черные шары.

Если вы в ней разберетесь, то заметите, что это — вероятностная постановка Великой теоремы Ферма (см. «Квант» № 8, 1972); в книге эта задача лишь обсуждается. Есть и вовсе не задачи, а психологические тесты:

Quo Vadis *)

Двое незнакомых людей, договорившись о том, как узнать друг друга, должны встретиться в определенный день и час в Нью-Йорке, городе, которого они оба не знают. Однако они забыли назначить место встречи. Куда им следует направиться, если они все же попытаются встретиться?**)

Однако большинство задач относятся к теории вероятностей. Вот некоторые из них.

Легкомысленный член жюри

В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для вынесения решения бросает монету (окончательное решение выносится большинством голосов). Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью p. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

Трехсторонняя дуэль

A, B и C сходятся для трехсторонней дуэли. Известно, что для A вероятность попасть в цель равна 0,3, для C — 0,5, а B стреляет без промаха. Дуэлянты могут стрелять в любого противника по выбору. Первым стреляет A, затем B, дальше C и т. д. в циклическом порядке (раненый выбывает из дуэли), пока лишь один человек не останется невредимым. Какой должна быть стратегия A?.

Как видите, задачи весьма интересны. Если вы не сумеете их решить — не отчаивайтесь. Решения, приведенные в книге, не менее интересны, чем сами задачи.

А. Н. Виленкин,
Л. Г. Лиманов

---

*) Например, Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. «Вероятность», «Мир», 1969, или Ф. Феллер. «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», т. 1, ИЛ, 1952; т. 2, «Мир», 1967.

*) Куда идешь? (лат.).

**) Для решения задачи нужно, конечно, знакомство с наиболее часто посещаемыми местами Нью-Йорка.

РАССКАЗ О ВЕЛИКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Прав ли был Ньютон, заявивший: «Hypotheses non fingo!» («Гипотез не измышляю!»)? Разве без гипотез может строиться наука? Как же тогда возникают научные теории, идеи экспериментов? Кстати, что важнее, что, так сказать, первичнее — теория или эксперимент?

Эти вопросы волнуют не только специалистов, занимающихся историей и методологией науки, или самих исследователей, личным трудом участвующих в развитии своей науки, но и всех тех, кто интересуется научным прогрессом. Они же составляют как бы стержень повествования в небольшой книжечке Г. Липсона *). Автор ее — не историк науки, не популяризатор. Он один из крупнейших английских физиков, известный своими исследованиями строения твердых тел. А когда талантливый ученый рассказывает даже о таких вещах, которые выходят за круг его непосредственных интересов, он обычно делает это весьма оригинально.

«Книга Г. Липсона,— пишет в своем предисловии редактор русского издания В. И. Рыдник,— по существу — маленькая история физики, рассказанная с позиций физического эксперимента. Такой метод изложения неизбежно делает содержание книги фрагментарным, и она становится «сборником рассказов» о крупнейших опытах в физике за последние четыре века ее существования. Рассказов, не одинаковых по своей теме и подробностям: в одном случае акцент ставится на методике опыта, в другом — на экспериментальной установке, в третьем — на научных результатах и оценке ошибок опыта. Такое «сюжетное разнообразие» само по себе делает книгу Липсона занимательной. В большой степени этому способствует и язык книги — живой, эмоциональный, порой совсем разговорный...».

Перед нами, пожалуй, первая в мировой литературе книга, специально посвященная истории физического эксперимента. Почему Липсон решил написать такую книгу? Он сам дает ответ на этот вопрос:

«В сознание многих физиков каким-то образом проникло убеждение, что теория выше практики и что выдвинуть новую теорию важнее, чем провести решающий эксперимент. Эта точка зрения лишена всяких оснований. Часто такие эксперименты в основе своей просты, и последующие исследователи упускают из виду, сколько изобретательности потребовалось, чтобы их провести».

Итак, пропаганда экспериментальной физики. Разумеется, автор не стремился, да и не мог бы ограничиться только описанием или обсуждением экспериментов: он интерпретирует их результаты, показывает, как тесно взаимосвязаны эксперименты и теоретические построения, которые вместе — только вместе! — и составляют науку, называемую физикой.

Начинает Липсон с простейшего — с проблемы движения, с первых опытов Галилея. Сейчас они выглядят элементарными, примитивными, но ведь Галилею пришлось начинать с нуля или даже с отрицательной величины, ибо ему надо было опровергнуть ряд концепций Аристотеля, остававшихся незыблемыми в течение почти двух тысячелетий.

Размышляя над движением тел, Галилей пришел к выводу, что важно не само движение, а его изменение, не скорость, а ускорение. Но прежде всего нужно было определить понятие «ускорение». Кажется, ясно: ускорение — это изменение скорости за единицу времени. Но почему — времени? Можно ведь принять за ускорение и изменение скорости с пройденным расстоянием. Какое определение выбрать, какое из двух соответствует происходящим в природе физическим процессам? Логические рассуждения, а затем прямые опыты позволили Галилею выбрать то определение, которым мы пользуемся по сей день.

Любопытно, как Галилей создал теорию маятника. Идею эксперимента подсказали ему наблюдения за колебаниями светильников в церкви под действием капризных сквозняков. Эти колебания видели до него миллионы людей, но надо было обладать гениальной прозорливостью, чтобы понять всю важность этого ничем не примечательного явления. Надо было обладать и незаурядной изобретательностью, чтобы использовать... биения собственного сердца, собственный пульс для измерения периода колебаний этих самых светильников (у Галилея не было иного эталона времени). А вскоре идея маятника легла в основу конструкции часов; теория маятника явилась впоследствии базой для представлений о кинетической и потенциальной энергии; эксперименты же с маятником позволили Ньютону доказать равенство инертной и гравитационный масс — равенство, от которого отталкивался Эйнштейн, создавая общую теорию относительности. Такова цепочка, протянувшаяся на три с лишним столетия.

Не раз еще читатель встретится на страницах книги Г. Липсона со случаями, когда малозначительное явление, на которое обра-

---

*) Г. Липсон, Великие эксперименты в физике, «Мир», 1972, 216 стр., цена 66 коп.

тил — вольно или невольно — внимание ученый, оборачивалось величайшим открытием, нередко потрясавшим всю физику. Здесь и полулегендарное яблоко Ньютона, «приведшее» к созданию закона всемирного тяготения, и нагрев металла при сверлении пушечных стволов, позволивший Румфорду высказать идею, что «теплота есть движение», и засвеченные фотопластинки Беккереля, от которых отсчитывает свой век ядерная физика, и многие-многие другие «случайности».

Невозможно изложить содержание книги Липсона, как невозможно пересказать томик новелл О'Генри. Поэтому мы ограничимся упоминанием лишь некоторых примечательных экспериментов или эпизодов, о которых поведал Липсон.

В небольшой главе «Атмосфера» рассказано о «взвешивании воздуха» Галилеем, о знаменитых «магдебургских полушариях» Герике, о работах Торичелли, Вивиани, Паскаля по измерению атмосферного давления, об открытии Дальтоном закона парциальных давлений, давшем количественное подтверждение атомно-молекулярной теории. Между прочим, Дальтон впоследствии поразному рассказывал разным людям о том, как у него возникла идея строения молекул. Он и сам не знал толком, как это произошло. Такое часто случается в науке, не реже, чем в поэзии. Попробуйте выяснить у поэта, как у него родилась та или иная строка, тот или иной образ!

Далее идет глава «Теплота», в которой читатель наряду с хорошо знакомыми ему именами — Румфорд, Дэви, Фарейгент, Цельсий, Джоуль — встретится и с именем Блэка, работы которого опередили исследования Румфорда и Дэви, но, к сожалению, были полностью опубликованы лишь после смерти ученого. А ведь он первым произвел измерения удельной теплоемкости и, кстати, обнаружил, что удельная теплоемкость ртути, вопреки ожиданиям, почти в 30 раз меньше, чем у воды.

Много места автор отводит кропотливым и тщательным измерениям удельной теплоемкости самых различных веществ, проведенным французскими учеными Дюлонгом и Пти. Подобный утомительный, неблагодарный процесс сбора точных эмпирических данных, который Резерфорд позднее назвал «коллекционированием марок», имеет чрезвычайно важное значение в науке. В данном случае учеными был открыт закон, явившийся первым обобщением в физике твердого тела и неопровержимым доказательством того, что теплота представляет собой форму кинетической энергии. Заканчивается глава описанием открытия ботаником Броуном движения, носящего его имя. В 1905 году Эйнштейн предсказал это явление, не подозревая, что оно уже было открыто почти за 80 лет до него.

Глава, посвященная газам, естественным образом примыкает к двум предыдущим. Она посвящена работам Бойля, Мариотта, Гей-Люссака, Шарля, Кельвина, Авогадро, Лавуазье, Больцмана, хорошо известным из школьного курса, но изложенным в необычном ракурсе. Здесь особенно отчетливо проявляется взаимообусловленность открытий («Так физика, подобно гусенице, сама себя подтягивает вперед», — образно замечает автор) и неразделимая связь между результатами экспериментальных исследований и созданием обобщающей теории. Ведь именно универсальность газовых законов, их независимость от конкретных свойств газов и явилась решающим подтверждением гипотезы об атомном строении материи, превратила эту гипотезу в несокрушимую теорию.

«Мне не очень хотелось писать о звуке в этой книге», — так начинает автор следующую главу, посвященную акустике. Почему? Прежде всего по той причине, что ни одно открытие в этой области не привело к возникновению каких-либо фундаментальных общефизических идей, к пересмотру существовавших представлений. И все же Липсон нашел нужным описать несколько акустических опытов, сумев выделить ряд принципиальных вопросов и рассмотрев любопытные детали. К примеру, Герике, чтобы выяснить, распространяется ли звук в воде, обратился к помощи рыб, предвосхитив тем самым знаменитые опыты И. П. Павлова по изучению условных рефлексов у животных.

Рассмотрение звуковых колебаний помогает автору перейти к описанию оптических процессов. Здесь ярко показана борьба двух гигантов — Ньютона, утверждавшего, что свет есть поток частиц, корпускул, и Гюйгенса, отстаивавшего волновую теорию света. Отдавая должное Ньютону, Липсон вместе с тем отмечает, что излишнее преклонение перед авторитетом этого гениального ученого более чем на столетие затормозило развитие оптики. Очень подробно обсуждается в этой главе вопрос о том, конечна или бесконечна скорость света; описаны опыты Рёмера, Физо, Фуко по ее измерению. Такое внимание к проблеме вполне понятно, ибо скорость света — одна из немногих фундаментальных мировых констант, которая к тому же лежит в основе теории относительности, о чем рассказывается в следующей главе.

Эта глава — единственная в книге, специально отведенная описанию аппаратуры, а именно, оптических инструментов, поскольку они, как справедливо замечает автор, «позволили не только получить сведения о свете, но и внести вклад в развитие почти всех остальных областей физики». И можно добавить — не только физики, а также биологии, медицины, химии, астрономии, техники, повседневного быта. Ведь обычные очки — не что иное как простейший оптический прибор; микроскоп, позволивший Левенгуку проникнуть в мир микроорганизмов — оптический прибор; гигантский телескоп Крымской обсерватории, принимающий свет далеких миров, — тоже оптический прибор.

А есть еще спектрометры, интерферометры, лазеры...

В двух последующих главах рассказывается об электричестве, магнетизме, электромагнитных волнах. Многие ученые оставили след в этой области физики, их имена воплотились в названия явлений, законов, приборов, физических величин, но величайшим среди них по праву считают Фарадея, работы которого составляют не отдельные «пики», а целую «горную цепь». Не случайно именно Фарадею отведено здесь центральное место, воспроизведены его оригинальные рисунки, фотография статуи Фарадея. А между прочим, великий Фарадей, открыв законы электролиза, не заметил вытекавшего из них чрезвычайно важного следствия, которое лишь полвека спустя «обнаружил» Гельмгольц: электричество, как и вещество, тоже состоит из отдельных порций, «атомов» — мы называем их электронами. Открытие, изучение свойств и характеристик электронов относится к эре атомной физики, зародившейся в самом конце прошлого века. А далее начался штурм ядра. К сожалению, этому столь волнующему, полному драматического накала этапу развития физики Липсон отвел слишком мало места. Читателя может утешить лишь то, что у нас имеется немало книг, в которых исследования Беккереля, супругов Кюри, Резерфорда и его «мальчиков» описаны достаточно обстоятельно и увлекательно.

Что привлекает в книге Липсона? Прежде всего, конечно, обилие фактического материала, дополняющего и иллюстрирующего школьный, а отчасти и вузовский курс физики. Но истинное очарование придают ей те мелочи, детали, подчас неожиданные и потому особенно запоминающиеся, которые встречаются чуть ли не на каждой странице и которые показывают, что экспериментальная физика — увлекательное занятие и сами физики — не затворники в кельях-лабораториях, а живые люди со своими достоинствами и недостатками, радостями и огорчениями, успехами и неудачами. Где еще можно прочитать, например, о том, что единственной причиной боязни смерти у Бойля, по его словам, была перспектива вступить в мир, в котором все заранее известно и не будет надобности заниматься экспериментами? И разве не приятно узнать о благородстве Гей-Люссака, настоявшего на том, чтобы открытый им закон о тепловом расширении газов был назван именем Шарля, который получил аналогичные результаты значительно раньше, но не опубликовал их? А многим ли известно, что закон Ома не был принят современниками из-за... его простоты? Множество таких фактов и эпизодов узнает читатель из этой небольшой книги. Можно не сомневаться, что ее с удовольствием и пользой прочтет и старшеклассник и студент, школьный учитель и преподаватель вуза, любой человек, любящий физику.

И. М. Зорич

ЗАДАЧИ

1. Ни куб, ни квадрат

Докажите, что произведение последовательных четырех натуральных чисел не может быть ни квадратом, ни кубом натурального числа.

2. Всегда разрешимое уравнение

Докажите, что для любого натурального числа n найдется тройка натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению

$$x^2+y^2=z^n.$$

3. Найдите ошибку

При составлении данного ребуса была допущена незначительная ошибка. Найдите эту ошибку, исправьте ее и решите ребус.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & с & т & о \\
\times & & & & с & т & о \\
\hline
 & & & м & ч & ч & о \\
+ & & ч & о & н & я & \\
 & м & и & л & я & & \\
\hline
 & т & ы & с & я & ч & а
\end{array}$$

О ходе конем

На ЭВМ были просчитаны все замкнутые обходы конем шахматной доски 6×6.

Представим доску в виде сети из 36 взаимно-связанных узлов. В основу алгоритма положен тот факт, что если провести ветви из какого-то узла, то тем самым уменьшается число возможных связей в соседних узлах и из некоторых тоже можно провести ветви. Ветви растут из разных точек и, наконец, сливаются.

Число всех вариантов равно 9862. Существенно различных контуров — 1245, из них 17 с осью симметрии 2-го порядка и 5 с осью симметрии 4-го порядка.

О. С. Баранов

III математическая олимпиада МЭСИ

Московский экономико-статистический институт, отметивший в этом году свое 40-летие, в настоящее время занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов по машинной обработке информации по применению математических методов в экономике. Вот почему математика играет для поступающих в МЭСИ особо важную роль.

Третий год МЭСИ проводит математическую олимпиаду для школьников.

Олимпиада проводится в 2 тура: I тур — заочный и II тур — очный. К участию во II очном туре, который будет проводиться в МЭСИ, будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 25 января 1973 года (по штемпелю почты). Каждый участник олимпиады, допущенный ко II туру, будет оповещен по указанному им адресу. **Успехи в олимпиаде будут учтены при поступлении в институт.**

Решение задач (всех или части из них) должно быть выполнено на русском языке в ученической тетради. Наш адрес: Москва 119435, Б. Саввинский пер., 14, «Олимпиада».

Задачи I тура

1. Вычислить

$$\frac{100}{99}+\frac{100\cdot 98}{99\cdot 97}+\frac{100\cdot 98\cdot 96}{99\cdot 97\cdot 95}+\dots+\frac{100\cdot 98\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{99\cdot 97\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}.$$

2. Найти наименьший корень уравнения

$$2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1.$$

3. Вычислить без таблиц

$$\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ.$$

4. На трех сторонах треугольника ABC взяты точки D, E и F. Через точки A, B и C проведены прямые, параллельные сторонам треугольника DEF и образующие треугольник $D'E'F'$. Найти площадь треугольника ABC, если площади треугольников DEF и $D'E'F'$ равны соответственно 20 и 45 квадратным единицам.

5. Найти объем общей части двух правильных треугольных пирамид, если известно, что вершина каждой из них лежит в центре основания другой пирамиды, каждое боковое ребро одной пирамиды пересекается с одним ребром другой пирамиды, общая высота пирамид образует с боковыми ребрами одной пирамиды углы, равные $\pi/3$, а с боковыми ребрами другой пирамиды углы, равные $\pi/6$, боковое ребро первой пирамиды равно $4\sqrt{3}$.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

ОЛИМПИАДА МФТИ·72

Традиционная физико-математическая олимпиада Московского физико-технического института в 1972 году проводилась по новой системе. Вместо двух туров, на каждом из которых предлагались задачи и по физике и по математике, проводились отдельно физический и математический туры.

Физический тур одновременно был и московской городской физической олимпиадой. В олимпиаде участвовало около 1500 школьников города Москвы и Подмосковья. Премиями и грамотами олимпиады отмечено более 100 школьников, решивших не меньше пяти задач. Ниже приводятся условия задач.

Задачи по математике

1 (8 кл.). Дан квадрат $ABCD$. На диагонали AC взята точка M. Прямая BM пересекает сторону AD в точке E, а прямая, проходящая через M и параллельная BD — в точке F. Доказать, что прямая FC и прямая, проходящая через точку E параллельно диагонали AC, пересекаются на диагонали BD.

2 (8 кл.). На плоскости даны 6 точек. Каждые две из них соединены красным или синим отрезком. Какое наименьшее число треугольников с вершинами в данных точках и сторонами одного цвета может при этом быть?

3 (8 кл.). Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Доказать, что четырехугольник с вершинами в центрах тяжести треугольников ABC, ABD, ACD и BCD подобен данному.

4 (8 кл.). Для некоторой системы точек на плоскости известно, что для любой пары из них найдется третья точка системы такая, что угол между отрезками, проведенными из этой точки к первоначальным, меньше 55°. Доказать, что в этой системе нет такой пары точек, расстояние между которыми больше расстояния между любой другой парой точек системы.

5 (9—10 кл.). Решить в натуральных числах уравнение:

$$3\cdot 2^x + 1 = y^2.$$

6 (9 кл.). Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют условию:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Доказать, что

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_1 - x_n)^2 + \\ + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 \leqslant n.$$

7 (9 кл.). Дан 1972-угольник. Рассматриваются все треугольники с вершинами в вершинах этого многоугольника. Доказать, что каждая точка на плоскости, не лежащая ни на одной из сторон этих треугольников, покрыта четным числом таких треугольников.

8 (9 кл.). Дан квадрат. Две вершины равностороннего треугольника находятся на противоположных сторонах квадрата. Найти геометрическое место третьих вершин таких треугольников.

9 (9 кл.). 10 рабочих должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть первоначально окрашено, а затем смонтировано. Время окраски — 10 *мин*, время монтажа — 20 *мин*, после окраски изделие должно 5 *мин*. сохнуть. Как разделить рабочих на маляров и монтажников, чтобы выполнить задание в кратчайшее время?

10 (10 кл.). В узлах клетчатой бумаги выбрано 5 точек так, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Доказать, что из них можно всегда найти две такие, что отрезок, соединяющий эти точки, содержит еще по крайней мере один узел.

11 (10 кл.). Если у тетраэдра вписанная и описанная сферы концентричны, то сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°. *Доказать.*

12 (10 кл.). Диаметр круга разделен на n равных частей. На окружности взята точка M. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M до точек деления (включая и концы диаметра) не зависит от выбора точки M на окружности.

13 (10 кл.). Али-Баба хочет попасть в пещеру с сокровищами. Перед пещерой стоит бочка, в крышке которой имеются четыре отверстия, образующие квадрат. Под отверстиями находится по кувшину, в каждом из которых находится селедка хвостом вверх или вниз. Если хвосты всех селедок направлены в одну сторону, то дверь в пещеру открывается. Али-Баба может просунуть руки в любые два отверстия, определить положение селедок в кувшинах, расположенных под ними, и изменить их положение по своему

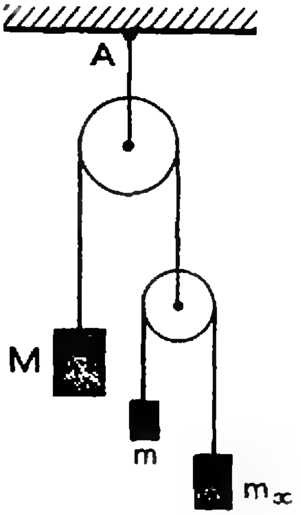


Рис. 1.

желанию. После того как Али-Баба вытащит руки из отверстий, бочка быстро поворачивается и останавливается, причем Али-Баба не в состоянии определить нового положения по отношению к старому. Если хвосты селедок окажутся направленными в одну сторону, то дверь открывается, если нет, то Али-Баба может предпринять следующую попытку. Существует ли способ действий, позволяющий Али-Бабе открыть дверь?

Задачи по физике

1 (8 кл.). В системе, изображенной на рисунке 1, даны массы M и m. Какой величины должна быть масса m_x, чтобы груз массы m был неподвижен относительно точки A подвеса всей системы? Трение не учитывать, блоки и нити невесомые.

2 (8—9 кл.). Маленький кубик массы m налетает со скоростью v на тело массы M, стоящее на гладкой горизонтальной поверхности, и скользит по стенке тела без трения. Стенка имеет форму полукруга радиуса R (рис. 2). Кубик достиг точки A. Найти скорости кубика и тела в этот момент.

3 (8 кл.). На черном ящике имеются три клеммы. Если к клеммам A и B приложить напряжение U, то с клемм B и C снимается напряжение 0,4 U. Если к клеммам B и C приложить напряжение U, то с клемм A и C снимается напряжение 0,75 U. Предложите схему черного ящика. Какое напряжение будет на клеммах A и B, если к клеммам B и C приложить напряжение U?

4 (9 кл.). Шарик массы m подвешен на нити длины l. С какой скоростью v нужно потянуть точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы шарик совершил полный оборот в вертикальной плоскости?

5 (9—10 кл.). Имеется очень маленькая неподвижная наклонная плоскость с углом α. На нее налетают горизонтально два шарика: сначала первый, который отскакивает упруго, а затем второй, который отскакивает неупруго. При каком угле α шарики улетят на одинаковое расстояние?

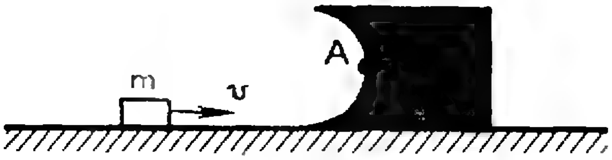


Рис. 2.

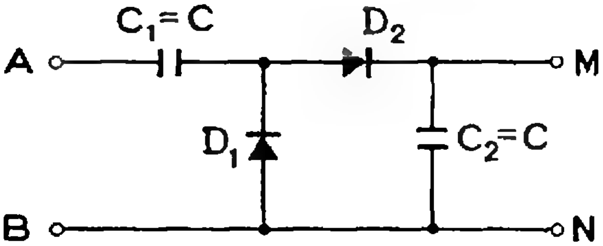


Рис. 3.

6 (9—10 кл.). Параллельно бесконечной проводящей плоскости расположены две проводящие площадки — одна площадью S_1 на расстоянии d_1 от плоскости, вторая площадью S_2 на расстоянии d_2 от плоскости. Найти емкость между пластинами.

7 (10 кл.). Имеется схема, изображенная на рисунке 3. К точкам A и B прикладывается переменное напряжение 127 *в*. Какое напряжение между точками M и N?

8 (10 кл.). Имеется соленоид, по обмотке которого течет ток, создающий внутри магнитное поле индукции B (рис. 4). Площадь сечения соленоида S. Перпендикулярно к оси соленоида AE расположена нить ND. По нити может скользить без трения маленький шарик массы m, имеющий заряд e. Первоначально шарик находится в покое в точке C такой, что $AC \perp ND$, $AC \perp AE$. Расстояние AC равно r. Ток в соленоиде выключают. Какую скорость приобретает шарик после выключения тока, если его смещением во время выключения пренебречь?

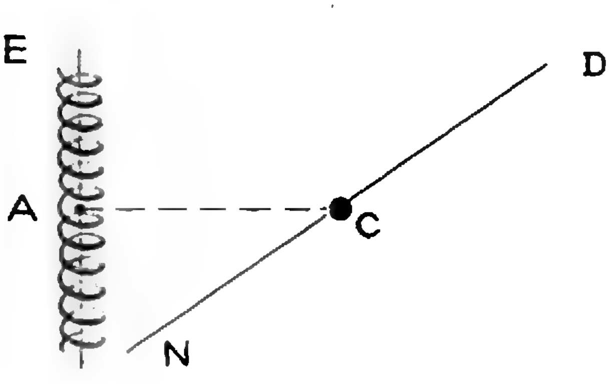


Рис. 4.

А. П. Савин

Нам пишут

(Обзор редакционной почты)

Вначале приведем немного статистики, которая дает представление о количестве писем, поступающих в редакцию «Кванта», и об их направленности.

За 1970 год, первый год существования журнала, в редакцию пришло 1638 писем. За четверть нынешнего, 1972 года, поступило более 2000 писем, то есть количество писем увеличилось более чем *вчетверо*. Соответственно, по сравнению с 1971 годом, количество писем в нынешнем году увеличилось *вдвое*. Если сравнить эти данные с ростом тиража, весьма значительным, но не столь быстрым, то можно по этим данным судить о возрастающей активности читателей журнала.

Радует, в частности, то, что растет участие в работе журнала сельских школьников. Количество писем от сельских школьников в два с половиной раза превышает число писем от московских школьников, довольно энергично пишущих в «Квант».

О чем же нам пишут?

Наибольшее число писем относится к разделу «Задачник «Кванта». С марта текущего года, когда в журнале был приведен список победителей конкурса, количество писем с решениями задач составляет регулярно 80% от общего числа писем *). Напомним для сравнения, что в прошлом году доля писем с решениями задач составляла 65%.

В своих письмах ребята не только приводят решения задач, но и дают общую оценку этому разделу. Так, десятиклассник Николай Чепурнов из села Горнозаводского Кировского района Ставропольского края пишет: «По-моему, это единственный в своем роде журнал, удовлетворяющий запросы школьников, увлекающихся математикой и физикой. Некоторые выпуски «Кванта» я перечитываю по несколько раз. Благодаря «Задачнику «Кванта» я сумел основательно подготовиться к районным олимпиадам по физике и математике».

Николай Ивочкин из села Преображенского Шарлыкского района Оренбургской области пишет: «Много интересного для себя встречаю в вашем журнале. Бывает так, что не решишь задачу, а сдаваться не хочется. Снова и снова берешься за нее и часто радуешься победам».

Кроме старшеклассников принимают участие в решении задач этого раздела школьники младших классов. Например, шестиклассник Анатолий Данилов из г. Шумерля Чувашской АССР написал: «Когда я получаю очередной номер «Кванта», то всегда и прежде всего раскрываю страницу, на которой крупными буквами написано: «Задачник «Кванта». Но задачи там бывают трудные, и я не могу их решить. На этот раз попалась нетрудная задача». Шестиклассник из Москвы Юра Соркин не только регулярно решает задачи из «Задачника «Кванта», но и сам придумал очень интересную задачу для этого раздела («Квант» № 12, 1971). Полностью правильного решения этой задачи мы не получили и в «Кванте» № 8 за 1972 год мы привели оригинальное авторское решение.

Что же содержат остальные письма? Это прежде всего письма от школьников с общей оценкой журнала. Не скроем, что нам было приятно прочесть в письме десятиклассника Сагиба Мамедова из пос. Мараза Шемахинского района АзССР: «Несмотря на молодость «Кванта», его выписывают с каждым годом все больше и больше; это говорит о высоком научном уровне статей, помещенных в нем, и о большом интересе, особенно среди нас, учащихся, к науке математике». А вот, что пишет Мансур Хусаинов из г. Чистополя Тат. АССР: «Квант» мне понравился тем, что наряду с интересными задачами и решениями задач там помещен и интересный теоретический материал (статьи «Дебют Гаусса», «Как получают низкие температуры», «Есть ли на Луне вода» и др.)».

Очень высоко оценивают будущие абитуриенты статьи под рубрикой «Практикум абитуриента». Приведем письма от одного из абитуриентов прошлого года Андрея Левина из г. Горького: «Сначала немного о себе: я окончил в этом году среднюю школу, поступал в МФТИ, но не поступил, следовательно, являюсь потенциальным абитуриентом, полным решимости в будущем году преодолеть барьер приемных экзаменов. В настоящее время я работаю лаборантом в одном из горьковских НИИ, но по-прежнему считаю «Квант» своим журналом. Те номера, которые мной получены (и бережно хранятся), я рассматриваю, как 24 тома универсального пособия, которое должно помочь мне хорошо подготовиться к серьезным экзаменам. Тот уровень статей, который принят в журнале, по-моему, правильный, и не стоит делать отклонений в ту или другую сторону. Что же касается письма Гали Турбиной *) о формулах и терминах теории относительности, то не скрою, что оно вызвало удивление и некоторое сожаление. Мне кажется что всем, кто хотя бы немного интересуется точными науками, в наше время недостаточно школьных знаний и школьных учебников. Ведь существует научно-популярная литература, существуют факультативы, кружки (сам я узнал о теории относительности на факультативных занятиях в 9 классе). Кстати говоря, в новом учебнике по физике для девятого класса дается понятие о теории относительности. Мне кажется, что зря «редакция считает, что претензии Гали справедливы».

---

*) Исключение составляет почта 7-го номера, принесшая много ответов на шифровку.

Относительно задач могу сказать, что они действительно представляются мне слишком сложными, хотя, впрочем, редакции виднее, если, конечно, она сопоставляет уровень сложности задач с количеством ответов на них.

В целом хочется отметить своевременность и важность появления журнала «Квант», потому что очень многих школьников, в том числе и из обычных, неспециализированных школ (к их числу принадлежу и я), физика и математика интересуют гораздо глубже и полнее, чем они могут быть поданы в рамках школьной программы. Чрезвычайно радует высокий уровень и строгость изложения всех материалов журнала».

Приходят в «Квант» письма и от учителей. Так, например, учитель Л. Ф. Топорков из села Кочнево Камышловского района Свердловской области пишет: «Я не школьник. Я сельский учитель, недавно закончил заочно математический факультет пединститута. Трудные годы заочного обучения както неожиданно закончились и было необычное ощущение, что больше не учусь, чего-то не хватало. Ведь сколько еще не знаешь. Теперь один из моих учителей — «Квант». Спасибо».

Много писем приходит от шестиклассников и семиклассников с решениями задач из раздела «Квант» для младших школьников». В них они приводят ответы на задачи и... жалуются, что их несправедливо обижают, уделяя им мало места на страницах журнала. Мы рады сообщить им, что в будущем году редакция журнала более чем вдвое увеличит объем этого раздела и наряду с задачами будет публиковать в этом разделе статьи и заметки.

Поступают в редакцию письма, содержащие критические замечания. Чаще всего критические письма указывают на отдельные ошибки или опечатки, к сожалению, еще встречающиеся в журнале. Мы чрезвычайно благодарны всем авторам таких писем, они нам очень помогают в работе.

Реже это критика со стороны читателей, желающих увидеть в «Кванте» специальные научные, а не только научно-популярные статьи. Так, например, Сергей Черников, станция Жана-Семей Северо-Казахстанской области, пишет: «Во всех номерах журнала «Квант» не было напечатано ни одной статьи о проблемах современной физики. Все статьи по физике были так или иначе связаны с элементарной физикой. Нам, читателям журнала, хочется не только пополнить и углубить знания по элементарной физике, но и познакомиться с идеями и проблемами современной физики. Мне, как и многим читателям журнала, хотелось бы узнать подробно об открытиях несохранения четности и комбинированной четности в слабых взаимодействиях. Следует ли из этих открытий, что ядра антикобальта-60, поляризованные спинами в ту же сторону, что и ядра кобальта-60, будут испускать позитроны преимущественно против направленного спина? И в каком отношении? Следует ли из этих открытий несимметричность пространства или же следует несимметричность элементарных частиц?»

С Черниковым перекликается Андрей Печковский из Москвы: «Мне кажется, что было бы хорошо, если бы в Вашем журнале публиковались статьи по высшей математике и последним в ней достижениям».

Совсем редко приходят письма, в которых школьники сообщают, что им не удается решить задачи или разобраться в статьях.

К сожалению, мы мало получаем от наших читателей писем с критическими замечаниями по поводу оформления журнала, о достоинствах и недостатках отдельных разделов журнала и конкретных статей, публикуемых в этих разделах.

Для того чтобы наиболее полно учесть пожелания наших читателей, мы на страницах этого номера журнала публикуем анкету, обращенную к нашим читателям. Мы просим вас прислать нам ответы на вопросы анкеты. Ваши письма помогут нам совместно улучшить журнал.

Редакция благодарна всем читателям, приславшим конкретные критические замечания по материалам, помещенным в «Кванте». Мы с нетерпением ждем писем с ответами на вопросы анкеты и заранее благодарим всех читателей за эти письма.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

---

*) См. «Квант», № 12, 1971, стр. 51.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

30
г. Баку
ПОЧТА СССР

Латвийской
10
г. Рига
2
ПОЧТА СССР

300 лет
воссоединения Украины с Россией 1654 1954
40
ПОЧТА СССР
40

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ 50-ЛЕТИЮ ОБРАЗОВАНИЯ СССР

30 декабря 1922 года состоялся 1-й Всесоюзный съезд Советов. Почетным председателем съезда был избран В. И. Ленин, не присутствовавший на заседаниях из-за болезни.

Съезд принял исторический документ — «Декларацию об образовании СССР», в которой изложены главные принципы объединения советских республик в одно союзное государство. Так 50 лет назад возникло многонациональное Советское социалистическое государство.

Сейчас в СССР входит 15 союзных республик.

Марки, посвященные отдельным союзным республикам, выпускались неоднократно. На них запечатлены знаменательные даты, политические и культурные события. Так, государственный герб СССР и гербы союзных республик изображены на сериях марок, выпущенных в 1937—38 гг., в 1947 г. В 1957 г. к 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции выпущены марки, посвященные всем союзным республикам. Аналогичная серия выпущена в 1967 г. к 50-летию Великого Октября.

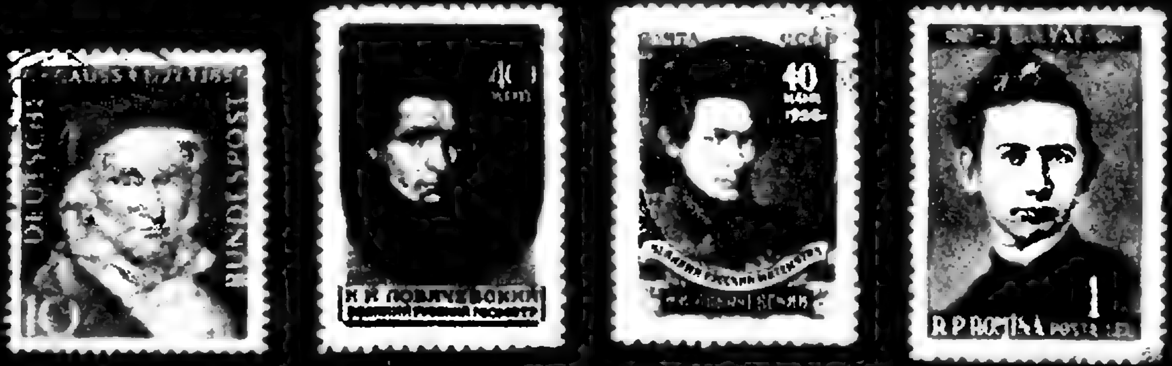
Коммунистическая партия и Советское правительство всегда огромное внимание уделяли развитию науки.

За годы советской власти во всех союзных республиках организованы Академии Наук, которые являются высшими научными учреждениями республик и обладают мощными исследовательскими базами (институты, лаборатории, научные станции и др.), ведущими исследования по основным проблемам современой науки.

На фото показаны марки с изображением зданий Президиумов Академий Наук союзных республик: Азербайджанской (г. Баку), Киргизской (г. Фрунзе), Латвийской (г. Рига), Литовской (г. Вильнюс) и старейшей из Академий Наук союзных республик — Украинской (г. Киев), созданной в 1919 году.

Координирует работу всех союзных академий Академия Наук СССР, являющаяся главным научным центром страны. Здание АН СССР в Москве вы видите на марке, посвященной 220-летию Академии.

А. В. Алтыкис



СОЗДАТЕЛИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

На фото вы видите 4 марки с портретами выдающихся математиков. Это Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) и Янош Бойяи (1802—1860). Объединяет их то, что все трое, независимо друг от друга, занимались разработкой неевклидовой геометрии (см. статью «Творец новой геометрии» на стр. 7).

Гаусс не опубликовал ни одной работы по неевклидовой геометрии. Однако после его смерти в его дневниках были найдены материалы, относящиеся к неевклидовой геометрии, которые обнаруживают, что он пришел к мысли о возможности построения неевклидовой геометрии. Однако он опасался, что эти идеи не будут поняты, и не только не опубликовал их, но и запрещал другим, знакомым с его работой, публиковать что-либо по этим вопросам. Он писал: «Возможно даже, что я не решусь на это всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком».

Даже после ознакомления с работами Бойяи и Лобачевского Гаусс не высказал своего отношения к ним, хотя был инициатором избрания Лобачевского членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества.

Наиболее полно разработал неевклидову геометрию Лобачевский. Он опубликовал первую работу по неевклидовой геометрии за три года до Бойяи (в 1829 году), а доложил ее физико-математическому отделению Казанского университета еще раньше (1826 г.).

Бойяи уже к 1825 году пришел к основным положениям неевклидовой геометрии. Однако ему потребовалось 6 лет, чтобы довести эти результаты до завершения.

Бойяи опубликовал свои исследования в 1832 году в приложении («Аппендикс») к 1-му тому сочинений своего отца — профессора математики.

Марка с портретом Гаусса выпущена в 1955 году в ФРГ к 100-летию со дня его смерти.

Лобачевскому посвящены 2 советские марки. Первая вышла в 1951 году в серии «Ученые нашей Родины», а вторая — в 1956 году к 100-летию со дня смерти великого математика.

Марка с портретом Бойяи вышла в серии «Деятели мировой культуры», изданной в Румынской народной республике в 1960 году.

А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Иррациональные неравенства»

1. $4<x<7$, $x<\frac{3}{4}$.

2. $x<1$.

3. $x>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. $3<x\leqslant 4$.

5. $2+\sqrt{0,5}\leqslant x<3$.

6. Ввести обозначение $y=\frac{2}{x}$, тогда получим

$$y\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $-\frac{4}{\sqrt{3}}\leqslant x\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}$, $x\neq 0$.

7. $x>5$.

8. $-1\leqslant x<1,7$.

9. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant x<\frac{1}{3}$, $x\neq 0$.

10. $x>2$.

11. Ввести обозначение $y=\sqrt{\sin x}$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Тогда $\sqrt{\cos x}=\sqrt[4]{1-y^4}$. Решаем неравенство

$\sqrt[4]{1-y^4}>1-y$, из которого следует $0<y<1$;

$$2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

12. Ввести обозначение $y=\sqrt{2x+1}$, $y\geqslant 0$; тогда $\sqrt{2x+9}=\sqrt{y^2+8}$, $x=\frac{1}{2}(y^2-1)$. Решаем неравенство

$\frac{y^2-1}{\sqrt{y^2+8}}<y-1$, откуда получаем $1<y<3,5$.

Ответ: $0<x<\frac{45}{8}$.

13. Перенести все члены в левую часть и вынести общий множитель $x-3$.

Ответ: $x\leqslant-\frac{5}{6}$, $x\geqslant 3$.

14. Перейти к равносильному неравенству $|x|-|x-2|<0$ при $x>4$, $x<-4$.

Ответ: $x<-4$.

К статье «Гидростатика»

1. Давления на дно сосудов будут разными, так как не одинаковы уровни воды в сосудах (рис. 1). Наибольшая сила давления на дно у сосуда, имеющего форму усеченного конуса, наименьшая — у перевернутого конуса. Однако силы давления сосудов на чашки весов будут, конечно, одинаковыми и равными силе тяжести жидкостей в сосудах (массой сосудов по условию задачи можно пренебречь).

3. $$T=mg+\frac{\pi\rho g}{4}\left[Hd^2-h\left(D^2-d^2\right)\right]\approx 50\ \text{н}$$

(см. рис. 2).

4. $$\Delta h=\frac{m}{\rho_0 S}=\frac{4m}{\pi\rho_0 D^2}=1,8\ \textit{см}.$$

5. Сила, прикладываемая к поршню, равна по величине силе давления воды на поршень: $F=pS=\rho ghS$, где h — высота уровня воды (давление по всей поверхности поршня можно считать одинаковым, так как диа-

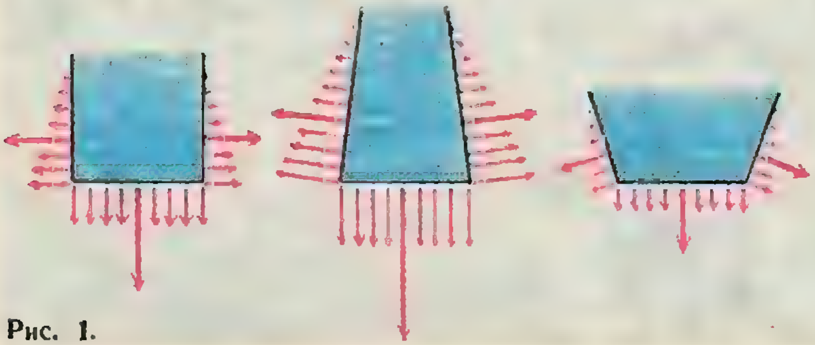


Рис. 1.

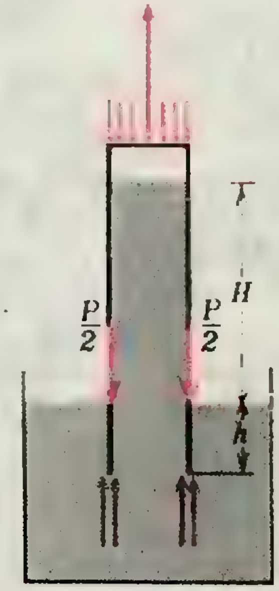


Рис. 2.

метр поршня значительно меньше высоты уровня воды). При движении поршня уровень воды в трубке будет повышаться и после прохождения поршнем пути $s=1$ *м* вода будет доверху заполнять трубку. Работа, совершаемая на этом участке, $A_1=F_{\text{ср}}\cdot s$, где $F_{\text{ср}}$ — средняя сила, прикладываемая к поршню. Так как давление меняется с высотой уровня по линейному закону, то для определения средней силы мы можем взять полусумму ее начального и конечного значений: $F_{\text{ср}}=(\rho g h_0 S+\rho g H S)/2$. Подставляя это выражение в формулу для работы, находим:

$$A_1=\rho g S\,\frac{h_0+H}{2}\,s\approx 735\ \textit{дж}.$$

При дальнейшем движении поршня вода будет вытекать из трубки и уровень воды меняться не будет. Соответственно будет постоянной и сила, прикладываемая к поршню: $F=\rho g H S$. Работа этой силы $A_2=F\,(l-s)=\rho g H S\,(l-s)\approx 441$ *дж*. Полная работа $A=A_1+A_2=1176$ *дж*.

6. Уровень воды не изменится.

а) Если лед содержит кусочек свинца, уровень воды понизится.

б) Когда в лед вморожен кусок пробки, уровень воды не изменится.

8. Сумма сил давления на дно сосудов должна увеличиться на величину mg. Поэтому

$$\rho g\Delta h S_1+\rho g\Delta h S_2=mg,$$

где Δh — изменение уровня воды в сосудах. Отсюда

$$\Delta h=\frac{4m}{\pi\rho\,(d^2+D^2)}=6\cdot 10^{-3}\ \textit{м}.$$

9. Поверхность жидкости параллельна наклонной плоскости.

К статье «Олимпиада МФТИ-72»

Математика

1. Обозначим через H точку пересечения диагонали BD с прямой, проходящей через точку E параллельно диагонали AC, а через H_1 — точку пересечения BD с CF. Легко выразить длины отрезков DH и DH_1, через длины отрезков AM и AD.

2. Ответ: 2.

3. Рассмотрите треугольники, две вершины которых находятся в концах стороны данного четырехугольника, а третья — в середине противолежащей стороны.

4. Используйте метод «от противного» и тот факт, что в треугольнике угол в 55° не может быть наибольшим углом.

5. Два решения: $x=3$, $y=5$ и $x=4$, $y=7$.

6. Покажите, что выражение в левой части равно сумме квадратов чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, умноженной на n, без квадрата суммы этих чисел.

7. Рассмотрите изменение четности при переходе через сторону треугольника.

8. Ответ: внутренности и границы четырех ромбов, их стороны и меньшие диагонали равны стороне квадрата, ромбы соприкасаются вершинами, диагонали ромбов параллельны сторонам квадрата.

9. Ответ: 3 маляра и 6 монтажников, один может не работать вовсе.

10. Покажите, что найдутся две точки, которые отстоят и по горизонтали, и по вертикали на четное число клеток.

11. Рассмотрите сечения описанной сферы плоскостями граней тетраэдра и рассмотрите углы в этих сечениях, опирающиеся на ребра тетраэдра.

12. Воспользуйтесь тем, что в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, рассмотрев фигуру, полученную из данной симметрией относительно центра круга.

13. Да. За две попытки, вставляя руки сначала по диагонали квадрата, а потом по стороне и устанавливая в этих трех кувшинах селедки вверх хвостом, мы либо открываем пещеру, либо приходим к такому положению: 3 селедки вверх хвостом и одна вниз. Из этого положения, вставляя руки по диагонали, мы либо открываем пещеру (если попадаем на диагональ с селедкой хвостом вниз), либо можем перейти к положению: две селедки на одной стороне квадрата хвостом вниз, остальные — хвостом вверх. В четвертой попытке ставим руки по стороне квадрата; если селедки в них одинаково направлены, то открываем пещеру, а если нет, то меняем их положения и получаем по одной диагонали селедки хвостом вверх, а по другой — хвостом вниз. Из этого положения, вставляя руки по диагонали и меняя положение селедок, открываем пещеру.

Физика

1. $$m_x=\frac{Mm}{3M-4m}.$$

2. Горизонтальная составляющая импульса системы не меняется:

$$mv=(M+m)\,u_1$$

(u_1 — искомая скорость тела и горизонтальная составляющая скорости кубика (рис. 1). Отсюда

$$u_1=\frac{mv}{M+m}.$$

Вертикальная составляющая u_2 скорости кубика находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=(M+m)\,\frac{u_1^2}{2}+\frac{mu_2^2}{2},$$

откуда

$$u_2=\sqrt{v^2-\frac{M+m}{m}\,u_1^2}=v\sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

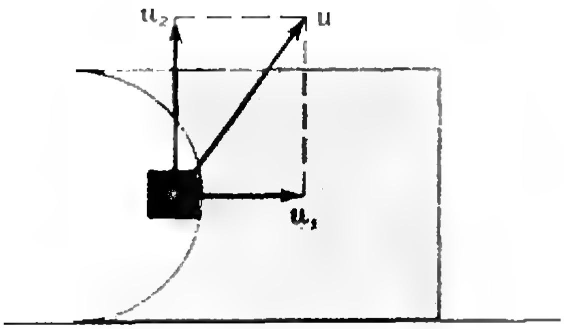


Рис. 1.

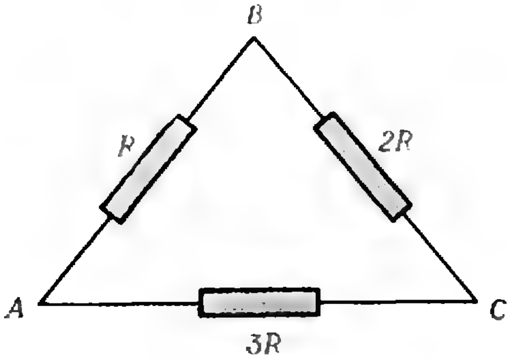
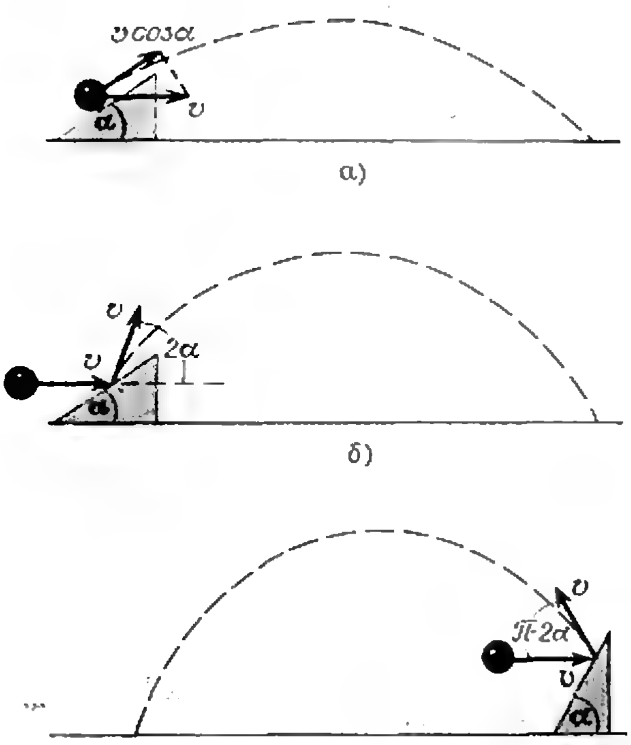


Рис. 2.



а)

б)

в)

Рис. 3.

Полная скорость кубика:

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = v\sqrt{\frac{M}{M+m} + \frac{m^2}{(M+m)^2}}.$$

3. Одна из возможных схем приведена на рисунке 2.

4. $v^2 \geqslant 5gl$.

Указание. Воспользуйтесь системой отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости точки подвеса.

5. Пусть начальная скорость шариков v. При неупругом ударе составляющая скорости шарика, перпендикулярная к плоскссти, исчезает, и составляющая скорости, параллельная плоскости, сохранястся. Поэтому неупругий шарик отлетит от наклонной плоскости под углом α к горизонту со скоростью $v\cos\alpha$ (рис. 3, *а*). Следовательно, он пролетает расстояние

$$S_1 = \frac{2v^2\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{g}.$$

При упругом ударе возможны два случая: при $\alpha < \frac{\pi}{4}$ шарик вылетит вперед под углом 2α к горизонту (рис. 3, *б*), при $\alpha > \frac{\pi}{4}$ он вылетит назад под углом $\pi - 2\alpha$ (рис. 3, *в*).

В первом случае он пролетит расстояние

$$S_2' = \frac{2v^2\cos 2\alpha\sin 2\alpha}{g},$$

во втором:

$$S_2'' = \frac{2v^2\cos(\pi - 2\alpha)\sin(\pi - 2\alpha)}{g} = -\frac{2v^2\cos 2\alpha\sin 2\alpha}{g}.$$

Из условия $S_1 = S_2'$ получим:

$$\alpha_1 = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}};$$

Во втором случае ($S_1 = S_2''$):

$$\alpha_2 = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

6. Каждую пластину с прилегающим участком плоскости можно рассматривать как конденсатор емкостью $\frac{\varepsilon_0 S}{d}$, а всю систему как два последовательно соединенных конденсатора. Искомая емкость

$$C = \varepsilon_0\frac{\frac{S_1}{d_1}\cdot\frac{S_2}{d_2}}{\frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2}} = \varepsilon_0\frac{S_1S_2}{S_1d_2 + S_2d_1}.$$

BeatriceGloria_personal library

7. Амплитудное значение прикладываемого напряжения $U = 127\sqrt{2}$ *в*. В начальный момент конденсатор не заряжен. В течение первого полупериода, когда на точку A подается отрицательный потенциал, диод D_1 открыт и конденсатор C_1 заряжается до напряжения U, при этом на его правой обкладке наводится заряд $q = UC$. Во время второго полупериода D_1 закрывается и открывается D_2, при этом часть наведенного на C_1 заряда стекает на верхнюю обкладку C_2. Этот процесс будет повторяться каждый период, пока на верхней обкладке C_2 не накопится такой заряд q, что при открытом D_2 заряд с C_1 на C_2 стекать не будет. Величину заряда q можно найти, рассмотрев схему при открытом D_2 и закрытом D_1, когда точка A имеет потенциал $+U$.

На правой обкладке C_1 за первый полупериод наводится заряд UC. Напряжение $U = \frac{q}{C} - \frac{UC}{C}$. Отсюда заряд $q = 2UC$. Следовательно, между точками M и N образуется разность потенциалов $2U = 2 \cdot 127\sqrt{2}$ *в*.

8. $v = \frac{eSB}{2\pi rm}$

К статье «Варианты вступительных экзаменов по физике в Московский физико-технический институт в 1972 году»

(*см. «Квант» № 10, 1972*)

Билет 1

1. $v_{\max} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}mg(1-k)}{2\alpha}} \simeq$ $\simeq 28$ *м/с*.

2. $m = 56$ *г*, $P_1 = \frac{V_2}{V_1}\,\frac{T_1}{T_2}\,P_{\min} \approx 4{,}92$ *атм*.

3. $\alpha = 15°$.

4. $\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{13}$.

Билет 2

1. $m_{\text{гр}} \geqslant \frac{m}{\sqrt{2}}$.

2. $p = \frac{V \cdot \Delta p}{at} = 10^{-3}$ *мм рт. ст.*

3. $I_1 = \frac{E_2}{r_2}$.

4. $\gamma_2 = \gamma_1 \frac{l_1 r_2}{l_2 r_1} = 0{,}2$ *г/м*^{3}.

Билет 3

1. $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}} \approx 2{,}1$ *км/с*.

2. $T \approx 375°$ K.

3. $E = \frac{v_0^2}{2q/M} = 5 \cdot 10^4$ *в*.

4. $H = \frac{d-2h}{2} \cdot n = 10$ *см*.

Билет 4

1. $m_{\min} > \frac{m(H-l)}{2H}$.

2. $n = 5$.

3. $I = \frac{E_2 - E_1}{r_2} = 40$ *а*.

4. $n = \frac{l^2 - F^2}{l^2} = \frac{5}{9}$.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 11, 3-я стр. обложки*)

1. 1 р. 23 к.

2. Чемодан весом до 400 *н* можно взвесить с помощью веревки: привязать один ее конец к дереву, а второй пропустить под ручкой чемодана и привязать к безмену. Безмен будет показывать половину веса чемодана.

3. Одинаково.

4. При испарении жидкости энергичные («горячие») молекулы покидают ее поверхность, в результате жидкость охлаждается. Но часть вылетевших молекул обязательно возвращается обратно (процесс диффузии). Когда же мы дуем на чай, мы уменьшаем долю возвращающихся молекул, ускоряя тем самым процесс охлаждения.

5. Да, любую. Достаточно проверить, что можно уплатить 8, 9 и 10 рублей, а затем добавлять билеты по 3 рубля.

6. Нет, не жарче. Халат изолирует тело от окружающего горячего воздуха и не препятствует охлаждению тела от испарения пота.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(*см. 3-ю стр. обложки*)

1. 387 человек.
2. В скобках может стоять 100, 200, 245, 283, 300.
3. 12, 14, 22;
   12, 28, 8;
   24, 16, 8;
   16, 16, 16.
4. $a = 3$, $c = 7$.
5. Сложить тетраэдр!
6. 5.

Напечатано в 1972 году

Триумф великой идеи	12	4

Статьи по математике

Адельсон-Вельский Г. М., Бернштейн И. Н., Гервер М. Л. Кто поедет в Рио?	8	2
Алейников Б. И., Дубсон М. С. Конкурс Эдисона	8	39
Балк Г. Д., Балк М. Б. Испытание на правдоподобие	1	20
Березин В. Н. Теорема Пифагора	3	18
Березин В. Н. Задача Наполеона	6	29
Бржозовский М. И. Уравнения орнаментов	7	14
Варпаховский А. С. Машина учится распознавать	11	18
Васильев Н. Б. Расстановка кубиков	4	4
Виленкин А. Н., Шнирельман А. И. Справедливый выбор	4	25
Гастев Ю. А., Смолянский М. Л. Несколько слов о Великой теореме Ферма	8	23
Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса	1	2
Гиндикин С. Г. Малая теорема Ферма	10	2
Глухов М. М. Отношения эквивалентности и разбиения множеств	2	2
Гутенмахер В. Л. Косоугольные координаты и области Дирихле	4	19
Жаутыков О. А. График кубического четырехчлена	6	26
Ионин Ю. И. Интеграл	9	2
Ионин Ю. И. Интеграл в геометрии и физике	10	17
Камнев Л. Н. Иррациональность суммы радикалов	2	26
Кордемский Б. А. Так или не так действовал Ферма?	7	11
Кудреватов Г. А. Сравнения	9	16
Кудрявская Н., Ломакина И., Приз С. Машина Поста	5	8
Осятинский С. Д., Румшиский Л. З. Экспонента	12	19
Петров С. М. Конус максимального объема	4	28
Порджес Артур. Саймон Флэгг и дьявол	8	17
Пресман А. А. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки	4	34
Рабинович В. Л. Вычисление объемов с помощью принципа Кавальери	6	9
Рейтман М. И. Динамическое программирование	3	6
Розенфельд Б. А., Халамайзер А. Я. Творец новой геометрии	12	6
Савин А. П. Окружение десанта	3	24
Савин А. П. Карты и раскраски	4	30
Скопец З. А. Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов	6	22
Сойфер А. Ю. Клетчатые доски и полимино	11	2
Фрейвалд Р. В. Переключательные схемы	2	16
Шейнцвит Р. П. Ветви и границы	7	2
Яглом И. М. В планиметрии — теорема, в стереометрии — нерешенная проблема	3	28
Яковлев А. Я. Гений XVIII века	11	31

Статьи по физике

Асламазов Л. Г. Почему гудят провода	3	22
Белонучкин В. Е., Козел С. М. Оптический телескоп	4	10
Блитцер Л. Парадоксы спутников	6	15
Бородин Д. Путешествие мистера Клока	9	30
Бронштэн В. А. Затменные переменные	9	22
Брэгг В. Г. О структуре льда	11	11
Вайскопф В. Высота гор и фундаментальные постоянные	10	22
Винецкий В. Измерение скорости света	2	20
Воронов Ф. Ф. Высокое давление — создание и измерение	8	9
Гиндилис Л. М. CETI в вопросах и задачах	11	24
Гинцбург М. А. Вода на Луне	2	10
День космонавтики	4	2
Дозоров А. А. С законом Гука на острова Новые Гебриды	12	16
Каганов М. И., Любарский Г. Я. О механике Аристотеля	8	32
Кикоин А. К. Как получают низкие температуры	1	12
Кикоин А. К. Спор, длившийся полвека	7	20
Корец М. А., Понизовский З. Л. Почему Луна не из чугуна?	4	23
Кузнецов В. И. Радиоактивная память	2	28
Кузнецов В. И. Искусственные ядра	5	2
Леваитовский В. И. Ракетой к Солнцу	11	29
Марленский А. Д. Возможности оптических телескопов	8	26

Михайлов А. А. От метра до парсека 6 2
Ратнер Б. С. Атом излучает кванты 7 6
Смородинский Я. А. Инертная масса 3 14
Сперанский Н. М. Потенциальная энергия тел в поле тяготения 6 20
Стасенко А. Л. Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха 9 10
У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная» 11 22
Фабрикант В. А. Закон Джоуля — Ленца 10 10
Шварцбург А. Б. С метром по глобусу 12 26
Эйнштейн А. К 200-летию со дня смерти Исаака Ньютона 3 3

Математический кружок

Вагутен В. Н. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики 6 30
Виленкин А. Н. Калейдоскопы 8 41
Готман Э. Г. Теорема косинусов и ее следствия 7 29
Кантор П. Р., Раббот Ж. М. Площади многоугольников 2 36
Каплун В. И., Лейбович В. Г., Папернов Е. Л. Конечные паркеты 10 25
Лиманов Л. Г. О числе e и π! 5 14
Скопец З. А. Применение алгебраических тождеств к получению геометрических неравенств 4 36
Смышляев В. К. Применение неравенства Буняковского-Коши к решению некоторых задач 1 33
Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года 9 32

Лаборатория «Кванта»

Варпаховский А. С., Виленкин А. Н. Снежные кристаллы 2 32
Вуд Р. Искусственное солнечное затмение 3 34
Гесс Ф. Бумеранг 10 31
Коткин Г. Л. Опыты с маятниками 1 26
Майер В. В. Отверстие — линза 8 50
Рачлис Х. Лучи света 11 34
Силаева Н. А. Фигуры Лиссажу 7 23
Стонг К. Исследование волн на поверхности воды 5 20

Практикум абитуриента

Асламазов Л. Г. Электромагнитная индукция 7 51
Асламазов Л. Г. Движение по окружности 9 51
Асламазов Л. Г. Гидростатика 12 53
Белонучкин В. Е. Варианты вступительных экзаменов по физике 1971 года в Московский физико-технический институт 3 64
Буховцев Б. Б. Законы идеальных газов 5 45
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 1 50
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 2 65
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 3 56
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 4 60
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 5 43
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 6 51
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 7 45
Варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года 9 50
Варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года 10 61
Варианты вступительных экзаменов по физике в Московский физико-технический институт в 1972 году 10 59
Ваховский Е. Б., Волынский А. Б. Побываем на устном экзамене 6 44
Волынский А. Б., Ваховский Е. Б. Научимся обращаться с абсолютной величиной 9 45
Гершунов Е. М. Иррациональные неравенства 12 49
Григорьев А. М. Иррациональные уравнения 1 46
Груденов Я. И. Метод решения задач «с конца» 10 47
Евтушик Л. Е. Прямая и плоскость 4 54
Зайцев И. А. Импульс. Закон сохранения импульса 3 58
Зайцев И. А. Работа, энергия, мощность 10 52
Крайзман М. Л. Расстояния между скрещивающимися прямыми 11 52
Ланге В. Н. Закон Ома для неоднородного участка цепи 6 59
Маргулис А. Я., Радунский Б. А. Учитесь работать с логарифмами 3 50
Мордкович А. Г. Применение тригонометрии при решении геометрических задач 7 40
Мякишев Г. Я. Решение задач по электростатике (Закон Кулона. Напряженность электрического поля) 4 62
Мякишев Г. Я. Решение задач по электростатике (Потенциал) 6 55
Мякишев Г. Я. Решение задач по электростатике (Электроемкость) 7 48

Раббот Ж. М. Тригонометрические функции 5 36
Розентуллер В. М. О некоторых иррациональных уравнениях 12 51
Сидоров Ю. В. Пирамида и сфера 2 60
Смолянский М. Л. О системах физических единиц 6 62
Устинова А. В. Вступительные экзамены по физике на физическом факультете МГУ 4 67
Хацет А. Методы расчета эквивалентных сопротивлений 2 54
Экзамен по физике в Московском инженерно-физическом институте 6 54

Задачник «Кванта»

Задачи.

М121 — М125; Ф133 — Ф137 1 36
М126 — М130; Ф138 — Ф142 2 42
М131 — М135; Ф143 — Ф147 3 38
М136 — М140; Ф148 — Ф152 4 40
М141 — М145; Ф153 — Ф157 5 25
М146 — М150; Ф158 — Ф162 6 36
М151 — М155; Ф163 — Ф167 7 33
М156 — М160; Ф168 — Ф172 8 56
М161 — М165; Ф173 — Ф177 9 37
М166 — М170; Ф178 — Ф182 10 38
М171 — М175; Ф183 — Ф187 11 40
М176 — М180; Ф188 — Ф192 12 34
Победители конкурса «Кванта» 3 36
Премии «Кванта» 9 36

Решения.

М77 — М83; Ф89 — Ф91 1 39
М84 — М88; Ф92 — Ф99 2 44
М89 — М95; Ф100 — Ф107 3 40
М96 — М100; Ф108 — Ф115 4 42
М101 — М105; Ф116 — Ф122 5 27
М106 — М107; Ф123 — Ф128 6 38
М108 — М109; Ф129 — Ф130 7 35
М110 — М122; Ф131 — Ф137 8 58
М123 — М125; Ф138 — Ф141 9 39
М126 — М128; Ф142 — Ф147 10 40
М129 — М134; Ф148 — Ф152 11 42
М135 — М140; Ф153 — Ф158 12 36

Рецензии, библиография

Беккерман И. М. Рассказ о замечательном физике 4 69
Березин В. Н., Смолянский М. Л. Прочтите эту книгу 1 52
Березин В. Н., Смолянский М. Л. Математические головоломки и развлечения 5 51
Виленкин А. Н., Лиманов Л. Г. 50 занимательных задач 12 61
Геллер А. Б. Сколько стоит грамм света? 7 56
Евгеньев И. Е. Популярная книга для любителей астрономии 1 60
Евгеньев И. Е. Книга о самых грандиозных явлениях природы 3 65
Зорич И. М. Рассказ о великих экспериментах 12 62
Лешковцев В. А. Лаборатория в ванной комнате 11 61
Смолянский М. Л., Гастев Ю. А. О книжке Пойя «Математическое открытие» 2 67
Смолянский М. Л., Дьяченко Г. Н. Новые книги 4 70
Смолянский М. Л. Новые книги 9 58
Смолянский М. Л. Новые книги 10 62
Чернышев Ю. М. Введение в физику низких температур 1 58
Шаскольская М. П. Почему мы не проваливаемся сквозь пол? 8 74
Яглом И. М. Осторожно, брак 6 67

Информация

Березин В. Н., Смолянский М. Л. Нам пишут 12 68
Венецкий И. Г., Соркин Ю. И. III математическая олимпиада МЭСИ 12 65
Виленкин А. Н., Петрова Т. С. Слет учащихся физико-математических школ 5 55
Дьяконов И. А., Мордкович А. Г., Наслузов И. И. Телевидение готовит в вуз 9 60
Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте 1 61
Заочная математическая школа 1 66
Лешковцев В. А. Государственные премии 1971 года 3 66
Лешковцев В. А. Ленинские премии 1972 года 10 75
Лиманов Л. Г. VI Всесоюзная математическая олимпиада школьников 10 64
Петрова Т. С. VI Всесоюзная физическая олимпиада школьников 10 69
Савин А. П., Минц Н. А. Московский физико-технический институт 6 70
Савин А. П. Олимпиада МФТИ-72 12 66
Садовский А. Л. Физико-математическая школа при МИИТе 1 68
Скворцов В. А., Петраков И. С., Белкин С., Шварц В. XIV Международная математическая олимпиада школьников 11 58
Федотов В. П. Математический бой 10 71

Уважаемый читатель!

Редакция журнала «Квант» будет Вам очень благодарна, если Вы пришлете ответы на следующие вопросы:

1. Давно ли Вы читаете наш журнал?

……………………………………………………………………………………

2. Какие из опубликованных материалов Вы считаете наиболее интересными?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3. Какие неудачными, неинтересными?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4. Какие разделы Вам нравятся и какие нет? Какие разделы Вы хотели бы видеть в журнале?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

5. Нравится ли Вам журнал в целом или нет?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

6. Систематически ли Вы решаете задачи из «Задачника «Кванта»?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

7. Какие задачи и какие статьи журнала были для Вас непосильны? Считаете ли Вы уровень помещаемых материалов доступным для Вас?

8. Каковы Ваши замечания и предложения относительно оформления журнала?

9. Какие статьи Вы хотели бы прочитать в 1973—1974 гг.?

10. Фамилия, имя, отчество, возраст, место жительства, школа, класс, профессия.

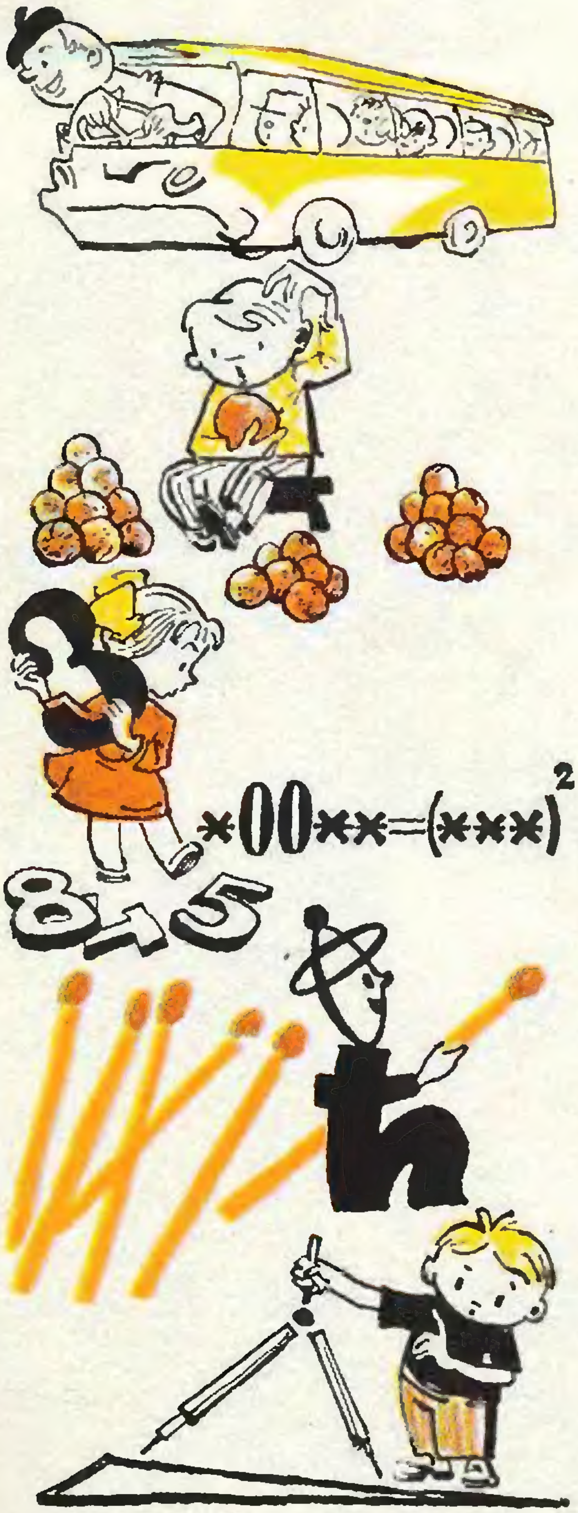
117071, Москва, В-71,
Ленинский пр., д. 15,
Редакция журнала «Квант»

Место
для
марки

Адрес отправителя:

КВАНТ

для младших школьников



1. По окончании кинофильма часть зрителей уехали в шести автобусах, причем в каждом автобусе было одинаковое количество зрителей. Остальные зрители (их оказалось на 15 процентов больше) пошли пешком. Сколько зрителей было в кинотеатре, если известно, что зрительный зал вмещает не больше 400 человек, а в автобусах уехало больше 150 зрителей?

2. Найдите все возможные способы расставить вместо * цифры в следующем равенстве

$$*00** = (***)^2$$

(ни одно число не должно начинаться с нуля).

3. В трех кучках находится 22, 14 и 12 орехов. Требуется путем трех перекладываний уравнять число орехов в каждой кучке, соблюдая при этом условие: из любой кучки разрешается перекладывать в другую лишь столько орехов, сколько их в этой второй кучке имеется.

4. Расшифровать равенство:

$$a\cdot c\cdot\overline{ac}=\overline{ccc}.$$

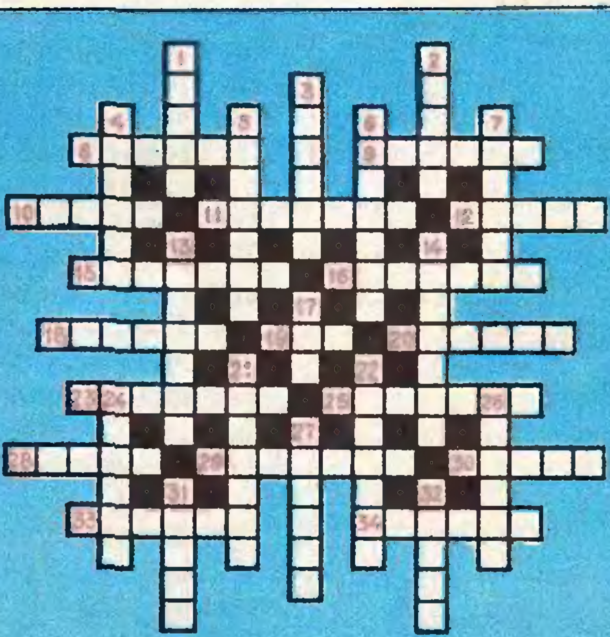
5. Как сложить из шести спичек четыре одинаковых равносторонних треугольника?

6. У треугольника, длины сторон которого — целые числа, длина одной стороны равна 5, а другой — 1. Чему равна длина третьей стороны?

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 12

КРОССВОРД



По горизонтали:
8. Единица электроемкости. 9. Наиболее удаленная от Земли точка лунной орбиты. 10. Вид деформации. 11. Характеристика колебательного процесса. 12. Один из создателей неэвклидовой геометрии. 15. Свойство физических тел. 16. Хорда. 18. Диэлектрик. 19. Знаменитый датский физик. 20. Советский физик, академик, лауреат Ленинской премии. 23. Часть прямой линии. 25. Знаменитый английский физик XIX века. 28. Научно-популярный журнал. 29. Физическая единица измерения. 30. Квант света. 33. Одна из физических величин. 34. Частица, входящая в состав ядра.

По вертикали:
1. Знаменитый английский физик-теоретик. 2. Французский физик XVIII века. 3. Часть электромагнитной шкалы. 4. Заряженная частица. 5. Серебристо-белый металл. 6. Прибор, для определения времени. 7. Выдающийся французский ученый XVII века. 13. Выдающийся ученый древнего мира. 14. Кратковременное магнитное возмущение. 17. Химический элемент. 21. Советская термоядерная установка. 22. Линия в треугольнике. 24. Тугоплавкий металл. 26. Разновидность атомов одного и того же элемента. 27. Голландский физик, создатель электронной теории. 31. Элементарная частица. 32. Знаменитый русский электротехник.